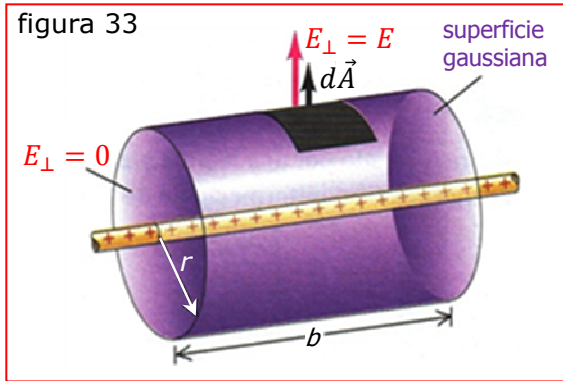


◆ Cálculo del Campo de una Carga Lineal mediante Gauss:



Este problema ya lo hemos resuelto anteriormente (páginas 22/3), pero ahora lo resolveremos aplicando la Ley de Gauss.

Consideremos una *superficie gaussiana* en forma de *cilindro recto* de *radio r* y *longitud b* , coaxial con el *hilo conductor* (figura 33).

Por simetría, la dirección del campo es normal al conductor y a la superficie

cilíndrica. Además, también por simetría, el campo tiene la misma intensidad en todos los puntos de dicha superficie. El *flujo eléctrico total* que *atraviesa* el *cilindro gaussiano* hacia afuera, es: $E (2\pi r b)$ (el flujo es nulo en las bases del cilindro). Por consiguiente, en virtud de la *Ley de Gauss*: $\epsilon_0 E (2\pi r b) = \lambda b$, donde λ es la *carga por unidad de longitud*. Luego:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = 2k \frac{\lambda}{r}$$

Este ejemplo nos aclara acerca de la simplificación que proporciona la Ley de Gauss.

◆ Campo alrededor de un Cilindro:

Si en la *figura 33* consideramos que el conductor es un *cilindro* de *radio a* con una *densidad superficial de carga σ* , por el mismo razonamiento que en el caso anterior concluimos que: $\epsilon_0 E (2\pi r b) = \sigma (2\pi a b)$, de donde:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma a}{r} \quad (32)$$

La *carga por unidad de longitud* del *cilindro* es: $\lambda = 2\pi a \sigma$ y $a \sigma = \lambda/2\pi$
 Con lo cual la ecuación (32) se convierte en:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (33)$$

Esta expresión es la misma que la del campo creado por una carga lineal. Por consiguiente, el campo exterior a un cilindro cargado es el mismo que si toda la carga del cilindro estuviera concentrada a lo largo de su eje. Obviamente, el campo dentro del cilindro es nulo y la ecuación (33) es válida sólo para valores de $r \geq a$.

El campo en el espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales cargados (con cargas de signo opuesto y del mismo valor absoluto, por unidad de longitud), está dado por la ecuación (33).

◆ Campo creado por una Lámina Plana Infinita:

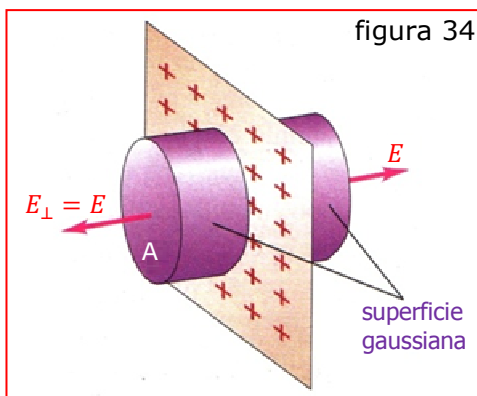


figura 34

Una lámina plana delgada infinita (no conductora) tiene una carga positiva uniformemente distribuida. Consideremos la superficie gaussiana cilíndrica cuyas bases tienen área A y cuyas paredes son perpendiculares al plano cargado (figura 34). Por simetría, el campo eléctrico E es el mismo a ambos lados de la lámina y perpendicular a la misma, además de uniforme y dirigido hacia afuera. El flujo eléctrico a través de las paredes del cilindro es nulo. En las bases del cilindro, la intensidad del campo eléctrico es E . En consecuencia y en virtud de la Ley de Gauss, resulta: $\epsilon_0 E 2A = \sigma A$, de donde:

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \quad (34)$$

Se observa que el valor del campo es independiente de la distancia al plano y no disminuye en razón inversa del cuadrado de la distancia. En este caso, las líneas de campo son, en todos los puntos, rectas paralelas uniformemente espaciadas. Esto se debe a haber supuesto el plano infinitamente grande.

◆ Campo creado por una Lámina Plana Conductora Infinita:

La carga se distribuye por sí misma en forma uniforme, sobre toda la superficie exterior de la lámina. Por lo tanto, el campo se produce por la superposición de los

campos de dos planos cargados, uno sobre cada superficie de la lámina. El valor del campo en cualquier punto puede encontrarse a partir de la Ley de Gauss o mediante los resultados ya obtenidos para un plano cargado.

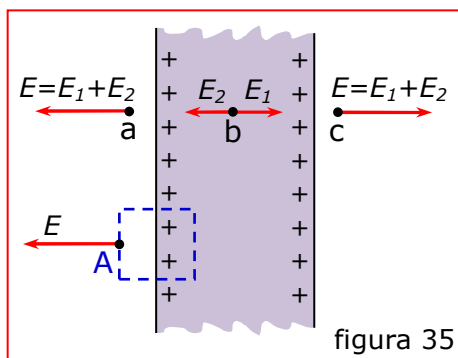


figura 35

La figura 35 representa una parte de la lámina conductora cargada. En el punto a , la componente E_1 del campo debido a la superficie izquierda, está dirigida hacia la izquierda y su valor es $\sigma/2\epsilon_0$. La componente E_2 , debida a la superficie derecha, está asimismo dirigida hacia la izquierda y su valor es también $\sigma/2\epsilon_0$. El campo resultante es, por consiguiente:

$$E = E_1 + E_2 = \sigma/\epsilon_0$$

En el punto b , dentro de la lámina, las dos componentes del campo tienen sentidos opuestos y su resultante es nula, como tiene que ser en todo conductor cuyas cargas están en reposo. En el punto c , se repite la situación del punto a , pero en sentido contrario.

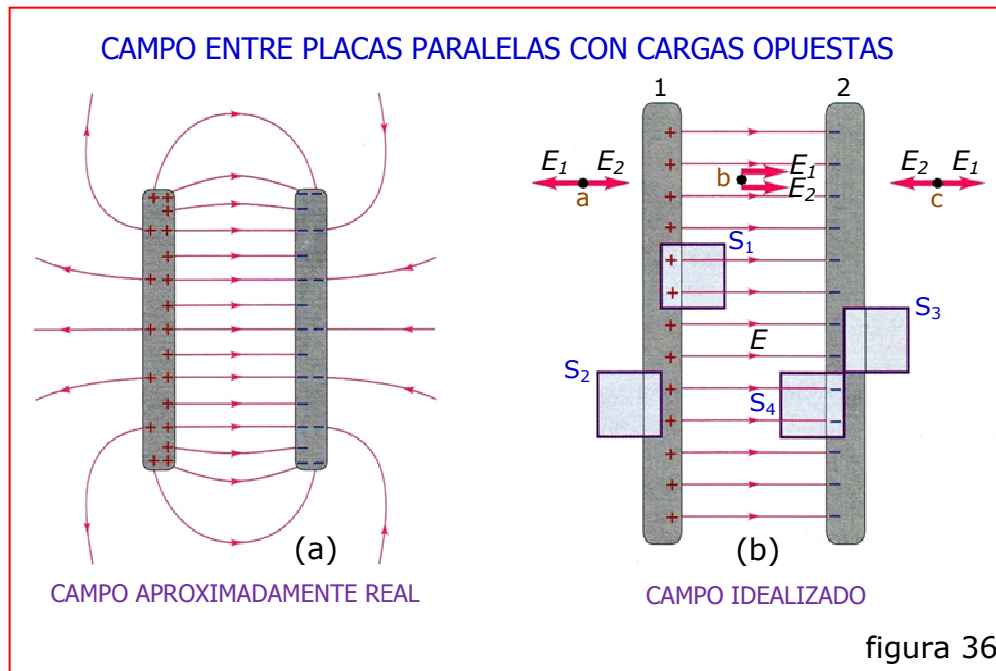
Para deducir estos resultados a partir de la Ley de Gauss, consideremos el cilindro representado por la línea de trazos, cuyas bases, una dentro y otra fuera de la lámina, tienen un área A . En estas condiciones, tendremos: $\epsilon_0 E A = \sigma A$. Luego:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (35)$$

◆ Campo entre Dos Láminas Paralelas con Cargas Opuestas:

Cuando dos láminas paralelas conductoras con las dimensiones y separación indicadas en la figura 36, reciben cargas iguales y de signos opuestos, el campo entre ellas y a su alrededor es aproximadamente el representado en la figura 36a. Aunque la mayor parte de la carga se acumula en las caras enfrentadas de las láminas y el campo es prácticamente uniforme en el espacio comprendido entre ellas, hay una pequeña cantidad de carga sobre las superficies exteriores de las láminas y una cierta dispersión del campo en los bordes de las mismas.

