Unidad temática 6

Redes eléctricas - Métodos de resolución –Teoremas

- Redes de simple y doble entrada.
- Circuitos equivalentes.
- Transformación estrella-triángulo.

Resolución de redes eléctricas.

- Método de las mallas.
  - Planteo directo de las ecuaciones de ***mallas*** o por simple inspección.
- Método de los nodos.
  - Planteo directo de las ecuaciones de ***nodos*** o por simple inspección.
- Teorema de Thevenin.
- Teorema de Norton.
- Teorema de superposición.
- Teorema de la máxima transferencia de potencia.

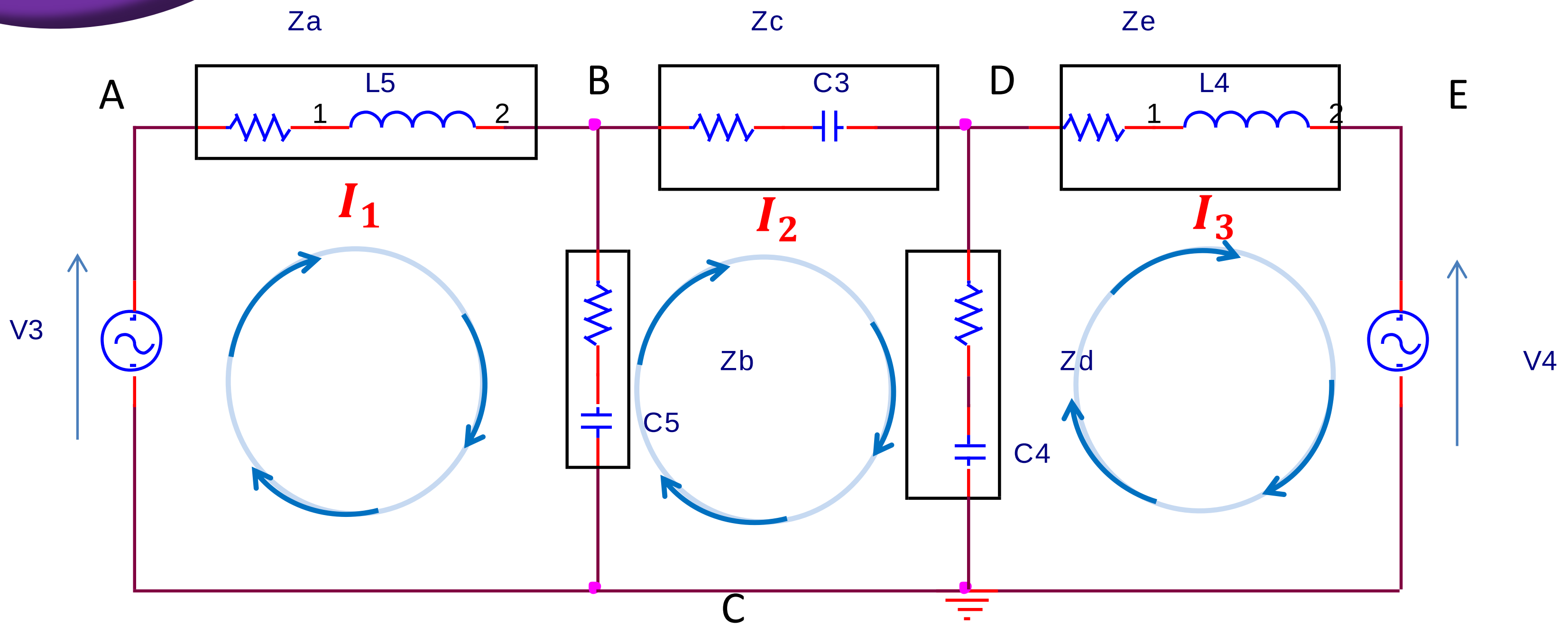
Fuentes: Teoría y Problemas de Circuitos Eléctricos, Joseph Edminister, Primera Edición.
Fundamentos de Circuitos Eléctricos, Charles Alexander – Matthew Sadiku, Tercera Edición.

Método de las corrientes de mallas.

- ***Análisis de un circuito***

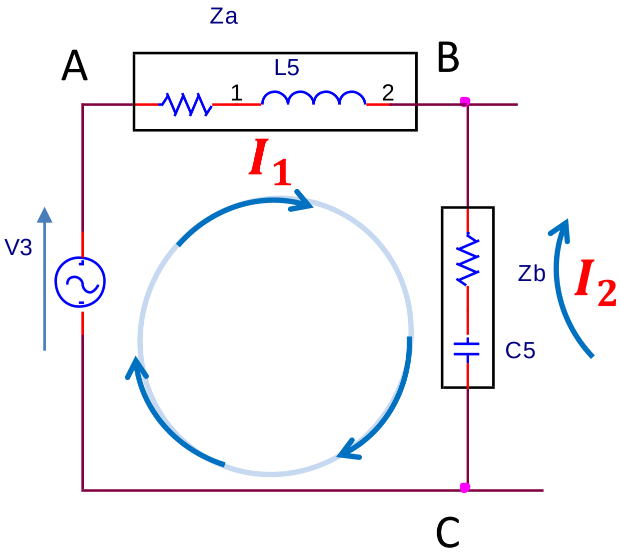
- ✓ Se elijen las mallas.
- ✓ Se asigna un sentido a la corriente que va a circular por la malla.
- ✓ Se escriben las ecuaciones de malla, teniendo en cuenta la ley de Kirchhoff de las tensiones.
- ✓ Se resuelven las ecuaciones, determinando el valor de las corrientes de malla.

