

virtud de la ecuación (10) encontramos:

$$E_p = k \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = k q \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

$$E_p = k q \frac{2 r l}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

Si la *distancia* l entre las cargas es *pequeña* comparada con r , el término $l^2/4$ del denominador puede *despreciarse* frente a r^2 , obteniéndose:

$$E_p = k \frac{2 q l}{r^3}$$

Se observa que el *campo eléctrico* es *proporcional* al producto ql , el cual se denomina *momento eléctrico del dipolo* (p). Si sustituimos ql por p , tenemos:

$$E_p = k \frac{2 p}{r^3} \quad (13)$$

Consideremos ahora el *punto* Q , sobre la *ordenada bisectriz del eje del dipolo*. El valor del campo creado en Q por cada carga es:

$$E = k \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

Las *componentes perpendiculares* al eje del dipolo *se anulan* entre sí y las *componentes paralelas* a dicho eje valen $E \text{ sen } \varphi$, siendo la resultante E_Q :

$$E_Q = 2 E \text{ sen } \varphi = k \frac{2 q}{r^2 + \frac{l^2}{4}} \frac{l/2}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}}$$

Si r es suficientemente grande frente a l , pueden despreciarse los términos $l^2/4$ del denominador y la expresión se reduce a la siguiente (*en función del momento eléctrico* $p = ql$):

$$E_Q = k \frac{p}{r^3} \quad (14)$$

Vemos que, en ambos puntos P y Q , la *intensidad del campo eléctrico* es *proporcional al momento eléctrico* e *inversamente proporcional al cubo de la distancia al centro del dipolo* (donde $r \gg l$).

El *campo eléctrico* en cualquier punto como R puede calcularse mediante el procedimiento que hemos visto precedentemente, pero resulta más sencillo utilizar las *coordenadas polares* (r y θ) y calcular sus *componentes rectangulares* E_r (en el sentido en que aumenta r) y E_θ (en el sentido en que aumenta θ).

Se demuestra que las expresiones finales correspondientes son:

$$E_r = k \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad (15)$$

$$E_\theta = k \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad (16)$$

siendo $r \gg l$

Estas ecuaciones se reducen a las (13) o (14) cuando los puntos se encuentran sobre los ejes X o Y . El campo en el punto R será: $\vec{E}_R = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

Ejercicio Nº 10: Un dipolo formado por un electrón y un protón, separados por una distancia de 4×10^{-10} m, está colocado de modo que su punto medio coincide con el origen. Calcular y representar en un esquema las componentes de E_r y E_θ del campo eléctrico creado por el dipolo en los siguientes puntos: a ($\theta = 0$; $r = 10^{-8}$ m), b ($\theta = 90^\circ$; $r = 10^{-8}$ m) y c ($\theta = 30^\circ$; $r = 10^{-8}$ m).

$$p = ql = (1,6 \times 10^{-19})(4 \times 10^{-10})$$

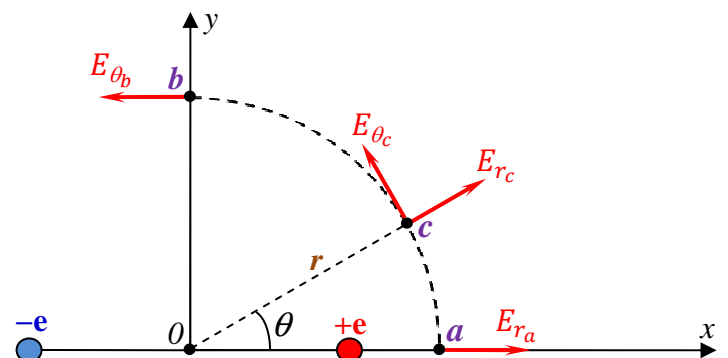
$$p = 6,4 \times 10^{-29} \text{ Cm}$$

$$E_r = k \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad ; \quad E_\theta = k \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

Punto a:

$$E_{r_a} = (9 \times 10^9) \frac{2(6,4 \times 10^{-29}) \cos 0^\circ}{(10^{-8})^3} = 115 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_{\theta_a} = 0 \quad ; \quad E_a = E_{r_a}$$



Punto b:

$$E_{\theta_b} = (9 \times 10^9) \frac{(6,4 \times 10^{-29}) \operatorname{sen} 90^\circ}{(10^{-8})^3} = 58 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_{r_b} = 0 \quad ; \quad E_b = E_{\theta_b}$$

Punto c:

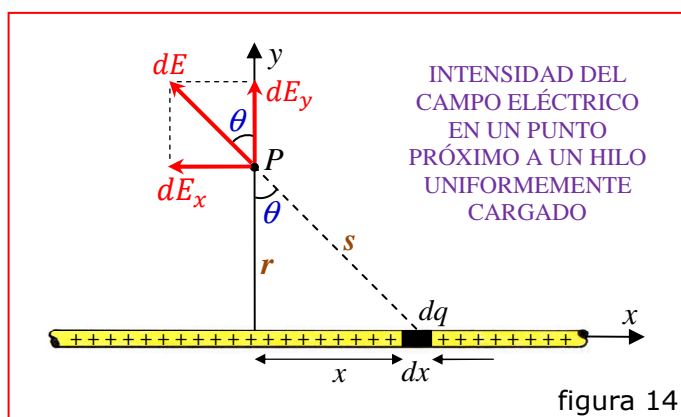
$$E_{r_c} = (9 \times 10^9) \frac{2 (6,4 \times 10^{-29}) \cos 30^\circ}{(10^{-8})^3} = 100 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_{\theta_c} = (9 \times 10^9) \frac{(6,4 \times 10^{-29}) \operatorname{sen} 30^\circ}{(10^{-8})^3} = 29 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_c = \vec{E}_{r_c} + \vec{E}_{\theta_c}$$

◆ Campo debido a una Distribución Continua de Carga:

Hasta ahora hemos calculado los campos creados por una o más cargas puntuales. Pero en la práctica, se encuentran normalmente campos creados por cargas localizadas sobre cuerpos de tamaño finito. Su cálculo es extremadamente complicado, excepto para cuerpos de forma geométrica sencilla como hilos, planos, cilindros o esferas. Además, si los cuerpos cargados están sumergidos en líquidos o gases, o si existen en su proximidad otros cuerpos cargados, se producirán cargas inducidas que complicarán aún más el problema. Por ello sólo consideraremos por ahora cuerpos cargados de geometría sencilla y en el vacío.



Sea un *extenso hilo* que tiene una *carga positiva* distribuida *uniformemente* en todo su largo. Se desea calcular la magnitud, dirección y sentido del *campo eléctrico* en un punto *P* (figura 14) situado a una distancia *r* del hilo. El radio de éste se supone lo

suficientemente pequeño para que pueda considerarse como una línea geométrica.

Dividimos el hilo en pequeños segmentos de *longitud* dx y *carga* dq . El campo resultante en un punto cualquiera se obtiene sumando vectorialmente los campos creados por todas estas cargas puntuales. En el punto P , el elemento dq crea un campo de magnitud:

$$dE = k \frac{dq}{s^2}$$

Puesto que los campos de otros elementos no tienen la misma dirección que dE , la intensidad resultante no puede calcularse por integración (*la integración es un proceso algebraico y no una suma vectorial*). Sin embargo, las componentes X e Y de dE pueden integrarse separadamente:

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sen \theta \quad ; \quad E_y = \int dE_y = \int dE \cos \theta$$

Representemos por λ la *carga por unidad de longitud del hilo*. La carga de un elemento de longitud dx es: $dq = \lambda dx$

de donde: $dE = k \lambda \frac{dx}{s^2}$

De la *figura 14* se deduce:

$$x = r \operatorname{tg} \theta \quad ; \quad dx = r \sec^2 \theta d\theta \quad ; \quad s = r \sec \theta$$

Haciendo las sustituciones correspondientes, obtenemos:

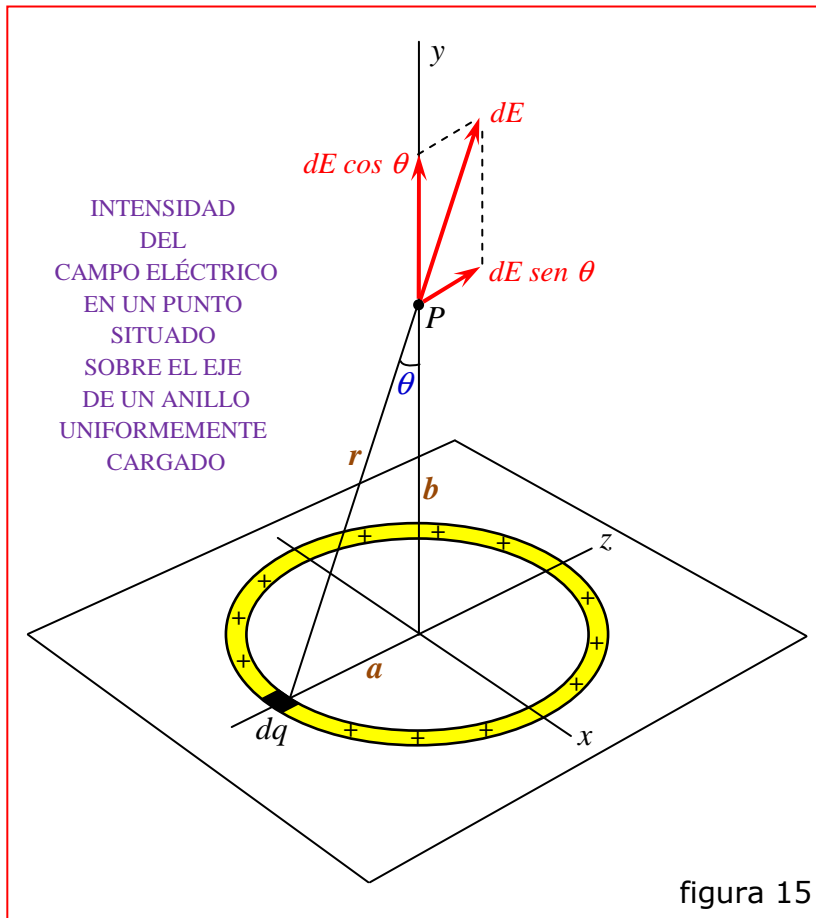
$$E_x = k \frac{\lambda}{r} \int \sen \theta d\theta \quad ; \quad E_y = k \frac{\lambda}{r} \int \cos \theta d\theta$$

Si el hilo es *infinitamente largo*, los límites de integración varían entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$, obteniéndose:

$$E_x = 0 \quad ; \quad E_y = 2k \frac{\lambda}{r} \quad (17)$$

El *campo eléctrico resultante* es perpendicular al hilo e inversamente proporcional a r .

Consideremos ahora un *anillo circular* situado en el plano $X-Z$, con su centro en el origen (*figura 15*). El *radio* del anillo es a y q la *carga positiva* que soporta.



Se desea calcular el *campo eléctrico* en un punto *P* situado sobre el eje del anillo y a una *distancia b* de su centro.

Un pequeño *elemento* de anillo cuya *carga* es *dq*, crea en *P* un campo cuya magnitud es:

$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

Se observa que al considerar todos los elementos de anillo, las componentes del campo *dE sen theta* (perpendiculares al eje) se compensan

entre sí. En consecuencia, el *campo resultante* en *P* es la suma de las componentes *dE cos theta*. Por lo tanto:

$$E = \int dE \cos \theta = k \frac{\cos \theta}{r^2} \int dq$$

o sea:

$$E = k \frac{q \cos \theta}{r^2} = k q \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (18)$$

En el *centro del anillo*, donde *b=0*, resulta *E=0* (evidente por razón de simetría). Para distancias tales que *a* sea muy pequeño comparado con *b*, puede despreciarse *a²* frente a *b²*. Entonces:

$$E = k \frac{q}{b^2} \quad (19)$$

Es decir que, *a distancias suficientemente grandes, el campo es el mismo que el creado por una carga puntual q .*

Ejercicio N° 11: Un alambre recto muy largo tiene una carga por unidad de longitud de $1,5 \times 10^{-10} \text{ C/m}$. ¿A qué distancia del alambre la magnitud del campo eléctrico resulta igual a $2,5 \text{ N/C}$?

$$E = 2k \frac{\lambda}{r} = 2(9 \times 10^9) \frac{(1,5 \times 10^{-10})}{r} = 2,5 \quad \Rightarrow \quad r = 1,08 \text{ m}$$

Ejercicio N° 12: Un conductor de forma anular de radio $2,5 \text{ cm}$ tiene una carga positiva total de $0,125 \text{ nC}$, distribuida uniformemente en toda su circunferencia (ver figura 15). El centro del anillo está en el origen de coordenadas. a) ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el punto P , que está sobre el eje de las "y" a 40 cm del origen? b) Si colocamos una carga puntual de $-2,5 \mu\text{C}$ en el punto P antes indicado, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce esta carga sobre el anillo?

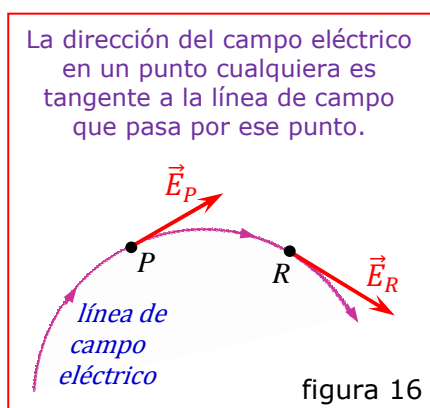
$$\text{a) } \vec{E} = k \frac{q b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j} = (9 \times 10^9) \frac{(0,125 \times 10^{-9})0,4}{(0,025^2 + 0,4^2)^{3/2}} \hat{j} = 7 \hat{j} \text{ N/C}$$

Como $b \gg a$, podríamos haber empleado la fórmula reducida:

$$\vec{E} = k \frac{q}{b^2} \hat{j} = (9 \times 10^9) \frac{(0,125 \times 10^{-9})}{0,4^2} \hat{j} = 7,03 \hat{j} \text{ N/C}$$

$$\text{b) } \vec{F}_{s/\text{anillo}} = -\vec{F}_{s/q} = -q\vec{E} = -(-2,5 \times 10^{-6})(7 \hat{j}) = 1,75 \times 10^{-5} \hat{j} \text{ N}$$

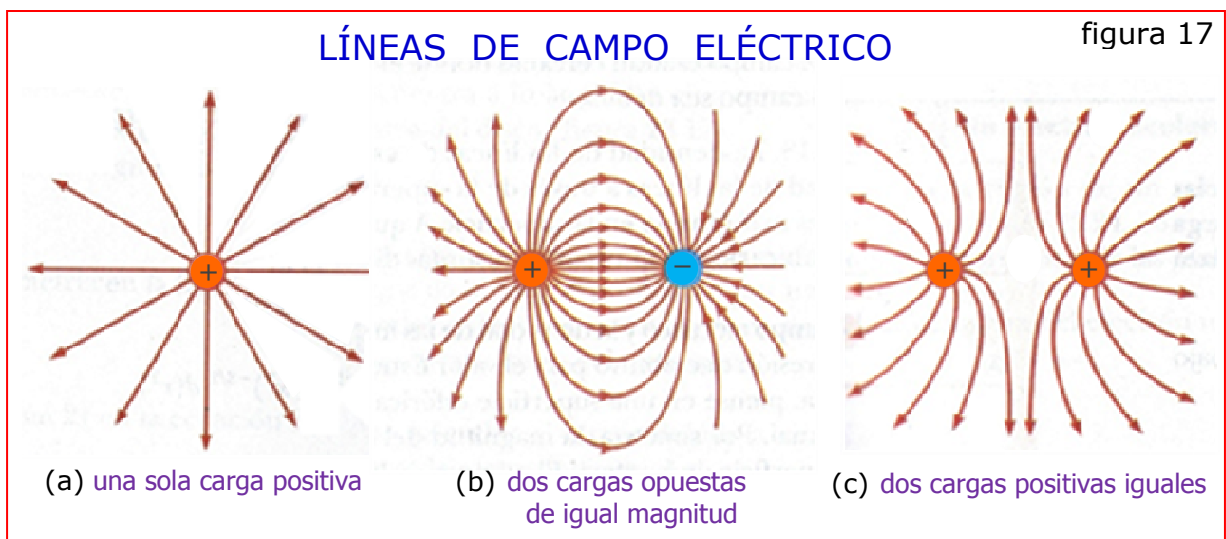
◆ Líneas de Campo Eléctrico:



