

Ejemplos de aplicación de las teorías de rotura.

Como ya se explicó en párrafos anteriores, a los efectos de soslayar las dificultades que se presentan para predecir el comportamiento resistente de piezas con sollicitaciones complicadas, se aplican las teorías de rotura. Estas teorías son supuestas en relación a la manera en que ha de fallar el material y a su prevención aprovechando los conocimientos obtenidos de ensayos de rutina simples.

Más adelante en el cálculo de elementos de máquinas con sollicitaciones que originan estados de tensión bidimensionales, como en el caso de ejes, tornillos, etc, se aplicarán profusamente las teorías de rotura con lo cual se tendrán numerosos ejemplos de su uso.

En otros casos de dimensionamiento muy específico, como es el cálculo de recipientes cilíndricos, es común encontrar en los manuales y normas gran cantidad de fórmulas para un mismo fin que terminan confusa su aplicación, pero todo se aclara al comprender que sus diferencias aparecen por ser aplicación de distintas teorías de rotura.

Nos proponemos en este primer ejemplo de aplicación de las teorías de rotura poner en evidencia su uso y esas diferencias.

Ejemplo Nº 1Cálculo y diseño de recipientes cilíndricos:Determinación de las tensiones.

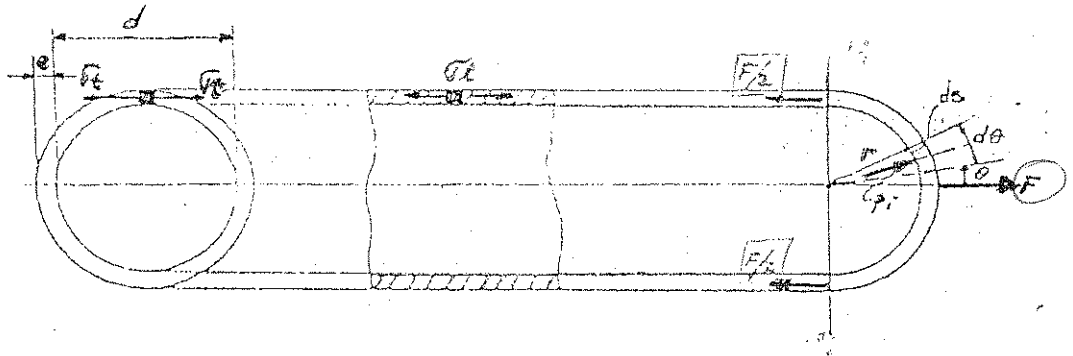
RECIPIENTES A PRESIÓN

U.T. 15

① Recipientes de pared delgada.

Reciben el nombre de recipientes de pared delgada cuando se cumple la relación $\frac{e}{d} \leq \frac{1}{10}$. En este caso no hay mayor error al suponer que la tensión se mantiene uniforme a lo largo del espesor de la pared del cilindro.

En un cubo elemental se tendrán tensiones normales en el sentido de tangencial y longitudinal cuyo cálculo es inmediato.



$$F = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} p_i \cos \theta \cdot ds = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} p_i \cos \theta \cdot l \cdot r \cdot d\theta$$

$$F = p_i \cdot l \cdot r \left[\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2 p_i \cdot r \cdot l$$

$$ds = l \cdot r \cdot d\theta$$

$$Secc = e \cdot l$$

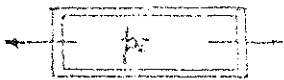
$$r = \frac{d_i}{2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{F}{Secc} = \frac{p_i \cdot r \cdot l}{e \cdot l} \longrightarrow$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i \cdot d_i}{2e}$$

Tens. Tang.

Si los extremos son cerrados existirá una tensión longitudinal (σ_L).



$$\sigma_L = \frac{F}{\text{Area}}$$

$$\sigma_L = \frac{p_i \cdot \pi \cdot r^2}{2 \pi \cdot r \cdot e} = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot e}$$

(σ_L) Tens. Longitud.