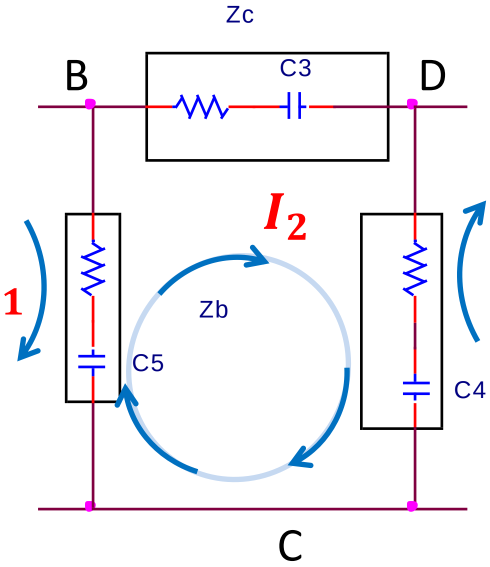
Circuito de ejemplo

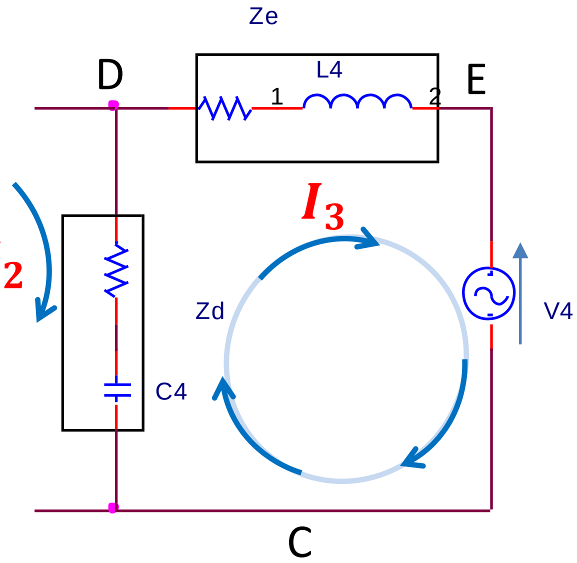


Número de ecuaciones = número de ramas – (número de nudos - 1)

Número de ecuaciones = 5 –(3-1) = 3







Malla ABC

$$I_1(Z_a + Z_b) - I_2 Z_b = V_3$$

Malla BDC

$$-I_1 Z_b + I_2(Z_c + Z_d + Z_b) - I_3 Z_d = 0$$

Malla DEC

$$-I_2 Z_d + I_3(Z_e + Z_d) = -V_4$$

El sistema de ecuaciones correspondiente quedaría

$$
\begin{array}{llll}
I_1(Z_a + Z_b) & -I_2 Z_b & & = V_3 \\
-I_1 Z_b & + I_2(Z_c + Z_d + Z_b) & -I_3 Z_d & = 0 \\
 & -I_2 Z_d & + I_3(Z_e + Z_d) & = -V_4
\end{array}
$$

Planteamiento directo del sistema de ecuaciones de mallas.

Las ecuaciones correspondientes a un circuito de tres mallas son, en notación general:

$$
\begin{array}{cccccc}
Z_{11}I_1 & \pm Z_{12}I_2 & \pm Z_{13}I_3 & = & V_1 \\
\pm Z_{21}I_1 & Z_{22}I_2 & \pm Z_{23}I_3 & = & V_2 \\
\pm Z_{31}I_1 & \pm Z_{32}I_2 & Z_{33}I_3 & = & V_3
\end{array}
$$

$\mathbf{Z_{11}}$ *Impedancia propia de la malla 1*, es la suma de todas la impedancias por la que circula la corriente de malla **I1**. $\mathbf{Z_{22}}$ **y** $\mathbf{Z_{33}}$ son las impedancias dos y tres.

$\mathbf{Z_{12}}$ *Copedancia* de la malla 1 y 2, y es la suma de todas las impedancias comunes a los dos lazos, por los que circulan las corrientes **I1** e **I2**.
$\mathbf{Z_{12} = Z_{21}}$ y $\mathbf{Z_{13} = Z_{31}}$ **;** $\mathbf{Z_{23} = Z_{32}}$ *copedancias* de las mallas 1 y 3, y 2 y3.
El signo depende del sentido que se establece en las corrientes.

Aplicación del algebra matricial al Análisis de un circuito

Sistema de ecuaciones para un circuito de tres mallas.

$$\begin{array}{cccc} Z_{11}I_1 & \pm Z_{12}I_2 & \pm Z_{13}I_3 & = V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 & Z_{22}I_2 & \pm Z_{23}I_3 & = V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 & \pm Z_{32}I_2 & Z_{33}I_3 & = V_3 \end{array}$$

En forma de matriz podemos Expresarlo de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[Z] \quad [I] \quad = \quad [V]$$

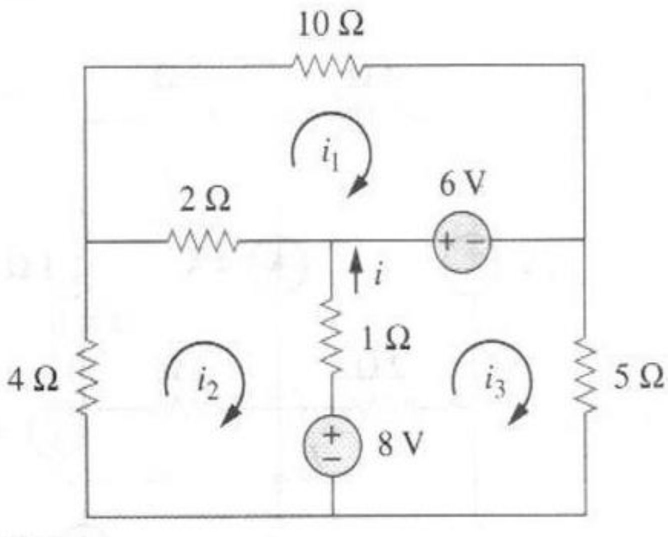
- ***Solución del Sistema de ecuaciones lineales por determinantes***

REGLA DE CRAMER

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ V_3 & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}} \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & V_2 & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & V_3 & Z_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}} \qquad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & V_1 \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & V_2 \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Determinar las corrientes de mallas.