Cuanto mayores son las láminas y más pequeña la distancia entre ellas, la dispersión



se hace *relativamente menor*. En los componentes eléctricos que emplean este dispositivo, principalmente los condensadores (cuya separación entre láminas es muy pequeña en relación a sus áreas), la dispersión es en general *totalmente despreciable*. Por consiguiente, supondremos que el campo es uniforme como el de la figura 36b y que las cargas están distribuidas uniformemente sobre las superficies enfrentadas.

La intensidad del campo eléctrico en cualquier punto, puede considerarse como resultante de las correspondientes a dos planos de signo opuesto. Así, en los puntos *a* y *c* de la figura 36b, el valor de las componentes \vec{E}_1 y \vec{E}_2 es $\sigma/2\epsilon_0$, pero tienen sentido opuesto y su resultante es nula. En cualquier punto *b* entre las láminas, las componentes tienen el mismo sentido y su resultante es σ/ϵ_0 .

Aplicando la Ley de Gauss a los cilindros gaussianos S_1 a S_4 (bases de área A), se llega a los mismos resultados. Con las superficies S_2 y S_3 verificamos que $E = 0$ a la izquierda de la lámina 1 y a la derecha de la lámina 2. Con las superficies S_1 y S_4 hallamos que $EA = \sigma A/\epsilon_0$, de donde:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (36)$$

El campo es uniforme y perpendicular a las láminas (o placas) y su magnitud es independiente de la distancia a cualquiera de ellas.

◆ Campo de una Esfera Aislante:

Consideremos una *carga positiva* Q distribuida de manera uniforme en todo el *volumen* de una *esfera aislante* de *radio* R . A partir de la Ley de Gauss, podemos hallar la magnitud del campo eléctrico en un punto que se encuentra a una *distancia* r del *centro de la esfera*.

Para hacer uso de la simetría (ver *figura 32*, pág. 42), elegimos como *superficie gaussiana* una esfera de *radio* r , concéntrica con la distribución de carga. El flujo eléctrico a través de esta superficie, es: $\Phi_E = E A = Q_{enc}/\epsilon_0$, donde $A = 4\pi r^2$. Si $r < R$ y ρ es la *densidad volumétrica de carga*, es:

$$Q_{enc} = \rho V_{enc} = \left(Q/\frac{4}{3}\pi R^3\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Luego: $E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$, de donde, adentro de la esfera:

$$E = k \frac{Qr}{R^3} \quad (37)$$

Para $r > R$, es: $E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$, de donde, afuera de la esfera:

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (38)$$

En la ecuación (38), vemos que el campo eléctrico afuera del cuerpo es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro (situación que también observamos en pág. 42 para el caso de la esfera conductora).

Ejercicio N° 17: El tambor cilíndrico formador de imágenes de una fotocopiadora debe tener, inmediatamente afuera de su superficie, un campo eléctrico de $1,5 \times 10^5$ N/C. a) Si el tambor tiene un área superficial de $0,06$ m², ¿cuál debe ser la cantidad total de carga que resida en la superficie del tambor? b) Si se aumenta el área superficial del tambor a $0,12$ m² para poder usar hojas de papel más grandes, ¿qué cantidad total de carga se requiere para producir el mismo campo eléctrico?

a) $\Phi_E = E A = q/\epsilon_0 \Rightarrow q = \epsilon_0 E A = 8,85 \times 10^{-12}(1,5 \times 10^5) 0,06 = 7,96 \times 10^{-8} C$

b) $q = 8,85 \times 10^{-12}(1,5 \times 10^5) 0,12 = 1,59 \times 10^{-7} C$ (doble superficie \Rightarrow doble carga)

Ejercicio Nº 18: Una esfera metálica sólida con un radio de 0,5 m tiene una carga neta de 0,25 nC. a) Hallar la magnitud del campo eléctrico en un punto situado a 0,1 m afuera de la superficie de la esfera. b) Ídem en un punto dentro de la esfera a 0,1 m debajo de la superficie.

$$a) E = k \frac{q}{r^2} = (9 \times 10^9) \frac{0,25 \times 10^{-9}}{(0,5 + 0,1)^2} = 6,25 \text{ N/C}$$

b) $E = 0$ en el interior de un conductor cargado electrostáticamente

Ejercicio Nº 19: Un conductor cilíndrico infinitamente largo tiene un radio $R = 0,05$ m y una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 10$ nC/m². Calcular la magnitud del campo eléctrico que produce el cilindro a una distancia $r = 0,07$ m de su eje.

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi R L} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{Q}{L} = \sigma 2\pi R = (10 \times 10^{-9}) 2\pi (0,05) = 3,14 \times 10^{-9} \text{ C/m}$$

$$E = 2k \frac{\lambda}{r} = 2(9 \times 10^9) \frac{3,14 \times 10^{-9}}{0,07} = 807 \text{ N/C}$$

Ejercicio Nº 20: Se mantiene en posición horizontal una lámina cuadrada aislante de 80 cm de lado. La lámina tiene 7,5 nC de carga distribuida uniformemente en toda su área. a) Calcular el campo eléctrico en un punto a 0,1 mm por encima del centro de la lámina. b) Estimar el campo eléctrico en un punto a 100 m por encima del centro de la lámina. c) ¿Serían diferentes los resultados anteriores si la lámina fuera de un material conductor?

a) A una distancia de 0,1 mm desde su centro, la lámina se puede considerar prácticamente como infinita. Por lo tanto:

$$E = \frac{\sigma}{2 \varepsilon_0} = \frac{Q/A}{2 \varepsilon_0} = \frac{(7,5 \times 10^{-9})/0,8^2}{2 (8,85 \times 10^{-12})} = 662 \text{ N/C}$$

b) A una distancia de 100 m desde su centro, la lámina se ve como un punto. Luego:

$$E = k \frac{q}{r^2} = (9 \times 10^9) \frac{7,5 \times 10^{-9}}{100^2} = 6,75 \times 10^{-3} \text{ N/C}$$

c) No. En la lámina conductora, la carga se distribuye uniformemente sobre toda la superficie exterior de la misma, quedando la mitad de la densidad de carga en cada una de las caras. En consecuencia:

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma_a/2)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_a}{2 \varepsilon_0} \quad (\text{donde los subíndices "c" y "a" se refieren a las láminas conductora y aislante, respectivamente})$$

Vemos que esta última expresión es la misma que la empleada en el punto a).

Con relación al sitio alejado, desde el mismo ambas láminas se ven como puntos con igual carga.

Ejercicio Nº 21: Una esfera aislante de 0,22 m de radio tiene una carga distribuida uniformemente en todo su volumen. ¿Cuál es la carga total de la esfera si el campo

eléctrico a 0,11 m del centro de la misma es de 950 N/C?

El punto está dentro de la esfera, luego:

$$E = k \frac{Q r}{R^3} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{E R^3}{k r} = \frac{950 \times 0,22^3}{(9 \times 10^9) 0,11} = 10,2 \text{ nC}$$

◆ Energía Potencial Eléctrica:

Sabemos que el trabajo realizado para separar un cuerpo de la superficie de la Tierra, aumenta la energía potencial gravitatoria del sistema cuerpo-Tierra; además, también sabemos que cuando las dos partes se juntan, esta energía potencial gravitatoria se libera convirtiéndose en otras formas de energía. Es decir, el trabajo realizado al separar dos partes de un sistema que se atraen mutuamente, puede ser recuperado. Exactamente las mismas ideas pueden aplicarse a cualquier sistema compuesto de cuerpos que se atraen o rechazan entre sí, como ocurre en el caso de las cargas eléctricas. Para separar una carga positiva de una negativa hay que realizar un cierto trabajo, y este trabajo puede recuperarse cuando se permite a las dos cargas aproximarse entre sí. Para aproximar dos cargas del mismo signo hay que realizar un cierto trabajo, y este trabajo puede recuperarse cuando se permite a dichas cargas separarse.