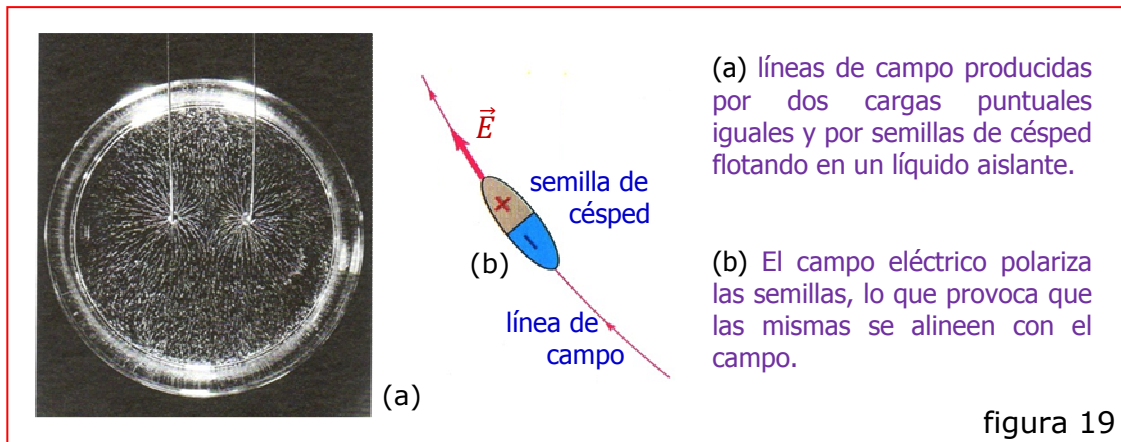
El concepto de líneas de campo fue introducido por Michael Faraday (1791-1867) como un medio auxiliar para representar campos eléctricos (y también magnéticos). Las llamó "*líneas de fuerza*", pero es preferible el término "*líneas de campo*". Una línea de campo eléctrico es una línea imaginaria dibujada de modo tal que, la dirección de su tangente en cada punto, sea la misma que

la del vector campo eléctrico en ése punto (figura 16). Como en general la dirección del campo varía de un punto al otro, las líneas de campo son normalmente curvas.

La figura 17 muestra algunas de las líneas de campo de un plano que contiene: (a) una sola carga positiva (compárese con la figura 12); (b) dos cargas opuestas de igual magnitud (dipolo eléctrico); (c) dos cargas positivas iguales. Cada uno de estos diagramas es un corte representativo de la distribución espacial real de las líneas de campo y suele llamárselos "mapas o espectros de campo". En cualquier punto de dichas líneas, los vectores de campo son tangentes a las mismas. Las líneas de campo se alejan de las cargas positivas y se dirigen hacia las cargas negativas, en concordancia con el sentido de los vectores de campo.



La [figura 18](#) no necesita aclaración alguna, ya que es ilustrativa por sí misma.

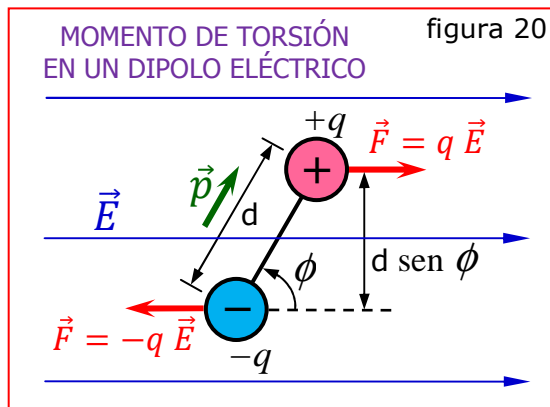


La [figura 19a](#) es una vista fotográfica de un montaje preparado para visualizar el campo eléctrico. Las puntas de dos hilos metálicos con carga positiva se insertan en un recipiente con líquido aislante y sobre éste se ponen a flotar semillas de césped. Las semillas son eléctricamente aislantes, pero el campo eléctrico entre los dos alambres provoca una polarización de las mismas; es decir, hay un leve desplazamiento de las cargas positivas y negativas dentro de las moléculas de cada semilla, como se muestra en la [figura 19b](#). El extremo con carga positiva es atraído en la dirección de \vec{E} y el extremo con carga negativa es atraído en dirección opuesta a \vec{E} . En consecuencia, **el eje longitudinal de cada semilla tiende a orientarse paralelamente al campo eléctrico, en la dirección de la línea de campo que pasa por la posición que ocupa la semilla.**

El número de líneas que se dibujen para representar un campo eléctrico, debe limitarse adecuadamente de manera que, además de evitar un esquema confuso, pueda utilizarse para indicar la magnitud del campo y su dirección. Esto se consigue espaciando las líneas de tal modo que, **el número de ellas que atraviese la unidad de superficie perpendicular a la dirección del campo, sea proporcional, en cada punto, a la intensidad del campo eléctrico en ese punto.** No obstante, nosotros soslayaremos este concepto y emplearemos el de [Flujo Eléctrico](#), que veremos en un próximo tema.

◆ Momento de Torsión en un Dipolo Eléctrico:

Si colocamos un dipolo eléctrico en un campo uniforme \vec{E} , como se muestra en



la *figura 20*, las fuerzas $+F$ y $-F$ sobre las dos cargas tienen ambas la magnitud qE . Pero sus direcciones son opuestas y suman cero. "La fuerza eléctrica neta sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme es cero".

Sin embargo, las dos fuerzas no actúan a lo largo de la misma recta y por lo tanto sus momentos de torsión no suman cero. El momento de torsión de cada fuerza tiende a hacer girar al dipolo en el sentido de las agujas del reloj ($\vec{\tau}$ se dirige hacia la página) y la magnitud de cada uno es $qE(d/2)\sin\phi$. Por lo tanto, la magnitud del momento de torsión neto es simplemente la suma de los momentos individuales: $\tau = qEd\sin\phi$. Y en función del momento dipolar:

$$\tau = pE\sin\phi \quad (20)$$

El momento dipolar eléctrico \vec{p} es un vector y su dirección sigue el eje del dipolo, de la carga negativa a la positiva (ver *fig. 20*).

El momento de torsión sobre el dipolo en forma vectorial se escribe:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (21)$$

Esta expresión es un producto vectorial. El momento de torsión siempre tiende a hacer girar \vec{p} a modo de alinearlo con \vec{E} (es el caso de la semilla en la *figura 19*).

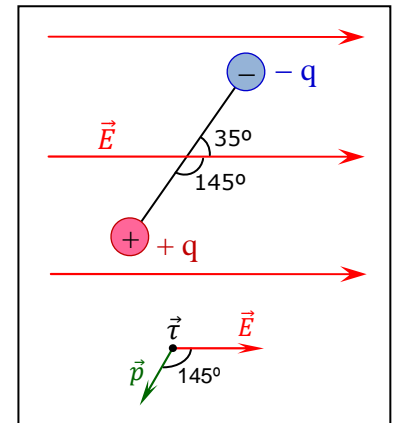
Cuando un dipolo cambia de dirección en un campo eléctrico, el momento de torsión del campo eléctrico realiza trabajo sobre él, con el correspondiente cambio de energía potencial. Se demuestra que esta energía está dada por la siguiente expresión:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (22)$$

Que es la energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico, expresada como producto escalar ($-pE\cos\phi$). Tiene su valor mínimo ($-pE$) para $\phi = 0$, máximo ($+pE$) para $\phi = \pi$ y cero para $\phi = \pi/2$.