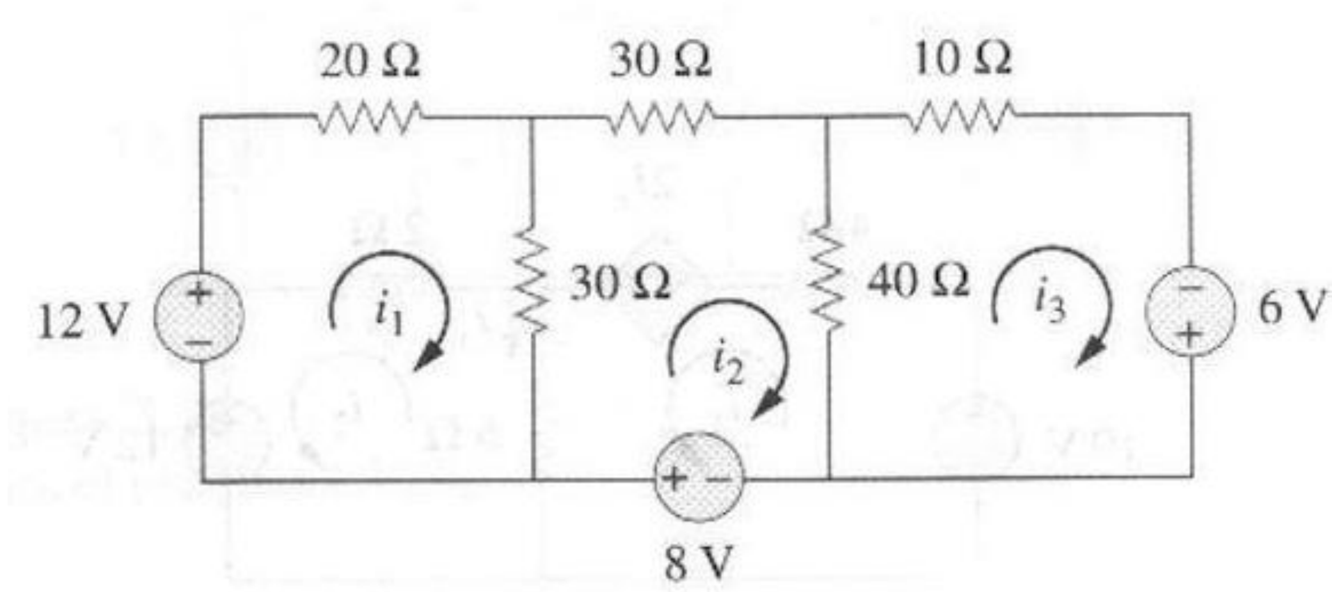
$$
\begin{aligned}
Z_{11}I_1 \quad & \pm Z_{12}I_2 \quad & \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\
\pm Z_{21}I_1 \quad & Z_{22}I_2 \quad & \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\
\pm Z_{31}I_1 \quad & \pm Z_{32}I_2 \quad & Z_{33}I_3 &= V_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}
\begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 12 \quad & - I_2 2 \quad & & = 6\text{V} \\
-I_1 2 \quad & + I_2 7 \quad & - I_3 1 & = -8\text{ V} \\
& -I_2 1 \quad & + I_3 6 & = (8\text{-}6)\text{V}
\end{aligned}
$$

