Capítulo

1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

1.1 INTRODUCCIÓN

Este libro trata del álgebra lineal. Al buscar la palabra "lineal" en el diccionario se encuentra, entre otras definiciones, la siguiente: lineal: (del lat. *linealis*). **1.** adj. Perteneciente o relativo a la línea.[1] Sin embargo, en matemáticas la palabra "lineal" tiene un significado mucho más amplio. Una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es, de hecho, una generalización de las propiedades de la línea recta. A manera de repaso se darán algunos hechos fundamentales sobre las líneas rectas:

i. La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

ii. Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es **indefinida**.[2]

iii. Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir al escribir su ecuación en la forma pendiente-ordenada $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y).

iv. Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

v. Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente, $m = -a/b$.

vi. Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = -1/m_1$.

vii. Las rectas paralelas al eje x tienen una pendiente cero.

viii. Las rectas paralelas al eje y tienen una pendiente indefinida.

En la sección que sigue se ilustrará la relación que existe entre resolver sistemas de ecuaciones y encontrar los puntos de intersección entre pares de rectas.

1 *Diccionario de la Lengua Española*, vigésima segunda edición, Real Academia Española. Madrid: Espasa Calpe, 2001.

2 Indefinida o infinita, como también se le denomina en otros libros.

1.2 DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Una solución al sistema (1) es un par de números, denotados por (x,y), que satisface (1). Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene este sistema varias soluciones y, de ser así, cuántas? Se responderán estas preguntas después de ver algunos ejemplos, en los cuales se usarán dos hechos importantes del álgebra elemental:

Hecho A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Hecho B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

El hecho A establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. El hecho B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante se obtiene una segunda ecuación válida. Se debe suponer que $c \neq 0$ ya que aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es muy útil.

EJEMPLO 1 Sistema con una solución única

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \qquad (2)$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por el hecho A, la siguiente ecuación: $2x = 12$ (es decir, $x = 6$). Entonces, si se despeja de la segunda ecuación, $y = 5 - x = 5 - 6 =$ entonces $y = -1$. Así, el par $(6, -1)$ satisface el sistema (2) y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (2) tiene una **solución única**.

EJEMPLO 2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \qquad (3)$$

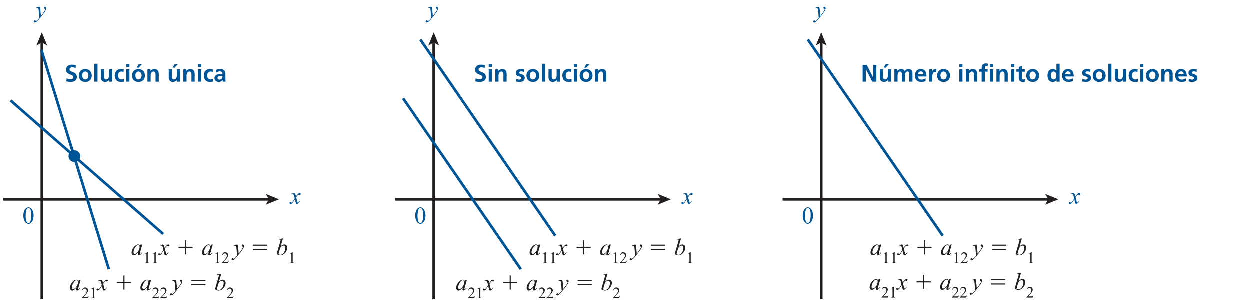
Se puede ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para comprobar esto se multiplica la primera ecuación por 2. Esto está permitido por el hecho B. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: $(7, 0)$, $(0, -7)$, $(8, 1)$, $(1, -6)$, $(3, -4)$ y $(-2, -9)$.

EJEMPLO 3 Sistema sin solución

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \qquad (4)$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por el hecho B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Por lo tanto, el sistema (4) **no tiene solución**.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Figura 1.1
Dos rectas se intersecan en un punto, en ninguno o (si coinciden) en un número infinito de puntos.

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente.**

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que ambas ecuaciones del sistema (1) son de líneas rectas. Una solución a (1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersecan (es decir, no tienen puntos en común) o son la misma recta (esto es, tienen un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1 las rectas tienen pendientes de 1 y -1, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común $(6, -1)$. En el ejemplo 2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 3, las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 1.1.

Ahora se procederá a resolver el sistema (1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Si $a_{12} = 0$, entonces $x = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Si $a_{22} = 0$, entonces $x = \dfrac{b_2}{a_{21}}$ y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Si $a_{12} = a_{22} = 0$, entonces el sistema (1) contiene sólo una incógnita, x.

Así, se puede suponer que ni a_{12} ni a_{22} son cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}\,y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

SISTEMAS EQUIVALENTES

Antes de continuar se puede ver que los sistemas (1) y (5) son **equivalentes**. Esto quiere decir que cualquier solución del sistema (1) es una solución del sistema (5) y viceversa. Ello se concluye directamente del hecho B, suponiendo que c no es cero. Después, si en (5) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \textbf{(6)}$$

Es necesario hacer una pausa en este punto. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.

Se ha demostrado lo siguiente:

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1) tiene una **solución única**

¿Cómo se relaciona esta afirmación con lo que se analizó anteriormente? En el sistema (1) se puede ver que la pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y que la pendiente de la segunda es $-a_{21}/a_{22}$. En los problemas 40, 41 y 42 se pide al lector que demuestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si y sólo si las rectas son paralelas (es decir, tienen la misma pendiente). De esta manera se sabe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Lo que se acaba de analizar puede formularse en un teorema. En secciones posteriores de este capítulo y los siguientes se harán generalizaciones de este teorema, y se hará referencia a él como el "teorema de resumen" conforme se avance en el tema. Una vez que se hayan demostrado todas sus partes, se podrá estudiar una relación asombrosa entre varios conceptos importantes de álgebra lineal.

TEOREMA 1 **Teorema de resumen. Punto de vista 1**

El sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i. Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii. No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas se estudian en la sección 1.3 y se verá que siempre ocurre que no tienen solución, o que tienen una o un número infinito de soluciones.

Problemas 1.2

AUTOEVALUACIÓN

I. De las siguientes afirmaciones con respecto a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿cuál de ellas no es verdadera?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.

b) Su gráfica consiste en el(los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

c) Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.

d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a) No existe una solución.

b) La gráfica del sistema está sobre el eje y.

c) La gráfica de la solución es una recta.

d) La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas.

III. ¿Cuál de las aseveraciones que siguen es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 2y = 8$$
$$4x + y = 7$$

a) El sistema es inconsistente.

b) La solución es $(-1, 2)$.

c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.

d) Las ecuaciones son equivalentes.

IV. De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$ ***b)*** $6x - 3y = -15$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ***d)*** $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

V. ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas?

a) $\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 4y &= 6x - 14 \end{aligned}$ ***b)*** $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x &= 4 + 6y \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 6 \end{aligned}$ ***d)*** $\begin{aligned} 5x + y &= 1 \\ 7y &= 3x \end{aligned}$

En los problemas 1 a 16 encuentre las soluciones (si las hay) de los sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

1. $\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ -4x + 2y &= 6 \end{aligned}$ **2.** $\begin{aligned} 5x - 7y &= 4 \\ -x + 2y &= -3 \end{aligned}$ **3.** $\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 5x + 7y &= 4 \end{aligned}$ **4.** $\begin{aligned} 2x - 8y &= 5 \\ -3x + 12y &= 8 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 10x - 40y &= 30 \\ -3x + 12y &= -90 \end{aligned}$ **6.** $\begin{aligned} 2x - 8y &= 6 \\ -3x + 12y &= -9 \end{aligned}$ **7.** $\begin{aligned} 6x + y &= 3 \\ -4x - y &= 8 \end{aligned}$ **8.** $\begin{aligned} 5x + y &= 0 \\ 7x + 3y &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 3x + y &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}$ **10.** $\begin{aligned} 4x - 6y &= 0 \\ -2x + 3y &= 0 \end{aligned}$ **11.** $\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 2x + 5y &= 3 \end{aligned}$ **12.** $\begin{aligned} 4x + 7y &= 3 \\ 7x - 4y &= 3 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 3x + 4y &= 5 \end{aligned}$ **14.** $\begin{aligned} ax + by &= c \\ ax - by &= c \end{aligned}$ **15.** $\begin{aligned} ax + by &= c \\ bx + ay &= c \end{aligned}$ **16.** $\begin{aligned} ax - by &= c \\ bx + ay &= d \end{aligned}$

17. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema tiene solución única; justifique su solución.

$$\begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + Ky + z &= 1 \\ x + y + Kz &= 1 \end{aligned}$$

18. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema:

a) No tiene solución

b) Tiene soluciones infinitas

c) Tiene solución única

$$\begin{aligned} 2x - \ y - Kz &= 0 \\ x - \ y - \ 2z &= 1 \\ -x + 2y \qquad &= K \end{aligned}$$

19. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el sistema en el problema 14 tenga una solución única.

20. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el sistema del problema 15 tenga un número infinito de soluciones.

21. Encuentre las condiciones sobre a, b, c y d tales que el problema 16 no tenga solución.

En los problemas 22 al 29 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

22. $x - y = 7$; $2x + 3y = 1$

23. $2x - 2y = 3$; $3x + 7y = -1$

24. $y - 2x = 4$; $4x - 2y = 6$

25. $4x - 6y = 7$; $6x - 9y = 12$

26. $4x - 6y = 10$; $6x - 9y = 15$

27. $3x + y = 4$; $y - 5x = 2$

28. $2y - 3x = 0$; $7y - 5x = 9$

29. $3x + 4y = 5$; $6x - 7y = 8$

Sea L una recta y $L_\perp$ la recta perpendicular a L que pasa a través de un punto dado P. La **distancia** de L a P se define como la distancia[3] entre P y el punto de intersección de L y $L_\perp$. En los problemas 30 a 36 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

30. $x - y = 6$; $(0, 0)$

31. $2x + 3y = -1$; $(0, 0)$

32. $3x + y = 7$; $(1, 2)$

33. $5x - 6y = 3$; $(2, \frac{16}{5})$

34. $2y - 5x = -2$; $(5, -3)$

35. $3y - 7x = 0$; $(-1, -5)$

36. $6y + 3x = 3$; $(8, -1)$

37. Encuentre la distancia entre la recta $2x - y = 6$ y el punto de intersección de las rectas $3x - 2y = 1$ y $6x + 3y = 12$.

***38.** Pruebe que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $ax + by = c$ está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

39. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en él?

40. Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1) son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

41. Si existe una solución única al sistema (1), muestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

42. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ demuestre que el sistema (1) tiene una solución única.

43. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material

[3] Recuerde que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano xy, entonces la distancia d entre ellos está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

para una taza cuesta ¢25 y el material para un plato cuesta ¢20. Si se asignan $44 diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente $44 en materiales?

44. Conteste la pregunta del problema 43 si los materiales para una taza y un plato cuestan ¢15 y ¢10, respectivamente, y se gastan $24 en 8 horas de trabajo.

45. Conteste la pregunta del problema 44 si se gastan $25 en 8 horas de trabajo.

46. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [*Sugerencia:* 1 cuarto = 32 onzas, 1 galón = 4 cuartos.]

Respuestas a la autoevaluación

I. *c*) **II.** *a*) **III.** *c*) **IV.** *a*) **V.** *b*)

1.3 *m* ecuaciones con *n* incógnitas: eliminación de Gauss-Jordan y gaussiana

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si es que existen) de un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Al hacerlo se verá que, igual que en el caso de 2 × 2, tales sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución o tienen un número infinito de soluciones. Antes de llegar al método general se verán algunos ejemplos sencillos. Como variables, se usarán x_1, x_2, x_3, etc., en lugar de $x, y, z, \ldots$ porque la generalización es más sencilla si se usa la notación con subíndices.

EJEMPLO 1 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Solución En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.2, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

Como se vio en la sección 1.2, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (2) multiplicando ambos lados de la primera ecuación de (2) por −4 y sumando esta nueva ecuación a la segunda. Esto da

$$\begin{array}{rcrcrcl} -4x_1 & - & 8x_2 & - & 12x_3 & = & -36 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ \hline & & -3x_2 & - & 6x_3 & = & -12 \end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva segunda ecuación y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Nota. Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Entonces, la primera ecuación se multiplica por -3 y se suma a la tercera, lo que da por resultado:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ -5x_2 - 11x_3 &= -23 \end{aligned} \qquad (3)$$

Observe que en el sistema (3) se ha eliminado la variable x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Después se divide la segunda ecuación por -3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -5x_2 - 11x_3 &= -23 \end{aligned}$$

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma a la primera; después se multiplica la segunda ecuación por 5 y se suma a la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Ahora se multiplica la tercera ecuación por -1:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Por último, se suma la tercera ecuación a la primera y después se multiplica la tercera ecuación por -2 y se suma a la segunda para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 4 \\ x_2 \quad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, −2, 3). El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.[4]

Antes de seguir con otro ejemplo es conveniente resumir lo que se hizo en éste:

i. Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii. Se "eliminaron" los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

iii. Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv. Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente. Esto es una consecuencia de los hechos A y B de la página 2.

