ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE NÁUTICA Y MÁQUINAS NAVALES / NAUTIKAKO ETA ITSASONTZI MAKINETAKO GOI ESKOLA TEKNIKOA

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

6. MATRICES Y DETERMINANTES

6.1 Definición de matriz de números.

Una matriz orden (m × n) es un conjunto de *m* × *n* números ordenados en una tabla:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en donde podemos apreciar horizontalmente las filas, fila 1: ($a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}$), fila 2: ($a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}$), etc. Mientras que verticalmente se habla de columnas: columna 1, columna 2, etc.

Por tanto, una matriz de orden (m × n) tiene *m* filas y *n* columnas. En caso de que el número de filas y el de columnas sea el mismo se habla de matriz cuadrada.

Las matrices cuadrada tienen dos diagonales, de las cuales sobre un ejemplo vemos la que se llama "diagonal principal" de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 17 \\ 12 & -3 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 3 & -4 \\ 15 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

Para tratarlas teóricamente las matrices se suelen expresar en forma abreviada así:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

es decir, con un nombre propio y dos subíndices, a_{ij}, siendo el primer subíndice -en nuestro caso el *i*- el correspondiente a la fila i-*ésima*, cuyo recorrido va desde 1 hasta *m*; y el segundo subíndice -en nuestro caso la *j*- es el correspondiente a la columna j-*ésima*, cuyo recorrido va desde 1 hasta n. El alumno debe ser muy consciente de este significado de los índices.

6.2 Operaciones con matrices.

* ADICIÓN:

Sean A y B son dos matrices del mismo orden , entonces la matriz suma S = A + B es:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ B = (b_{ij}) \end{array}\right\} \quad (s_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

es decir, se suman los correspondientes elementos (i,j) de A con los (i,j) de B. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

* <u>PRODUCTO POR UN *ESCALAR*</u>:

Sea A una matriz y *k* un escalar (un número real), entonces la matriz B = *k* A es:

$$\left.\begin{array}{c} A = (a_{ij}) \\ k \in R \end{array}\right\} \quad (b_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

es decir, se multiplica cada elemento de la matriz A por el número *k*. Ejemplo:

$$4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 20 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando esto, podemos hablar de la RESTA de dos matrices A - B, como la suma de A con el producto de (-1)B, lo cual equivale a restar los correspondientes elementos (i,j) de A con los (i,j) de B.

* <u>PRODUCTO DE MATRICES:</u>

Sea A una matriz de orden (m × n), y B una matriz de orden (n × r), entonces la matriz producto, es una matriz P = A . B de <u>orden (m × r)</u>:

$$\left.\begin{array}{c} A = (a_{ij}) \\ B = (b_{ij}) \end{array}\right\} \quad p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

(Observe el alumno cómo para obtener el elemento p_{ij}, se multiplican cada elemento de la <u>fila i de A</u> por cada elemento respectivo de la <u>columna j de B</u>). Tomemos como ejemplo las matrices A , tipo (3 × 2), y B, tipo (2 × 4):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Así obtenemos P = A . B, cuyo resultado es:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -9 & -3 & 22 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ 13 & -12 & -50 & 37 \end{pmatrix}$$

en la que se han ido obteniendo los elementos multiplicando fila de A por columna de B (por ejemplo):

$$p_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$$
$$-1.\,6 \;+\; 0\,.\,(-5) \rightarrow -6$$

Mejor veámoslo gráficamente:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & -6 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

- El producto de dos matrices de orden $(n \times n)$, es una matriz tipo $(n \times n)$.
- En general A . B ≠ B . A (*el producto no es conmutativo*)
- El producto es asociativo A . (B . C) = (A . B) . C

6.3 Matrices cuadradas.

Las matrices cuadradas juegan un papel fundamental en el cálculo matricial. En ellas el número de filas es el mismo que el de columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en este caso hablaremos de "matriz cuadrada de orden *n*". Dadas dos matrices A y B que sean del mismo orden (orden *n*, por ejemplo), podemos realizar A+B y A.B, puesto que el producto de dos matrices de orden *n* es otra matriz de orden *n*.