En síntesis, *cuando dos cargas distintas se separan, o cuando dos cargas iguales se aproximan, aumenta la energía potencial del sistema y el cambio de energía potencial eléctrica se define como el trabajo realizado para efectuar la separación o la aproximación.*

Generalizando, podemos mover un cuerpo cargado en el campo creado por un número cualquiera de cargas. Sin especificar la posición, magnitud o signo de estas *cargas*, sea E el campo eléctrico creado por ellas en un punto cualquiera.

La *fuerza* sobre un pequeño cuerpo de prueba que posee una carga positiva q_0 es entonces $q_0 E$. Para mantener el cuerpo en reposo o para desplazarlo sin rozamiento o aceleración, se requiere una *fuerza opuesta* $F = -q_0 E$. El trabajo necesario para dar al cuerpo de prueba un *desplazamiento* ds se define como $dW = F \cos \theta ds$, siendo θ el ángulo formado por F y ds . Dado que $F = -q_0 E$, es:

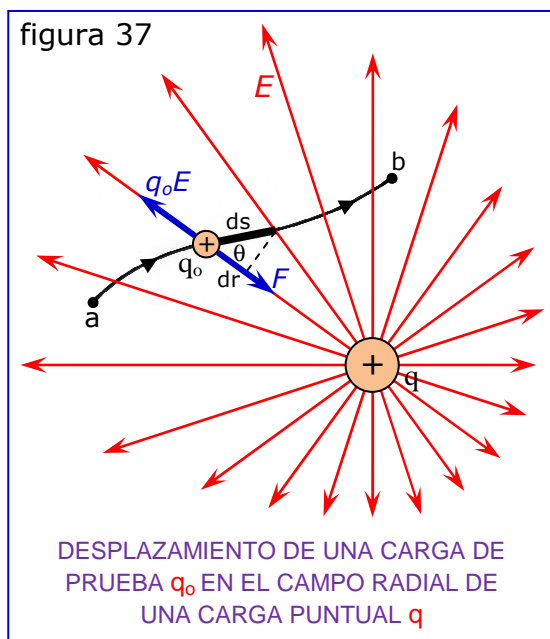
$$dW = -q_0 E \cos \theta ds$$

donde θ es ahora el ángulo formado por E y ds . Para un desplazamiento finito

desde el punto a al punto b , el trabajo necesario es:

$$W_{a \rightarrow b} = -q_0 \int_a^b E \cos \theta \, ds \quad (39)$$

Esta es la expresión general del trabajo necesario para desplazar la carga de prueba, desde un punto cualquiera a hasta otro punto cualquiera b , en un campo eléctrico.



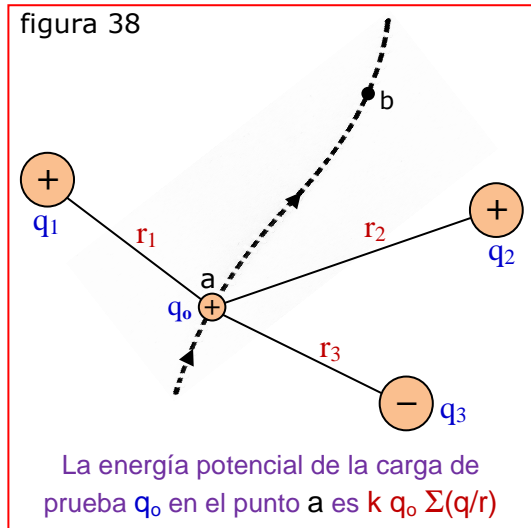
Consideremos ahora el caso especial del campo creado por una sola carga puntual fija q , como la de la figura 37. En este caso sencillo:

$$\begin{aligned}
 ds \cos \theta &= dr \\
 E &= k \frac{q}{r^2} \\
 W_{a \rightarrow b} &= -k q q_0 \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} \\
 W_{a \rightarrow b} &= k q q_0 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = k \frac{q q_0}{r_b} - k \frac{q q_0}{r_a} \quad (40)
 \end{aligned}$$

Como el resultado depende solamente de las distancias inicial y final de los puntos a y b a la carga q , se deduce que el trabajo es el mismo para cualquier trayectoria que pase por estos puntos (o entre un par cualquiera de puntos situados a las distancias r_a y r_b de la carga q). Además, si la carga de prueba vuelve del punto b al punto a a lo largo de cualquier trayectoria, el trabajo realizado para moverla desde a hasta b puede recuperarse totalmente. Por consiguiente, la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa y está justificado considerar el trabajo realizado sobre la carga de prueba, como un incremento de su energía potencial.

En el segundo miembro de la ecuación (40), el primer y segundo término representan, respectivamente, la energía potencial de la carga de prueba a las distancias r_b y r_a de la carga q .

Dado que las distancias r_a y r_b son arbitrarias, la energía potencial de una carga puntual q_0 a una distancia cualquiera r de una carga puntual q es:



$$EP = k \frac{qq_0}{r} \quad (41)$$

Supongamos ahora que el campo es creado por una distribución arbitraria de cargas puntuales q_1, q_2, \dots ubicadas a las distancias r_1, r_2, \dots de una carga de prueba q_0 colocada en el punto a , como se observa en la *figura 38*. Puesto que la energía es una magnitud escalar, la energía potencial de la

carga de prueba q_0 es la suma algebraica de sus energías potenciales respecto a todas las otras cargas:

$$EP_a = k q_0 \sum \frac{q}{r} \quad (42)$$

En un segundo punto b , la energía está dada por la misma expresión, excepto que r_1, r_2, \dots representan ahora las distancias de las cargas respectivas al punto b . El trabajo necesario para desplazar la carga de prueba desde a hasta b a lo largo de cualquier trayectoria, es igual a la diferencia de sus energías potenciales en b y en a . Por consiguiente:

$$W_{a \rightarrow b} = - \int_a^b q_0 E \cos \theta ds = EP_b - EP_a \quad (43)$$

Por lo tanto, el trabajo puede calcularse hallando el valor de la integral en el caso de que E sea conocido en todos los puntos de la trayectoria, o bien calculando las energías potenciales solamente en los puntos extremos y restando una de otra.

De la ecuación (42) deducimos que, el nivel de referencia de la energía potencial eléctrica en el cual la misma es nula, es aquel para el cual todas las distancias r_1, r_2, \dots son infinitas. Es decir, la energía potencial de la carga de

prueba es nula cuando está muy alejada de todas las cargas que crean el campo (Este es el nivel de referencia más cómodo para la mayor parte de los problemas electrostáticos. Al estudiar los circuitos eléctricos resultan más cómodos otros niveles de referencia, lo cual significa simplemente que se suma un término constante a la energía potencial, circunstancia ésta que carece de importancia puesto que en la práctica sólo tienen interés las diferencias de potencial).

Si la carga de prueba se trae desde el infinito a un punto cualquiera del campo, el trabajo realizado contra la fuerza ejercida sobre ella por el campo es igual a la energía potencial en el punto. Si suponemos el punto **a** en el infinito y hacemos $EP_a = 0$, la ecuación (43) se convierte en:

$$EP_b = - \int_{\infty}^b q_0 E \cos \theta ds$$

El punto **b** puede ser un punto cualquiera del campo. Podemos por lo tanto suprimir el subíndice y los límites de integración:

$$EP = - \int q_0 E \cos \theta ds \quad (44)$$

donde se entiende que es una integral curvilínea desde el infinito al punto en cuestión. Físicamente, la energía potencial de una carga de prueba en cualquier punto de un campo eléctrico, es igual al trabajo realizado contra la fuerza ejercida sobre ella por el campo, cuando se traslada la carga desde el infinito al punto.