Matriz

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de **matriz**. Una matriz es un arreglo rectangular de números y éstas se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 1.5. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1) se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

Matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

Matriz $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Por la conveniencia de su notación para la resolución de sistemas de ecuaciones, las presentamos aquí.

Matriz aumentada

Al usar la notación matricial, el sistema (1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Ahora es posible introducir cierta terminología. Se ha visto que multiplicar (o dividir) los dos lados de una ecuación por un número diferente de cero da por resultado una nueva

[4] Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899). Vea la semblanza bibliográfica de Gauss en la página 21. Jordan fue un experto en investigación geodésica tomando en cuenta la curvatura de la Tierra. Su trabajo sobre la solución de sistemas de ecuaciones apareció en 1888 en su libro *Handbuch der Vermessungskunde* (Manual de geodesia).

ecuación equivalente. Más aún, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación equivalente. Por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se denominan **operaciones elementales con renglones**.

Para resumir, las tres operaciones elementales con renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales con renglones

i. Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii. Intercambiar dos renglones.

REDUCCIÓN POR RENGLONES

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

NOTACIÓN

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]

2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.

3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".

4. $A \to B$ indica que las matrices aumentadas A y B son equivalentes; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

En el ejemplo 1 se vio que al usar las operaciones elementales con renglones *i*) y *ii*) varias veces, se puede obtener un sistema cuyas soluciones estén dadas en forma explícita. Ahora se repiten los pasos del ejemplo 1 usando la notación que se acaba de introducir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2, x_3 y existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige un valor de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución (1, 4, 0). Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución (11, −16, 10), y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

EJEMPLO 3 **Sistema inconsistente**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

Solución La matriz aumentada para este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El elemento 1,1 de la matriz no se puede hacer 1 como antes porque al multiplicar 0 por cualquier número real el resultado es 0. En su lugar se puede usar la operación elemental con renglones *iii*) para obtener un número distinto a cero en la posición 1,1. Se puede intercambiar el renglón 1 con cualquiera de los otros dos; sin embargo, al intercambiar los renglones 1 y 3 queda un 1 en esa posición. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Es necesario detenerse aquí porque, como se ve, las últimas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lo cual es imposible (si $-2x_2 - 3x_3 = -5$, entonces $2x_2 + 3x_3 = 5$, no 4). Así no hay una solución. Se puede proceder como en los últimos dos ejemplos para obtener una forma más estándar:

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo cual también es imposible ya que $0 \neq -1$. Así, el sistema (6) no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **inconsistente**.

DEFINICIÓN 1

Sistemas inconsistentes y consistentes

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es **consistente**.

Se analizarán de nuevo estos tres ejemplos. En el ejemplo 1 se comenzó con la matriz de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En el proceso de reducción por renglones, A_1 se "redujo" a la matriz

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 2 se comenzó con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 3 se comenzó con

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_1, R_2, R_3 se llaman **formas escalonadas reducidas por renglones** de las matrices A_1, A_2 y A_3 respectivamente. En general, se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2

Forma escalonada reducida por renglones y pivote

Una matriz se encuentra en **la forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i. Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii. Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Nota. La condición *iii*) se puede reescribir como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior".

EJEMPLO 4 **Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones**

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices *i* y *ii* tienen tres pivotes; las otras tres matrices tienen dos pivotes.

DEFINICIÓN 3

Forma escalonada por renglones

Una matriz está en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones *i*), *ii*) y *iii*) de la definición 2.

EJEMPLO 5 Cinco matrices en la forma escalonada por renglones

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\textbf{i.}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{ii.}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{iii.}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{iv.}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{v.}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota. Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente, en sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

muestra que las dos matrices anteriores, ambas en forma escalonada por renglones, son equivalentes por renglones. Así, cualquier matriz para la que A es una forma escalonada por renglones, también tiene a B como forma escalonada por renglones.

Observación 1. La diferencia entre estas dos formas debe ser evidente a partir de los ejemplos. En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero. En la forma escalonada reducida por renglones, todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero. Así, la forma escalonada reducida por renglones es más exclusiva. Esto es, en toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.

Observación 2. Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales con renglones. Esta reducción se vio al obtener la forma escalonada reducida por renglones en los ejemplos 1, 2 y 3.

Como se vio en los ejemplos 1, 2 y 3, existe una fuerte relación entre la forma escalonada reducida por renglones y la existencia de la solución única para el sistema. En el ejemplo 1 dicha forma para la matriz de coeficientes (es decir, en la primeras tres columnas de la matriz aumentada) tenían un 1 en cada renglón y existía una solución única. En los ejemplos 2 y 3 la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tenía un renglón de ceros y el sistema no tenía solución o tenía un número infinito de soluciones. Esto siempre es cierto en cualquier sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Pero antes de estudiar el caso general se analizará la utilidad de la forma escalonada por renglones de una matriz. Es posible resolver el sistema en el ejemplo 1 reduciendo la matriz de coeficientes a esta forma.

EJEMPLO 6 **Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana**

Resuelva el sistema del ejemplo 1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

Solución Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número (-5) que está abajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Sustitución hacia atrás

Eliminación gaussiana

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero x_2 y después x_1. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución $(4, -2, 3)$. El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

Se cuenta con dos métodos para resolver los ejemplos de sistemas de ecuaciones:

i. Eliminación de Gauss-Jordan
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 9.

ii. Eliminación gaussiana
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende. Al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales con renglones. De hecho, como se verá en el apéndice 3, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $n^3/2$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $n^3/3$ sumas y multiplicaciones. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones se estudiará en el apéndice 4. Por otro lado, a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz (una de éstas se estudia en la sección 1.8). En estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Ahora se observa la solución de un sistema general de m ecuaciones con n incógnitas. La mayor parte de las soluciones de los sistemas se hará mediante la eliminación de Gauss-Jordan debido a que en la sección 1.8 esto se necesitará. Debe tenerse en mente, sin embargo, que la eliminación gaussiana suele ser un enfoque más conveniente.

El sistema general $m \times n$ de m ecuaciones con n incógnitas está dado por

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & + & \cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{7}$$

En el sistema (7) todos los coeficientes a y b son números reales dados. El problema es encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, que satisfacen cada una de las m ecuaciones en (7). El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Es posible resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas haciendo uso de la eliminación de Gauss-Jordan o gaussiana. Enseguida se proporciona un ejemplo en el que el número de ecuaciones e incógnitas es diferente.

EJEMPLO 7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

Al resolver muchos sistemas, es evidente que los cálculos se vuelven fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora pueden introducirse errores de "redondeo". Este problema se analiza en el apéndice 3.

EJEMPLO 8 Un problema de administración de recursos

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3.

Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento 1, 20 000 unidades del alimento 2 y 55 000 del 3. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Si utilizamos la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento 1, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento 1 y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades del alimento 1. Entonces, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25\,000$ = suministro total por semana de alimento 1. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

Después de resolver se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Nota. El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

Análisis de insumo y producto (opcional)

Los siguientes dos ejemplos muestran la forma en la cual pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief**.[5] Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la j-ésima industria ejerce sobre la i-ésima industria. De forma más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j. Sea x_1 la producción de la industria i. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ se trata de la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. De esta forma, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned} \tag{8}$$

O bien, reescribiendo el sistema (8) en la forma del sistema (7) se obtiene

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
(1-a_{11})\,x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \cdots & - & a_{1n}x_n & = & e_1 \\
-a_{21}x_1 & + & (1-a_{22})\,x_2 & - & \cdots & - & a_{2n}x_n & = & e_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
-a_{n1}x_1 & - & a_{n2}x_2 & - & \cdots & + & (1-a_{nn})\,x_n & = & e_n
\end{array} \tag{9}$$

El sistema (9) de n ecuaciones con n incógnitas es de fundamental importancia en el análisis económico.

EJEMPLO 10 El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

[5] Así llamado en honor al economista norteamericano Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936). Leontief ganó el Premio Nobel en Economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.

Solución En este caso $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$ y el sistema (9) es

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\ -0.4x_1 + 0.9x_2 - \ \ 0.3x_3 &= 25 \\ -0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema por método de eliminación de Gauss-Jordan en una calculadora o computadora, trabajando con cinco decimales en todos los pasos se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 110.30442 \\ 0 & 1 & 0 & 118.74070 \\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)$$

Se concluye que la producción necesaria para que la oferta sea (aproximadamente) igual a la demanda es $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$.

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (opcional)

En la figura 1.1, en la página 3, se observó que se puede repesentar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante dos líneas rectas. Si las rectas tienen un solo punto de intersección el sistema tiene una solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución y el sistema es inconsistente.

Algo similar ocurre cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas.

Como se verá en la sección 3.5, la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax - by - cz &= d \\ ex - fy - gz &= h \\ jx - ky - lz &= m \end{aligned} \tag{10}$$

en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$ y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

Cada ecuación en (10) es la ecuación de un plano. *Cada* solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en *cada uno* de los tres planos. Existen seis posibilidades:

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.2).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.3).

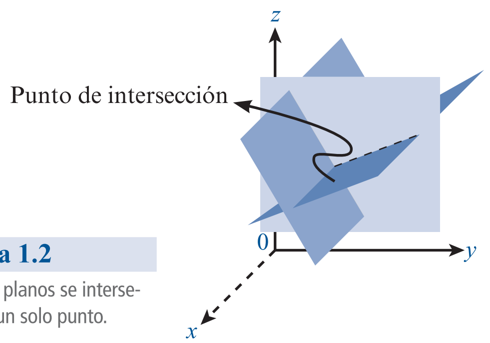


Figura 1.2
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.4).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos. Por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.5).

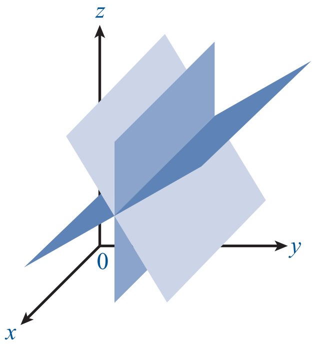


Figura 1.3
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

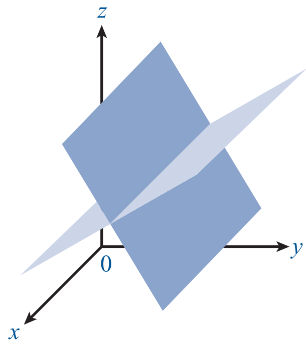


Figura 1.4
Dos planos se intersecan en una recta.

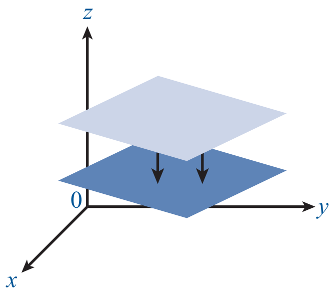


Figura 1.5
Los planos paralelos no tienen puntos en común.

6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución y el sistema es inconsistente (vea la figura 1.6).

En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a la dificultad que representa dibujar planos con exactitud, no ahondaremos más en el tema. No obstante, es útil analizar cómo las ideas en el plano xy se pueden extender a espacios más complejos.

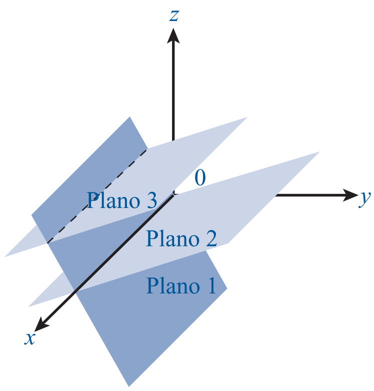


Figura 1.6
El plano 3 es paralelo a L, la recta de intersección de los planos 1 y 2.

Semblanza de...

Carl Friedrich Gauss
(Library of Congress)

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Carl Friedrich Gauss es considerado el matemático más grande del siglo XIX, además de uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos (Arquímedes y Newton son los otros dos).

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un obrero amante del trabajo, era excepcionalmente obstinado y no creía en la educación formal, e hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela. Por fortuna para Carl (y para las matemáticas), su madre, a pesar de que tampoco contaba con educación, apoyó a su hijo en sus estudios y se mostró orgullosa de sus logros hasta el día de su muerte a la edad de 97 años.

Gauss era un niño prodigio. A los tres años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Hay una anécdota famosa de Carl, cuando tenía apenas 10 años de edad y asistía a la escuela local de Brunswick. El profesor solía asignar tareas para mantener ocupados a los alumnos y un día les pidió que sumaran los números del 1 al 100. Casi al instante, Carl colocó su pizarra boca abajo con la palabra "listo". Después, el profesor descubrió que Gauss era el único con la respuesta correcta, 5050. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 ($1 + 100$, $2 + 99$, etc.), y $50 \times 101 = 5050$. Años más tarde, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.