* **Matriz identidad** (orden *n*):

Es una matriz cuadrada (orden *n*), representada como I_n, en la que todos sus elementos son 0, excepto los de la diagonal principal, que son *unos*:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz cumple la siguiente propiedad: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

es decir, al multiplicarla por cualquier matriz A, vuelve a dar la misma A. En otras palabras, I_n representa el elemento unitario para el producto de matrices. Teniendo en cuenta ello, puede hablarse de matriz inversa de una matriz dada.

En concreto, sea A una matriz cuadrada (orden *n*), diremos que A es inversible si existe otra matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

en este caso, a la matriz B la llamaremos inversa de A, y la representaremos A^{-1}, así podremos expresar mejor:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

No para toda matriz A puede encontrarse su matriz inversa, enseguida veremos las condiciones que deben cumplir las matrices para ser inversibles, antes veamos un repaso de otras matrices notables.

*** Matrices especiales**

Matriz traspuesta de A:

(NOTA: El concepto de matriz traspuesta no es exclusivo de matrices cuadradas.) Sea una matriz A de orden (m × n), se llama "matriz traspuesta de A", a una matriz, ${}^{t}A$, de orden (m × n), obtenida a partir de A, cambiando filas por columnas.

$$A = (a_{ij}) \quad , \quad {}^{T}A = (a_{ji})$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^{t}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Las matrices traspuestas tienen especial importancia para matrices cuadradas.

Propiedades de matrices traspuestas:

1. ${}^{t}({}^{t}A) = A$
2. ${}^{t}(A + B) = {}^{t}A + {}^{t}B$
3. ${}^{t}(A \cdot B) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A$

Matriz simétrica:

Una matriz A es "simétrica" si coincide con su traspuesta, es decir si: $A = {}^{t}A$. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe cómo los elementos en posiciones simétricas, respecto de la diagonal principal, son iguales.

Matriz antisimétrica:

Una matriz A es "antisimétrica" si su opuesta coincide con su traspuesta, es decir si : $-A = {}^{t}A$. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe cómo los elementos en posiciones simétricas, respecto de la diagonal principal, son iguales pero con signo opuesto. Los elementos de la diagonal principal son todos 0 (son iguales a sí mismo con signo opuesto)

Matriz ortogonal:

Una matriz A es "ortogonal" si su inversa es igual a su transpuesta, es decir: $A^{-1} = {}^{t}A$. En este caso, también se tiene que: $A \cdot {}^{t}A = I_n$.

6.4 Matriz inversa de una matriz cuadrada.

Antes de comenzar el alumno debería repasar el tema de determinantes, en especial la cuestión sobre menores complementarios y adjuntos.

Sea la matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si su determinante, |A|, es no nulo, entonces diremos que la matriz A es inversible, es decir, existe una matriz inversa, A^{-1}, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Es posible comprobar que la matriz inversa de una matriz inversible A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo los A_{ij} los *adjuntos* de los elementos de la matriz, pero ATENCIÓN: Observe como la matriz de arriba está formada por la transpuesta *de los adjuntos* de los elementos de *A*. A (esa matriz suele llamarse "traspuesta de la adjunta de A" es decir: ${}^{t}A^{*}$).

Vamos a hallar, como ejemplo, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

teniendo en cuenta que su determinante es, |A| = -49, y por tanto A es inversible, pasamos a hallar los adjuntos:

$$A_{11} = -3,\quad A_{12} = -35,\quad A_{13} = 46$$
$$A_{21} = -12,\quad A_{22} = 7,\quad A_{23} = -12$$
$$A_{31} = 5,\quad A_{32} = -7,\quad A_{33} = 5$$

y por tanto, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-49}\begin{bmatrix} -3 & -12 & 5 \\ -35 & 7 & -7 \\ 46 & -12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.061 & 0.245 & -0.102 \\ 0.714 & -0.142 & 0.142 \\ -0.938 & 0.245 & -0.102 \end{bmatrix}$$

El alumno puede comprobarlo haciendo el producto A **.** A^{-1} y observar que se obtiene la matriz identidad de orden 3.