La ecuación (42) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba q_0 en el campo E producido por q_1, q_2, q_3, \dots . Pero también interviene una energía potencial en el acto de reunir estas cargas. Si en un principio las mismas están todas separadas unas de otras por distancias infinitas y luego las juntamos de modo que la distancia entre q_i y q_j sea r_{ij} , la energía potencial total EP_t es la suma de las energías potenciales de interacción de cada par de cargas. Esto se puede escribir como

$$EP_t = k \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

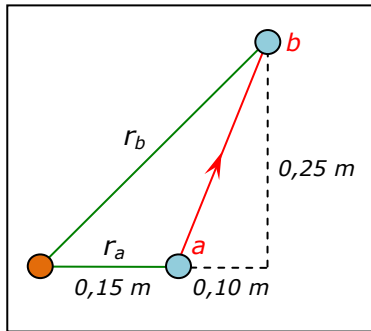
Esta suma se extiende a todos los pares de cargas. No se hace que $i=j$ (porque eso sería una interacción de una carga consigo misma) y se incluyen sólo términos con $i < j$ para asegurar que se cuente cada par sólo una vez. Así, para tener en cuenta la interacción entre q_3 y q_4 se incluye un término con $i=3$ y $j=4$, pero no un término con $i=4$ y $j=3$.

Ejercicio Nº 22: Dos protones en el núcleo de un átomo U^{238} están separados por una distancia de 6 fm. ¿Cuál es la energía potencial relacionada con la fuerza eléctrica que opera entre las dos partículas?

$$EP = k \frac{q_1 q_2}{r} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{6 \times 10^{-15} \text{ m}} = 3,8 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Hemos supuesto que $EP = 0$ en la configuración donde los protones están muy separados (teóricamente en el infinito). Los dos protones no se separan porque los mantiene unidos la "fuerza nuclear fuerte" (sobre cuya existencia ya hemos comentado en página 3).

Ejercicio Nº 23: Una carga puntual $q_1 = 2,4 \mu\text{C}$ se mantiene inmóvil en el origen. Una segunda carga puntual $q_2 = -4,3 \mu\text{C}$ se traslada del punto $[x = 0,15 \text{ m} \cdot y = 0]$ al punto $[x = 0,25 \text{ m} \cdot y = 0,25 \text{ m}]$. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre q_2 ?



$$W_{a \rightarrow b} = EP_b - EP_a = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$W_{a \rightarrow b} = (9 \times 10^9)(2,4 \times 10^{-6})(-4,3 \times 10^{-6}) \left(\frac{1}{0,25 \sqrt{2}} - \frac{1}{0,15} \right)$$

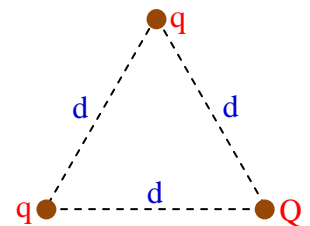
$$W_{a \rightarrow b} = 0,357 \text{ J}$$

$$W_{f.e. s/q_2} = -W_{a \rightarrow b} = -0,357 \text{ J}$$

Ejercicio Nº 24: Tres cargas puntuales, que inicialmente están infinitamente lejos unas de otras, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lados d . Dos de las cargas puntuales son idénticas y su carga es q . Si el trabajo neto que se requiere para colocar las tres cargas en los vértices del triángulo es cero, ¿cuál es el valor de la tercera carga?

$$W_{qqQ} = k \frac{q^2}{d} + 2 k \frac{qQ}{d} = 0$$

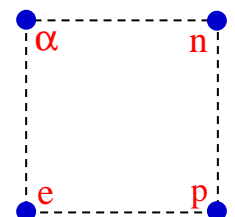
$$Q = -\frac{q}{2}$$



Ejercicio Nº 25: Un protón, una partícula alfa, un electrón y un neutrón, están en reposo en los vértices de un cuadrado cuyos lados miden $5 \times 10^{-10} \text{ m}$, con el electrón y el neutrón en vértices opuestos. ¿Cuál es la cantidad mínima de trabajo que se debe realizar para alejar mucho las partículas unas de otras?

$$W_t = EP_t = EP_{p\alpha} + EP_{pe} + EP_{e\alpha}$$

$$W_t = \frac{k e (2e)}{5\sqrt{2} \times 10^{-10}} + \frac{k e (-e)}{5 \times 10^{-10}} + \frac{k (-e)(2e)}{5 \times 10^{-10}} = \frac{k e^2}{5 \times 10^{-10}} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 - 2 \right)$$



$$W_t = \frac{(9 \times 10^9)(1,6 \times 10^{-19})^2}{5 \times 10^{-10}} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 3 \right) = -7,31 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Este es el trabajo necesario para estructurar el sistema, partiendo de cargas separadas por grandes distancias (*teóricamente infinitas*) y en reposo. El trabajo mínimo para desmantelar el sistema, separando nuevamente las cargas por grandes distancias, es:

$$W_{\rightarrow\infty} = -W_t = 7,31 \times 10^{-19} \text{ J}$$

◆ Potencial:

El potencial en un punto de un campo eléctrico se define como "la razón entre la energía potencial de una carga de prueba colocada en el punto y el valor de dicha carga"; es decir, la energía potencial por unidad de carga.

$$\text{Potencial en el punto } a = V_a = \frac{\text{EP de la carga } q_0 \text{ en el punto } a}{q_0} \quad (45)$$

Se considera que el potencial en un punto tiene un valor aunque no haya carga eléctrica en dicho punto. Basta imaginar colocada una carga de prueba en el punto, calcular su energía potencial y hallar la razón de la energía potencial a la carga (*debe admitirse que la distribución inicial de carga no se altera por la introducción de la carga de prueba, lo cual es cierto si ésta es suficientemente pequeña*). De la definición anterior se deduce:

$$\text{EP de la carga } q_0 \text{ en el punto } a = q_0 V_a \quad (46)$$

Puesto que la energía es una magnitud escalar, el potencial es también escalar. Tiene módulo pero no dirección, y en este aspecto difiere del campo eléctrico, que es un vector.

En virtud de las ecuaciones (44) y (45), el potencial en un punto cualquiera es:

$$V = \frac{EP}{q_0} = \frac{- \int q_0 E \cos \theta ds}{q_0}$$

o sea:

$$V = - \int E \cos \theta ds \quad (47)$$

donde se entiende que la integral curvilínea se toma a lo largo de una línea que va desde el infinito al punto en cuestión. Físicamente, el potencial de un

punto es igual al trabajo realizado, por unidad de carga, contra la fuerza ejercida por el campo, cuando se trae una carga desde el infinito al punto.

En virtud de su definición como energía potencial de la unidad de carga, el potencial se expresa en el S.I. en julios por culombio y recibe el nombre de voltio, en honor del físico italiano Alejandro Volta (1745-1827), inventor de la primera pila eléctrica. El potencial en un punto de un campo electrostático será de un voltio, si para traer una carga de un culombio desde el infinito al punto, venciendo las fuerzas del campo, es necesario realizar un trabajo de un julio.

Hemos demostrado (ecuación 41) que la energía potencial de una carga de prueba q_0 situada a una distancia r de una carga puntual q es: $EP = k \frac{qq_0}{r}$

Se deduce que el potencial $V = EP/q_0$ a esta distancia es:

$$V = k \frac{q}{r} \quad (48)$$

Cuando el campo es creado por un cierto número de cargas puntuales, en virtud de la ecuación (42) se tiene:

$$V = k \sum \frac{q}{r} \quad (49)$$

Si la carga que crea el campo está distribuida sobre una línea, una superficie o un volumen, podemos dividirla en elementos infinitesimales dq y obtener la suma por los métodos del cálculo integral:

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (50)$$

A causa de la naturaleza escalar del potencial, esta ecuación puede integrarse directamente y no es necesario hallar componentes como en el caso de la ecuación (11). Por esta razón, el cálculo del potencial resulta, en general, más sencillo que el cálculo de la intensidad del campo eléctrico. Más adelante veremos cómo se puede calcular la intensidad del campo eléctrico a partir del potencial.

◆ Diferencia de Potencial:

La diferencia de potencial entre dos puntos de un campo electrostático, es igual a la diferencia entre los potenciales de dichos puntos. Si dividimos por q_0 ambos miembros de la ecuación (43), se obtiene:

$$\frac{EP_b}{q_0} - \frac{EP_a}{q_0} = - \int_a^b E \cos \theta ds$$

de donde:

$$V_b - V_a = - \int_a^b E \cos \theta ds \quad (51)$$

O sea que, *la diferencia de potencial entre dos puntos es igual al trabajo realizado, por unidad de carga, contra las fuerzas eléctricas, cuando se mueve una carga desde un punto al otro*. Para interpretar la ecuación anterior, recuérdese que E es la fuerza eléctrica, por unidad de carga, sobre una carga de prueba. La integral puede calcularse *a lo largo de cualquier trayectoria* comprendida entre a y b .