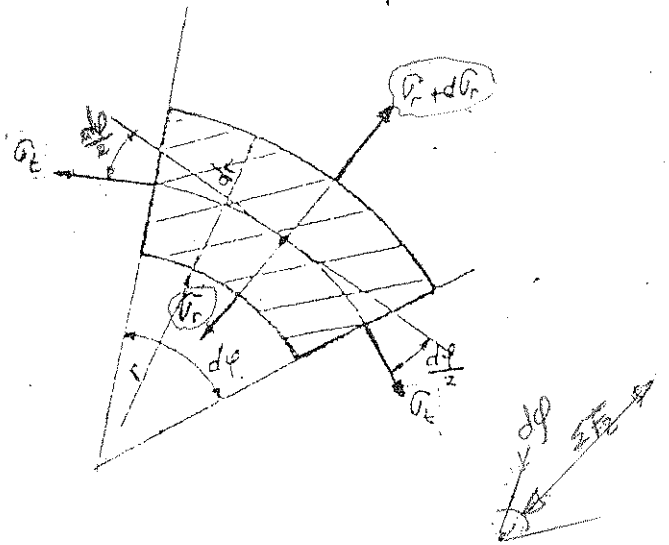
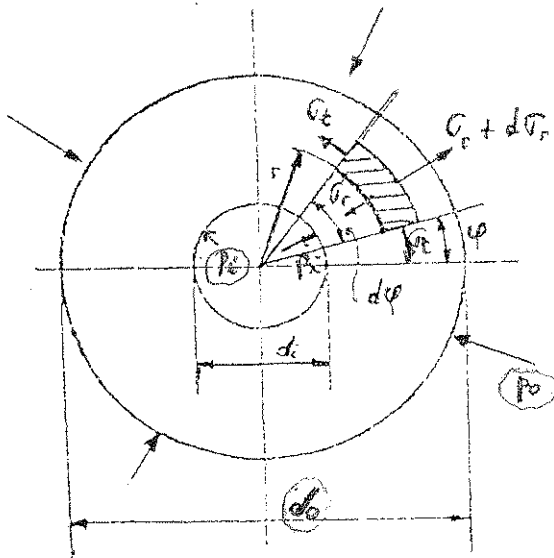
$$\sigma_L = \frac{p_i \cdot d_i}{4 \cdot e}$$

$$\sigma_\theta = 2 \cdot \sigma_L$$

② Recipientes de pared gruesa

En este caso la "tensión no puede suponerse uniforme". Para su evaluación analizaremos el equilibrio de un elemento de su pared, de espesor unitario, tal como se especifica en el esquema.

Equilibrio de un elemento de pared de espesor unitario.



El equilibrio de las fuerzas, proyectadas sobre la bisectriz del ángulo $d\phi$:

$$\sigma_r \cdot r \cdot d\phi - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\phi + \sigma_t \cdot dr \cdot \frac{\sin \frac{d\phi}{2}}{\frac{d\phi}{2}} = 0$$

$$\sigma_r / r - \sigma_r / r - d\sigma_r / r - d\sigma_r \cdot r + \sigma_t \cdot dr = 0 \rightarrow \sigma_t \cdot dr = \sigma_r \cdot dr + d\sigma_r \cdot r$$

$$\sigma_t = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr}$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas: las tensiones σ_t y σ_r . Es necesario, pues, otra ecuación que se puede obtener considerando la deformación del cilindro.

Suponiendo que no hay alabeo de las secciones rectas, la deformación específica longitudinal es: ϵ_z

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}$$

Si: $\sigma_z = 0$

$$\epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_t + \sigma_r) \rightarrow -\frac{\mu}{E} (\sigma_t + \sigma_r) = \epsilon_z$$

$$-\frac{E \epsilon_z}{\mu} = \sigma_t + \sigma_r = 2C_1 \quad \therefore \quad \sigma_t + \sigma_r = 2C_1$$

En consecuencia se tendrá un sistema: (*)

$$\begin{cases} \sigma_t = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \\ \sigma_t + \sigma_r = 2C_1 \end{cases}$$

$$\frac{-E \epsilon_z \cdot E}{\mu} = \sigma_t + \sigma_r$$

$$\begin{cases} \sigma_t = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \\ \sigma_t + \sigma_r = 2C_1 \end{cases}$$

dos ecuaciones con dos incógnitas.

92

$$2C_1 = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r$$

$$2C_1 = 2\sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \rightarrow \text{m. m. d. } r^2 \cdot \sigma_r \text{ } \rightarrow \text{Veg. a (*)}$$

Resolviendo:

$$2C_1 = \sigma_r + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r$$

$$\square \quad 2C_1 r = r^2 \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + 2C_1 r$$

$$\therefore r^2 \cdot \sigma_r = 2C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

$$\begin{cases} \sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \\ \sigma_t = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \end{cases} (*)$$

para: $r = \frac{d_i}{2} \rightarrow \sigma_r = -p_i$

para: $r = \frac{d_o}{2} \rightarrow \sigma_r = -p_o$

$$\therefore -p_i = C_1 + \frac{C_2}{\frac{d_i^2}{4}}$$

$$-p_o = C_1 - \frac{C_2}{\frac{d_o^2}{4}}$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{p_i d_i^2 - p_o d_o^2}{d_o^2 - d_i^2} \\ C_2 = \frac{d_i^2 d_o^2 (p_o - p_i)}{d_o^2 - d_i^2} \end{cases}$$