6.5 **Rango de una matriz** (cuadrada o no).

Sea una matriz (m × n):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

antes de dar la definición de rango de A vamos a ver dos definiciones previas:

* **Submatriz cuadrada** (orden h) **de A**:

Es la matriz cuadrada (h × h) formada por los elementos comunes a h filas y h columnas, con h≤n, h≤m.

* **Menores** (orden h) **de A**:

Son los determinantes de las submatrices cuadradas (orden h) de A.

Entonces **rango de la matriz** A, r(A), es el número que expresa el orden del mayor *Menor* no nulo de la matriz A. (Atención a la *anti-redundancia* "mayor Menor" ☺)

Por ejemplo, veamos el rango de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que r(A) = 3, puesto que al menos hay un menor de orden 3 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

y por supuesto no es posible tomar *menores* de orden 4 ó mayores porque sólo hay tres filas.

El rango de matrices es fundamental para el cálculo algebraico en espacios vectoriales, aplicaciones lineales y en sistemas de ecuaciones lineales.

* **Algo más sobre el rango de matrices.**

Operaciones elementales que pueden realizarse con una matriz para calcular su rango sin que éste varíe

1. Intercambiar dos líneas entre sí.
2. Suprimir una línea que tenga todos sus elementos nulos.
3. Suprimir una línea que sea proporcional a otra.
4. Suprimir una línea que sea combinación lineal de otra/s
5. Multiplicar o dividir una línea por un número distinto de cero.
6. Sustituir una línea i de este modo : $L_i \leftarrow a \cdot L_i + b \cdot L_k$

* **Cálculo del rango por el método de Gauss.**

Básicamente consiste en hacer nulos los elementos que hay debajo de los a_{ii} con i= 1, 2, 3, ..., m-1 ; y el rango final será el *número de filas distintas de cero*.

* En una etapa *i* cualquiera se deja fija la fila *i* , y tomando como referencia el elemento a_{ii} por medio de operaciones elementales se hacen cero todos los elementos de su columna (los que estén por debajo de él).

* Si el elemento a_{ii} es igual a cero, es preciso intercambiar previamente esa fila por alguna otra *fila de debajo*, y si no es posible (porque también sea cero) con alguna *columna de la derecha*, hasta conseguir que a_{ii} sea distinto de cero (*es conveniente, para evitar cálculos tediosos que sea 1,* si no lo fuera, utilizando operaciones sencillas intentaremos cambiarlo a *1*).

Finalmente, *el rango es el número de filas distintas de cero* que aparecen en la matriz.

Ejemplo**:**

Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Hacemos 0 los elementos debajo de a_{11}: Sustituimos F2 por F2 - 3F1, similarmente F3 por F3 - 2F1 ,...

El rango de ambas matrices será el mismo:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora intercambiamos la fila F2 con la F4 (sigue siempre siendo el mismo rango):

$$r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos 0 los elementos debajo del a_{22}:   sustituimos F3 por F3 - 7F2:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Y ya tenemos ceros por debajo de la diagonal. El rangode A es 3 (cantidad de filas no nulas).

Ejercicios para el alumno:

1) Realizar los productos de matrices siguientes:

$$a)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 9 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$a)\ \begin{bmatrix} 12 & 63 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -29 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & -11 \\ 4 & 52 & 71 \\ -9 & 1 & 39 \end{bmatrix}$$

2) Hallar las matrices inversas de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.3333 & 0.1667 \\ 0.5833 & 1.6667 & 1.5833 \\ 0.4167 & 0.3333 & 0.4167 \end{bmatrix},\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6667 & -0.166 & -0.166 \\ -0.333 & 0.333 & 0.333 \\ -2 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1.875 & 0.125 & 0.25 \\ 0.875 & 0.125 & 0.25 \\ -5.875 & -0.125 & -1.25 \end{bmatrix}$$

II. DETERMINANTES

6II.1 Definición de determinante de una matriz cuadrada.