Se dice que el punto b está a un *potencial superior* al de a , si se realiza trabajo *contra las fuerzas eléctricas* para mover una *carga positiva* desde a hasta b (o si la *energía potencial de una carga positiva es mayor en b que en a*). El potencial en un punto puede considerarse como la diferencia de potencial entre dicho punto y otro a distancia infinita, donde el potencial se supone arbitrariamente cero.

El concepto de diferencia de potencial es extraordinariamente importante, tanto para la electrostática como para los circuitos eléctricos. Por ejemplo, la diferencia de potencial entre los bornes de una batería de automóvil es de 12 V (voltios), designándose el borne de potencial más elevado por el signo $+$ y el de menor potencial por el signo $-$. El borne $+$ está cargado positivamente y el borne $-$ negativamente. Existe por lo tanto un campo eléctrico en el espacio que rodea los bornes. Decir que la diferencia de potencial entre los bornes es 12 V , significa simplemente que si tuviéramos que mover un cuerpo cargado positivamente desde el borne negativo al positivo (por ejemplo, transportar una esfera metálica pequeña, cargada positivamente y sujeta por un hilo aislador, de un punto al otro), el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas del campo existente entre los dos bornes sería de 12 J (julios) por culombio de carga transportada.

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b se expresa por V_{ab} , esto es:

$$V_{ab} = V_a - V_b$$

Si esta diferencia de potencial es una cantidad positiva, el punto a está a un

potencial más alto que b . Inversamente, si la diferencia es negativa, el punto b está a un potencial más alto que a . Por consiguiente, puesto que $V_{ab} = V_a - V_b$ y $V_{ba} = V_b - V_a$, se deduce que: $V_{ab} = -V_{ba}$

En la ecuación (51), si la trayectoria de integración se cierra sobre sí misma, de modo que los extremos coincidan, la diferencia de potencial entre ellos es cero y la integral será por lo tanto nula:

$$\oint E \cos \theta \, ds = 0 \quad (52)$$

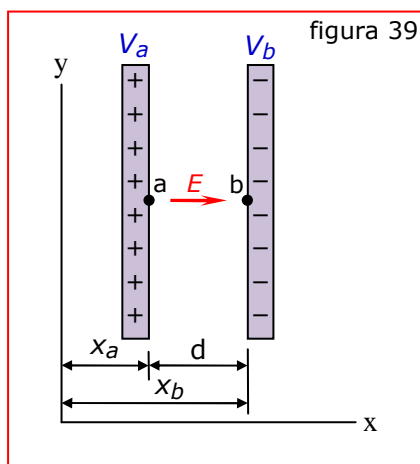
donde el símbolo de la integral con el círculo significa que la integral curvilínea se extiende a una trayectoria cerrada.

Utilizando la notación vectorial, las ecuaciones (47), (51) y (52) se escriben:

$$V = - \int \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$



Sabemos que, por simetría, la intensidad del campo eléctrico E entre dos láminas paralelas muy próximas y con cargas iguales y de signos opuestos, es uniforme y perpendicular a las láminas. Nos preguntamos, ¿cuál es la diferencia de potencial entre ellas? Adoptemos un eje x paralelo al campo (figura 39) y consideremos dos puntos a y b en las caras interiores de las láminas.

Se tiene: $V_{ab} = -V_{ba} = \int_a^b E \cos \theta \, ds$

Pero: $E = \text{cte.} ; \cos \theta = 1 ; ds = dx ;$

luego, $V_{ab} = E \int_{x_a}^{x_b} dx = E (x_b - x_a) = E d$

y

$$E = \frac{V_{ab}}{d} \quad (53)$$

La intensidad del campo eléctrico es igual, por consiguiente, a la diferencia de potencial entre las láminas, dividida por la distancia que las separa. Esta ecuación es más útil para expresar la intensidad del campo eléctrico entre láminas paralelas que la ecuación $E = \sigma / \epsilon_0$, puesto que la diferencia de potencial V_{ab} puede determinarse experimentalmente de forma más sencilla que la carga por unidad de área.

◆ Potencial de un Conductor Esférico Cargado:

La intensidad del campo eléctrico fuera de un conductor esférico cargado, es la misma que si toda la carga del conductor estuviera concentrada en su centro (ver página 42). Se deduce de esto que el potencial en los puntos exteriores al conductor está dado por la misma expresión que para una carga puntual:

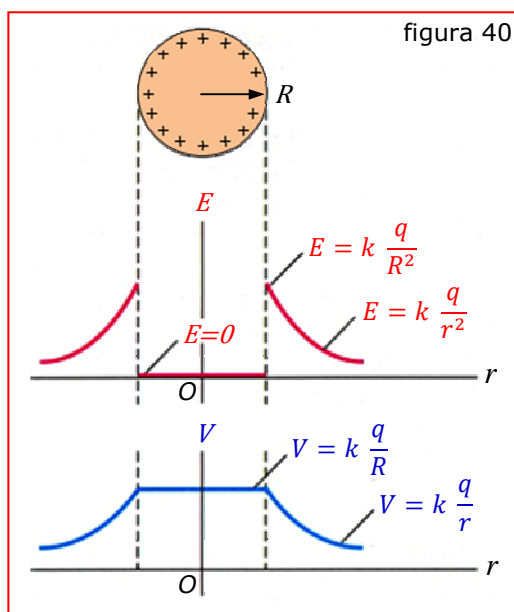
$$V = k \frac{q}{r} \quad (54)$$

siendo r igual o mayor que el radio de la esfera.

En los puntos interiores a la esfera la intensidad del campo eléctrico es nula. Según esto, y en virtud de la expresión general de la diferencia de potencial entre dos puntos (ecuación 51), se deduce que el potencial es el mismo en todos los puntos interiores e igual al potencial en la superficie:

$$V = k \frac{q}{R} \quad (55)$$

siendo R el radio de la esfera. Por consiguiente, la ecuación (54) da el potencial en los puntos exteriores a la esfera y la ecuación (55) en los puntos interiores.



La figura 40 representa una esfera de radio R que tiene una carga positiva q , junto con las gráficas de la intensidad del campo eléctrico E y del potencial V en los puntos situados sobre una recta que pasa por el centro de la esfera.

La carga máxima que puede retener un conductor situado en el aire, está limitada por el hecho de que el aire mismo se hace conductor para una intensidad del campo de unos 3×10^6 V/m. Si E_m representa el límite superior del campo eléctrico, la carga máxima que puede ser retenida por un conductor esférico en el aire es:

$$q_m = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_m$$

Por lo tanto, en virtud de la ecuación (55), el potencial máximo que puede alcanzar un conductor esférico en el aire es:

$$V_m = R E_m$$

Para una esfera de 1 cm de radio, $V_m = 0,01 \times 3 \times 10^6 = 30.000$ V. Ninguna cantidad de carga podría elevar el potencial de una esfera de este tamaño, en el aire, por encima de 30.000 V. Por esta causa, se necesita utilizar bornes esféricos tan grandes en las máquinas de voltajes elevados. Si hacemos $R = 1$ m, se tiene $V_m = 3$ millones de voltios.

Contrario a éste es el efecto producido por las puntas agudas, que son porciones de superficie de radio de curvatura muy pequeño. Como el potencial máximo es directamente proporcional al radio, con potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas (en el aire), se producirán en éstas campos suficientemente elevados como para ocasionar una ionización del aire que las rodea (ver Superficies Equipotenciales).

Ejercicio Nº 26: Antes del advenimiento de la electrónica de estado sólido, las válvulas de vacío se usaban ampliamente en radios y otros aparatos. Un tipo sencillo de válvula de vacío conocido como *diodo*, se compone fundamentalmente de dos electrodos en el interior de un compartimiento al alto vacío. Uno de los electrodos, el *cátodo*, se mantiene a una temperatura elevada y emite electrones desde su superficie. Se establece entre el cátodo y el otro electrodo, llamado *ánodo*, una diferencia de potencial de algunos cientos de voltios, siendo el ánodo el de potencial más elevado. Supongamos que en cierto diodo el potencial de ánodo es de 250 V por encima del potencial de cátodo, y que se emite desde este último un electrón sin velocidad inicial. ¿Cuál es su velocidad cuando llega al ánodo?