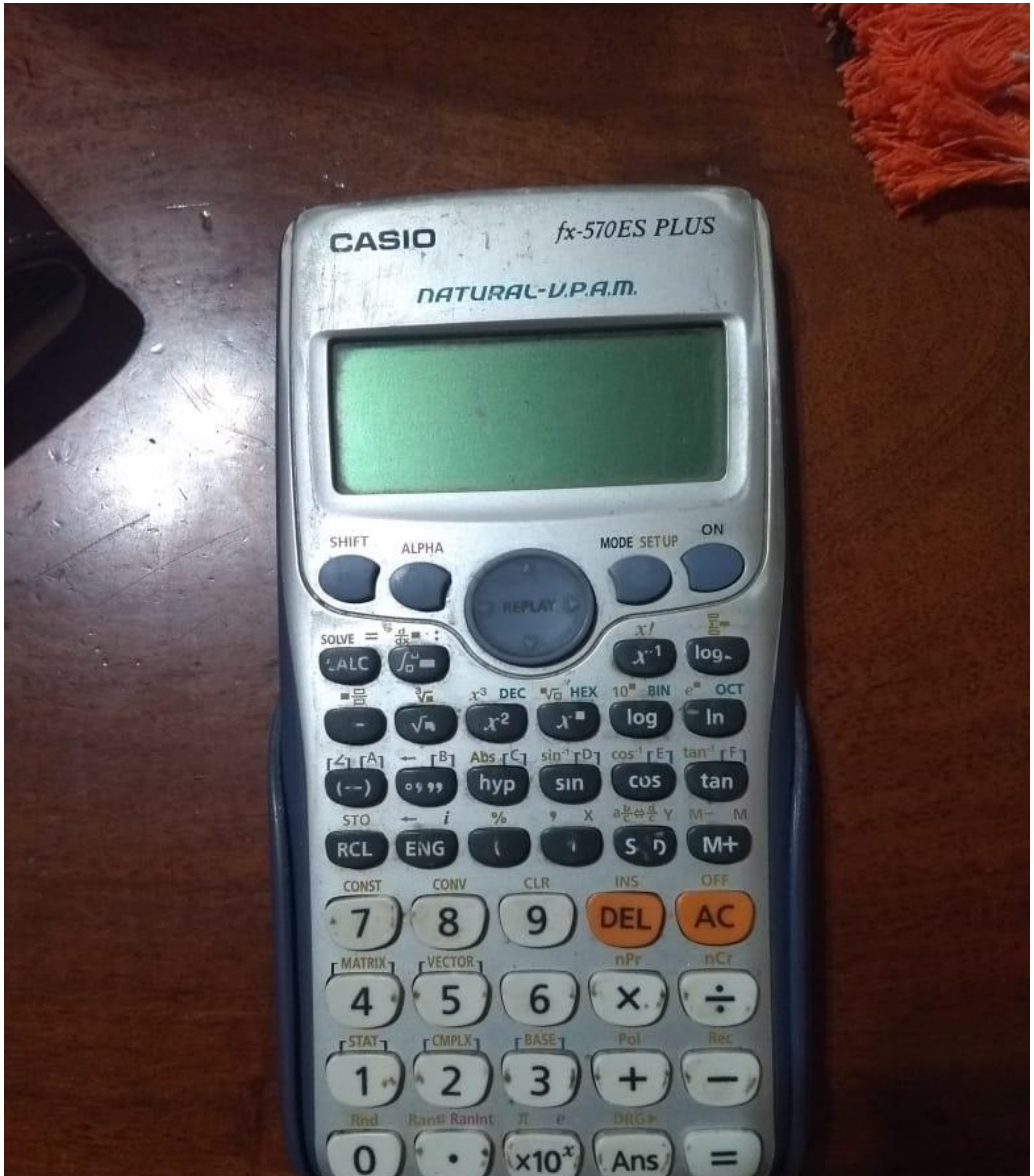
Ejemplo 2

Resolver por inspección

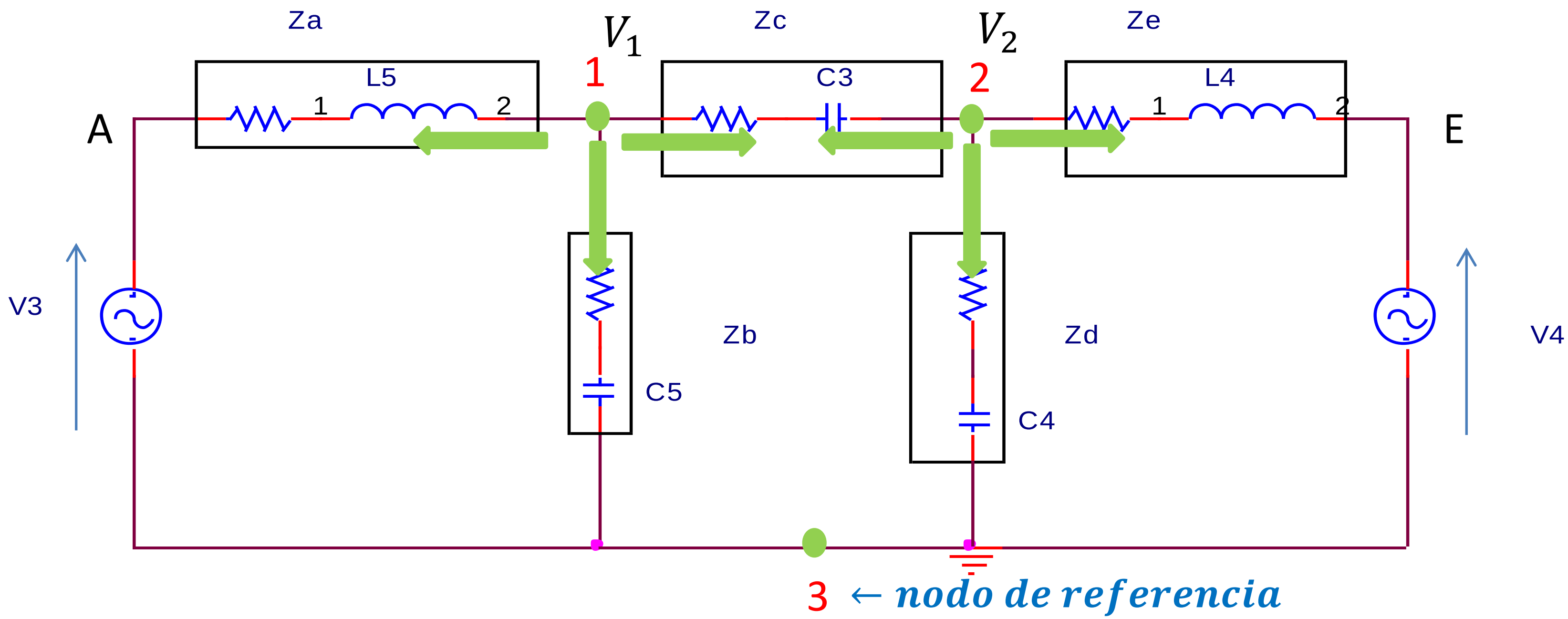


Desarrollo

$$\begin{matrix} 50 & -30 & 0 \\ -30 & 100 & -40 \\ 0 & -40 & 50 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{matrix}$$


CASIO
fx-570ES PLUS
NATURAL-V.P.A.M.
SHIFT
ALPHA
MODE SETUP
ON
REPLAY
SOLVE
log
ln
DEC
HEX
BIN
OCT
hyp
sin
cos
tan
Abs
STO
RCL
ENG
M+
CONST
CONV
CLR
INS
OFF
DEL
AC
MATRIX
VECTOR
nPr
nCr
STAT
CMPLX
BASE
Pol
Rec
Rnd
Ans
7
8
9
4
5
6
1
2
3
0
=

Método de las tensiones en los nodos.



Tensión en el nudo 1 V_1

$$\frac{V_1 - V_3}{Z_a} + \frac{V_1}{Z_b} + \frac{V_1 - V_2}{Z_c} = 0$$

$$\left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c}\right) V_1 - \left(\frac{1}{Z_c}\right) V_2 = \left(\frac{1}{Z_a}\right) V_3$$

$$(Y_a + Y_b + Y_c)V_1 - Y_c V_2 = Y_a V_3$$

Tensión en el nudo 2 V_2

$$\frac{V_2 - V_1}{Z_c} + \frac{V_2}{Z_d} + \frac{V_2 - V_4}{Z_e} = 0$$

$$-\left(\frac{1}{Z_c}\right) V_1 + \left(\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_d} + \frac{1}{Z_e}\right) V_2 = \left(\frac{1}{Z_e}\right) V_4$$

$$-Y_c V_1 + (Y_c + Y_d + Y_e)V_2 = Y_e V_4$$

- Número de ecuaciones de tensiones en los nudo (N° de nudos principales - 1)
- Planteo directo del sistema de ecuaciones

(Para un circuito de 4 nudos principales, requiere el planteo de tres ecuaciones)

Sistema de ecuaciones para un circuito de tres mallas.