Supongamos una matriz cuadrada *A* (puede repasar la noción de matriz) de *orden n*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Llamamos determinante de *A*, det *A*, al número obtenido al sumar todos los diferentes productos de n elementos que se pueden formar con los elementos de dicha matriz, de modo que en cada producto figuren un elemento de cada distinta fila y uno de cada distinta columna, a cada producto se le asigna el signo (+) si la *permutación* de los subíndices de filas es del mismo orden que la *permutación* de los subíndices de columnas, y signo (-) si son de distinto orden.

El alumno puede dar un repaso de la noción de permutación, en caso de necesitarlo.

Para el determinante de A, suelen emplearse indistintamente las notaciones: det A, |A|. Pasemos a ver ejemplos:

Para una matriz de orden 2, su determinante se calcula:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underset{[12]}{a_{11}a_{22}} + \underset{[21]}{(-a_{12}a_{21})}$$

Cada producto tiene que estar formado por un elemento de la *primera fila* y un elemento de la *segunda fila*, pero al mismo tiempo tienen que ser un elemento de la *primera columna* y un elemento de la *segunda*. Sólo hay dos emparejamientos posibles, los que están arriba indicados. En cuanto al signo de cada producto, si los ordenamos siempre según el orden de las filas (12) nos debemos fijar en el orden de las columnas (los segundos índices) de cada agrupación, nosotros lo hemos indicado debajo entre corchetes.

Como el primer producto representa una permutación par su signo es positivo, en cambio en el segundo es impar y es negativo.

* **Determinante de una matriz de orden** 3:

Sea A una matriz de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

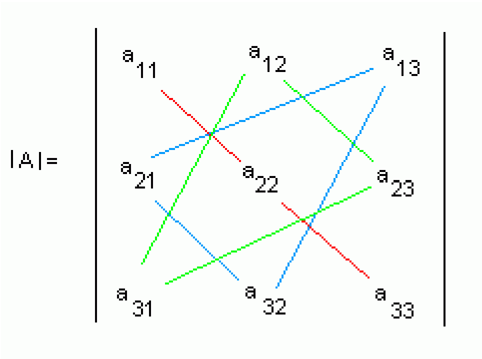
para expresar |A| hay que considerar todas las permutaciones de (123), son seis:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_{22}a_{33} \rightarrow +\ (par)\\
&a_{11}a_{23}a_{32} \rightarrow -\ (impar)\\
&a_{12}a_{21}a_{33} \rightarrow -\ (impar)\\
&a_{12}a_{23}a_{31} \rightarrow +\ (par)\\
&a_{13}a_{21}a_{32} \rightarrow +\ (par)\\
&a_{13}a_{22}a_{31} \rightarrow -\ (impar)
\end{aligned}
$$

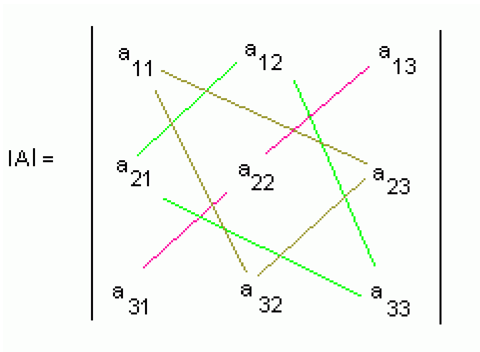
por lo tanto, este determinante será:

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
$$

De una manera *mnemotécnica* podemos recordar que son positivos el producto de los tres elementos de la diagonal principal, y los de los dos "triángulos" en el mismo sentido:



mientras que son negativos los productos de la otra diagonal, y sus respectivos "triángulos":



6II.2 Propiedades de los determinantes

1. Para cualquier A, se verifica : $|A| = |^{t}A|$
2. Si una matriz A tiene <u>una fila o columna formada por ceros</u>, entonces $|A| = 0$.
3. Si a los elementos de una fila o columna de la matriz A se multiplica (o divide) por un número *k*, entonces su determinante queda multiplicado (o dividido) por *k*.
4. Si en una matriz cuadrada <u>se intercambian entre sí dos filas</u> (o dos columnas), su determinante cambia de signo.

5. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o dos columnas) iguales, su determinante es nulo.

6. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o dos columnas) proporcionales, su determinante es nulo.

7. Si a los elementos de la fila (o columna) i-ésima de un determinante la descomponemos en una suma de *h* sumandos, el determinante es igual a la suma de los *h* determinantes que se obtienen como se ve en el ejemplo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} & a_{23}+b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Si a una fila (o columna) de una matriz dada se le suma una combinación lineal del resto de sus filas (o columnas), su determinante no varía.

9. Para el producto de matrices se tiene:

$$|A \,.\, B| = |A| \,.\, |B|$$

6II.3 Menor complementario y adjunto.

Dada una matriz cuadrada de orden *n*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

* **Menor complementario**:

Se llama <u>menor complementario</u> del elemento a_{ij} , al determinante de la matriz de orden n-1 obtenida al eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima, se le denota como α_{ij}.

Como ejemplo, consideremos la matriz A de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

por cada uno de sus nueve elementos podemos hallar su *menor complementario* correspondiente. Aquí indicamos algunos ejemplos de ellos:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

*** Adjunto de un elemento**:

Consideremos una matriz cuadrada, por ejemplo la matriz A de orden 3 de arriba, se llama adjunto del elemento a_{ij}, y se le representa por A_{ij} al número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Es decir, es igual al menor complementario α_{ij} del elemento pero con el signo cambiado si (i +j) es impar.

En concreto para la matriz A de orden 3, habrá que cambiar los signos de los *menores complementarios* de aquellos elementos indicados con (-):

$$A^* = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Si en una matriz cuadrada A son cambiados sus elementos por sus respectivos adjuntos obtenemos la llamada matriz adjunta de A, representada normalmente por A*. Tenga en cuenta que para el cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada inversible, se utiliza la traspuesta de la adjunta: ${}^{t}A^*$.

6II.4 Cálculo del determinante por los adjuntos.

El valor del determinante de una matriz cuadrada A, es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus correspondientes adjuntos. Por ejemplo, para una matriz A, de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

para calcular el determinante, |A| , podemos considerar una fila (o columna) cualquiera -por ejemplo, la fina 2-, y lo desarrollamos así:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

en la práctica para desarrollar el determinante suele elegirse una fila (o columna) que contenga uno o más ceros, con lo cual esos términos son nulos y el cálculo es más sencillo.

6II.5 Algunos ejercicios sobre determinantes.

Veamos en primer lugar algunos ejercicios resueltos.

Ejercicio 1: Utilizando propiedades hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Llamaremos F_1 a la fila primera, F_2 a la fila segunda, etc. ; y C_1 a la columna primera, C_2 a la columna segunda, etc.

Se utiliza la propiedad 8, es decir, a una fila (o columna) se la puede sumar una combinación del resto sin que el determinante varíe. Esto se hace con el objetivo de dejar en una fila (o columna) varios *ceros* para después desarrollar el determinante por los adjuntos de esa fila.

