UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Reconquista

Análisis Matemático II

Prof. Ribas G. - Ing. Fun A. - Ing. Talijancic I.

Unidad Temática 5: INTEGRALES DE LÍNEA

Problema 1:

Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

a) $\int_C x^2dx - xy\ dy$; para $A(0;0)$; $B(1;1)$. Siendo los caminos posibles:

  I) La parábola: $y = \sqrt{x}$.

  II) Los segmentos paralelos a los ejes: $y = 0$; $x = 1$.

b) $\int_C (x + y)dx$; para $A(1;0)$; $B(0;1)$. Siendo:

  I) $\{$Arco: $x = Cos(t)$; $y = Sen(t)\}$

  II Segmento $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$, donde $(O : origen)$

c) $\int_C (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$;a lo largo del camino descripto por: $\mathbf{r(t)} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq 1$.

d) $\int_C Fdr$; siendo $\mathbf{F} = (2x + 4)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$; $A(-1;0)$; $B(1;4)$.
$\mathbf{r(t)} = (t - 1)i + t^2\mathbf{j}$.

e) $\int_C \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$; siendo C la circunferencia: $x^2 + y^2 = 4$.

f) $\oint_C (x^2 + y^2)\ dy$; siendo C la frontera del recinto: $R = \{(x;y)/0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$.

g) $\oint_C (x + y - 1)\ ds$; donde C es el cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. $x \geq 0$; $y \geq 0$; recorrido en sentido antihorario.

Problema 2:

Calcular la circulación de $\mathbf{F}(x, y, z) = 3yi - xzy\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$. A lo largo de la curva asociada a $\mathbf{r(t)} = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el intervalo paramétrico $[0;1]$.

Problema 3:

Encontrar el trabajo necesario para mover una partícula, una vez, alrededor de una elipse C en el plano xy, si la elipse tiene centro en el origen y por semiejes mayor y menor respectivamente 4 y 3; si el campo de fuerzas está dado por:
$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - 4y + 2z)\mathbf{i} + (4x + 2y - 3z^2)\mathbf{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\mathbf{k}$.

Problema 4:

La fuerza ejercida en el origen por una carga eléctrica sobre una partícula cargada en el punto $(x; y; z)$ con un vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es $\mathbf{F} = \dfrac{k.r}{|r|^3}$ donde k es una constante. Determine el trabajo que se lleva a cabo conforme la partícula se mueve a lo largo de una recta desde $(2; 0; 0)$ hasta $(2; 1; 5)$.

Problema 5:

A un alambre se le da una forma de semicírculo $x^2 + y^2 = 4$; $x \geq 0$. Si la densidad lineal es una constante k. Determine la masa y el centro de masa.

Problema 6:

Una pieza de acero del motor de un tractor tiene su base circular moldeada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2Cos(t)\mathbf{i} + 2Sen(t)\mathbf{j}$ y su altura por $z = 1 + y^2$.
Todas las medidas de la pieza se dan en $[cm]$.

a) Calcular el área lateral de la pieza.

b) Si la pieza tiene la forma de una capa de 0,2$[cm]$ de grosor , usar el resultado del apartado a), para estimar la cantidad de acero empleado en su fabricación.

Problema 7:

a) Demostrar que: $\int_C (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)\ dy$ es independiente del recorrido que va desde $(1; 2)$ hasta $(3; 4)$.

b) Evaluar la integral dada en a).

Problema 8:

a) Demostrar que: $\int_C (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$ es independiente del recorrido que va desde $(1; 0)$ a $(2; 1)$.

b) Evaluar la integral dada en a).

Problema 9:

Demostrar que si f es armónica, entonces: $\oint_C (\dfrac{\partial f}{\partial y}dx - \dfrac{\partial f}{\partial x}dy) = 0$. Donde C es un curva suave cerrada en el plano.

Problema 10:

Verificar el *Teorema de Green* para el campo vectorial $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ y la región R encerrada en el primer cuadrante entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$.

Problema 11:

Aplicar el *Teorema de Green* para calcular la siguiente integral: $\oint_C (y^2dx + x^2dy)$. Siendo C el triángulo acotado por $x = 0$; $x + y = 1$; $y = 0$.

Problema 12:

Aplicar el *Teorema de Green* para calcular el área de la región:

$$R = \{(x; y)/2x^2 - 8x + 10 \leq y \leq -x^2 + 4x + 1\}.$$