$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 = I_1$$

$$Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 = I_2$$

$$Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 = I_3$$

En forma de matriz podemos Expresarlo de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} \\ Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} \\ Y_{31} + Y_{32} + Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$[Y] \quad [V] = [I]$$

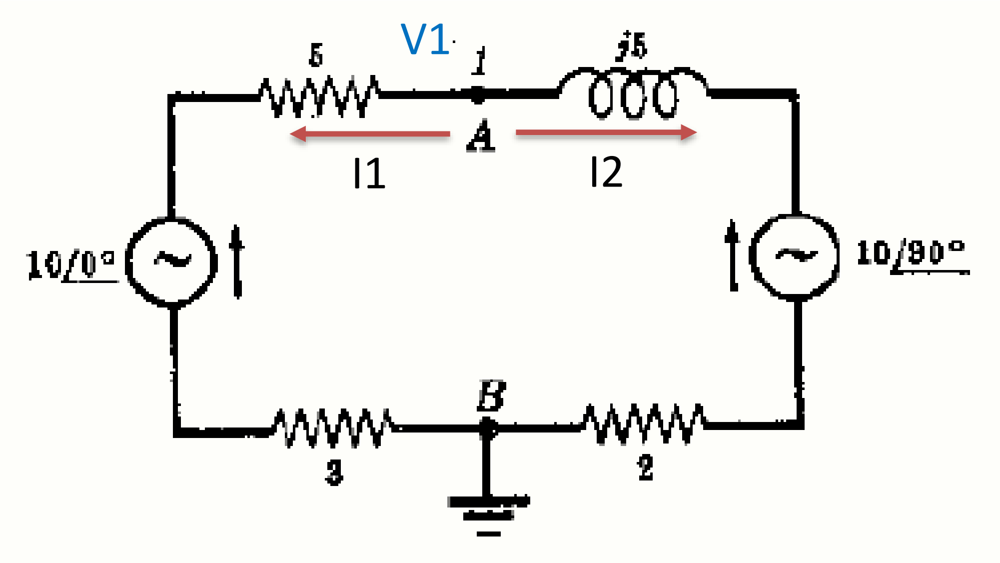
- ***Solución del Sistema de ecuaciones lineales por determinantes***

REGLA DE CRAMER

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 + Y_{12} + Y_{13} \\ I_2 + Y_{22} + Y_{23} \\ I_3 + Y_{32} + Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y} \qquad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} + I_1 + Y_{13} \\ Y_{21} + I_2 + Y_{23} \\ Y_{31} + I_3 + Y_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Y} \qquad V_3 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} + Y_{12} + I_1 \\ Y_{21} + Y_{22} + I_2 \\ Y_{31} + Y_{32} + I_3 \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

Ejemplo 1

Determinar la tensión en el *nudo 1*



Desarrollo

(V1 – 10/0°)/ 8) + (V1 – 10/90°)/ (2 + J5) = 0

$$V_1\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2+j5}\right)=\left(\frac{10/0}{8}+\frac{10/90}{2+j5}\right)$$

$$V_1 \simeq 11{,}8/55$$

Teorema de Superposición

- **Principio de superposición**

Este principio establece que la ***tensión*** entre los extremos o la ***corriente*** a través de un elemento, en un circuito lineal, es la suma algebraica de las ***tensiones*** o ***corrientes*** a través de ese elemento debido al efecto que cada fuente independiente produce actuando sola.

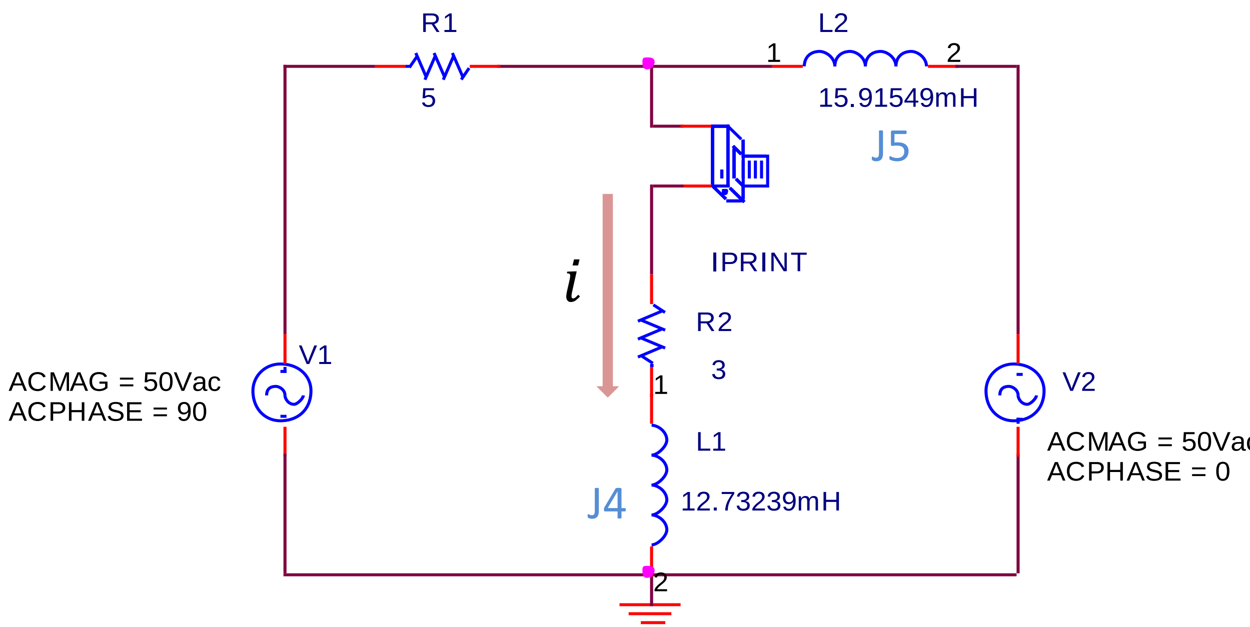
Para aplicar el principio de superposición tener en cuenta lo siguiente:

1. Dejar sin efecto todas las fuentes independientes que actúan sobre el circuito excepto una, determinando la tensión o la corriente debida a esa fuente.
2. Repetir el paso uno para cada una de las fuentes.
3. Determinar finalmente la tensión o la corriente total debida a la contribución de cada una de las fuentes sumándolas algebraicamente.