Esta ecuación proporciona otra forma de ver el efecto que se muestra en la [figura 19](#). El campo eléctrico confiere a cada semilla un momento dipolar y la semilla se alinea con \vec{E} para reducir al máximo la energía potencial (puesto que $\phi = 0$ y $U = -pE$).

Ejercicio N° 13: La figura muestra un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme, cuya magnitud es de 5×10^5 N/C y está orientado paralelamente al plano de la figura. Las cargas son de $\pm 1,6 \times 10^{-19}$ C y ambas se localizan en el mismo plano y separadas por una distancia de $0,125 \times 10^{-9}$ m (las cargas y las distancias corresponden a niveles moleculares). Encontrar: a) la fuerza neta que ejerce el campo sobre el dipolo; b) la magnitud y dirección del momento dipolar eléctrico; c) la magnitud y dirección del momento de torsión; d) la energía potencial del sistema.



a) El campo es uniforme y por ello las fuerzas sobre las dos cargas son iguales. En consecuencia, **la fuerza neta es cero**.

b) $p = q d = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) (0,125 \times 10^{-9} \text{ m}) = 2 \times 10^{-29} \text{ Cm}$

La **dirección** de \vec{p} va de la **carga negativa** a la **carga positiva** (a 145° respecto de E en sentido horario).

c) $\tau = p E \sin \theta = (2 \times 10^{-29} \text{ Cm}) (5 \times 10^5 \text{ N/C}) \sin 145^\circ = 5,7 \times 10^{-24} \text{ Nm}$

La **dirección** de $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$, según la regla del tirabuzón (sentido de avance o retroceso cuando gira de \vec{p} hacia \vec{E}), es de la **página** hacia **el lector**. Corresponde entonces a un momento de torsión que tiende a alinear \vec{p} con \vec{E} .

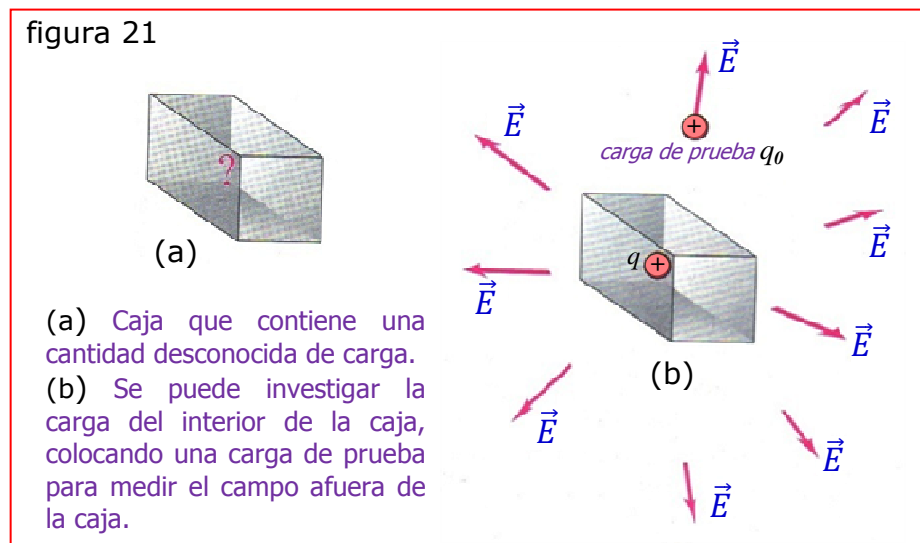
d) $U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p E \cos \theta = -(2 \times 10^{-29}) (5 \times 10^5) \cos 145^\circ = 8,2 \times 10^{-24} \text{ J}$

◆ Flujo Eléctrico:

La caja de la [figura 21a](#) representa una **superficie imaginaria** que llamaremos **superficie cerrada**, porque encierra totalmente un volumen. Nos preguntamos: ¿Cómo se puede saber cuánta carga hay dentro de la caja?

Sabemos que una carga (eventualmente ubicada dentro de la caja) produce un campo eléctrico y que éste ejerce una fuerza sobre una **carga de prueba** q_0 (que ubicaremos en el entorno exterior de la caja). Si medimos la **fuerza** \vec{F} que la

figura 21



carga de prueba experimental en distintas posiciones, elaboramos un mapa tridimensional del campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ afuera de la caja. En el caso de la *figura 21b*, el campo resulta ser igual al del campo eléctrico que produce una carga puntual positiva. En función de los detalles del mapa, podemos hallar el valor exacto de la carga puntual en el interior de la caja, pero será necesario *medir \vec{E}* directamente en la *superficie de la caja*.

Veamos ahora la *figura 22*, donde se analizan distintos casos especiales de flujo de campo eléctrico (en realidad, un campo eléctrico no fluye, pero la analogía resulta útil) a través de una *superficie cerrada* con forma de *caja rectangular*.

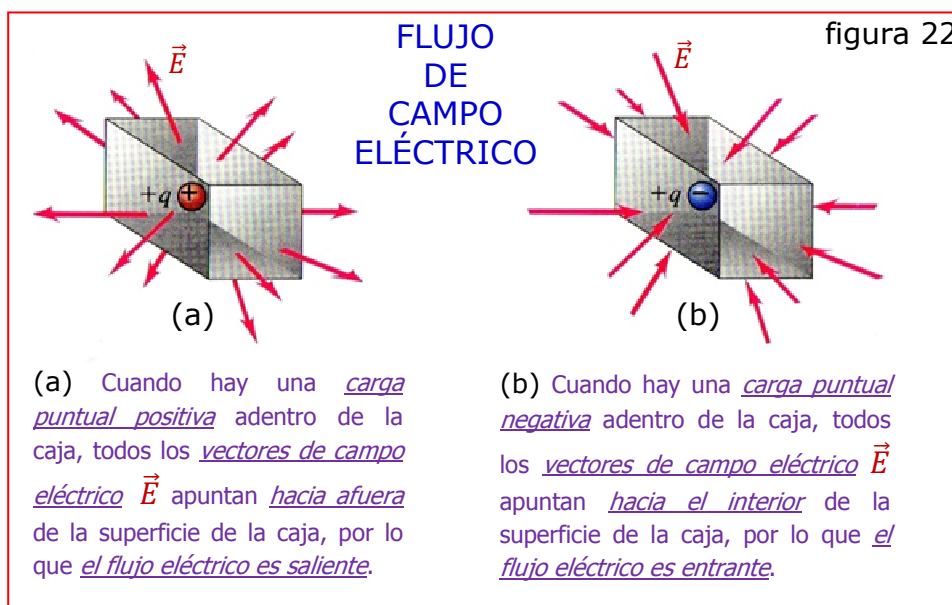
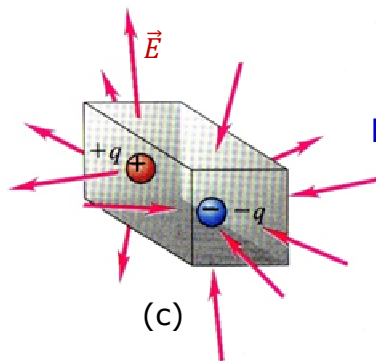


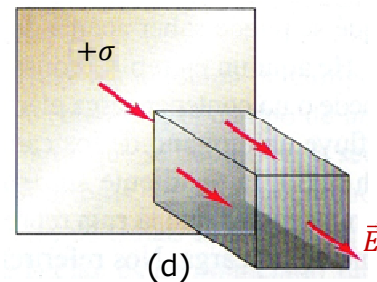
figura 22

FLUJO DE CAMPO ELÉCTRICO



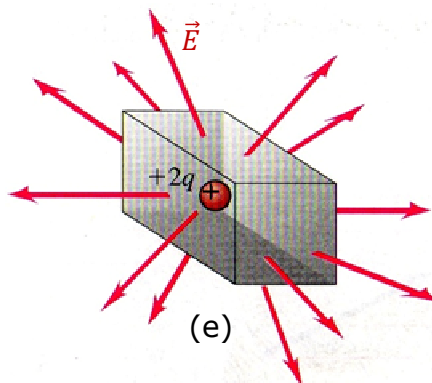
(c)

(c) Cuando hay una carga puntual positiva y una carga puntual negativa de igual magnitud encerradas en la caja, la carga neta en su interior es cero. Hay un campo eléctrico que “fluye” hacia adentro de la caja en toda su superficie y otro idéntico que “fluye” hacia afuera. El flujo entrante cancela al flujo saliente. El flujo eléctrico neto es cero.