Lo más sencillo es comenzar por una fila (o columna) en la que haya un 1 -en nuestro caso comenzamos por la fila F_3-, y operamos de la siguiente forma:

a) Sumamos a F_1: $-2\ F_3$
b) Sumamos a F_2: $2\ F_3$
c) Sumamos a F_4: $1\ F_3$

Así conseguimos tres ceros en la columna primera:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

ahora desarrollamos el determinante por los elementos de la columna primera (observe que al elemento a_{31}, al 1 en nuestro caso, le corresponde un menor complementario con signo positivo:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

y este último determinante le hacemos considerando la columna C_2, y:

a) Sumamos a C_1: $1\ C_2$
b) Sumamos a C_3: $6\ C_2$

$$= \begin{vmatrix} -1+1 & 1 & -6+6(1) \\ 3-2 & -2 & -1+6(-2) \\ -3+2 & 2 & 5+6(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -13 \\ -1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} = -4$$

Ejercicio 2: Utilizando propiedades hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: A diferencia del ejemplo anterior en éste no tenemos ningún elemento que sea 1 para poder comenzar. Pero tampoco es un gran inconveniente, pues siempre podemos utilizar la propiedad 8 para transformarlo en un determinante con algún 1, por ejemplo, sumando a F_2: 2 F_1, conseguimos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5+2(3) & 2+2(-2) & 8+2(-5) & -5+2(4) \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} =$$

logramos que el elemento (2,1) sea un 1. A partir de ahí, el proceso no difiere mucho del ejemplo anterior:

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2+2(3) & -5+2(3) & 4-3(3) \\ 1 & -2+2(1) & -2+2(1) & 3-3(1) \\ -2 & 4+2(-2) & 7+2(-2) & -3-3(-2) \\ 2 & -3+2(-2) & -5+2(2) & 8-3(2) \end{vmatrix} =$$

con lo que conseguimos tres ceros en la segunda fila, desarrollamos el determinante por los elementos de esta fila, etcétera:

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5-(1) \\ 0 & 3 & 3-(3) \\ 1 & -1 & 2-(-1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3(12+6) = -54$$

Ejercicio 3: Sin desarrollar el determinante demostrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Solución: Simplemente sumamos C_2 a C_3:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

y ahora las columnas primera y tercera son proporcionales, por tanto el determinante es 0 (propiedad 6).

Ejercicio 4: Evaluar el determinante:

$$\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

Solución: Para determinantes con ciertos parámetros (t en nuestro caso) es conveniente manipular para que en una fila (o columna) aparezcan términos iguales conteniendo ese parámetro. En nuestro caso podemos hacer:

Sumamos a C_1 la C_2:
Sumamos a C_2 la C_3:

$$= \begin{vmatrix} t+3+(-1) & -1+(1) & 1 \\ 5+(t-3) & t-3+(1) & 1 \\ 6+(-6) & -6+(t+4) & t+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{vmatrix} =$$

entonces puede factorizarse (t +2) de la primera columna y (t - 2) de la segunda:

$$= (t+2)(t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix} =$$

finalmente restamos C_1 a la C_3:

$$= (t+2)(t-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4)$$

Ejercicios propuestos para el alumno.

1) Mediante manipulación de filas y/o columnas hallar los determinantes de cada una de las tres matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: |A| = 21, |B| = -11, |C| = 100.

2) Mediante manipulación de filas y/o columnas hallar los determinantes de cada una de las tres matrices:

$$A = \begin{bmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{bmatrix}$$

Solución: $|A| = (t+2)(t-3)(t-4)$, $|B| = (t+2)^2(t-4)$, $|C| = (t+2)^2(t-4)$.

3) Mediante manipulación de filas y/o columnas hallar los determinantes de cada una de las tres matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: |A| = -131, |B| = -55.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

16. 1 Definición.

Un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas (en R):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \{1\}$$

Nuestra tarea es resolverlo, aunque como paso previo necesitamos conocer si hay una solución única, si no hay solución o si hay infinitas soluciones. Para ello se suele hacer uso de matrices:

* Matrices asociadas al sistema:

La matriz de los coeficientes: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

La matriz de los términos independientes: $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$

La matriz de las incógnitas: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}$

Definidas estas matrices el sistema puede ser expresado:

$$\mathbf{M \cdot X = B} \qquad \{2\}$$

Es sobre este sistema matricial sobre el que llevaremos nuestras indagaciones.