A la edad de 15 años, el Duque de Brunswick se fijó en él y lo convirtió en su protegido. El Duque lo ayudó a ingresar en el Brunswick College en 1795 y, tres años después, a entrar a la Universidad de Göttingen. Indeciso entre las carreras de matemáticas y filosofía, Gauss eligió las matemáticas después de dos descubrimientos asombrosos. Primero inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que Legendre publicara sus resultados. Segundo, un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: Gauss demostró cómo construir, con tan sólo una regla y un compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5.*

El 30 de marzo de 1796, fecha de este descubrimiento, comenzó un diario que contenía como primera nota las reglas de construcción de un polígono regular de 17 lados. El diario, que contiene los enunciados de 146 resultados en sólo 19 páginas, es unos de los documentos más importantes en la historia de las matemáticas.

Tras un corto periodo en Göttingen, Gauss fue a la Universidad de Helmstädt y, en 1798, a los 20 años, escribió su famosa disertación doctoral. En ella dio la primera demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra que indica que todo polinomio de grado n tiene, contando multiplicidades, exactamente n raíces. Muchos matemáticos, incluyendo a Euler, Newton y Lagrange, habían intentado probar este resultado.

Gauss hizo un gran número de descubrimientos en física al igual que en matemáticas. Por ejemplo, en 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del asteroide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético junto con su colega Wilhelm Weber (1804-1891). Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, la que resultó asombrosa fue la producción matemática de Gauss. Hizo contribuciones fundamentales al álgebra y la geometría y en 1811 descubrió un resultado que llevó a Cauchy a desarrollar la teoría de la variable compleja. En este libro se le encuentra en el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana: una técnica de integración numérica.

Gauss fue nombrado catedrático de matemáticas de Göttingen en 1807 e impartió clase hasta su muerte en 1855. Aún después de su muerte, su espíritu matemático siguió acosando a los matemáticos del siglo XIX. Con frecuencia, un importante resultado nuevo ya había sido descubierto por Gauss y se podía encontrar en sus notas inéditas.

En sus escritos matemáticos Gauss era un perfeccionista y tal vez sea el último gran matemático que conocía prácticamente todo acerca de su área. Al afirmar que una catedral no era una catedral hasta que se quitara el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *pauca sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las matemáticas debían reflejar el mundo real. A su muerte, Gauss fue honrado con una medalla conmemorativa que llevaba la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

* De manera más general, Gauss probó que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n es de la forma $n = 2^k p_2 \cdot p_3 \ldots p_m$ donde $k \geq 0$ y las p_i son números primos de Fermat distintos. Los números primos de Fermat son aquellos que toman la forma $2^{2^n} + 1$. Los primeros cinco números primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65 537.

Problemas 1.3

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la matriz de coeficientes dada a la derecha?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $3x + 2y = -1$
$y = 5$
$2x = 1$

b) $3x + 2z = 10$
$2x + y = 0$
$-x + 5y + z = 5$

c) $3x = 2$
$2x + y = 0$
$-x + 5y = 1$

d) $3x + 2y - z = -3$
$y + 5z = 15$
$2x + z = 3$

II. ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental con renglones?

a) Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.

b) Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.

c) Intercambiar dos columnas.

d) Reemplazar un renglón con una suma de renglones y una constante diferente de cero.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz dada?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.

b) No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 1 es 3.

d) No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema dado?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

a) Tiene una solución única $x = 1, y = 1, z = 1$.

b) Es inconsistente.

c) Tiene un número infinito de soluciones.

En los problemas del 1 al 26 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones para los sistemas dados.

1.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} -1x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -2 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 21 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 12 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

En los problemas 27 a 38 determine si la matriz dada se encuentra en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **36.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **37.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 39 a 46 utilice las operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

39. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **46.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

47. En el modelo de insumo-producto de Leontief del ejemplo 9 suponga que se tienen tres industrias. Más aún, suponga que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = \frac{1}{3}$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{13} = \frac{1}{6}$, $a_{21} = \frac{1}{4}$, $a_{22} = \frac{1}{4}$, $a_{23} = \frac{1}{8}$, $a_{31} = \frac{1}{12}$, $a_{32} = \frac{1}{3}$, $a_{33} = \frac{1}{6}$. Encuentre la producción de cada industria tal que la oferta sea igual a la demanda.

48. En el ejemplo 8 suponga que cada semana se suministran al lago 15 000 unidades del primer alimento, 10 000 del segundo y 35 000 del tercero. Considerando que todo alimento se consume, ¿qué población de las tres especies puede coexistir en el lago? ¿Existe una solución única?

49. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglaterra, \$30 diarios en Francia y \$20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de \$10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de \$340 en hospedaje, \$320 en comida y \$140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

50. Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace dos días su valor bajó \$350 pero que ayer aumentó \$600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó \$1 por cada una, mientras que las de Hilton Hotels bajaron \$1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió \$0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió \$1.50 por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros \$0.50 por acción y las de McDonald's subieron \$1. Demuestre que el corredor no cuenta con la información suficiente para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice tener 200 acciones de McDonald's, el corredor pueda calcular el número de acciones que posee en Delta y en Hilton.

51. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestre que la información del agente es incorrecta debido a su inconsistencia.

52. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de \$250 000, en radio \$5 000 y en revista \$30 000. En el segundo presupuesto \$310 000, \$4 000 y \$15 000 y en el último presupuesto \$560 000, \$10 000 y \$35 000. Los totales por presupuesto son los siguientes: \$21 795 000, \$31 767 000 y \$61 225 000. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

53. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

54. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= b \\ 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

***55.** Considere el sistema general de las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a_{ij} para que el sistema tenga una solución única.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *d*) **II.** *a*) **III.** *c*) **IV.** *b*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

La calculadora HP50g puede resolver en forma numérica sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, la solución reportada es la solución de norma mínima. Cuando el sistema es inconsistente la solución reportada es la solución de mínimos cuadrados.

Una posible secuencia de pasos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones se observa en el siguiente procedimiento (no es el único, en el capítulo 11 del manual del usuario se incluyen otros procedimientos).

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 14 \\ 3x - 2y + z &= -3 \\ 4x + 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

1. Existen diferentes formas de introducir una matriz aumentada, la más sencilla es la siguiente:

[[2, 4, 6, 14], [3, −2, 1, −3], [4, 2, −1, −4]]

ENTER ENTER

Guardamos la matriz aumentada en la variable AAUG utilizando la siguente secuencia

' ALPHA ALPHA A A U G ENTER STO

2. Se encuentra la forma escalonada reducida por renglones de AAUG.

↰ MATRICES

seguido de las teclas [5] para seleccionar sistemas lineales y [4] para encontrar la forma escalonada reducida por renglones (RREF).

El resultado es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Así, $x_1 = -1$, etcétera.

En los problemas 56 a 60 utilice una calculadora para resolver cada sistema.

56.
$$\begin{aligned} 2.6x_1 - 4.3x_2 + 9.6x_3 &= 21.62 \\ -8.5x_1 + 3.6x_2 + 9.1x_3 &= 14.23 \\ 12.3x_1 - 8.4x_2 - 0.6x_3 &= 12.61 \end{aligned}$$

57.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad &= -7 \end{aligned}$$

58.
$$\begin{aligned} 1.247x_1 - 2.583x_2 + 7.161x_3 + 8.275x_4 &= -1.205 \\ 3.472x_1 + 9.283x_2 + 11.275x_3 + 3.606x_4 &= 2.374 \\ -5.216x_1 - 12.816x_2 - 6.298x_3 + 1.877x_4 &= 21.206 \\ 6.812x_1 + 5.223x_2 + 9.725x_3 - 2.306x_4 &= -11.466 \end{aligned}$$

59.
$$\begin{aligned} 23.42x_1 - 16.89x_2 + 57.31x_3 + 82.6x_4 &= 2\,158.36 \\ -14.77x_1 - 38.29x_2 + 92.36x_3 - 4.36x_4 &= -1\,123.02 \\ -77.21x_1 + 71.26x_2 - 16.55x_3 + 43.09x_4 &= 3\,248.71 \\ 91.82x_1 + 81.43x_2 + 33.94x_3 + 57.22x_4 &= 235.25 \end{aligned}$$

60.
$$\begin{aligned} 6.1x_1 - 2.4x_2 + 23.3x_3 - 16.4x_4 - 8.9x_5 &= 121.7 \\ -14.2x_1 - 31.6x_2 - 5.8x_3 + 9.6x_4 + 23.1x_5 &= -87.7 \\ 10.5x_1 + 46.1x_2 - 19.6x_3 - 8.8x_4 - 41.2x_5 &= 10.8 \\ 37.3x_1 - 14.2x_2 + 62.0x_3 + 14.7x_4 - 9.6x_5 &= 61.3 \\ 0.8x_1 + 17.7x_2 - 47.5x_3 - 50.2x_4 + 29.8x_5 &= -27.8 \end{aligned}$$

Más ejercicios

En los problemas 61 a 65 calcule la forma escalonada por renglones (REF en lugar de RREF) para cada matriz aumentada.

61. La matriz del problema 57

62. La matriz del problema 56

63. La matriz del problema 59

64. La matriz del problema 58

65. La matriz del problema 60

En los problemas 66 a 71 encuentre todas las soluciones, si las hay, para cada sistema. Redondee todas las respuestas a tres lugares decimales. [*Sugerencia*: Primero obtenga la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada.]

66.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 12.9 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 9.8x_3 &= -1.6 \end{aligned}$$

67.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= -19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 34.3 \end{aligned}$$

68.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 35.3 \end{aligned}$$

69.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \end{aligned}$$

70.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= -63 \end{aligned}$$

71.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= 63 \end{aligned}$$

INTRODUCCIÓN A MATLAB

Ejemplos de comandos básicos de MATLAB

MATLAB distingue minúsculas y mayúsculas. Esto quiere decir que a y A representan variables diferentes.

Introducción de matrices. Los elementos de un renglón se separan por espacios y las columnas se separan por “;” :

A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9] Produce la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]	También produce la matriz A anterior
B = [3;6;1]	Produce la matriz $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notación para formar las submatrices y las matrices aumentadas.

f = A(2,3)	f es el elemento en el segundo renglón, tercera columna de A.
d = A(3,:)	d es el tercer renglón de A.
d = A(:,3)	d es la tercera columna de A.
***C* = A([2 4]),:)**	C es la matriz que consiste del segundo y cuarto renglones de A.
C = [A b]	Forma una matriz aumentada $C = (A\|b)$.

Ejecución de operaciones con renglones.

A(2,:) = 3*A(2,:)	$R_2 \rightarrow 3R_2$
A(2,:) = A(2,:)/4	$R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2$
A([2 3],:) = A([3 2],:)	Intercambia los renglones 2 y 3
A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:)	$R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2$

Nota. Todos estos comandos cambian a la matriz A. Si se quiere conservar la matriz original y llamar a C a la matriz cambiada,

C = A	
C(2,:)= 3*C(2,:)	
C = rref(A)	C = forma escalonada reducida por renglones de A.

Generación de matrices aleatorias.

A = rand(2,3)	matriz 2×3 con elementos entre 0 y 1
A = 2*rand(2,3)−1	matriz 2×3 con elementos entre -1 y 1
A = 4*(2*rand(2)−1)	matriz 2×2 con elementos entre -4 y 4
A = round(10*rand(3))	matriz 3×3 con elementos enteros entre 0 y 10
A = 2*rand(3)−1+i*(2*rand(3)−1)	matriz 3×3 con elementos complejos $a + bi$, a y b entre -1 y 1

Otras características usuales

Help. Si se teclea **help** seguido de un comando MATLAB en la ventana de comandos de MATLAB, aparecerá una descripción del comando en la ventana de comandos.

Doc. Si se teclea **doc** seguido de un comando de MATLAB en la ventana de comando de MATLAB, aparecerá una descripción del comando en la ventana de ayuda.

Ejemplos.

help : o **doc :** dará una descripción de cómo se puede usar "**:**" en MATLAB.

help rref o **doc rref** dará una descripción del comando rref.

Uso de las flechas. En la ventana de comandos de MATLAB, al usar la flecha hacia arriba se desplegarán los comandos anteriores. Se pueden usar las flechas para localizar un comando y modificarlo y al oprimir la tecla "enter" se ejecuta el comando modificado.

Comentarios. Si se inicia una línea con el símbolo %, MATLAB interpretará esto como una línea de comentario.

Ejemplo.

% Éste es un comentario.

Supresión de pantalla. Uso de ;. Si se quiere realizar un comando de MATLAB y no se desea ver los resultados desplegados, se finaliza el comando con un ; (punto y coma).

Para líneas largas. Para extender una línea se usa "**…**".

a = [1 2 3 4 5 6 7 8 …

9 10] producirá $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$.

Para desplegar dígitos adicionales. Por lo general MATLAB despliega sólo 4 dígitos después del punto decimal. De esta forma, 4/3 aparece como 1.3333. El comando **format long** hace que todos los números se desplieguen completos. Así, si se da **format long** y después 4/3, en la pantalla aparecerá 1.33333333333333. Para regresar al despliegue normal de 4 dígitos después del punto decimal se da el comando **format short**.