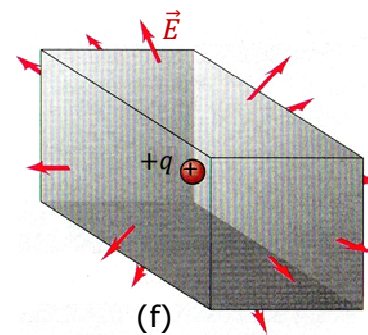
(d)

(d) La caja está vacía. Sin embargo, hay carga afuera de la caja. La misma ha sido colocada con un extremo paralelo a una lámina infinita con carga uniforme, la cual produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina. En un extremo el campo apunta hacia el interior de la caja, en el extremo opuesto hacia afuera y en los costados es paralelo. Al igual que en el caso anterior, el flujo entrante cancela al flujo saliente. El flujo eléctrico neto es cero.



(e)

(e) La magnitud de la carga dentro de la caja es dos veces mayor que la de la figura 22a, por lo que en todas partes \vec{E} tiene también una magnitud dos veces mayor. Esto significa que el flujo eléctrico saliente neto es asimismo dos veces mayor, lo cual sugiere proporcionalidad entre la carga y el flujo.



(f)

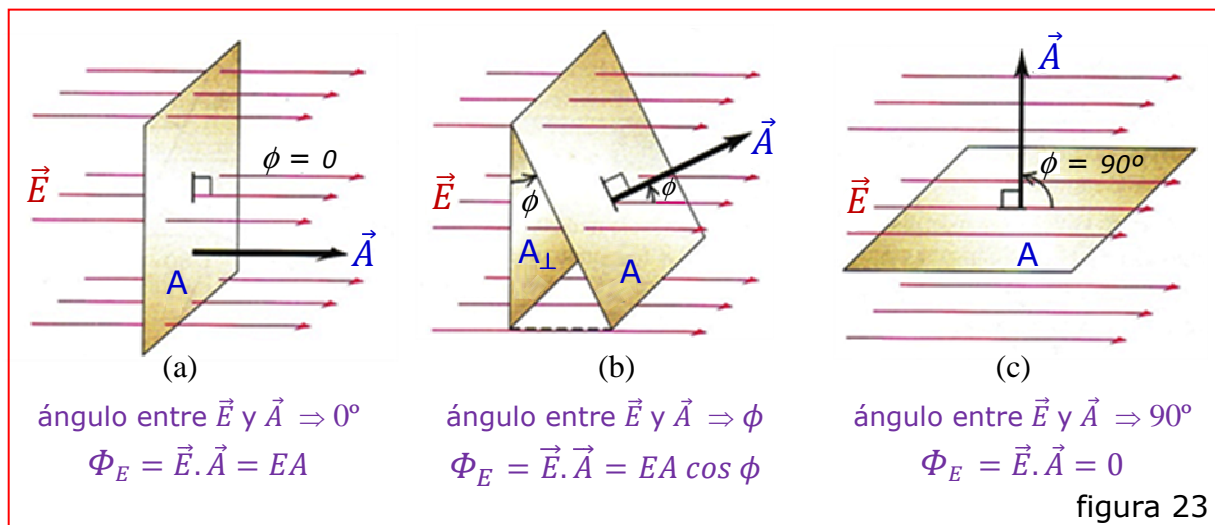
(f) La carga puntual positiva está encerrada en la caja con dimensiones lineales dos veces mayores que en el caso de la figura 22a. La magnitud de \vec{E} en la superficie disminuye por un factor 1/4, pero el área a través de la cual fluye aumenta por un factor 4. En consecuencia, si la carga no cambia pero se duplican las dimensiones de la caja, el flujo eléctrico permanece sin cambio.

Los distintos casos que hemos examinado en la [figura 22](#), nos permiten arribar a las siguientes conclusiones:

- El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es saliente o entrante, según que la carga neta encerrada sea respectivamente positiva o negativa.
- Las cargas que están afuera de la superficie no proporcionan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
- El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad de carga neta encerrada dentro de la superficie, siendo además independiente del tamaño de la superficie cerrada.

Estas conclusiones constituyen una expresión cualitativa de la Ley de Gauss, la cual veremos en el próximo tema.

Para saber si las consideraciones precedentes son válidas para otras distribuciones de carga o superficies cerradas de forma arbitraria, necesitamos contar con una expresión matemática precisa para el concepto de flujo eléctrico.



Consideremos un **área plana** A perpendicular a un **campo eléctrico uniforme** \vec{E} (figura 23a). Se define el **flujo eléctrico** a través de esta área como el **producto del módulo del campo \vec{E} por el área A** :

$$\Phi_E = EA \quad (23)$$

De forma aproximada, podemos describir Φ_E en términos de las líneas de campo que pasan a través de A . Aumentar el área significa que más líneas de campo la atraviesan y aumentar \vec{E} significa mayor densidad de líneas de campo; en ambos casos el flujo eléctrico aumenta.

Si el área A no es perpendicular al campo \vec{E} (figura 23b), el flujo eléctrico (o líneas de campo) que la atraviesa (o atraviesan) es menor. El área que se debe considerar es la proyección de A sobre un plano normal a la dirección de \vec{E} (A_{\perp}), que es igual a $A \cos \phi$. Luego podemos generalizar la definición de flujo eléctrico de un campo eléctrico uniforme:

$$\Phi_E = E A \cos \phi \quad (24)$$

En términos del vector área \vec{A} (perpendicular al área A), se puede escribir el flujo eléctrico como el producto escalar de \vec{E} por \vec{A} :

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (25)$$

Con una superficie cerrada, la dirección de \vec{A} se elige siempre como saliente. Por consiguiente, el "flujo eléctrico saliente" corresponde a un valor positivo de Φ_E y el "flujo eléctrico entrante" a un valor negativo de Φ_E .

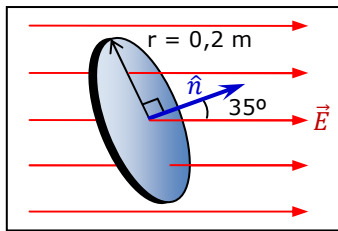
Si el campo eléctrico \vec{E} no es uniforme o \vec{A} es parte de una superficie curva, se divide A en muchos elementos dA , cada uno de los cuales tiene un vector $d\vec{A}$. Luego se calcula el flujo eléctrico a través de cada elemento y se integran los resultados para tener el flujo total:

$$\Phi_E = \oint E \cos \phi dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (26)$$

Esta expresión constituye en sí una definición general de flujo eléctrico. La unidad de flujo eléctrico en el Sistema Internacional es el Nm^2/C .

Ejercicio N° 14: Un disco cuyo radio mide 0,2 m está orientado con su vector unitario normal \hat{n} formando un ángulo de 35° respecto a un campo eléctrico uniforme cuyo módulo es de 3×10^3 N/C (ver figura). a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? b) ¿Cuál es el flujo a través del disco si éste se orienta de modo que su normal sea perpendicular a \vec{E} ? c) ¿Cuál es el flujo a través del disco si su normal es paralela a \vec{E} ?