Ejemplo 1

Aplicar el principio de superposición al circuito y determinar la corriente que circula por la impedancia (3 + j4).

- *Realizar el circuito con Pspice y comparar los resultados.*

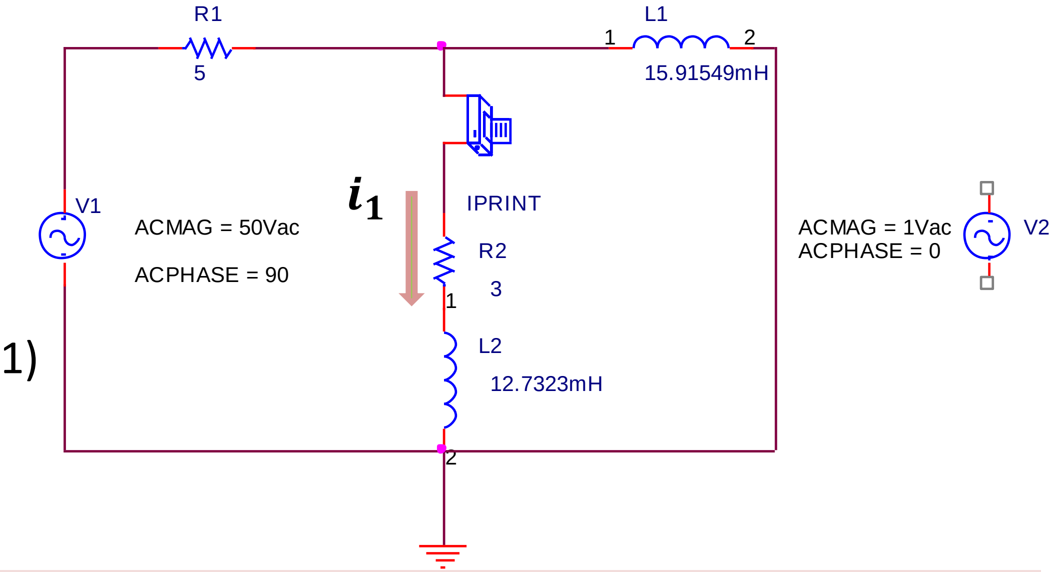


Resultado usando Pspice

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
5.000E+01	8.305E+00	8.524E+01

$$\boxed{i = 8{,}30\ \underline{/85{,}24°}\ \text{A}}$$

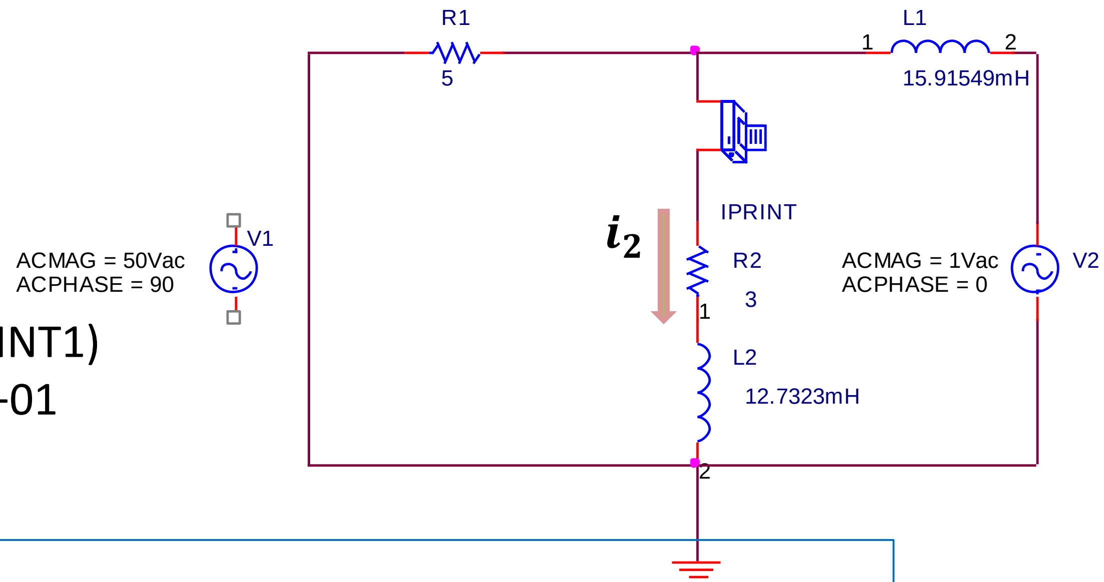
- Fuente V_2 igualada a cero.
- Determino I_1, Debido a V_1



Resultado usando Pspice

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
5.000E+01	4.152E+00	8.524E+01