Tutoría de MATLAB

1. Dé las siguientes matrices de dos maneras diferentes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Forme C como la matriz aumentada $(A|b)$, es decir, $C = (A|b)$ para las matrices A y **b** anteriores.
3. Forme D, una matriz aleatoria de 3×4 con elementos entre -2 y 2.
4. Forme B, una matriz aleatoria de 4×4 con elementos enteros entre -10 y 10.
5. Forme K, la matriz obtenida a partir de B intercambiando los renglones 1 y 4. No cambie B (primero haga $K = B$. Después cambie K).
6. Realice la operación con renglones $R_3 \to R_3 + (-1/2)R_1$, sobre la matriz C.
7. Dé el comando **B([2 4],[1 3])**. Use una línea de comentario para describir la submatriz de B que se produce.
8. Forme U, la matriz que consiste sólo en la tercera y cuarta columnas de D.
9. ***(Ventana de comandos.)*** Use la flecha hacia arriba para localizar el comando que utilizó para realizar la operación con renglones en **6**. Modifique la línea para realizar la operación con renglones $R_2 \to R_2 + 3R_1$ y después ejecútela.
10. Forme T, una matriz aleatoria de 8×7 con elementos entre 0 y 1. Dé el comando **doc colon**. A partir de la información dada en la descripción que aparece, determine el uso de la notación ":" para formar, tan eficientemente como sea posible, la matriz S que consiste en los renglones 3 al 8 de la matriz T.
11. Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de C usando el comando **rref**. Use este comando para escribir un sistema equivalente de ecuaciones.

MATLAB 1.3

1. Para cada uno de los sistemas contenidos en los problemas 1, 2, 5, 8 y 16 de esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Muestre que cada uno de estos sistemas tiene una solución única y que la solución está contenida en la última columna de esta forma escalonada de la matriz aumentada. Use la notación ":" para asignar la variable x a la solución, es decir, a la última columna de esta forma escalonada por renglones de la matriz aumentada. (Ayuda: puede emplear el comando **end**, utilice **doc end** para obtener información acerca del comando.)

2. Para cada uno de los sistemas contenidos en los problemas 4, 7, 13 y 18 en esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Concluya que ninguno de estos sistemas tiene solución.

3. Las matrices siguientes son matrices aumentadas de los sistemas de ecuaciones que tienen un número infinito de soluciones.

   a) Para cada una, dé la matriz y use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones.

   i. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \\ 8 & 3 & -18 & 0 \end{array}\right)$ **ii.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 27 & 3 & 3 & 12 \\ 9 & 27 & 10 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{array}\right)$

   iii. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 21 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **iv.** $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 7 & 5 & 15 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 7 & -1 & 7 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 22 & 8 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} & 9 & -12 & -2 \end{array}\right)$

   El resto de este problema necesita trabajo con papel y lápiz.

   b) Para cada forma escalonada reducida por renglones, localice los pivotes dibujando un círculo a su alrededor.

   c) Para cada forma escalonada reducida, escriba el sistema de ecuaciones equivalente.

   d) Resuelva cada uno de estos sistemas equivalentes eligiendo variables arbitrarias que serán las variables correspondientes a las columnas que no tienen pivote en la forma escalonada reducida por renglones (estas variables son las variables naturales que han de escogerse de manera arbitraria).

4. Los siguientes sistemas representan la intersección de tres planos en el espacio de 3 dimensiones. Use el comando **rref** como herramienta para resolver los sistemas. ¿Qué se puede concluir sobre la categoría de los planos?

   i. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -3x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$ **ii.** $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$

   iii. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 17 \end{aligned}$ **iv.** $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$

5. Utilice MATLAB para reducir las matrices aumentadas siguientes a la forma escalonada reducida por renglones paso por paso realizando las operaciones con renglones (vea los ejemplos de comandos para operaciones con renglones en la introducción a MATLAB en la página 28). Verifique sus resultados usando el comando **rref.**

Nota. Si llamó A a la matriz original, haga D = A al principio y verifique **rref (D)**.

i. $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right)$ **ii.** $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$ **iii.** $\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 & -19 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 & -34 \end{array}\right)$

Vea en el problema 1 de MATLAB en la sección 1.5 más opciones sobre la realización de operaciones con renglones.

6. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$

Muestre que el sistema con la matriz aumentada [A **b**] no tiene solución.

b) Sea **b = 2*A(:,1)+A(:,2)+3*A(:,3)−4*A(:,4)**. Recuerde que A(:,1) es la primera columna de A. Así se están sumando múltiplos de columnas de A. Use **rref [A b]** para resolver este sistema.

c) Utilice la flecha hacia arriba para regresar a la línea de **b** = 2*A(:,1) + etc. y edítela para obtener un nuevo conjunto de coeficientes. Una vez más, resuelva el sistema con la matriz aumentada [A **b**] para esta nueva **b**. Repita dos nuevas elecciones de coeficientes.

d) ¿Sería posible poner coeficientes para los que no tengan una solución? La pregunta se refiere a si la siguiente conjetura es cierta: un sistema [A **b**] tiene solución si **b** es una suma de múltiplos de las columnas de A. ¿Por qué?

e) Pruebe esta conjetura para A formada por:

A = 2*rand(5)−1

A(:,3) = 2*A(:,1)−A(:,2)

7. Suponga que se quieren resolver varios sistemas de ecuaciones en los que las matrices de coeficientes (los coeficientes de las variables) son los mismos pero tienen lados derechos diferentes. Formando una matriz aumentada más grande se podrán resolver varios lados derechos. Suponga que A es la matriz de coeficientes y que **b** y **c** son dos lados derechos diferentes; asigne **Aug = [A b c]** y encuentre **rref(Aug)**.

a) Resuelva los dos sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ -2x_1 \qquad + 3x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 16 \\ -2x_1 \qquad + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

***b*)** Resuelva los tres sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned}$$

***c*)** Sea A la matriz de coeficientes del inciso *a*). Elija cualesquiera tres lados derechos de su preferencia. Resuelva.

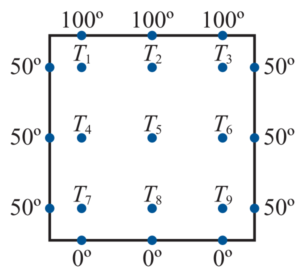
***d*)** Es necesario hacer una observación sobre las soluciones de sistemas *cuadrados*, es decir, sistemas con tantas ecuaciones como variables. Conteste las siguientes preguntas basando sus conclusiones en los incisos *a*) a *c*). (Ponga especial atención a la forma de la parte de los coeficientes de **rref**.)

i. ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y un número infinito de soluciones con otro lado derecho? ¿Por qué sí o por qué no?

ii. ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y no tenga solución con otro?

iii. ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga un número infinito de soluciones para un lado derecho y no tenga solución para otro? ¿Por qué sí o por qué no?

8. Distribución de calor. Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Nos interesa encontrar la temperatura en los puntos interiores. Considere el siguiente diagrama. Hay que encontrar aproximaciones para los puntos T_1 a T_9, o sea, la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda.



***a*)** Con esta suposición, establezca un sistema de ecuaciones, considerando primero el punto T_1, después el punto T_2, etc. Reescriba el sistema de manera que todas las variables se encuentren de un lado de la ecuación. Por ejemplo, para T_1 se tiene

$$T_1 = (100 + T_2 + T_4 + 50)/4$$

que se puede reescribir como $4T_1 - T_2 - T_4 = 150$.

Encuentre la matriz de coeficientes y la matriz aumentada. Describa el patrón que observe en la forma de la matriz de coeficientes. Dicha matriz se llama **matriz de banda**. ¿Puede ver de dónde viene el nombre?

***b*)** Resuelva el sistema usando el comando **rref**. Observe que se obtiene una solución única. Use la notación ":" para asignar la solución a la variable **x**.

***c*)** Suponga que A es la matriz de coeficientes y **b** es el lado derecho del sistema anterior. Dé el comando **y = A\b**. (La diagonal aquí se llama **diagonal invertida**. No es la diagonal de división.) Compare **y** y **x**.

9. Modelo de insumo-producto de Leontief

a) Haga referencia al ejemplo 10. Resuelva el sistema dado usando el comando rref y el comando "\". Observe nuevamente que existe una solución única.

b) Suponga que se tienen tres industrias independientes. La demanda externa para el producto 1 es 300 000; para el producto 2, 200 000, y para el producto 3, 200 000. Suponga que las demandas internas están dadas por

$$a_{11} = .2, \quad a_{12} = .1, \quad a_{13} = .3, \quad a_{21} = .15, \quad a_{22} = .25, \quad a_{23} = .25,$$
$$a_{31} = .1, \quad a_{32} = .05, \quad a_{33} = 0,$$

i. ¿Qué le dice $a_{32} = 0.5$?; ¿qué le dice $a_{33} = 0$?

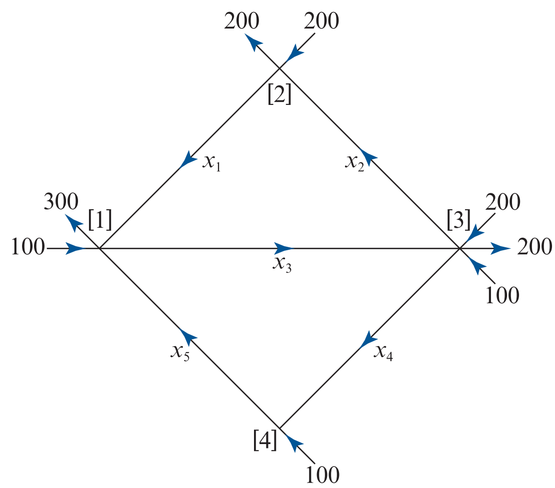
ii. Establezca la matriz aumentada para que el sistema de ecuaciones encuentre que x_1 es la producción del artículo i para $i = 1, 2, 3$. PRIMERO VUELVA A LEER EL EJEMPLO 10.

iii. Resuelva el sistema usando MATLAB. Interprete la solución, es decir, ¿cuánto de cada artículo debe producirse para tener una oferta igual a la demanda?

iv. Suponga que x_1 se midió en $ (dólares de producción) y que está interesado en interpretar la solución en centavos. Serán necesarios más dígitos en la respuesta desplegada que los cuatro dígitos normales después del punto decimal. Suponga que ha asignado la variables **x** a la solución. Dé el comando **format long** (vea la página 30) y después en la ventana de comandos escriba **x seguido de "enter"**. Esto desplegará más dígitos (cuando termine esta parte, dé el comando **format short** para regresar a la forma normal).

10. Flujo de tráfico

a) Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por $[k]$. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea x_i el número de vehículos/h que circulan por la calle i. Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico. Por ejemplo, en la intersección [1], $x_1 + x_5 + 100 = x_3 + 300$, esto es, el tráfico que entra es igual al tráfico que sale, lo que da $x_1 - x_3 + x_5 = 200$.



b) Resuelva el sistema usando el comando **rref**. Habrá un número infinito de soluciones. Escríbalas en términos de las variables que son las naturales para elegirse de manera arbitraria.

c) Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse; es decir, $x_3 = 0$. ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] ($x_5 = 0$) sin modificar los sentidos del tránsito? Si no se puede cerrar ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

11. Ajuste de polinomios a puntos. Si se tienen dos puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una recta única $y = c_1x + c_2$ que pasa por ambos puntos. Si se tienen tres puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una parábola única

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

que pasa por los tres puntos. Si se tienen $n + 1$ puntos en el plano con coordenadas x distintas, entonces existe un polinomio de grado n único que pasa a través de los $n + 1$ puntos:

$$y = c_1x^n + c_2x^{(n+1)} + \cdots + c_{n+1}$$

los coeficientes $c_1, \ldots, c_{n+1}$ se pueden encontrar resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo.

$$P_1 = (2, 5) \qquad P_2 = (3, 10) \qquad P_3 = (4, -3)$$

Se quiere encontrar c_1, c_2 y c_3, de manera que $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$ pase por los puntos P_1, P_2 y P_3.

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 2^2 + c_2 2 + c_3 \\ 10 &= c_1 3^2 + c_2 3 + c_3 \\ -3 &= c_1 4^2 + c_2 4 + c_3 \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 50 \\ -59 \end{pmatrix}$ que indica que la parábola que pasa por cada uno de los puntos es $y = -9x^2 + 50x - 59$. Se dice que la parábola *se ajusta* a los puntos.

a) Para $P_1 = (1, -1)$, $P_2 = (3, 3)$ y $P_3 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones para encontrar los coeficientes de la parábola que se ajusta a los puntos. Sea A la matriz de coeficientes y b el lado derecho. Resuelva el sistema. En un comentario escriba la ecuación de la parábola que se ajusta a los puntos, es decir, que pasa por los tres.

Dé **x = [1;3;4]** y ***V*** **= vander(x)**. Compare V con A.