Puesto que esta superficie no es cerrada, no tiene "un adentro" ni un "afuera". Es por ello que se debe indicar la dirección de \hat{n} en la figura.



a) $\vec{A} = A\hat{n}$; $A = \pi(0,2\text{ m})^2 = 0,1257\text{ m}^2$

ángulo entre \vec{E} y $\vec{A} = \phi = 35^\circ$

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E A \cos \phi$

$\Phi_E = (3 \times 10^3\text{ N/C})(0,1257\text{ m}^2)(\cos 35^\circ) = 309\text{ Nm}^2/\text{C}$

b) $\phi = 90^\circ$; $\cos \phi = 0$; $\Phi_E = 0$

c) $\phi = 0^\circ$; $\cos \phi = 1$; $\Phi_E = E A \cos \phi = (3 \times 10^3\text{ N/C})(0,1257\text{ m}^2)(1)$

$\Phi_E = 377\text{ Nm}^2/\text{C}$

◆ Ley de Gauss:

La Ley de Gauss es una alternativa de la Ley de Coulomb. Aunque es totalmente equivalente a la Ley de Coulomb, la Ley de Gauss ofrece una manera diferente de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Fue formulada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

La Ley de Gauss establece que "el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie". En el tema precedente observamos cualitativamente esta relación para ciertos casos especiales. Ahora la desarrollaremos con más rigor.

Si colocamos la carga en el centro de una superficie esférica imaginaria de radio R , la magnitud E del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie está dada por:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

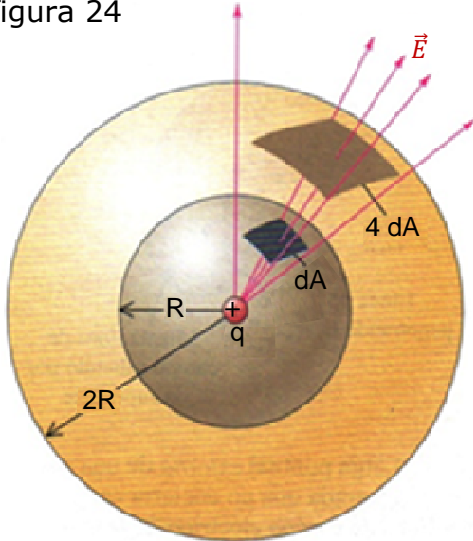
En cada punto de la superficie, \vec{E} es perpendicular a ésta y su magnitud es la misma en todos los puntos. El flujo eléctrico total es simplemente el producto de la magnitud del campo E por el área total A de la esfera:

$$\Phi_E = E A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (27)$$

El flujo es independiente del radio R de la esfera. Depende únicamente de la carga q encerrada en la esfera.

Este resultado se puede interpretar también en términos de líneas de campo. La figura 24 muestra dos esferas de radios R y $2R$, centradas en la carga puntual q . Cada línea de campo que atraviesa la esfera pequeña, también atraviesa la esfera grande, por lo

figura 24



Proyección de un elemento dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$.

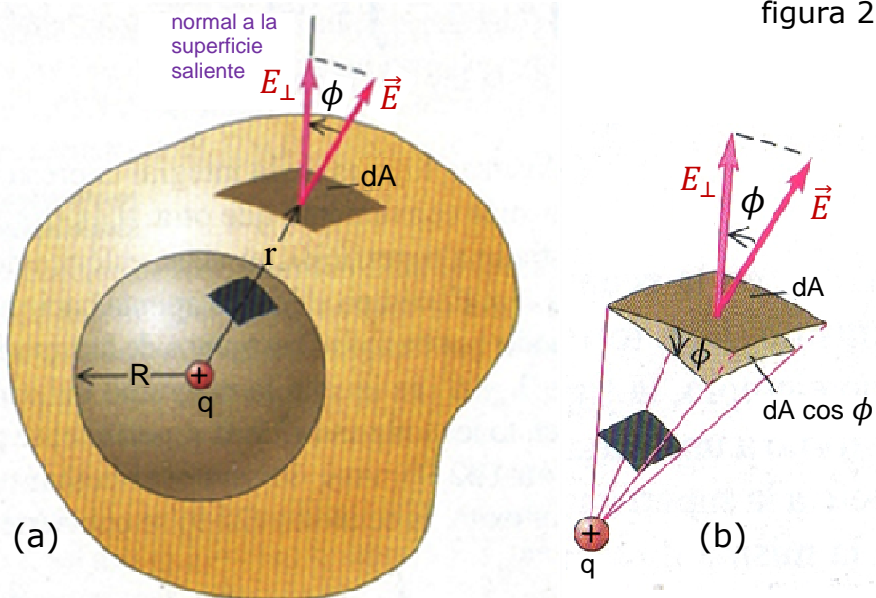
que el flujo total a través de cada esfera es el mismo.

Lo que es verdad para la superficie total de la esfera, lo es también para cualquier porción de esa superficie. En la misma figura 24, un área dA aparece dibujada sobre la esfera de radio R y luego proyectada sobre la esfera de radio $2R$. El área proyectada es evidentemente $4 dA$.

Además, como el campo eléctrico es inversamente proporcional a r^2 , su magnitud es 4 veces menor en la esfera de radio $2R$ que en la de radio R . Por consiguiente, el flujo eléctrico es el mismo en ambas áreas y es independiente del radio de la esfera.

Con esta técnica de proyección, vamos a extender el análisis a superficies no esféricas. En lugar de una segunda esfera, rodeamos la esfera de radio R con una superficie de forma irregular (figura 25a). Consideramos un elemento pequeño de

figura 25



(a) la normal a la superficie saliente forma un ángulo ϕ con la dirección de \vec{E} . (b) La proyección del elemento dA sobre la superficie esférica es $dA \cos \phi$.

área dA sobre la *superficie irregular* y su *proyección* sobre una *superficie esférica* a la misma distancia de q . Si la normal al elemento dA forma un ángulo ϕ con la normal al elemento de la superficie esférica, *el flujo eléctrico a través de este último es igual al flujo $E dA \cos \phi$ a través de dA .*

Podemos dividir toda la superficie irregular en elementos dA , calcular el flujo eléctrico $E dA \cos \phi$ correspondiente a cada uno y sumar los resultados por integración como en la ecuación (26). Cada uno de los elementos dA se proyecta sobre un elemento correspondiente de la superficie esférica. Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie irregular debe ser el mismo que el flujo total a través de una esfera, que según la ecuación (27) es igual a q/ϵ_0 . Entonces, *para la superficie irregular:*

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (28)$$

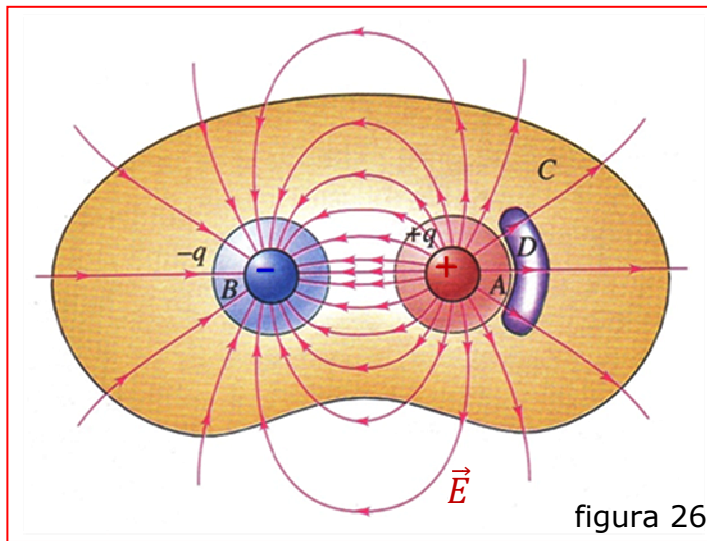
Esta ecuación es válida para una superficie cerrada de cualquier forma o tamaño que encierre a la carga q .