Sean V_k el potencial del cátodo y V_a el potencial del ánodo. Las respectivas energías potenciales del electrón en el cátodo y en el ánodo, son:

$$EP_k = -e V_k \quad ; \quad EP_a = -e V_a$$

La energía cinética del electrón en el ánodo es: $EC_a = \frac{1}{2} m_e v_a^2$

La energía cinética del electrón en el cátodo es nula (*dato*).

La única fuerza que actúa sobre el electrón es la ejercida por el campo. Luego:

$$EC_k + EP_k = EC_a + EP_a$$

$$-e V_k = \frac{1}{2} m_e v_a^2 - e V_a$$

$$\frac{1}{2} m_e v_a^2 = e (V_a - V_k) = e V_{ak}$$

de donde:

$$v_a = \sqrt{\frac{2 e V_{ak}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 250}{9,11 \times 10^{-31}}} = 9,4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Observemos que no es necesario conocer la forma o la distancia de los electrodos. La velocidad final depende solamente de la diferencia de potencial. Naturalmente, el

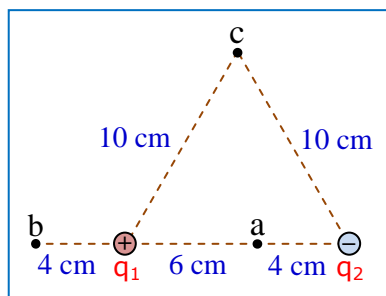
tiempo que tarda el electrón en trasladarse, sí depende de la forma y dimensiones de los electrodos del diodo.

Ejercicio N° 27: Calcular los potenciales a las siguientes distancias de una carga puntual positiva de 1 nC: 1 mm, 1 cm, 10 cm y 100 cm.

A la distancia de 1 mm: $V = k \frac{q}{r} = (9 \times 10^9) \frac{10^{-9}}{10^{-3}} = 9.000 \text{ V}$

Análogamente, a las distancias de 1 cm, 10 cm y 100 cm, los potenciales respectivos son: **900 V**, **90 V** y **9 V**.

Ejercicio N° 28: Dos cargas puntuales de 12 nC y -12 nC están separadas 10 cm, como se indica en la figura. Hallar los potenciales en los puntos a, b y c.



$$V = k \sum \frac{q}{r}$$

$$V_a = (9 \times 10^9) \left[\frac{(12 \times 10^{-9})}{0,06} + \frac{(-12 \times 10^{-9})}{0,04} \right] = -900 \text{ V}$$

$$V_b = (9 \times 10^9) \left[\frac{(12 \times 10^{-9})}{0,04} + \frac{(-12 \times 10^{-9})}{0,14} \right] = 1.929 \text{ V}$$

$$V_c = (9 \times 10^9) \left[\frac{(12 \times 10^{-9})}{0,10} + \frac{(-12 \times 10^{-9})}{0,10} \right] = 0 \text{ V}$$

Ejercicio N° 29: Calcular la energía potencial de una carga puntual de 4 nC, cuando está colocada en los puntos a, b y c de la figura anterior.

$$EP_a = q V_a = 4 \times 10^{-9} \times (-900) = -36 \times 10^{-7} \text{ J}$$

$$EP_b = q V_b = 4 \times 10^{-9} \times 1.929 = 77 \times 10^{-7} \text{ J}$$

$$EP_c = q V_c = 0 \text{ J} \quad (\text{todas respecto a un punto del infinito})$$

Ejercicio N° 30: ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos [a y b], [b y a] y [b y c] de la figura anterior? ¿Qué trabajo sería necesario para llevar una carga puntual de 4 nC desde a hasta b y desde c hasta a, sin aumentar su energía cinética?

$$V_{ab} = V_a - V_b = -900 - 1.929 = -2.829 \text{ V}$$

$$V_{ba} = V_b - V_a = 1.929 - (-900) = 2.829 \text{ V}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 1.929 - 0 = 1.929 \text{ V}$$

$$W_{a \rightarrow b} = q V_{ba} = 4 \times 10^{-9} \times 2.829 = 113 \times 10^{-7} \text{ J}$$

$$W_{c \rightarrow a} = q V_{ac} = 4 \times 10^{-9} \times (-900) = -36 \times 10^{-7} \text{ J}$$

Ejercicio N° 31: Dos placas metálicas paralelas grandes tienen cargas opuestas de igual magnitud. Las separa una distancia de 45 mm y la diferencia de potencial entre ellas es de 360 V. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico (*se supone uniforme*) en la región entre las placas? b) Cuál es la magnitud de la fuerza que este campo ejerce sobre una partícula con una carga de 2,4 nC? c) Con base en el resultado del punto anterior, calcular el trabajo realizado por el campo sobre la partícula cuando ésta se traslada de la placa de mayor a la de menor potencial. d) Comparar el resultado del punto anterior con el cambio de energía potencial de la misma carga, calculado a partir del potencial eléctrico.

a) $E = \frac{V}{d} = \frac{360 \text{ V}}{0,045 \text{ m}} = 8.000 \text{ N/C}$

b) $F = E q = 8.000 (2,4 \times 10^{-9}) = 1,92 \times 10^{-5} \text{ N}$

c) $W = F d = (1,92 \times 10^{-5}) 0,045 = 8,64 \times 10^{-7} \text{ J}$

d) $\Delta EP = \Delta V q = (0 - 360)(2,4 \times 10^{-9}) = - 8,64 \times 10^{-7} \text{ J}$

Ejercicio N° 32: Una carga eléctrica total de 3,5 nC está distribuida uniformemente en la superficie de una esfera metálica con un radio de 24 cm. Si el potencial es cero en un punto en el infinito, hallar el valor del potencial a las distancias siguientes del centro de la esfera: a) 48 cm; b) 24 cm; c) 12 cm.

a) $V = k \frac{q}{r} = (9 \times 10^9) \frac{(3,5 \times 10^{-9})}{0,48} = 65,6 \text{ V}$

b) $V = k \frac{q}{R} = (9 \times 10^9) \frac{(3,5 \times 10^{-9})}{0,24} = 131,2 \text{ V}$

c) $V = 131,2 \text{ V}$ (el interior de la esfera conductora es equipotencial)

◆ Gradiente de Potencial:

La expresión general de la diferencia de potencial entre dos puntos es:

$$V_b - V_a = - \int_a^b E \cos \theta ds$$

Cuando la distancia que los separa es infinitesimal, la diferencia de potencial se convierte en dV , resultando: $dV = - E \cos \theta ds$

Esta ecuación puede escribirse:

$$E \cos \theta = - \frac{dV}{ds} \quad (56)$$

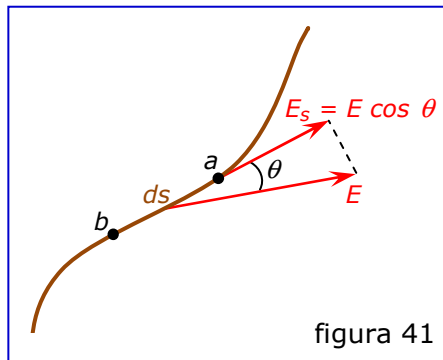


figura 41

El producto $E \cos \theta$ es la componente de E en la dirección de ds (figura 41). La razón dV/ds , que es la *variación del potencial con la distancia en la dirección ds* , se denomina GRADIENTE DE POTENCIAL. Por lo tanto, llegamos al siguiente importante resultado: la componente del campo eléctrico en una dirección cualquiera, es igual al

gradiente de potencial en dicha dirección, cambiado de signo. En particular, si la dirección ds es la misma que la del campo eléctrico, entonces el campo eléctrico es igual al gradiente de potencial en la dirección del campo, cambiado de signo.

Las unidades de campo eléctrico y de gradiente de potencial son equivalentes. Esto es, $1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$.