Utilizando **doc vander** describa el funcionamiento del comando **vander.**

b) Para $P_1 = (0, 5)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (3, 3)$ y $P_4 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones, dé la matriz aumentada y utilice MATLAB para resolver el sistema.

Escriba, en un comentario, la ecuación del polinomio cúbico que se ajusta a los cuatro puntos.

Sea **x** el vector columna que contiene las coordenadas x de los puntos P_1 a P_4. Dé **x** y encuentre **V=vander(x)**. Compare V con la matriz de coeficientes que encontró al establecer el sistema.

c) Usando algunas características gráficas de MATLAB se pueden visualizar los resultados con los comandos siguientes. Siga estos comandos para los puntos en *a*) y de nuevo para los cuatro puntos en *b*).

Dé **x** como el vector columna de las coordenadas x de los puntos

Dé **y** como el vector columna de las coordenadas y de los puntos

Dé los siguientes comandos:

```
V = vander (x)
c = V\y
s = min(x):.01:max(x);
yy = polyval(c,s);
plot(x,y'*',s,yy)
```

El primer comando crea la matriz de coeficientes deseada (**doc vander**).

El segundo resuelve el sistema obteniendo los coeficientes del polinomio (**doc mldivide**).

El tercero crea un vector **s** que contiene múltiples elementos, cada uno entre el valor mínimo y máximo de las coordenadas x, de manera que se pueda evaluar el polinomio en muchos puntos para crear una buena gráfica (**doc min**, **doc max doc :**).

El cuarto crea un vector **yy** que contiene las coordenadas y obtenidas evaluando el polinomio en los elementos de **s** (**doc polyval**).

El quinto produce una gráfica de los puntos originales (con un símbolo "*") y un dibujo de la gráfica del polinomio (**doc plot**).

Debe observarse que la gráfica del polinomio pasa a través de los puntos originales (etiquetados con "*").

d) Genere **x=rand(7,1)** y **y=rand(7,1)** o genere un vector de coordenadas x y un vector de coordenadas y de su preferencia. Asegúrese de cambiar (o elegir) las coordenadas x de manera que sean distintas. Siga los comandos del inciso c) para visualizar el ajuste polinomial.

1.4 SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE ECUACIONES

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales [sistema (1.3.7), página 16] se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots b_m$, son cero. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Los sistemas homogéneos surgen de diferentes formas. Se estudiará un sistema homogéneo en la sección 4.4. En dicha sección se resolverán algunos sistemas homogéneos, de nueva cuenta, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Para dicho sistema lineal general existen tres posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones. Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla.

SOLUCIÓN TRIVIAL O SOLUCIÓN CERO

SOLUCIONES NO TRIVIALES

Como $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de ésta. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman **soluciones no triviales**.

EJEMPLO 1 Sistema homogéneo que tiene únicamente la solución trivial

Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 1.3.1 en la página 7. Al reducir en forma sucesiva, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

EJEMPLO 2 Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Al hacer uso de la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones y, evidentemente, existe un número infinito de soluciones dadas por $(-1/9x_3, 5/9x_3, x_3)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$ se obtiene la solución $(-1/9, 5/9, 1)$. Si $x_3 = 9\pi$ se obtiene la solución $(-\pi, 5\pi, 9\pi)$.

EJEMPLO 3 Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Solución Al reducir por renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

Así, hay un número infinito de soluciones dadas por $(-5/6x_3, 11/6x_3, x_3)$. Esto puede no sorprender porque el sistema (2) contiene tres incógnitas y únicamente dos ecuaciones.

En términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo (1) siempre tendrá un número infinito de soluciones. Para ver esto observe que si sólo tuviera la solución trivial, la reducción por renglones conduciría al sistema

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

y, posiblemente, algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$. Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Puesto que la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición de que había más incógnitas que ecuaciones. Entonces se tiene el teorema 1.

TEOREMA 1

El sistema homogéneo (1) tiene un número infinito de soluciones si $n > m$.

Problemas 1.4

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuáles de los siguientes sistemas *deben* tener soluciones no triviales?

a) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

II. ¿Para qué valores de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

***a*)** 1 ***b*)** 2 ***c*)** 3 ***d*)** 4 ***e*)** 5 ***f*)** 0

En los problemas 1 a 17 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos.

1. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -8x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} -2x_1 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -7x_1 + 21x_2 &= 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

18. Muestre que el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

19. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

***20.** Considere el sistema homogéneo de 3×3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre condiciones sobre los coeficientes a_{ij} tales que la solución trivial sea la única solución.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c*) **II.** *e*)

Manejo de la calculadora

Los sistemas homogéneos se pueden resolver con la calculadora HP50g al utilizar la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes (RREF).

En los problemas 21 al 24 encuentre todas las soluciones para cada sistema.

21.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 0 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 8.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 0 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 0 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} 25x_1 - 16x_2 + 13x_3 + 33x_4 - 57x_5 &= 0 \\ -16x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad + 12x_5 &= 0 \\ - 18x_2 \qquad\qquad + 16x_4 - 26x_5 &= 0 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 0 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 11x_2 - 9x_3 + 13x_4 - 20x_5 &= 0 \end{aligned}$$

MATLAB 1.4

1. ***a***) Genere cuatro matrices aleatorias con más columnas (incógnitas) que renglones (ecuaciones).

b) Use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones de cada una de las matrices aleatorias.

c) Para cada matriz aleatoria use la fórmula escalonada reducida por renglones para escribir la solución a los sistemas homogéneos asociados. Verifique el teorema 1, es decir, que en este caso siempre hay un número infinito de soluciones.

(Para usar MATLAB para la generación de matrices aleatorias, remítase a la sección anterior a los problemas de MATLAB de la sección 1.3.)

2. ¿Cuál es su conclusión acerca de la solución de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficiente tiene más renglones (ecuaciones) que columnas (incógnitas)? Resuelva los sistemas homogéneos cuyas matrices de coeficientes se dan enseguida. ¿Los resultados conforman su conclusión?

i. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

3. Balanceo de reacciones químicas

Al balancear reacciones químicas tales como la de la fotosíntesis

$$CO_2 + H_2O \quad\rightarrow\quad C_6H_{12}O_6 + O_2$$

se buscan enteros positivos x_1, x_2, x_3 y x_4, que no tengan un divisor común diferente de 1, de manera que en

$$x_1(CO_2) + x_2(H_2O) \quad\rightarrow\quad x_3(C_6H_{12}O_6) + x_4(O_2)$$

el número de átomos de cada elemento químico involucrado es el mismo en cada lado de la reacción. El número de átomos de un elemento químico lo indica un subíndice; por ejemplo, en CO_2 hay un átomo de C (carbono) y dos átomos de O (oxígeno). Esto nos lleva a un sistema homogéneo de ecuaciones. ¿Por qué se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones como resultado del "balanceo"?

$$\begin{array}{llcl} \text{C:} & x_1 & = & 6x_3 \\ \text{O:} & 2x_1 + x_2 & = & 6x_3 + 2x_4 \\ \text{H:} & 2x_2 & = & 12x_3 \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{rcl} x_1 - 6x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 2x_2 - 12x_3 & = & 0 \end{array}$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que se espera un número infinito de soluciones. Para resolver el sistema se introduce la matriz aumentada, se usa el comando **rref** y se escribe la solución en términos de las variables arbitrarias. Uno de los requerimientos será elegir las variables arbitrarias de manera que x_1, x_2, x_3 y x_4 sean enteros sin un divisor común diferente de 1.

Para los sistemas que aquí se presentan habrá una variable arbitraria correspondiente a la última columna de la **rref** (forma escalonada reducida por renglones) de la matriz de coeficientes. La notación ":" se utiliza para encontrar la elección correcta de variables arbitrarias para producir enteros y asignar la variable z a la última columna de la **rref** de la matriz de coeficientes. Se da el comando **xx = rats(z)**. Éste desplegará los números de la columna en forma de fracciones en lugar de decimales. También se puede dar el comando **format rat** y después se despliega **xx** (asegúrese de dar el comando **format short** para regresar a la forma normal).

***a*)** Resuelva el sistema anterior para la reacción de fotosíntesis y encuentre los enteros x_1 a x_4 sin común divisor diferente de 1 que la balancean.

***b*)** Establezca el sistema de ecuaciones homogéneas que balancea la reacción entre:

$$Pb(N_3)_2 + Cr(MnO_4)_2 \quad \rightarrow \quad Cr_2O_3 + MnO_2 + Pb_3O_4 + NO$$

Resuelva el sistema y encuentre los enteros x_1 a x_6 sin divisor común diferente de 1 que balancea la reacción.

1.5 VECTORES Y MATRICES

El estudio de vectores y matrices es la médula del álgebra lineal. El estudio de vectores comenzó esencialmente con el trabajo del gran matemático irlandés Sir William Hamilton (1805-1865)[6]. Su deseo de encontrar una forma de representar un cierto tipo de objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que él llamó los *cuaterniones*. Esta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se conoce como *vectores*. A lo largo de toda su vida y del resto del siglo XIX hubo un debate considerable sobre la utilidad de los cuaterniones y de los vectores. Al final del siglo el gran físico inglés Lord Kelvin escribió que los cuaterniones, "aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera y los vectores… nunca han sido de menor utilidad para ninguna criatura."

Pero Kelvin estaba equivocado. En la actualidad casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez más, en las ciencias biológicas y sociales.[7]

En la página 2 se describió la solución un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como un par de números (x, y). En el ejemplo 1.3.1 en la página 9 se escribió la solución a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas como la terna de números $(4, -2, 3)$. Tanto (x, y) como $(4, -2, 3)$ son **vectores**.

DEFINICIÓN 4 **Vector renglón de *n* componentes**

Un vector de n componentes se define como un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

[6] Vea la semblanza bibliográfica de Hamilton en la página 52.

[7] Un análisis interesante sobre el desarrollo del análisis vectorial moderno se puede consultar en el libro de M.J. Crowe, *A History of Vector Analisis* (Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1967) o en el excelente libro de Morris Kilne, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 32).

DEFINICIÓN 2

Vector columna de *n* componentes

Un **vector columna de *n* componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

COMPONENTES DE UN VECTOR

En (1) o (2), x_1 se denomina la **primera componente** del vector, x_2 es la **segunda componente**, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la ***k*-ésima componente** del vector.

Con el objeto de simplificar, con frecuencia se hará referencia a un vector renglón de n componentes como un **vector renglón** o un ***n*-vector**. Del mismo modo, se usará el término **vector columna** (o n-vector) para denotar a un vector columna de n componentes. Cualquier vector cuyos elementos sean todos cero se denomina un **vector cero**.

VECTOR CERO

EJEMPLO 1 **Cuatro vectores**

Los siguientes son vectores:

i. (3, 6) es un vector renglón (o un 2-vector)

ii. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector columna (o un 3-vector)

iii. (2, −1, 0, 4)) es un vector renglón (o un 4-vector)

iv. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector columna y un vector cero.

ADVERTENCIA

La palabra “ordenado” contenida en la definición de un vector es de fundamental importancia. Dos vectores con las mismas componentes escritas en diferente orden *no* son iguales. De esta forma, por ejemplo, los vectores renglón (1, 2) y (2, 1) no son iguales.

A lo largo del libro se resaltarán los vectores con letras minúsculas negritas como **u**, **v**, **a**, **b**, **c**, y así sucesivamente. Un vector cero se denota por **0**. Más aún, como en términos generales resultará obvio cuando se trate de un vector renglón o de un vector columna, se hará referencia a ellos simplemente como “vectores”.

Los vectores surgen de diversas maneras. Suponga que el jefe de compras de una fábrica debe ordenar cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel. Él puede mantener el control de las unidades a ordenar con un solo vector. El vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ indica que ordenará 10 unidades de acero, 30 unidades de aluminio, etcétera.

Observación. Se puede observar aquí por qué el orden en que se escriben las componentes de un vector es sumamente importante. Es evidente que los vectores $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ tienen significados muy distintos para el comprador.

Enseguida se describirán algunas propiedades de los vectores. Puesto que sería repetitivo hacerlo primero para los vectores renglón y después para los vectores columna, se presentarán todas las definiciones en términos de vectores columna. Los vectores renglón tienen definiciones similares.

Las componentes de todos los vectores en este texto son números reales o complejos.[8] Se

$\mathbb{R}$ denota al conjunto de todos los números reales por símbolo $\mathbb{R}$ y al conjunto de números com-

$\mathbb{C}$ plejos por símbolo $\mathbb{C}$.

El espacio símbolo $\mathbb{R}^n$

Se usa el símbolo $\mathbb{R}^n$ para denotar al conjunto de todos los n-vectores

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ donde cada } a_i \text{ es un número real.}$$

$\mathbb{C}^n$ De manera similar, se usa el símbolo $\mathbb{C}^n$ para denotar al conjunto de todos los n–vectores $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, donde cada c_i es un número complejo. En el capítulo 3 se analizarán los conjuntos símbolo $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y símbolo $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio). En el capítulo 4 se examinarán los conjuntos arbitrarios de vectores.