Para obtener la forma general de la Ley de Gauss, supondremos que la superficie encierra no sólo una carga puntual q , sino varias cargas q_1, q_2, q_3, \dots . El campo eléctrico total \vec{E} *en cualquier punto* es la suma vectorial de los campos \vec{E} de las cargas individuales. Sea $Q_{enc} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ la carga total encerrada por la superficie. Sea además \vec{E} el campo total *en la posición* del elemento de área superficial dA . En estas condiciones podemos escribir una ecuación como la (28) con respecto a cada carga y su campo correspondiente y sumar los resultados. Al hacerlo, obtenemos el enunciado general de la Ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (29)$$

"El flujo eléctrico total (o número neto de líneas de campo) a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie".

En el ejemplo conceptual de la *figura 26*, la *superficie A encierra la carga positiva*, luego $Q_{enc} = +q$. La *superficie B encierra la carga negativa*, luego $Q_{enc} = -q$. La *superficie C, que encierra ambas cargas*, tiene $Q_{enc} = +q + (-q) = 0$. La *superficie D, que no encierra carga alguna*, también tiene $Q_{enc} = 0$. Podemos sacar conclusiones semejantes examinando las líneas de



campo eléctrico: de la superficie A salen 18 líneas; a la superficie B entran 18 líneas; la superficie C tiene 8 líneas entrantes y 8 líneas salientes, por lo que el número neto de líneas que cruzan en cualquier dirección es cero; la superficie D tiene 3 líneas entrantes y 3 líneas salientes, por lo que resulta igual al caso anterior.

Ejercicio N° 15: a) Una superficie cerrada contiene una carga neta de $-3,6 \mu\text{C}$, ¿cuál es el flujo eléctrico neto a través de la superficie? b) Si el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es de $780 \text{ Nm}^2/\text{C}$, ¿qué cantidad de carga encierra la superficie? c) La superficie cerrada del punto anterior es un cubo con lados de $2,5 \text{ cm}$ de longitud, ¿es posible saber dónde está la carga adentro del cubo?

a) $\Phi_E = q/\epsilon_0 = (-3,6 \times 10^{-6} \text{ C})/\epsilon_0 = -4,07 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$

b) $q = \epsilon_0 \times \Phi_E = \epsilon_0(780 \text{ Nm}^2/\text{C}) = 6,9 \times 10^{-9} \text{ C}$

c) **No** (lo que importa es la carga total encerrada y no los detalles de donde se encuentra ubicada la misma)

Ejercicio N° 16: a) Un cubo pequeño con un volumen de 7 cm^3 está a $0,35 \text{ cm}$ de una esfera metálica que tiene una carga de $3 \mu\text{C}$. Si el cubo está vacío, ¿cuál es el flujo total a través de él? b) Una esfera centrada en el origen tiene un radio de $0,2 \text{ m}$. una carga puntual de $-5 \mu\text{C}$ está sobre el eje de las abscisas en $x = 0,3 \text{ m}$. Si el flujo neto a través de la esfera es de $360 \text{ Nm}^2/\text{C}$, ¿cuál es la carga total en el interior de la misma?

a) Como el cubo está vacío, no hay carga neta encerrada en el mismo. De acuerdo con la ley de Gauss, **el flujo total a través del cubo es cero.**

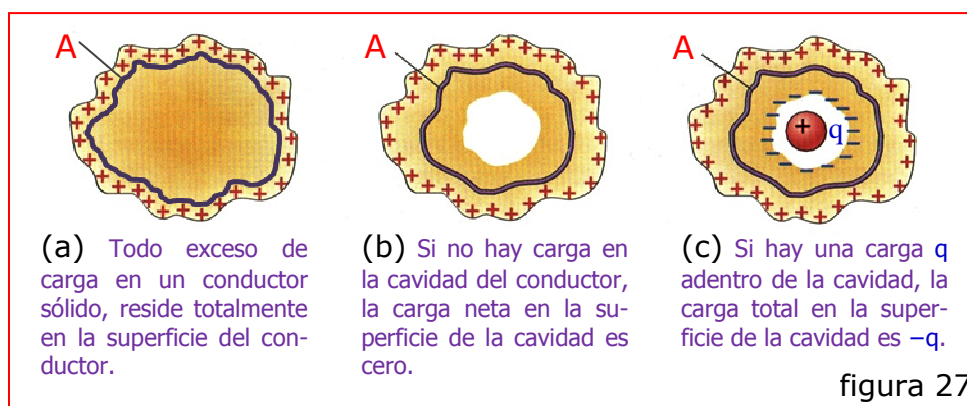
b) El flujo neto a través de la esfera depende solamente de la carga encerrada en la misma:

$$Q_{enc} = \epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0(360 \text{ Nm}^2/\text{C}) = 3,19 \text{ nC}$$

◆ Campo y Carga dentro de un Conductor:

Un conductor es un cuerpo dentro del cual hay cargas libres que pueden

moverse si se ejerce una fuerza sobre ellas. Al aplicar un campo eléctrico dentro de un conductor, habrá un movimiento continuo de sus cargas libres (este movimiento se denomina "corriente"). Si no hay ningún campo interior al conductor, no habrá movimiento de sus cargas libres. Invirtiendo el razonamiento, deducimos que si las cargas en un conductor están en reposo, el campo dentro del conductor tiene que ser nulo. Con la ayuda de este hecho y la Ley de Gauss, podemos demostrar que "cuando un conductor está cargado, el exceso de carga se encuentra enteramente sobre su superficie".



La figura 27a representa un corte transversal de un conductor macizo de forma irregular, al que se le ha suministrado una carga positiva q . Imaginemos una superficie gaussiana A que se encuentra dentro del conductor, pero justamente debajo de su superficie. De acuerdo con la Ley de Gauss, el flujo eléctrico total que cruza esta superficie hacia afuera es igual a la carga neta positiva encerrada por la superficie. Pero si las cargas están en reposo, la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos situados dentro del conductor es nula. Por lo tanto, el flujo eléctrico que atraviesa la superficie gaussiana A es cero; en consecuencia, la carga neta dentro de esta superficie también es nula. Entonces toda la carga sobre el conductor tiene que estar fuera de la superficie A . Pero ésta se encuentra a una distancia infinitesimal dentro de la superficie real del conductor. Por consiguiente, el exceso de carga del conductor está localizado en su superficie (un exceso significa cargas diferentes de los iones y electrones libres que constituyen el conductor eléctricamente neutro).

El resultado coincide con el que cabía esperar por el hecho de existir fuerzas

repulsivas entre cargas del mismo signo. Las fuerzas mutuas de repulsión provocan la separación tan lejos como es posible y *la separación máxima se obtiene cuando toda la carga se encuentra sobre la superficie exterior*.

Si el conductor no es macizo sino *hueco (figura 27b)*, el resultado es el mismo. La Ley de Gauss aplicada a la *superficie gaussiana A*, demuestra que no puede haber cargas dentro de esta superficie. Por consiguiente, *no hay carga ni campo en el interior de la cavidad*.

*El hecho de que el campo dentro de una superficie conductora cerrada sea nulo, es el fundamento de lo que se conoce con el nombre de **apantallado** o **blindaje electrostático**. Cualquier dispositivo sensible, tal como un electroscopio o un instrumento electrónico, puede aislarse de la influencia de campos eléctricos indeseables rodeándolo de un conductor. Para ello no es necesario utilizar una superficie cerrada continua, ya que utilizando una malla metálica se obtiene una protección de igual eficacia. Precisamente, del hecho de que se emplee una superficie cerrada formada por una malla metálica, proviene la denominación habitual de **"jaula de Faraday"**.*

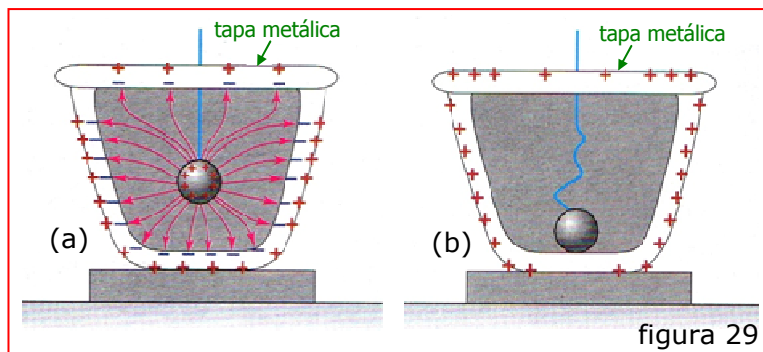
El efecto de pantalla eléctrica entre un campo eléctrico y un elemento sensible cualquiera, puede también obtenerse interponiendo una malla metálica plana unida a tierra. Para el caso de la jaula de Faraday, es indiferente que esté aislada o unida a tierra o que el elemento



interior protegido esté aislado o unido a la jaula.

