DETERMINANTE. Concepto

Determinante es una función que teniendo como dominio el conjunto de matrices cuadradas M^{nxn} y como conjunto de salida el conjunto de los números reales hace corresponder a cada matriz A de orden nxn un número real llamado determinante.
En símbolos: det: $M^{nxn} \to \mathbf{R}$ / det (A) = a, $a \in \mathbf{R}$

Métodos para calcular determinantes:

Determinantes de matrices de orden 2x2

Si A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de orden 2x2. El determinante de la matriz A, det A o |A|, es el número real que se obtiene al resolver la sustracción entre el producto de los elementos de la diagonal principal y el producto de los elementos de la diagonal secundaria.
Esto es det (A) = $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo

Si A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ entonces det A = 2.3 – 4.(–1)= 10

Regla de Sarrus

Para calcular determinantes de orden 3 x 3 aplicaremos la Regla de Sarros que consiste en utilizar una disposición auxiliar en la que escribimos la matriz A seguida de sus dos primeras columnas:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Para calcular el determinante de la matriz A hacemos seis productos: el de los elementos de la diagonal principal de A y dos productos que los obtenemos de multiplicar los elementos que se encuentran en las líneas paralelas a dicha diagonal; los resultados de estos tres productos se suman. A esta suma le restamos los productos de los elementos de la diagonal secundaria de A y el producto de los elementos que se encuentran en las líneas paralelas a ésta. De esta forma obtenemos la expresión:

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, para calcular su determinante realizamos la disposición indicada en la regla de Sarrus

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right.$$

y obtenemos que

$$|A| = 2 + 56 + 0 - 16 - 0 - 20 = 22$$

Si la matriz es de orden superior a 3 se utiliza la definición de determinante para matrices de orden nxn.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE DETERMINANTES:
<u>Regla de Cramer</u>

La regla de Cramer ofrece un método, aplicando determinantes, para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma AX = B donde A es la matriz de coeficientes del sistema de orden nxn, X la matriz de las incógnitas de orden nx1 y B la matriz de los términos independientes de orden nx1.

El valor de la variable j-ésima, se obtiene calculando: $x_j = \dfrac{|Aj|}{|A|}$ siendo $|A| \neq 0$

$|Aj|$ es el determinante de la matriz Aj que se obtiene a partir de la matriz A reemplazando la columna j-ésima por la columna de los términos independientes. Nótese que la matriz A debe ser regular.

Genéricamente en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

cuya forma matricial es: AX=B , donde A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes y

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ la columna de los términos independientes, con $|A| \neq 0$

Como $|A| \neq 0$ el sistema tiene única solución y los valores de las dos incógnitas son:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Si det A = 0, el sistema AX = B es compatible indeterminado o incompatible y en estos casos es necesario recurrir a otros métodos como el de eliminación de Gauss para resolverlos.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 = 14 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 14 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, 2)$

ACTIVIDADES: DETERMINANTES

1- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula det A.

2- Si A = $\begin{pmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 \end{pmatrix}$ y $x \in \mathbf{R}$, expresa el det A en función de x.

3- Si existe, halla el valor de $k \in \mathbf{R}$ para que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & k \end{pmatrix}$ sea cero.

4- Resuelve las siguientes ecuaciones en la variable $x \in \mathbf{R}$:

a) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 3/2$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

c) $3\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} - x = 0$

d) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 7 & 7-x \end{vmatrix} = 26$

e) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2x \\ 0 & x & 99 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 60$

5- Considera la matriz X = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y calcula el determinante de la matriz que se obtiene al resolver la expresión $X^2 - 2X + 3I$.

6- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando la Regla de Cramer

a) $\begin{cases} 2x - y = -9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 11 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3y + 5z = 4 \\ 2x - z = 10 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$

Respuestas Actividades Determinantes

---

1. det A = 13

2. det A = $-x^2 + 3x$

3. No existe ningún valor real que anule el determinante.

4. a) $x = \frac{-1}{6}$, $x = \frac{3}{2}$ b) x = –4 x = 5 c) x = 2, x = –3

d) x = 3, x = 4 e) x = –4 x = 5

5. El valor del determinante es 2.

6. a) (x,y) = (-2 , 5) b) (x,y) = (0.6 , -0.4) c) (x,y,z) = (4, 2 ,-1)

d) (x,y,z) = (189/29 , -108/29 , 88/29)