El campo que rodea a un conjunto de cargas cualesquiera es tridimensional. En general, el potencial de un punto cualquiera es cierta función de las coordenadas x , y , z , del punto. Si para la ecuación (56) consideramos las componentes de ds en las direcciones de los ejes coordenados, los tres gradientes de potencial dan entonces las tres componentes rectangulares de E :

$$E_x = - \frac{dV}{dx} \quad E_y = - \frac{dV}{dy} \quad E_z = - \frac{dV}{dz}$$

En rigor, estas expresiones deben escribirse como derivadas parciales. El gradiente de una función escalar de x , y , z , tal como el potencial V , se define como un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función:

$$\text{grad } V = \vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

donde \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} son los vectores unitarios. Se deduce que $\Rightarrow E = - \text{grad } V = - \nabla V$

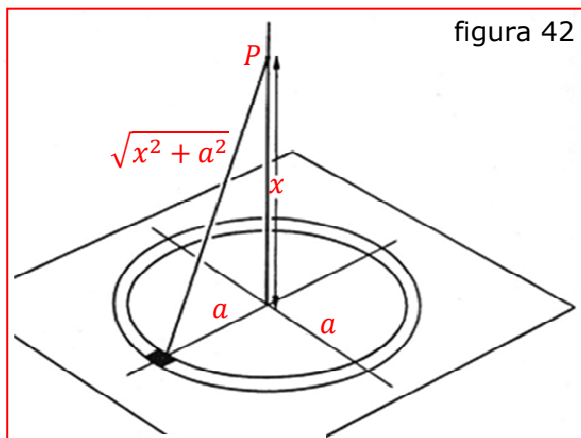


figura 42

Para ilustrar la simplificación que introduce el uso de gradientes de potencial, calcularemos el campo eléctrico sobre el eje de un anillo cargado (figura 42), problema que ya se resolvió anteriormente (página 24). Aunque la carga total q sobre el anillo está distribuida en toda su longitud, cada porción de carga se halla a la misma distancia $\sqrt{x^2 + a^2}$ de un punto P del eje. Por consiguiente, el potencial en P es:

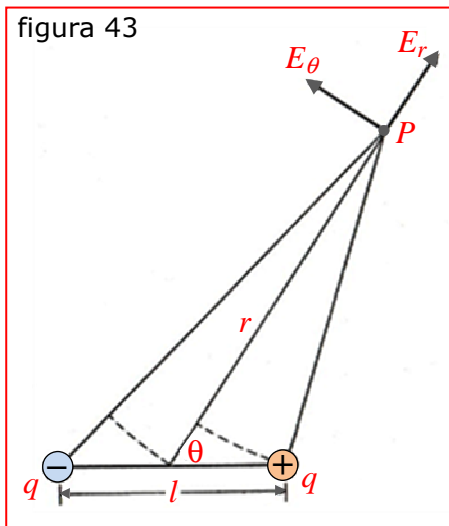
$$V = k \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Por razón de simetría, el campo en un punto del

eje tiene la dirección de éste, de modo que el gradiente de potencial, cambiado de signo, dará el campo en dicho punto:

$$E = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(k \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = k \frac{qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Este resultado coincide con el que obtuvimos anteriormente y los cálculos son evidentemente más sencillos.



Consideremos ahora el campo eléctrico creado por un dipolo, deducido a partir del potencial (figura 43). Así comprobaremos las expresiones E_r y E_θ que se dieron anteriormente sin demostración (página 21). Los arcos con centro en P indicados con línea de trazos, pueden considerarse como segmentos rectilíneos perpendiculares a r y a las rectas que unen P con las dos cargas, siempre que P esté lo suficientemente lejos del dipolo.

El potencial en P es:

$$V = k \sum \frac{q}{r} = k \left(\frac{q}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} + \frac{-q}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right)$$

$$V = k \left(\frac{ql \cos \theta}{r^2 - \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta} \right)$$

$$V = k \frac{ql \cos \theta}{r^2} \text{ si despreciamos } \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \text{ frente a } r^2$$

En dirección radial, ds es dr . En dirección tangencial, ds es perpendicular a r , luego es $r d\theta$.

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(k \frac{ql \cos \theta}{r^2} \right) = k \frac{2ql \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{dV}{rd\theta} = -\frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \left(k \frac{ql \cos \theta}{r^2} \right) = k \frac{ql \sin \theta}{r^3}$$

Ejercicio N° 33: Un largo conductor cilíndrico de radio a está rodeado por un cilindro coaxial hueco de radio interior b . Los cilindros poseen cargas iguales y de signos opuestos. Calcular la expresión del campo eléctrico en un punto del espacio comprendido entre los cilindros, en función de la diferencia de potencial que existe entre ellos.

Anteriormente hemos visto (páginas 43/4) que el campo eléctrico entre los cilindros es $E = 2k(\lambda/r)$. Como $E = -(dV/dr)$, tenemos: $-(dV/dr) = 2k(\lambda/r)$

$$-\int_{V_a}^{V_b} dV = 2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad V_a - V_b = 2k\lambda \ln \frac{b}{a}$$

despejando λ e introduciendo la misma en la primera ecuación, se obtiene:

$$E = \frac{V_{ab}}{r \ln(b/a)}$$

Esta expresión del campo eléctrico resulta más útil, porque la diferencia de potencial entre los cilindros puede medirse más fácilmente que su carga por unidad de longitud.

◆ Superficies Equipotenciales:

La distribución del potencial en un campo eléctrico puede representarse gráficamente por superficies equipotenciales, es decir, superficies en las cuales todos los puntos tienen el mismo potencial.

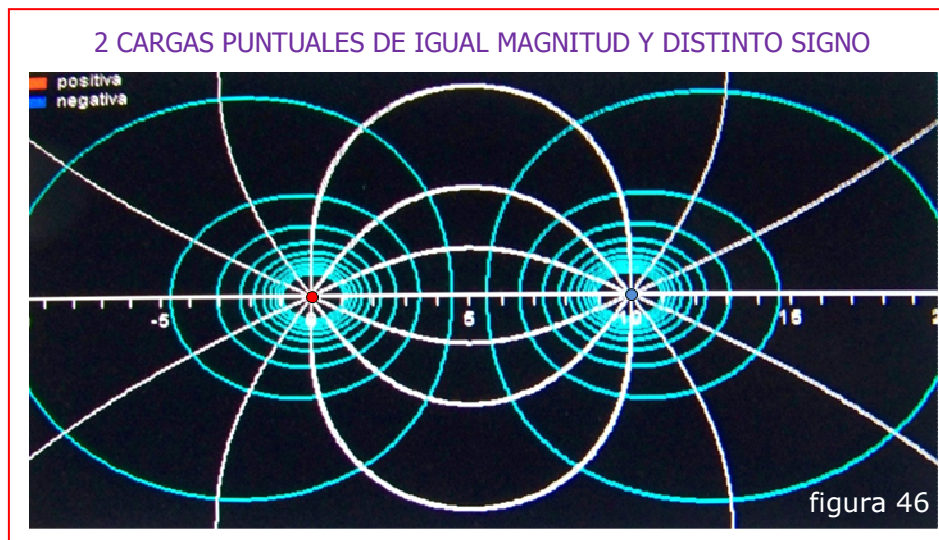
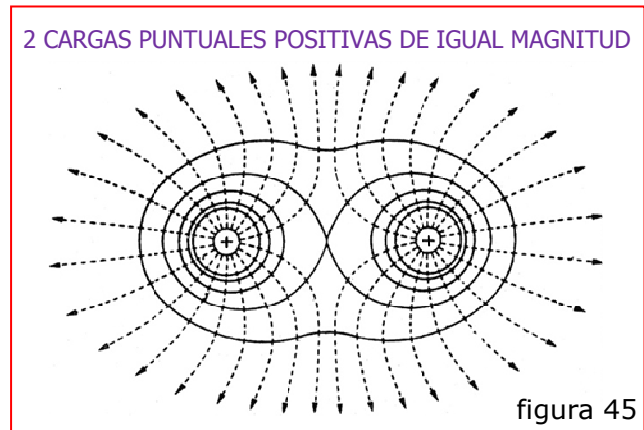
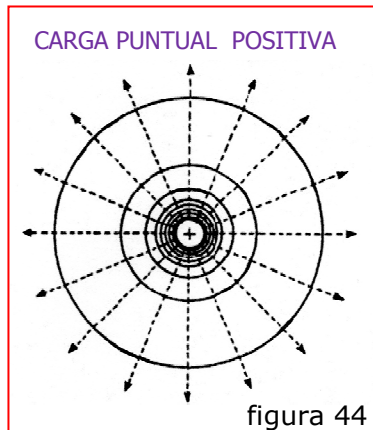
Puesto que la energía potencial de un cuerpo cargado es la misma en todos los puntos de una superficie equipotencial dada, se deduce que no es necesario trabajo eléctrico para mover un cuerpo cargado sobre una de estas superficies.