Uno de los lugares más seguros para estar durante una tormenta eléctrica, es en el interior de un automóvil; si un rayo cae en el mismo, la carga tiende a permanecer en el armazón metálico del vehículo y poco o ningún campo eléctrico se produce dentro del compartimiento de los pasajeros. En la [figura 28](#), se observa cómo el blindaje electrostático puede proteger una persona de una descarga eléctrica peligrosa (la descarga es producida por un generador electrostático de Van de Graaff).

Supongamos ahora que dentro de la **cavidad** ubicada en el interior de un **conductor descargado**, colocamos un cuerpo pequeño con una **carga q aislada del conductor** ([figura 27c](#)). Como $\vec{E} = 0$ en cualquier lugar de la **superficie A** , la **carga total** en el interior de esta superficie debe ser **cero**. Por consiguiente, **debe haber una carga $-q$ distribuida en la superficie de la cavidad**, atraída hacia ella por la carga **$+q$** del interior de la cavidad. **La carga total del conductor debe seguir siendo cero**; en consecuencia, **la carga $+q$ debe aparecer en la superficie externa**. Si el conductor tenía originalmente una carga **$+q'$** , luego de introducir la carga **$+q$** en la cavidad, la carga total en la superficie externa debe ser **$+(q'+q)$** .



En la [figura 29a](#), una esfera conductora con carga se encuentra suspendida por un hilo aislante dentro de un recipiente metálico con tapa. Se inducen cargas en las paredes del recipiente. Cuando la esfera hace

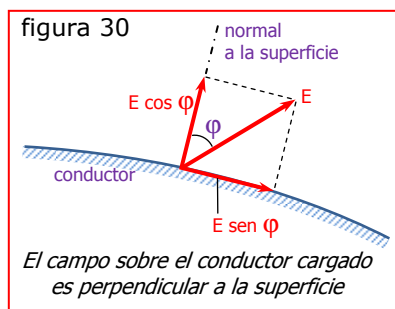
contacto con la pared interna del recipiente ([figura 29b](#)), su superficie se convierte en parte de la superficie de la cavidad y la situación es la misma que la de la [figura 27b](#). Si la Ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser cero. Por lo tanto, **toda la carga de la esfera se debe transferir al recipiente y aparecer en la superficie externa de éste** (también puede considerarse que la carga positiva de la esfera es neutralizada por la carga negativa inducida igual de la pared interior). Al retirar la esfera, se verifica que pierde efectivamente toda su carga.

Ahora que la superficie externa del recipiente está cargada, supongamos que sacamos

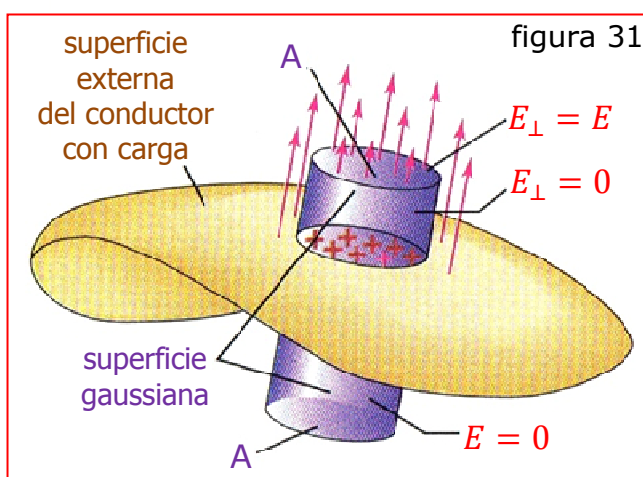
la esfera, la recargamos y la volvemos a introducir en el recipiente. Nuevamente aparecerá en la pared interna del recipiente una carga inducida. Como la carga total del recipiente no ha variado, **la carga positiva sobre su superficie externa aumenta al doble**. Si ponemos la esfera en contacto con la pared interna del recipiente, su carga será de nuevo neutralizada. Por consiguiente, **por contacto de un cuerpo cargado con la pared interior de un conductor hueco, la carga del cuerpo puede ser transmitida por entero a la superficie exterior del conductor, independientemente de la carga que hubiera ya sobre esta superficie**.

El mismo principio en que se basa este experimento, realizado por el científico inglés Michael Faraday en el siglo XIX, se utiliza en el generador electrostático de Van de Graaff de la figura 28.

◆ Campo Eléctrico en la Superficie de un Conductor:



La dirección del campo en un punto situado inmediatamente fuera de la superficie de un conductor cargado, es perpendicular a la superficie si las cargas sobre el conductor están en reposo. Supongamos que el campo en la superficie de un conductor forma un ángulo φ con la normal a la



superficie (figura 30). El campo puede descomponerse en una componente perpendicular y otra paralela a la superficie. Bajo la influencia de la componente paralela $\vec{E} \sin \varphi$, la carga se movería a lo largo de la superficie del conductor, lo cual es contrario a la hipótesis de que las cargas están en reposo. Por consi-

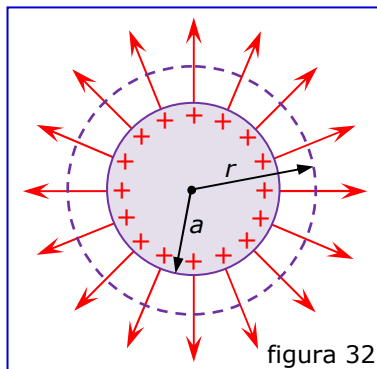
guiente, $\vec{E} \sin \varphi = 0$ y el campo es normal a la superficie.

Para calcular el valor de la intensidad del campo eléctrico en un punto inme-

diatamente fuera de la superficie de un conductor con carga, consideramos una *superficie gaussiana* con forma de *pequeño cilindro (figura 31)*. Una de las *bases* de este cilindro, de *área A*, se encuentra dentro del conductor, mientras que la otra está justamente afuera. En todos los *puntos interiores* a la superficie del conductor, el campo es nulo. *Fuera del conductor*, el campo es nulo en las paredes laterales del cilindro (*no son atravesadas por las líneas de campo, que son normales a la superficie del conductor*), mientras que sobre la base el campo es *E*. Por consiguiente, en virtud de la Ley de Gauss: $\epsilon_0 E A = \sigma A$, donde σ es la *densidad superficial de carga* en el punto considerado. La *intensidad del campo eléctrico* es:

$$E = \sigma / \epsilon_0 \quad (30)$$

◆ Campo de una Esfera Conductora Cargada:



La circunferencia interior de la *figura 32* representa la intersección del plano del dibujo con una *esfera conductora* de *radio a*, en cuya superficie se encuentra distribuida uniformemente una *carga positiva q*. Por simetría, la dirección del campo está dirigida radialmente hacia afuera. Consideremos como *superficie de Gauss* una *esfera de radio r*, representada por la circunferencia de trazos en la *figura 32*. El *flujo eléctrico* total que atraviesa la *esfera gaussiana* hacia afuera, es $E (4\pi r^2)$. Siendo que la carga encerrada dentro de la superficie es *q*, aplicando la Ley de Gauss tenemos: $E (4\pi r^2) = q / \epsilon_0$

o bien \Rightarrow

$$E = k \frac{q}{r^2} \quad (31)$$

Por consiguiente, *el campo fuera de una esfera conductora uniformemente cargada, es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera*. *El Campo en el interior de la esfera es nulo*. La ecuación anterior da también la *intensidad del campo eléctrico en los puntos del espacio comprendidos entre dos conductores esféricos concéntricos*.