Con estos valores de las constantes las tensiones serán:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_i d_i^2 - p_o d_o^2}{d_o^2 - d_i^2} - \frac{(p_i - p_o) d_i^2 d_o^2}{r^2 (d_o^2 - d_i^2)} \\ \sigma_t = \frac{p_i d_i^2 - p_o d_o^2}{d_o^2 - d_i^2} + \frac{(p_i - p_o) d_i^2 d_o^2}{r^2 (d_o^2 - d_i^2)} \end{cases}$$

Conviene observar que la suma de las dos tensiones permanece constante, de modo que la deformación de todos los elementos en la dirección longitudinal (eje del cilindro) es la misma, en consecuencia las secciones rectas del cilindro permanecen planas.

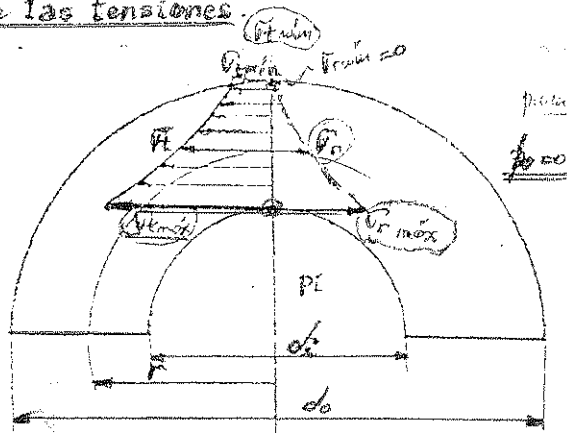
$$\sigma_r + \sigma_t = cte$$

$p_0 = 0$

$$\sigma_t = \frac{p_i \cdot d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} \left(1 + \frac{d_o^2}{4r^2} \right) (*)$$

$$\sigma_r = \frac{p_i \cdot d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} \left(1 - \frac{d_o^2}{4r^2} \right)$$

En consecuencia σ_t siempre será positivo (tracción) y σ_r negativo (compresión). En la siguiente figura se esquematiza la variación de las tensiones



para $\sigma_{máx}$:
como: $r = \frac{d_i}{2}$

$$(*) \quad 1 + \frac{d_o^2}{4 \cdot \frac{d_i^2}{4}} = 1 + \frac{d_o^2}{d_i^2}$$

$$\frac{d_i^2 + d_o^2}{d_i^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_t = \frac{p_i \cdot d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} \cdot \frac{d_i^2 + d_o^2}{d_i^2}$$

$\sigma_{máx}$

"Ambas tensiones aumentan a medida que r disminuye. Las máximas tensiones se encontrarán en la superficie interior donde $r = \frac{d_i}{2}$.

$$\sigma_{t máx} = p_i \cdot \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_{r máx} = -p_i$$

$\sigma_{máx}$

$$\sigma_{t máx} = p_i \cdot \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$\sigma_{máx}$

y las mínimas en la superficie exterior, donde $r = \frac{d_o}{2}$

$$\sigma_{t mín} = p_i \cdot \frac{2 \cdot d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_{r mín} = 0$$

$\sigma_{mín}$

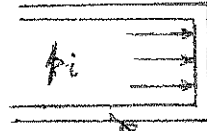
La tensión tangencial máxima en la superficie interior vale

$$\sigma_{máx} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{1}{2} \left[p_i \cdot \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} + p_i \right]$$

$$\sigma_{máx} = p_i \cdot \frac{d_o^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

si el "cilindro" tiene sus "extremos cerrados" se agrega una tensión axial (σ_a)

$$\sigma_a = \frac{F}{S} = p_i \cdot \frac{d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$



$$F = p_i \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4}$$

$$S = \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2)$$

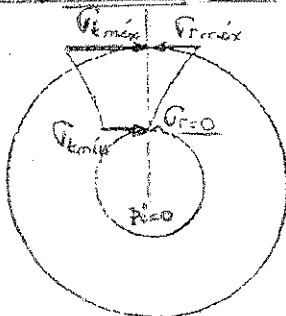
puede hacerse el mismo análisis para $p_i = 0$ cuando existe presión exterior. En este caso σ_t y σ_r son ambas de compresión. Sus valores máximos se encuentran en la superficie externa. $r = \frac{d_o}{2}$

$$\sigma_t^{\text{máx}} = -p_o \cdot \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_r^{\text{máx}} = -p_o$$

mat.

y sus valores mínimos en la superficie interior $r = \frac{d_i}{2}$



$$\sigma_t^{\text{mín}} = -p_o \cdot \frac{2 \cdot d_o^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_r = 0$$

mat.