En términos reales los vectores son tipos especiales de matrices. Por lo tanto, en lugar de estudiar las propiedades de los vectores se analizarán las propiedades de las matrices.

[8] Un número complejo es un número de la forma $a + ib$, en donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En el apéndice 2 se da una descripción de los números complejos. No se habla de vectores complejos otra vez hasta el capítulo 4; serán útiles en especial en el capítulo 6. Por lo tanto, a menos que se establezca de otra manera, por el momento se supondrá que todos los vectores tienen componentes reales.

DEFINICIÓN 3

Matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

RENGLONES Y COLUMNAS DE UNA MATRIZ

COMPONENTE O ELEMENTO

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". A menos que se establezca lo contrario, se supondrá siempre que los números en una matriz o vector son reales. El vector renglón $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$ se llama **renglón *i*** y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se llama **columna *j***. La **componente o elemento *ij*** de A, denotado por a_{ij}, es el número que aparece en el renglón i y la columnas j de A. En ocasiones se escribirá la matriz A como $A = (a_{ij})$. Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas.

MATRIZ CUADRADA

MATRIZ CERO

TAMAÑO DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se llama **matriz cuadrada**. Una matriz $m \times n$ con todos los elementos iguales a cero se denomina **matriz cero** de $m \times n$.

Se dice que una matriz $m \times n$ tiene **tamaño** $m \times n$.

Nota histórica. El matemático inglés James Joseph Silvester (1814-1897) fue el primero que utilizó el término "matriz" en 1850, para distinguir las matrices de los determinantes (que se estudiarán en el capítulo 2). La idea era que el término "matriz" tuviera el significado de "madre de los determinantes".

EJEMPLO 2 **Cinco matrices**

Enseguida se presentan cinco matrices de diferentes tamaños:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 (cuadrada).

ii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2.

iii. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3.

iv. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×3 (cuadrada).

v. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz cero de 2×4.

Notación con paréntesis cuadrados. En algunos libros las matrices se presentan dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos. Por ejemplo, las primeras dos matrices del ejemplo 2 se pueden escribir como

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **ii.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

En este texto se utilizarán exclusivamente paréntesis redondos.

A través del libro se hace referencia al renglón i, la columna j y la componente ij de una matriz para diferentes valores de i y j. Estas ideas se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Localización de las componentes de una matriz

Encuentre las componentes (1, 2), (3, 1) y (2, 2) de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución La componente (1, 2) es el número que se encuentra en el primer renglón y la segunda columna, que se han sombreado; la componente (1, 2) es 6:

$$\begin{array}{rl} & \text{2da columna} \\ & \downarrow \\ \text{1er renglón} \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En las siguientes matrices sombreadas se puede ver que la componente (3, 1) es 7 y la componente (2, 2) es -3:

$$\begin{array}{rl} & \text{1ra columna} \\ & \downarrow \\ & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{3er renglón} \longrightarrow & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \text{2da columna} \\ & \downarrow \\ \text{2do renglón} \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

DEFINICIÓN 4

Igualdad de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si (1) son del mismo tamaño y (2) las componentes correspondientes son iguales.

EJEMPLO 4

Matrices iguales y matrices distintas

¿Son iguales las siguientes matrices?

i. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1+3 & 1 & 2+3 \\ 1+1 & 1-4 & 6-6 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

i. Sí; ambas matrices son de 2×3 y $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$, $1 - 4 = -3$ y $6 - 6 = 0$.

ii. No; $-2 \neq 0$, por lo que las matrices son distintas ya que, por ejemplo, las componentes (1, 1) son diferentes. Esto es cierto aun cuando las dos matrices contienen los mismos números. Las componentes *correspondientes* deben ser iguales. Esto significa que la componente (1, 1) en A debe ser igual a la componente (1, 1) en B, etcétera.

iii. No; la primera matriz es de 2×2 y la segunda es de 2×3, de manera que no tienen el mismo tamaño.

Los vectores son matrices de un renglón o de una columna

Cada vector es un tipo especial de matriz. Así, por ejemplo, el vector renglón de n componentes $(a_1, a_2, \ldots c_n)$ es una matriz de $1 \times n$, mientras que el vector columna de n componentes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es una matriz de $n \times 1$.

Las matrices, al igual que los vectores, surgen en un gran número de situaciones prácticas. Por ejemplo, en la página 46 se analizó la manera en que el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ puede representar las cantidades ordenadas de cuatro productos distintos utilizados por un fabricante. Suponga que se tienen cinco plantas diferentes, entonces la matriz de 4×5 podría representar las órdenes de los cuatro productos en cada una de las cinco plantas.

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 & 16 & 25 \\ 30 & 10 & 20 & 25 & 22 \\ 15 & 22 & 18 & 20 & 13 \\ 60 & 40 & 50 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar, a manera de ejemplo, que la planta 4 ordena 25 unidades del segundo producto mientras que la planta 2 ordena 40 unidades del cuarto producto.

Las matrices se pueden sumar y multiplicar por números reales.

DEFINICIÓN 5

Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

ADVERTENCIA

La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño. Así, por ejemplo, no es posible sumar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ o las matrices (vectores) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es decir, son incompatibles bajo la suma.

EJEMPLO 5 Suma de dos matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

ESCALARES

Al manejar vectores se hace referencia a los números como **escalares** (que pueden ser reales o complejos dependiendo de si los vectores en cuestión son reales o complejos).

Nota histórica. El término "escalar" encuentra su origen con Hamilton. Su definición de cuaternión incluía lo que él definió una "parte real" y una "parte imaginaria". En su artículo "On Quartenions, or on a New System of Imagineries in Algebra", en *Philosophical Magazine*, 3a. serie, 25(1844):26-27, escribió: "La parte real algebraicamente puede tomar . . . todos los valores contenidos en la *escala* de la progresión de números desde el infinito negativo al infinito positivo; la llamaremos, entonces, la *parte escalar* o simplemente el *escalar* del cuaternión…" En el mismo artículo Hamilton definió la parte imaginaria de su cuaternión como la parte *vectorial*. Aunque éste no fue el primer uso que se dio a la palabra "vector", sí fue la primera vez que se usó en el contexto de las definiciones contenidas en esta sección. Es importante mencionar que el artículo del que se tomó la cita anterior marca el inicio del análisis vectorial moderno.

Definición 6 **Multiplicación de una matriz por un escalar**

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está dada por

$$\alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α. Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 6 **Múltiplos escalares de matrices**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$$-\tfrac{1}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 7 **Suma de múltiplos escalares de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule $2a - 3b$.

Solución

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

El teorema que se presenta a continuación proporciona los hechos básicos sobre la suma de matrices y la multiplicación por escalares. Se demuestra la parte *iii*) y se deja el resto de la prueba como ejercicio para el lector (vea los problemas 41 a 43).

TEOREMA 1

Sean A, B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i. $A + 0 = A$

ii. $0A = 0$

iii. $A + B = B + A$ **(ley conmutativa para la suma de matrices)**

iv. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ley asociativa para la suma de matrices)**

v. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**

vi. $1A = A$

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Nota. El cero en la parte *i*) del teorema es la matriz cero de $m \times n$. En la parte *ii*) el cero a la izquierda es un escalar mientras que el cero a la derecha es la matriz cero de $m \times n$.

Demostración de iii.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Por ende

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$a + b = b + a$ para cualesquiera dos números reales a y b

$$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} = B + A$$

EJEMPLO 8 Ilustración de la ley asociativa para la suma de matrices

Para ilustrar la ley asociativa se observa que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

De igual manera

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

El ejemplo 7 ilustra la importancia de la ley asociativa de la suma de vectores ya que si se desea sumar tres matrices o más, únicamente se podrá hacerlo sumándolas de dos en dos. La ley asociativa indica que esto se puede llevar a cabo de dos maneras diferentes obteniendo el mismo resultado. Si no fuera así, sería más difícil definir la suma de tres o más matrices ya que tendría que especificarse si se quiere definir la suma de $A + B + C$ como $(A + B) + C$ o como $A + (B + C)$.

Problemas 1.5

Autoevaluación

I. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar -1, el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2.

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II. ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = (2\ \ 0\ \ 0)$ y $B = (3\ \ 1)$?

a) $(-8\ -4)$

b) $(5\ 0\ 1)$

c) $(16\ -4\ 0)$

d) Esta operación no se puede realizar.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta cuando se encuentra a diferencias (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.

b) Las matrices deben ser cuadradas.

c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.

d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV. ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) $-2, -8, 1$ *b*) $4, -8$

c) $2, 8, -1$ *d*) $-4, 8$

V. ¿Cuál de las siguientes debe ser el segundo renglón de la matriz B si $3A - B = 2C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Semblanza de...

Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865

Sir William Rowan Hamilton
(The Granger collection)

Sir William Rowan Hamilton nació en Dublín en 1805, en donde pasó la mayor parte de su vida, y fue sin duda el más grande matemático irlandés. El padre (un abogado) y la madre de Hamilton murieron cuando era apenas un niño. Su tío, un lingüista, se hizo cargo de su educación. A la edad de cinco años, Hamilton podía leer inglés, hebreo, latín y griego. Cuando cumplió los 13 dominaba, además de los idiomas del continente europeo, sánscrito, chino, persa, árabe, malasio, hindú, bengalí y varios otros. Hamilton disfrutaba escribir poesía, tanto en su infancia como en la vida adulta, y entre sus amigos se contaban los grandes poetas ingleses Samuel Taylor Coleridge y William Wordsworth. Sin embargo, la poesía de Hamilton se consideraba tan mala que resultó una bendición que desarrollara otros intereses, especialmente aquellos relacionados con las matemáticas.

Aunque disfrutó las matemáticas desde niño, el interés de Hamilton creció de manera importante después de un encuentro casual a la edad de 15 años con Zerah Colburn, el americano que calculó las descargas eléctricas de los rayos. Poco después, Hamilton comenzó a leer los libros importantes de matemáticas de su tiempo. En 1823, a los 18 años, descubrió un error en la *Mécanique céleste* de Simon Laplace y escribió un artículo impresionante sobre el tema. Un año más tarde entró al Trinity College en Dublín.

La carrera universitaria de Hamilton fue sobresaliente. A los 21 años, siendo todavía estudiante de licenciatura, había impresionado a tal grado a sus maestros que fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y profesor de Astronomía en la universidad. Poco después escribió lo que ahora se considera un trabajo clásico en óptica. Haciendo uso únicamente de la teoría matemática, predijo la refracción cónica en cierto tipo de cristales. Más tarde los físicos confirmaron esta teoría. En parte debido a este trabajo, Hamilton fue armado caballero en 1835.

El primer artículo puramente matemático de Hamilton apareció en 1833. En él describió una manera algebraica de manipular pares de números reales. Este trabajo sienta las reglas que se usan hoy en día para sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos. No obstante, en un principio, Hamilton no pudo desarrollar una multiplicación para ternas o n-eadas ordenadas de números para $n > 2$. Durante 10 años estudió este problema, y se dice que lo resolvió en un rato de inspiración mientras caminaba por el Puente de Brougham en Dublín en 1843. La clave era descartar la conocida propiedad conmutativa de la multiplicación. Los nuevos objetos que creó se llamaron cuaterniones, que fueron los precursores de lo que ahora se conoce como vectores. En la actualidad, una placa incrustada en el puente cuenta la historia.

Aquí, mientras caminaba
el 16 de octubre de 1843,
Sir William Rowan Hamilton
descubrió, en un instante de
genialidad, la fórmula fundamental
para la multiplicación de cuaterniones
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
y la grabó en una piedra de este puente.

Durante el resto de su vida, Hamilton pasó la mayor parte del tiempo desarrollando el álgebra de cuaterniones. Él suponía que tendrían un significado revolucionario en la física matemática. Su trabajo monumental sobre este tema, *Treatise on Quaternions*, fue publicado en 1853. Más tarde trabajó en una extensión del tema, *Elements of quaternions*. Aunque Hamilton murió en 1865 antes de terminar esta obra, su hijo publicó el trabajo en 1866.

Los estudiantes de matemáticas y física conocen a Hamilton dentro de muchos otros contextos. En física matemática, por ejemplo, se encuentra la función hamiltoniana que con frecuencia representa la energía total de un sistema, y las ecuaciones diferenciales de dinámica de Hamilton-Jacobi. En la teoría de matrices, el teorema de Hamilton-Cayley establece que toda matriz satisface su propia ecuación característica. Esto se estudiará en el capítulo 6.