16. 2 Sistema de Cramer.

Un sistema del tipo {2} se llama Sistema de Cramer si cumple las siguientes condiciones:

1) n = m (la matriz **M** es cuadrada) .
2) La matriz **M** es inversible .

En este caso siempre existe solución única:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} \qquad \{3\}$$

Aunque para el sistema de Cramer suele darse una solución más sencilla (computacionalmente):

Teniendo en cuenta que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{1n} & M_{2n} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Siendo M_{ij} los adjuntos de los elementos de la matriz M. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 M_{11} + b_2 M_{21} + \dots + b_n M_{n1}}{M} \\ x_2 &= \frac{b_1 M_{12} + b_2 M_{22} + \dots + b_n M_{n2}}{M} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_1 M_{1n} + b_2 M_{2n} + \dots + b_n M_{nn}}{M} \end{aligned}$$

y si ahora tenemos en cuenta que:

$$b_1 M_{11} + b_2 M_{21} + \dots. + b_n M_{n1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Los valores de la solución se pueden computar así:

$$x_1 = \frac{\begin{array}{l} \text{términos independientes} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{|M|} \quad x_2 = \frac{\begin{array}{c} \text{términos independientes} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{|M|} \quad \dots\dots\dots \quad x_n = \frac{\begin{array}{r} \text{términos independientes} \\ \downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix} \end{array}}{|M|}$$

{4}

Un ejemplo:

Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 5x - 3y - z &= 16 \end{aligned}$$

comprobar que es un *sistema de Cramer* y resolverlo.

Veamos las tres matrices implicadas:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

la tercera matriz es la matriz **X** de las incógnitas.

Como el determinante de la matriz M es 23, y la matriz M es cuadrada, podemos decir que es un sistema de Cramer. Cuya solución es:

$$|M| = 26 \quad , \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = \frac{26}{26} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix}}{26} = \frac{-78}{26}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}}{26} = \frac{-52}{26}$$

16. 3 Clasificación de sistemas lineales.

Sea un sistema de ecuaciones lineales, en su forma general de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \{5\}$$

Consideraremos las dos siguientes matrices:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad M^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

La matriz M* es la llamada matriz ampliada, se trata de la matriz de coeficientes M a la que se ha añadido la columna de los términos independientes.

* Teorema de Rouche-Frobenius.

Sea un sistema lineal (de m ecuaciones con n incógnitas), el teorema de Rouche-Frobenius dice que:

I) Sistema compatible (hay soluciones) ⇔ r(M) = r(M*)

II) Sistema incompatible (no hay soluciones) ⇔ ⇔ r(M) ≠ r(M*).

En el caso concreto de un sistema compatible tenemos:

a) Sistema compatible determinado: r(M) = r(M*) = n

--- entonces la solución del sistema es única ---

b) Sistema compatible indeterminado: r(M) = r(M*) = h < n

--- solución dependiente de *n-h* parámetros ---

En este último caso, supongamos la existencia de un menor de orden h, tal que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \{6\}$$

En este caso el sistema {5} será equivalente a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \qquad \{7\}$$

en donde se han suprimido las *n-h* ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en {6}.

El sistema {7} puede ser expresado en la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k &= b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k &= b_2 - a_{2k+1}x_{k+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k &= b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n \end{aligned} \qquad \{8\}$$

Y éste es un sistema de Cramer, que puede ser resuelto según las expresiones {4}.

* **Sistema lineal homogéneo**:

Se trata de una caso especial del {4} en que los términos independientes son todos nulos, es decir:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{array}
$$

Este sistema admite siempre la *solución trivial*:

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ , \ldots\ldots, \ x_n = 0$$

Una solución que tiene escaso valor práctico, por lo que es deseable que el sistema tenga infinitas soluciones además de la trivial.

En concreto el sistema tiene infinitas soluciones si $r(M) < n$ (caso II-b).