- Fuente V_1 igualada a cero.
- Determino I_2, Debido a V_2



Resultado usando Pspice

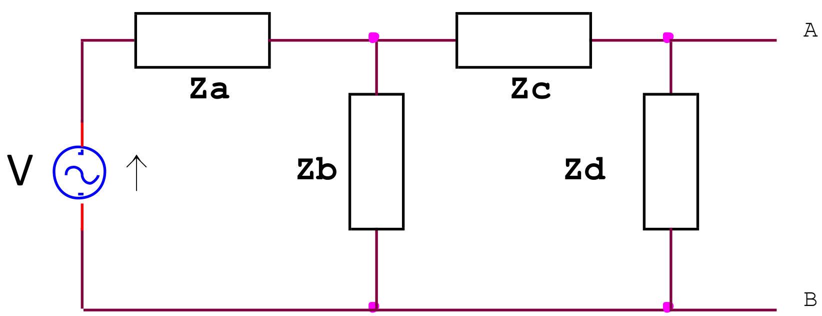
FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
5.000E+01	4.152E+00	8.524E+01

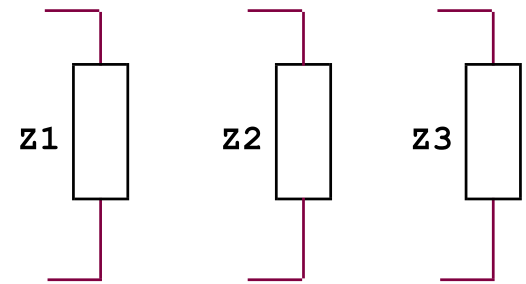
Sumando las corrientes nos queda

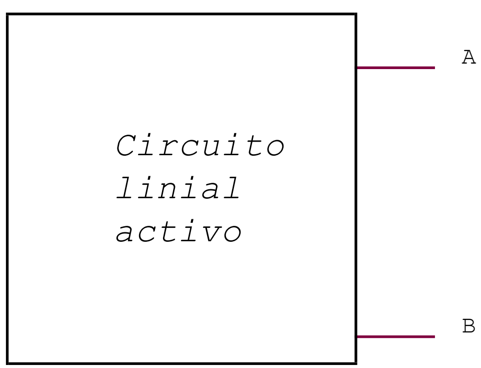
$$i_1 + i_2 = 4,152 \,/\underline{85,24°} + 4,152 \,/\underline{85,24°} = 8,30/\underline{85,3°\;\; A}$$

Teorema de Thevenin

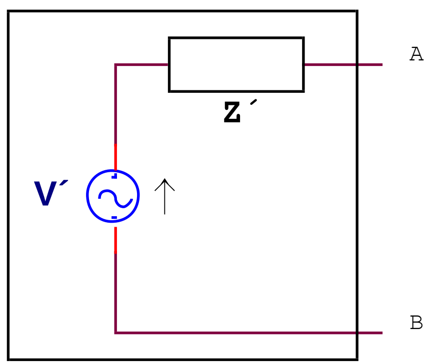
- La ***tensión equivalente de thevenin***, es la tensión a circuito abierto entre los terminales AB.
- La ***Impedancia equivalente de thevenin***, es la impedancia de entrada en los terminales AB, haciendo que todas las fuentes internas sean cero.







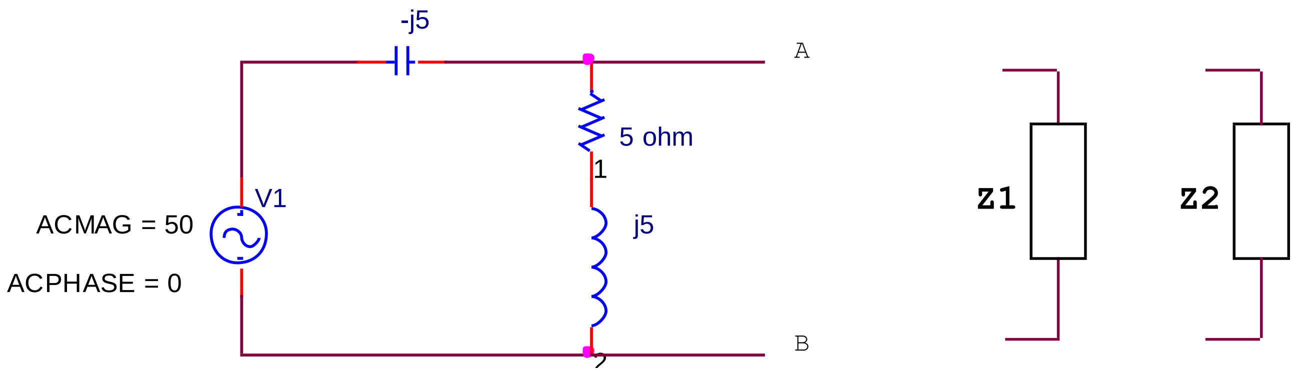
Circuito equivalente de ***thevenin.***
Fuente de ***tensión*** *en serie con una* ***impedancia****.*



Ejemplo 1

Si conectamos a los terminales sucesivamente dos impedancias, $Z_1 = 5\ - j5\ \ y\ Z_2\ = 10/0°$

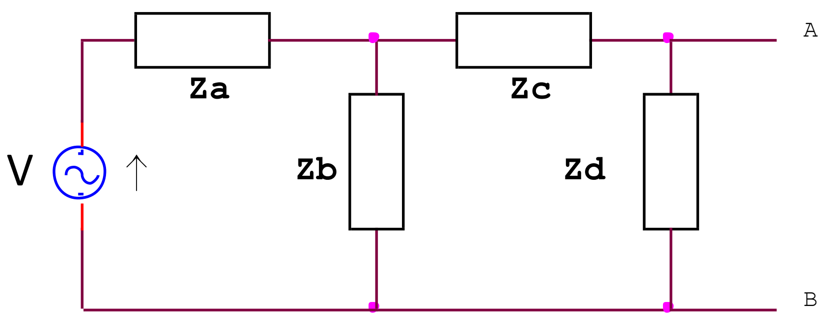
Determinar la potencia a ellas suministrada.