A pesar del gran trabajo desarrollado, los últimos años de Hamilton fueron un tormento. Su esposa estaba semiinválida y él fue atacado por el alcoholismo. Es gratificante, por lo tanto, señalar que durante esos últimos años la recién formada American Nacional Academy of Sciences eligió a Sir William Rowan Hamilton como su primer miembro extranjero.

a) $-3, 2, 6$ *b*) $0, -2, 9$

c) $3, -2, 6$ *d*) $0, 2, -9$

En los problemas 1 a 13 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix}$ y $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ **2.** $3\mathbf{b}$ **3.** $5\mathbf{a}$

4. $-2\mathbf{c}$ **5.** $\mathbf{b}+3\mathbf{c}$ **6.** $2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$

7. $-3\mathbf{b}+2\mathbf{c}$ **8.** $-5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ **9.** $0\mathbf{c}$

10. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ **11.** $2\mathbf{a}+4\mathbf{b}-3\mathbf{c}$ **12.** $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c}$

13. $3\mathbf{b}-7\mathbf{c}+2\mathbf{a}$

En los problemas 14 a 26 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a}=(3, -1, 4, 2)$, $\mathbf{b}=(6, 0, -1, 4)$ y $\mathbf{c}=(-1, 3, 1, 5)$.

14. $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ **15.** $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ **16.** $\mathbf{c}-\mathbf{a}$

17. $4\mathbf{c}$ **18.** $-2\mathbf{b}$ **19.** $7\mathbf{b}+4\mathbf{c}$

20. $2\mathbf{a}-\mathbf{c}$ **21.** $4\mathbf{b}-7\mathbf{a}$ **22.** $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$

23. $\mathbf{c}-\mathbf{b}+2\mathbf{a}$ **24.** $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}-4\mathbf{c}$ **25.** $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c}$

26. $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$

En los problemas 27 a 44 realice las operaciones indicadas con $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&0\\1&4\\-7&5\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1&1\\4&6\\-7&3\end{pmatrix}$.

27. $3A$ **28.** $A+B$ **29.** $C-A$

30. $A-C$ **31.** $2C-5A$ **32.** $0B$ (0 es el cero escalar)

33. $-7A+3B$ **34.** $6B-7A+0C$ **35.** $A+B+C$

36. $C-A-B$ **37.** $B-A-2C$ **38.** $2A-3B+4C$

39. $7C-B+2A$

40. Encuentre una matriz D tal que $2A+B-D$ es la matriz cero de 3×2.

41. Encuentre la matriz E tal que $A+2B-3C+E$ es la matriz cero de 3×2.

42. Encuentre una matriz D tal que $2A+B-D$ sea la matriz cero de 3×2.

43. Encuentre una matriz E tal que $A+2B+3E$ sea la matriz de 3×2 cuyos elementos todos son uno.

44. Dados $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación para X:

$3(2A+B+X)=5(X-A+B)$

En los problemas 45 a 54 realice los cálculos indicados con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

45. $A - 2B$ **46.** $3A - C$ **47.** $3B - 2A$

48. $A + B + C$ **49.** $2A - B + 2C$ **50.** $3A + 2B - 4C$

51. $C - A - B$ **52.** $4C - 2B + 3A$

53. Encuentre una matriz D tal que $A + B + C + D$ es la matriz cero de 3×3.

54. Encuentre una matriz E tal que $3C - 2B + 8A - 4E$ es la matriz cero de 3×3.

55. Encuentre una matriz D tal que $A + B + C + D$ sea la matriz de 3×3 cuyos elementos todos son uno.

56. Encuentre una matriz E tal que $A + 2B + E - 3C$ sea la matriz de 3×3 cuyos elementos todos son uno.

57. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcular $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$

58. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $\overline{0}$ la matriz cero de $m \times n$. Utilice las definiciones 5 y 6 para demostrar que $0A = \overline{0}$ y que $\overline{0} + A = A$. De igual manera, muestre que $1A = A$.

59. Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ son tres matrices de $m \times n$, calcule $(A + B) + C$ y $A + (B + C)$ y muestre que son iguales.

60. Si α y β son escalares y A y B son matrices de $m \times n$, calcule $\alpha(A + B)$ y $\alpha A + \alpha B$ y muestre que son iguales. Calcule además $(\alpha + \beta) A$ y $\alpha A + \beta A$ y muestre que son iguales.

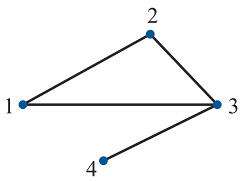


Figura 1.7

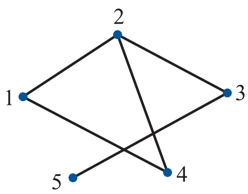


Figura 1.8

61. Considere la "gráfica" que une los cuatro puntos de la figura 1.7. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por una línea) con el punto j y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j.

62. Haga lo mismo (construyendo una matriz de 5×5) para la gráfica de la figura 1.8.

63. En la fabricación de cierto producto se necesitan cuatro materias primas. El vector $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ representa una demanda dada de la fábrica para cada una de las cuatro materias primas para producir una unidad del producto. Si $\mathbf{d}$ es el vector demanda de la fábrica 1 y $\mathbf{e}$ es el vector demanda de la fábrica 2, ¿qué representan los vectores $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ y $2\mathbf{d}$?

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *b*) **II.** *d*) **III.** *a*) **IV.** *b*) **V.** *b*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

Suma y multiplicación por un escalar en la HP50g

La manera más sencilla de sumar dos matrices del mismo tamaño es introducir primero cada matriz y dar a cada una un nombre (como *A22* y *B22*).

{2, 2} ENTER RANM ' 22 ' STO▸ {2, 2} ENTER RANM ' B22 ' STO▸

La función RANM produce una matriz de dimensión {n,m} con elementos aleatorios.
Después, para obtener $A22 + B22$ o $A22 - B22$ se oprime

A22 ENTER B22 ENTER + A22 ENTER B22 ENTER −

Para obtener $\alpha A22$, primero gurdamos el valor de alpha utilizando la siguiente secuencia

. 2 5 +/− ENTER ' ALPHA ↱ A ENTER

La multiplicación se obtiene utilizando la siguiente secuencia

ALPHA ↱ A ENTER A22 ENTER ×

MATLAB 1.5

1. El presente problema proporciona la práctica necesaria para trabajar con la notación matricial al igual que con los procedimientos que se usarán en problemas futuros. En los problemas anteriores, al realizar la operación con renglones $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ se encontraba, por mera observación, el multiplicador c. Este multiplicador c se puede calcular con exactitud a partir de los elementos de la matriz.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j & k \end{pmatrix}$$

Para crear un cero en la posición que ocupa i se necesita $R_3 \rightarrow R_3 + (-i/f)R_2$. Observe que $f = A(2, 3)$ y que $i = A(3, 3)$:

c= −A(3,3)/A(2,3)

En términos generales, $c = -$(elemento que debe hacerse cero/pivote usado):

A(3,:) = A(3,:) + c*A(2,:)

a) Para la matriz que sigue realice las operaciones con renglones $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ para obtener la matriz en forma escalonada por renglón (no la forma escalonada reducida por renglones), excepto que el elemento pivote no necesita ser 1. (No multiplique ni divida un renglón por un número para crear unos.) Encuentre todos los multiplicadores usando la notación de matrices anterior. Para esta matriz sus multiplicadores serán números sencillos para que pueda verificar conforme el proceso avanza:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

***b*)** Oprima

A = rand(4,5)

A(:,3) = 2*A(:,1) + 4*A(:,2)

Siga las instrucciones del inciso *a*). Asegúrese de calcular los multiplicadores usando la notación matricial.

Vea el problema 2 de MATLAB en la sección 1.10, una situación en la que se quiere realizar el tipo de reducción que se acaba de describir.

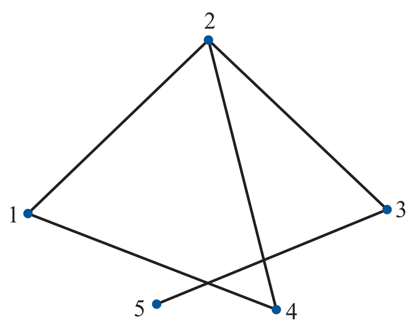
2. Características de MATLAB. *Introducción eficiente de matrices dispersas*

***a*)** En el problema 60 se le pidió que estableciera matrices para gráficas en las que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el punto } i \text{ está conectado con el punto } j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Para la mayor parte de este tipo de gráficas la matriz consiste en muchos ceros y algunos unos. En MATLAB se puede introducir una matriz con ceros en todos sus elementos y después modificarla renglón por renglón.

Considere la siguiente gráfica:



a = zeros(5)

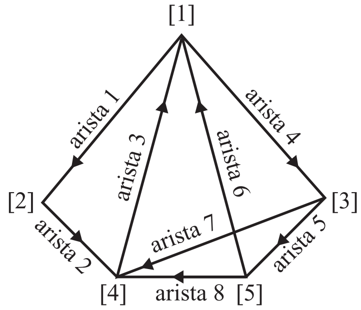
a(1,[2 4]) = [1 1] (1 está conectado con 2 y 4)

a(2,[1 3 4]) = [1 1 1] (1 está conectado con 1, 3 y 4)

y así sucesivamente

Termine de introducir la matriz anterior y verifique el resultado con su respuesta al problema 61.

b) Considere la siguiente gráfica dirigida



Defina

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ va al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

¿De qué tamaño será A? Introduzca **A=zeros(n,m)**, donde n es el número de renglones y m es el número de columnas (**doc zeros**). Se modificará A columna por columna viendo una arista a la vez. Por ejemplo,

***A*([1 2],1) = [−1;1]**	la arista 1 sale del [1] y va al [2]
***A*(4 5], 8 = [1;−1]**	la arista 8 sale del [5] y va al [4]

Complete el proceso anterior para encontrar A.

3. ***a)*** Introduzca cualesquiera dos matrices A y B de distinto tamaño. Encuentre $A + B$; ¿qué le dice MATLAB?

b) Introduzca cualesquiera dos matrices A y B del mismo tamaño. Suponga que s es un escalar. De sus conocimientos algebraicos sobre las manipulaciones con números, ¿a qué conclusión llegaría sobre las relaciones **s*A**, **s*B** y **s*(A+B)**? Utilice una línea de comentario para escribir esta conclusión. Pruebe su conclusión con tres elecciones diferentes de s. Pruebe su conclusión con otra elección de A y otra elección de B para tres valores de s. (Si va a usar MATLAB para generar matrices aleatorias, consulte la presentación anterior de problemas de MATLAB 1.3.)

1.6 Productos vectorial y matricial

En esta sección se analizará la forma en la cual se pueden multiplicar dos matrices. Es obvio que se puede definir el producto de dos matrices de $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ como la matriz $m \times n$ cuya componente ij es $a_{ij}b_{ij}$. Sin embargo, para casi todas las aplicaciones importantes que usan matrices, se requiere de otro tipo de producto. Explicaremos las razones de esto.

EJEMPLO 1 Producto de un vector de demanda y un vector de precios

Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el **vector de demanda** $\mathbf{d} = (30 \quad 20 \quad 40 \quad 10)$ (una matriz de 1×4). El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el **vector de precios** $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \$20 \\ \$15 \\ \$18 \\ \$40 \end{pmatrix}$ (una matriz de 4×1). Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

Solución La demanda del primer artículo es 30, y el fabricante recibe \$20 por cada artículo vendido. Por consiguiente recibe (30)(20) = \$600 de las ventas del primer artículo. Si se sigue este razonamiento, se ve que la cantidad total de dinero que recibe es

$$(30)(20) + (20)(15) + (40)(18) + (10)(40) = 600 + 300 + 720 + 400 = \$2\,020$$

Este resultado se escribe como

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} = 2020$$

Es decir, se multiplicó un vector renglón de 4 componentes y un vector columna de 4 componentes para obtener un escalar (un número real).

En el último ejemplo se multiplicó un vector renglón por un vector columna y se obtuvo un escalar. En términos generales se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1 **Producto escalar**

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores. Entonces el **producto escalar** de **a** y **b** denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad (1)$$

Debido a la notación en (1), el producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de los vectores. Observe que el producto escalar de dos n-vectores es un escalar (es decir, es un número).

ADVERTENCIA

Al tomar el producto escalar de a y b es necesario que a y b tengan el mismo número de componentes.

A menudo se tomará el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. En este caso se tiene

Producto escalar

vector renglón $1 \times n$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad (2)$$

Éste es un número real (un escalar)

vector columna $n \times 1$

EJEMPLO 2 **Producto escalar de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (-2)(-2) + (3)(4) = 3 + 4 + 12 = 19.$

EJEMPLO 3 **Producto escalar de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = (2, -3, 4, -6)$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución Aquí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(1) + (-3)(2) + (4)(0) + (-6)(3) = 2 - 6 + 0 - 18 = -22.$

El teorema se presenta a continuación y se deduce directamente de la definición del producto escalar. Se demuestra la parte *ii*) y se deja el resto como ejercicio.

TEOREMA 1

Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tres n-vectores y sean α y β dos escalares. Entonces

i. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$

ii. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ **(ley conmutativa del producto escalar)**

iii. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ **(ley distributiva del producto escalar)**

iv. $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Prueba de ii) Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Entonces

$ab = ba$ para
cualesquiera dos números a y b

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \overset{\downarrow}{=} b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Observe que *no* existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido. Para el lado izquierdo, esto se concluye a partir de que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar y el producto escalar del escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y el vector $\mathbf{c}$ no está definido.