En consecuencia, la superficie equipotencial que pasa por cualquier punto es perpendicular a la dirección del campo en dicho punto (si no fuera así, el campo tendría una componente sobre la superficie y habría que realizar trabajo para mover una carga en dirección de esta componente). Las líneas de campo y las superficies equipotenciales son, por lo tanto, perpendiculares entre sí. Las líneas de campo y las superficies equipotenciales son curvas, salvo el caso especial de un campo uniforme, donde las líneas de campo son rectas paralelas y las superficies equipotenciales son planos paralelos.

Hemos visto (página 41) que las líneas de campo en la superficie de un conductor cargado son perpendiculares al conductor si las cargas se encuentran en reposo. Por consiguiente, la superficie de tal conductor es una superficie equipotencial. Además, como el campo dentro de un conductor cargado es nulo, el volumen interior de este conductor es un volumen equipotencial y tiene el mismo potencial que la superficie del conductor.

En las figuras 44/45, Las líneas de campo se han dibujado de trazos y las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano del dibujo están representadas con líneas llenas. El campo real es, naturalmente, tridimensional.

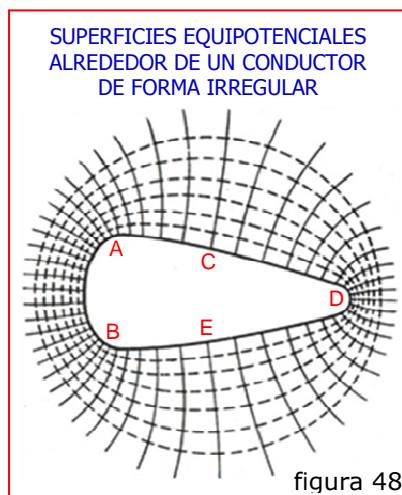
Las figuras 46/47 se han obtenido fotografiando la pantalla de un ordenador provisto de un programa apropiado para el estudio y trazado de estas líneas. Las líneas de campo se han representado en color blanco y las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la hoja en color celeste.



Supongamos que un campo eléctrico dado se ha representado por su trama de *líneas de campo* y *superficies equipotenciales*, con un espaciamiento (eléctrico) entre estas últimas igual a una misma diferencia de potencial constante ΔV (por ejemplo, 10 V ó 100 V). Sea además Δs la distancia, medida sobre la normal, entre dos superficies equipotenciales. Entonces Δs se mide en la dirección del campo y se deduce que:

$$E = - \frac{\Delta V}{\Delta s} \quad (\text{aproximadamente}), \text{ o bien: } \Delta s = - \frac{\Delta V}{E}$$

Es decir, cuanto mayor es la intensidad E del campo eléctrico, tanto menor es la distancia perpendicular Δs entre las superficies equipotenciales. Por consiguiente, las superficies equipotenciales están más próximas en un campo intenso y se hallan más separadas en un campo débil.



Supongamos que el conductor de la *figura 48* tiene una carga positiva y que deseamos saber cómo está distribuida la carga sobre su superficie. Sabemos que *la superficie del conductor es una superficie equipotencial*. También sabemos que *a distancias grandes, comparadas con las dimensiones del cuerpo, las superficies equipotenciales son superficies esféricas*, puesto que a una distancia suficientemente grande, el cuerpo puede considerarse como una carga puntual.

Las intersecciones de las *superficies equipotenciales* con el plano del dibujo, pueden dibujarse partiendo de la que se encuentra exactamente sobre el cuerpo y modificando gradualmente su forma de modo que se

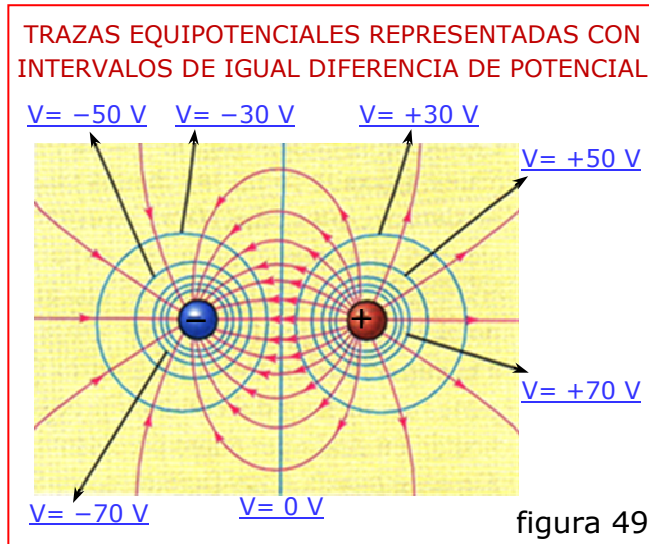
aproximen a una circunferencia. Se encontrará que *cuanto más pequeño es el radio de curvatura de la superficie, tanto más próximas se hallan las superficies equipotenciales*. El menor espaciamiento tiene lugar en la proximidad del punto D y es algo mayor en A y B. La separación máxima se encuentra frente a las caras C y E.

Las *líneas de campo* pueden ahora dibujarse trazándolas perpendicularmente a las superficies equipotenciales y *apretándolas tanto más cuanto menor es la separación entre dichas superficies*.

Puesto que la intensidad del campo eléctrico, ajustadamente fuera de la superficie, es proporcional a la densidad superficial de carga, se deduce que esta densidad es máxima en donde el radio de curvatura es mínimo y mínima donde el radio de curvatura es máximo.

Se destaca que aunque la densidad superficial de carga está lejos de ser uniforme

sobre la superficie de un cuerpo de forma irregular, el potencial es necesariamente constante en toda la superficie.



En la figura 49, donde se ha representado un dipolo eléctrico igual al de la figura 46, se han dibujado las superficies equipotenciales de modo que las diferencias de potencial entre las superficies adyacentes sean iguales (20 V). En las regiones donde E es grande, las superficies equipotenciales están próximas unas de otras porque el campo realiza una cantidad de trabajo relativamente grande sobre una carga de prueba que sufre un desplazamiento comparativamente pequeño.

◆ Reparto de Carga entre Conductores:

Cuando un conductor cargado se pone en contacto eléctrico con otro que está descargado, la carga inicial se reparte entre ambos. Resulta evidente que sucederá así como consecuencia de las fuerzas mutuas de repulsión entre las partes que componen la carga inicial. No puede decirse exactamente qué carga ha pasado de uno a otro, pero sabemos que ha de ser tal que todos los puntos de ambos conductores queden al mismo potencial.



Consideremos dos **esferas conductoras** de diferentes radios y conectadas por medio de un **hilo conductor** muy largo y delgado

(figura 50). Supóngase que todo el conjunto se eleva a algún potencial arbitrario V . Los potenciales (iguales) de las dos esferas son, de acuerdo con la ecuación (48):

$$V = k \frac{q_1}{R_1} = k \frac{q_2}{R_2}$$

de donde se obtiene:

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \quad (56)$$

Las densidades de carga superficial de cada esfera, están dadas por:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

Dividiendo se obtiene:
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}$$

Combinando con la ecuación (56), resulta:
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad (57)$$

Nótese que la esfera más grande tiene la carga total más grande, pero la densidad de carga más pequeña. Esto constituye otra confirmación de que la carga se acumula en las partes del conductor de pequeño radio de curvatura.

Nota: Las esferas se han supuesto suficientemente alejadas una de la otra, de modo que la carga de cualquiera de ellas tenga un efecto casi nulo en la distribución de carga de la otra.

El hecho de que la densidad de carga, y por consiguiente el campo eléctrico, pueda llegar a ser muy grande en puntas aguzadas es importante al diseñar equipos de alta tensión. Normalmente se considera al aire como no conductor, pero en realidad contiene un pequeño número de iones producidos generalmente por la radiación cósmica. Un conductor positivamente cargado atrae los iones negativos del aire circundante y en esa forma los neutraliza lentamente.

Si el conductor cargado tiene puntas afiladas, el valor de E en el aire cerca de las puntas puede ser muy elevado. Si este valor es suficientemente elevado, los iones, al ser atraídos hacia el conductor, pueden recibir aceleraciones tan grandes que, por choque con las moléculas de aire, se produzcan muchos iones más. El aire en esta forma se hace mucho más conductor, pudiendo originarse una descarga acompañada del efecto corona (efluvio o aureola luminosa concéntrica con los conductores, generada por los choques intermoleculares de los gases).