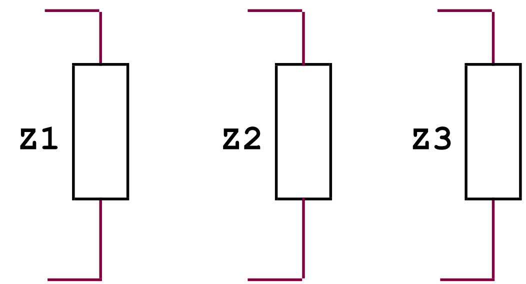


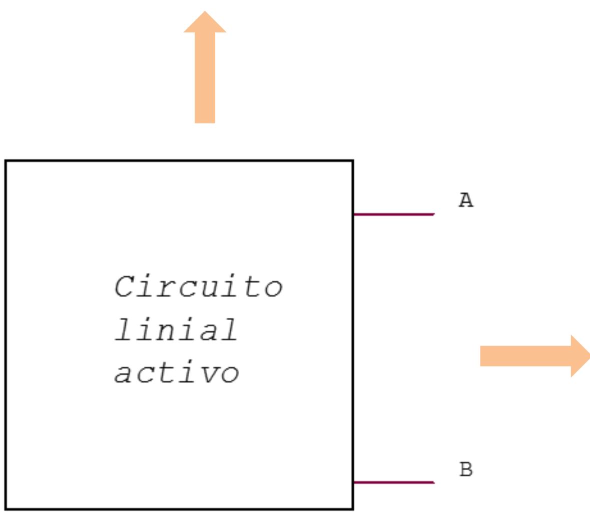
Desarrollo

Teorema de Norton

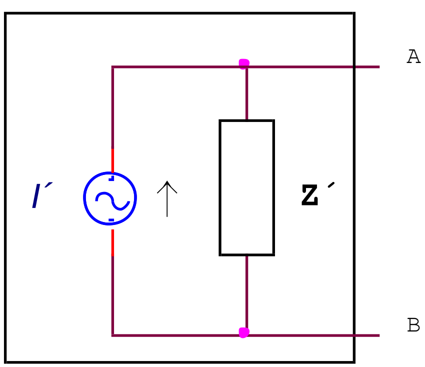
- La ***fuente de Intensidad I´***, es la corriente en un cortocircuito aplicado entre los terminales AB del circuito activo.
- La ***Impedancia equivalente de Norton***, es la impedancia de entrada en los terminales AB, haciendo que todas las fuentes internas sean cero.







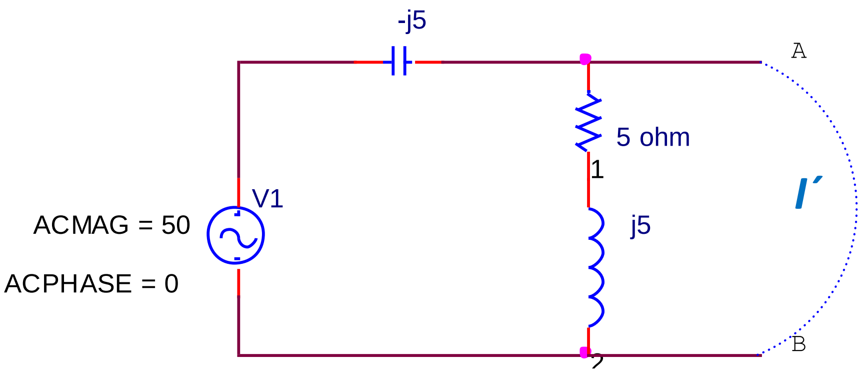
Circuito equivalente de ***Norton.***
Fuente de ***tensión*** *en paralelo con una* ***impedancia****.*

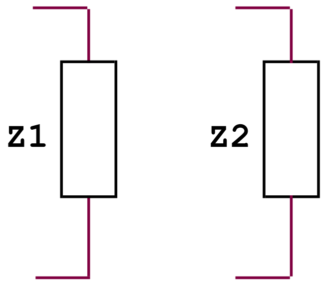


Ejemplo 1

Si conectamos a los terminales sucesivamente dos impedancias, $Z_1 = 5 - j5$ y $Z_2 = 10/0°$

Determinar la potencia a ellas suministrada.





Desarrollo

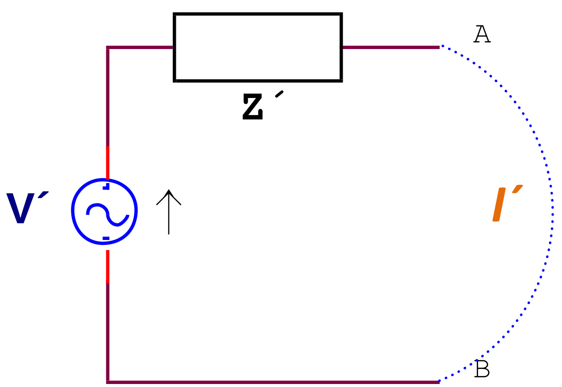
Equivalencia entre los circuitos de Thevenin - Norton

Si miramos a los extremos de los terminales A y B, en ambos circuitos, las impedancias son iguales es decir **Z´.**

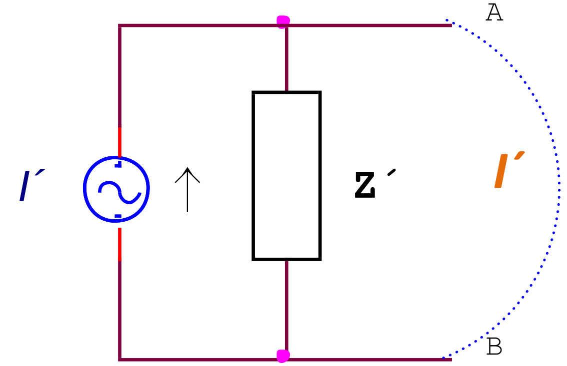
- Si ponemos en cortocircuito ambos circuitos, la corriente en el de *Thevenin* viene dada por $\frac{V'}{Z'}$ y en el de *Norton* I'.

  Entonces, como las corrientes son iguales podemos escribir $\mathrm{I}' = \frac{V'}{Z'}$

- Se puede obtener la misma relación determinando la V´ a circuito abierto.



Thevenin



Norton