Estos casos son de aplicación al cálculo de tensiones producidas por "zunchados o calados de volantes en ejes con ajustes prietos"
tas, etc.

Aplicaremos las teorías de rotura al caso bidimensional constituido por σ_t y σ_r para cilindros abiertos y presión exterior nula ($p_o = 0$). La aplicación de las distintas teorías, en su oportunidad enunciadas, dan como resultado fórmulas que, en los manuales y normas, aparecen como fórmulas empíricas propiciadas por distintos autores. A continuación se desarrollan:

1) Teoría de la máxima tensión tangencial (ductiles)

$$\sigma_{adm} \geq \sqrt{\left[p_i \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} - (-p_i) \right]^2} \quad p_i \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} + p_i - p_i \frac{d_o^2 + d_i^2 + d_o^2 - d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\Rightarrow p_i \frac{d_o^2 + d_i^2 + d_o^2 - d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_{adm} \geq p_i \frac{2 d_o^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

2) Teoría de la máxima tensión normal (frágiles) (aceros duros, hierro fundido, aluminio fundido)

$$\sigma_{adm} \geq \frac{p_i \frac{d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} + (-p_i)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(p_i \frac{2 d_o^2}{d_o^2 - d_i^2} \right)^2}$$

$$\geq p_i \left[\frac{1}{2} \frac{d_o^2 + d_i^2 - d_o^2 + d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} + \frac{1}{2} \frac{2 d_o^2}{d_o^2 - d_i^2} \right]$$

$$\sigma_{adm} \geq p_i \frac{d_i^2 + d_o^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

Fórmula de LAMÉ

3) Teoría de las deformaciones principales

$$\sigma_{adm} \geq \left(\frac{1-\mu}{2} \right) p_i \frac{2 d_o^2}{d_o^2 - d_i^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) p_i \frac{2 d_i^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_{adm} \geq p_i \left[\frac{(1-\mu) d_o^2 + (1+\mu) d_i^2}{d_o^2 - d_i^2} \right]$$

Ecuación de BIRNIE

Si se aplicara esta teoría al caso de cilindros cerrados se obtienen las ecuaciones de CLAVARINO.

Si se desea calcular el espesor, se reemplaza $d_o = d_i + 2e$ y se obtendrá para cada una:

- | | | |
|----|---|-----------------------|
| 1) | $e = \frac{d_i}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{adm} - 2p_i}} - 1 \right)$ | <u>ductiles</u> |
| 2) | $e = \frac{d_i}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_{adm} + p_i}{\sigma_{adm} - p_i}} - 1 \right)$ | <u>frágiles</u> |
| 3) | $e = \frac{d_o}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma_{adm} + (1-\mu)p_i}{\sigma_{adm} - (1+\mu)p_i}} - 1 \right)$ | <u>deform. ppales</u> |

Ejemplo numérico 1:

Calcular el espesor de pared necesario en un cilindro hidráulico de las siguientes características:

$$\begin{aligned} p_i &= 200 \text{ kg/cm}^2 \\ d_i &= 400 \text{ mm.} \end{aligned}$$

$$p_i = 2 \text{ kg/mm}^2$$

Material: SAE

$$\sigma_F = 40 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_F}{2} = 20 \text{ kg/mm}^2$$

$$C_s = 2$$

$$1) \quad e = \frac{400}{2} \left(\sqrt{\frac{20}{20 - 2 \cdot 2}} - 1 \right) = 23,6 \text{ mm}$$

$$2) \quad e = \frac{400}{2} \left(\sqrt{\frac{20 + 2}{20 - 2}} - 1 \right) = 21,10 \text{ mm}$$

$$3) \quad e = \frac{400}{2} \left(\sqrt{\frac{20 + (1 - 0,3) \cdot 2}{20 - (1 + 0,3) \cdot 2}} - 1 \right) = 21,80 \text{ mm}$$

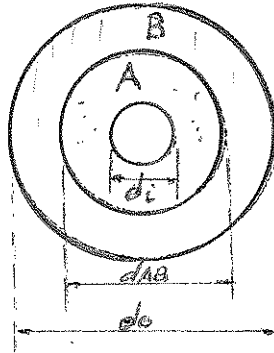
Ejemplo No 2:Ajustes a presión y por contracción.

Cuando se efectúa el ensamble de dos piezas cilíndricas y se requiere que se ajusten una sobre la otra por contracción o presión, se origina una presión de contacto entre las dos partes.

Esta situación es muy común, por ejemplo en el montaje de una polea sobre el eje o entre dos anillos montados uno dentro del otro. En estos casos se hacen los diámetros diferentes de manera que exista una interferencia y se monta el conjunto con prensa o dilatando el elemento externo por calentamiento. Al enfriarse, se produce una presión entre las dos partes llamada presión de zunchado.

Las tensiones que produce esta presión se pueden determinar con las ecuaciones desarrolladas para cilindros de pared gruesa.

Sean por ejemplo los dos elementos cilíndricos de la figura, montados con ajuste de contracción.



$p =$ presión de contacto.

En la superficie de diámetro (d_{AB}) se produce una presión de contacto que ocasiona tensiones normales de dirección "radial",

$$\sigma_r = -p$$

en cada uno de los elementos. Además tensiones normales con dirección "tangencial".

$$\sigma_{\theta A} = -p \cdot \frac{d_{AB}^2 + d_i^2}{d_{AB}^2 - d_i^2}$$

$$\sigma_{\theta B} = +p \cdot \frac{d_o^2 + d_{AB}^2}{d_o^2 - d_{AB}^2}$$

considerada la superficie AB como perteneciente al elemento A ó B respectivamente.

Estas ecuaciones no se pueden resolver si no se conoce la presión de contacto (p).

Se puede demostrar que la presión de contacto y la "interferencia" (diferencia en los diámetros de la superficie de contacto) está dada por:

$$p = \frac{\delta}{d_{AB} \left[\frac{d_{AB}^2 + d_i^2}{E_A (d_{AB}^2 - d_i^2)} + \frac{d_o^2 + d_{AB}^2}{E_B (d_o^2 - d_{AB}^2)} - \frac{\mu_A}{E_A} + \frac{\mu_B}{E_B} \right]}$$

En la cual, teniendo en cuenta los subíndices:

p = presión en la superficie de contacto (kg/cm^2)

δ = interferencia (cm).

μ = relación de Poisson.

E = módulo de elasticidad,

d = diámetro.

Si ambos elementos son del mismo material:

$$p = \frac{E \cdot \delta}{d_{AB}} \cdot \frac{(d_{AB}^2 - d_i^2)(d_o^2 - d_{AB}^2)}{2 d_{AB}^2 (d_o^2 - d_i^2)}$$

fijando la interferencia (δ) se puede calcular (p) y en consecuencia las tensiones normales con las fórmulas vistas.

En el caso de una polea montada sobre un eje ($d_i = 0$), en consecuencia:

$$p = \frac{E \cdot \delta \cdot (d_o^2 - d_{AB}^2)}{2 d_{AB} \cdot d_o^2}$$

Y las tensiones:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\theta A} = -p \\ \sigma_{\theta B} = p \\ \sigma_r = -p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{direcc. tangencial.} \\ \rightarrow \text{direcc. tangencial.} \\ \rightarrow \text{direcc. radial.} \end{array}$$

Fuerza para el montaje

La fuerza axial (F_a) requerida para montar en ajuste forzado, varía directamente con el espesor y la longitud del elemento externo (polea), la interferencia y coeficiente de rozamiento. Puede calcularse con:

$$F_a = f \cdot \pi \cdot d \cdot L \cdot p$$

en la cual:

f = coeficiente de roce

d = diámetro del eje.

L = longitud del cubo de la polea.

En algunos se facilita el montaje calentando el elemento externo (polea) hasta que se haya dilatado en una cantidad por lo menos igual a la interferencia. El cambio de temperatura requerido (ΔT) para producir un aumento (δ) en el diámetro interno del cubo puede calcularse con:

$$\Delta T = \frac{\delta}{\alpha \cdot d}$$

en la cual:

δ = interferencia.

Ejemplo:

α = coeficiente de dilatación lineal.
 ΔT = Variación de temperatura.
 d = diámetro del cubo.

$\alpha_{acero} = 0,0000120 \frac{1}{^{\circ}C}$
 $f = 0,45 \text{ mm}$
 $d = 420 \text{ mm}$
 $\Delta T = 312^{\circ}C$

Momento de Torsión.

El momento torsor que puede transmitirse por una polea montada con ajuste forzado puede estimarse con:

$$M_t = F_a \times \frac{d}{2}$$

$$M_t = \frac{f \cdot p \cdot \pi \cdot d^2 \cdot L}{2}$$

$$\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ } ^{\circ}C^{-1}$$