Ahora se define el producto de dos matrices.

DEFINICIÓN 2

Producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$\boxed{c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)} \qquad \textbf{(3)}$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}} \qquad \textbf{(4)}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

ADVERTENCIA

Dos matrices se pueden multiplicar únicamente si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. De otra modo, los vectores que forman el renglón i en A y la columna j de B no tendrán el mismo número de componentes y el producto punto en la ecuación (3) no estará definido. Dicho de otro modo, las matrices A y B serán **incompatibles** bajo la multiplicación. Para ilustrar esto se consideran las siguientes matrices de A y B:

$$\begin{array}{rl} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{renglón } i \text{ de } A \longrightarrow \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{columna } j \text{ de } B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Los vectores renglón y columna sombreados deben tener el mismo número de componentes.

EJEMPLO 4 **Producto de dos matrices de 2 × 2**

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcule AB y BA.

Solución A es una matriz de 2×2 y B es una matriz de 2×2, entonces $C = AB = (2 \times 2) \times (2 \times 2)$ también es una matriz de 2×2. Si $C = (c_{ij})$, ¿cuál es el valor de c_{11}? Se sabe que

$$c_{11} = (1^{\text{er}} \text{ renglón de } A) \cdot (1^{\text{a}} \text{ columna de } B)$$

Reescribiendo las matrices se tiene

$$\begin{array}{rc} & \text{1a columna de } B \\ & \downarrow \\ \text{1er renglón de } A \longrightarrow & \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

Así,

$$c_{11} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = 3 + 15 = 18$$

De manera similar, para calcular c_{12} se tiene

$$\begin{array}{rc} & \text{2da columna de } B \\ & \downarrow \\ \text{1er renglón de } A \longrightarrow & \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\end{array}$$

y

$$c_{12} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = -2 + 18 = 16$$

Siguiendo el procedimiento se encuentra que

$$c_{21} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = -6 + 20 = 14$$

y

$$c_{22} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = 4 + 24 = 28$$

Entonces

$$C = AB = \begin{pmatrix}18 & 16\\ 14 & 28\end{pmatrix}$$

De manera similar, sin escribir los pasos intermedios, se ve que

$$C' = BA = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+4 & 9-8\\ 5-12 & 15+24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 1\\ -7 & 39\end{pmatrix}$$

Observación. El ejemplo 4 ilustra un hecho sumamente importante: *en términos generales, el producto de matrices no es conmutativo.* Es decir, $AB \neq BA$. En ocasiones ocurre que $AB = BA$, pero se trata de una excepción, no de una regla. Si $AB = BA$ se dice que A y B **conmutan**. De hecho, como lo ilustra el siguiente ejemplo, puede ocurrir que AB esté definida y BA no lo esté. Así, debe tenerse cuidado en el *orden* de la multiplicación de dos matrices.

EJEMPLO 5 **El producto de una matriz de 2 × 3 y una de 3 × 4 está definido pero el producto de una matriz 3 × 4 y una de 2 × 3 no lo está**

Sea $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}7 & -1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 0 & -4\\ -3 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Calcule AB.

Solución Primero observe que A es una matriz de 2×3 y B es una matriz de 3×4. Por lo que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Por lo tanto, el producto AB está definido y es una matriz de 2×4. Sea $AB = C = (c_{ij})$. Entonces

$$c_{11} = (2 \quad 0 \quad -3)\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 23 \qquad c_{12} = (2 \quad 0 \quad -3)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$c_{13} = (2 \quad 0 \quad -3)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad c_{14} = (2 \quad 0 \quad -3)\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$c_{21} = (4 \quad 1 \quad 5)\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 \qquad c_{22} = (4 \quad 1 \quad 5)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$c_{23} = (4 \quad 1 \quad 5)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 26 \qquad c_{24} = (4 \quad 1 \quad 5)\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. Esto completa el problema. Observe que el producto BA no está definido ya que el número de columnas de B (cuatro) no es igual al número de renglones de A (dos).

EJEMPLO 6 Contacto directo e indirecto con una enfermedad contagiosa

En el siguiente ejemplo se muestra la forma en la cual se puede usar la multiplicación de matrices para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. Suponga que cuatro individuos han contraído esta enfermedad. Este grupo entra en contacto con seis personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados *contactos directos*, se pueden representar por una matriz de 4×6. Enseguida se da un ejemplo de este tipo de matrices.

Matriz de contacto directo: primero y segundo grupos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo entra en contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el 1 en la posición (2,4) significa que la segunda persona del primer grupo (infectada) entró en contacto con la cuarta persona del segundo grupo. Ahora suponga que un tercer grupo de cinco personas tiene varios contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también se puede representar mediante una matriz.

Matriz de contacto directo: segundo grupo y tercer grupo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $b_{64} = 0$, lo que quiere decir que la sexta persona del segundo grupo no tiene contacto con la cuarta persona del tercer grupo.

Los contactos *indirectos* o *de segundo orden* entre individuos del primero y tercer grupos se representan mediante la matriz de 4×5 $C = AB$. Para ver esto, observe que una persona del grupo 3 puede quedar contagiada por alguien del grupo 2, quien a su vez fue contagiada por alguien del grupo 1. Por ejemplo, como $a_{24} = 1$ y $b_{45} = 1$ se ve que, indirectamente, la quinta persona del grupo 3 tuvo contacto (a través de la cuarta persona del grupo 2) con la segunda persona del grupo 1. El número total de contactos indirectos entre la segunda persona del grupo 1 y la quinta persona del grupo 3 está dado por

$$\begin{aligned} c_{25} &= a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} + a_{23}b_{35} + a_{24}b_{45} + a_{25}b_{55} + a_{26}b_{65} \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

Ahora se calcula.

Matriz de contacto indirecto: primero y tercer grupos

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que únicamente la segunda persona del grupo 3 no tiene contactos indirectos con la enfermedad. La quinta persona de este grupo tiene 2+1+1=4 contactos indirectos.

Se ha visto que las matrices, en general, no conmutan. El siguiente teorema muestra que la ley asociativa sí se cumple.

TEOREMA 2 **Ley asociativa para la multiplicación de matrices**

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} \qquad (5)$$

se cumple y ABC, definida por cualesquiera de los lados de la ecuación (5), es una matriz de $n \times q$.

La prueba de este teorema no es difícil, pero es laboriosa. Se desarrolla mejor usando la notación de sumatoria. Por esta razón se pospone hasta el final de esta sección.

De aquí en adelante se escribirá el producto de tres matrices simplemente como ABC. Se puede hacer esto porque $(AB)C = A(BC)$; entonces se obtiene la misma respuesta independientemente de cómo se lleve a cabo la multiplicación (siempre y cuando no se conmute ninguna de las matrices).

La ley asociativa se puede extender a productos de más matrices. Por ejemplo, suponga que AB, BC y CD están definidas. Entonces

$$\boxed{ABCD = A(B(CD)) = ((AB)C)D = A(BC)D = (AB)(CD)} \tag{6}$$

Existen dos leyes distributivas para la multiplicación de matrices.

TEOREMA 3 **Leyes distributivas para la multiplicación de matrices**

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC} \tag{7}$$

y

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC} \tag{8}$$

Las demostraciones se presentan al final de la sección.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES COMO UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LAS COLUMNAS DE A

Sea A una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector de $n \times 1$. Considere el producto

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Observe que $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ es la primera columna de A, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ es la segunda columna de A, y así sucesivamente. Entonces (9) se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{10}$$

El lado derecho de la expresión (10) se llama **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$. Las combinaciones lineales se estudiarán con detalle en la sección 4.4. Aquí simplemente se observa el siguiente hecho de interés:

> El producto de la matriz A de $m \times n$ y el vector columna $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Suponga ahora que B es una matriz de $n \times p$. Sea $C = AB$ y sea $\mathbf{c}_1$ la primera columna de C. Entonces

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$
$$= b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

es igual a la combinación lineal de las columnas de A. Lo mismo se cumple para todas las columnas de $C = AB$, donde se ve que

> Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A.

EJEMPLO 7 **Cómo escribir las columnas de *AB* como combinación lineal de las columnas de *A***

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Entonces $AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{pmatrix}$. Ahora bien

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A$$

y

$$\begin{pmatrix} -15 \\ 26 \\ 32 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A.$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES POR BLOQUES

En ciertas situaciones es prudente manejar las matrices como bloques de matrices más pequeñas, llamadas **submatrices**, y después multiplicar bloque por bloque en lugar de componente por componente. La multiplicación en bloques es muy similar a la multiplicación normal de matrices.

EJEMPLO 8 Multiplicación por bloques

Considere el producto $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El lector debe verificar que este producto esté definido. Ahora se realiza una partición de estas matrices mediante líneas punteadas.

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array}\right)$$

Existen otras maneras de formar la partición. En este caso $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y así sucesivamente. Si suponemos que todos los productos y las sumas de matrices están definidos, se puede multiplicar de manera normal para obtener

$$AB = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right)$$

Ahora

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad DJ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$$

y

$$CG + DJ = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}.$$

De manera similar

$$EH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad FK = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

y

$$EH + FK = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El lector debe verificar que $CH + DK = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}$ y $EG + FJ = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$ de manera que

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ \hline -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtiene si se multiplica AB directamente.

Cuando se hace una partición de dos matrices y, al igual que en el ejemplo 8, todos los productos de submatrices están definidos, se dice que la partición es **conformante**.

EJEMPLO 9 Dos matrices que son conmutativas

Suponga que las matrices A y B son cuadradas y que se hacen particiones confortantes de $C = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}$. Muestre que C y D son conmutativas. Aquí O denota la matriz cero e I es una matriz cuadrada que tiene la propiedad de que $AI = IA = A$ siempre que estos productos estén definidos (vea la página 95).

Solución

$$CD = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + A \cdot O & IB + AI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot B + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B + A \\ O & I \end{pmatrix}$$

en donde $I^2 = \mathrm{I} \cdot \mathrm{I}$. Del mismo modo

$$DC = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + B \cdot O & IA + BI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot A + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A + B \\ O & I \end{pmatrix}$$

Como $B + A = A + B$, $CD = DC$, es decir, las matrices son conmutativas.

Para poder probar los teoremas 2 y 3 y para estudiar muchas otras partes del material de este libro es necesario utilizar la *notación de sumatoria*. Si el lector no está familiarizado con ella, conforme avance en el libro obtendrá suficiente información al respecto. De otra manera puede ir directamente a las demostraciones de los teoremas 2 y 3.

LA NOTACIÓN CON $\sum$

Una suma se puede escribir[9] de la siguiente manera, si $N \geq M$.

$$\boxed{a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_N = \sum_{k=M}^{N} a_k} \qquad (11)$$

SIGNO DE SUMATORIA

ÍNDICE DE LA SUMA

que se lee "suma de los términos a_k cuando el valor de k va de M a N". En este contexto $\sum$ se llama **signo de sumatoria** y k se conoce como **índice de la suma**.

EJEMPLO 10 Interpretación de la notación de sumatoria

Extienda la suma $\sum_{k=1}^{5} b_k$.

Solución Comenzando con $k = 1$ y terminando con $k = 5$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = b_1 + b_2 + b_2 + b_4 + b_5$$

EJEMPLO 11 Interpretación de la notación de sumatoria

Extienda la suma $\sum_{k=3}^{6} c_k$.

Solución Comenzando con $k = 3$ y terminando con $k = 6$ se obtiene

$$\sum_{k=3}^{6} c_k = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$

EJEMPLO 12 Interpretación de la notación de sumatoria

Calcule $\sum_{k=-2}^{3} k^2$.

Solución En este caso $a_k = k^2$ y k va de -2 a 3.

$$\sum_{k=-2}^{3} k^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 19$$

Nota. Al igual que en el ejemplo 12, el índice de la sumatoria puede tomar valores enteros negativos o cero.

[9] El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue el primero en usar la letra griega Σ (sigma) para denotar una suma.

EJEMPLO 13 Cómo escribir una suma usando la notación de sumatoria

Escriba la suma $S_8 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ usando el signo de sumatoria.

Solución Como $1 = (-1)^2$, $-2=(-1)^3 \cdot 2$, $3=(-1)^4 \cdot 3\ldots$, se tiene

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} k$$

EJEMPLO 14 Cómo escribir el producto escalar haciendo uso de la notación de sumatoria

La ecuación (1) para el producto escalar se puede escribir de manera compacta usando la notación de sumatoria:

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

La fórmula (4) para la componente *ij* del producto AB se puede escribir

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} \tag{12}$$

La notación de sumatoria tiene propiedades útiles. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

A continuación se resumen éste y otros hechos.

Hechos sobre la notación de sumatoria

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones reales y c un número real. Entonces

$$\sum_{k=M}^{N} ca_k = c\sum_{k=M}^{N} a_k \tag{13}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{14}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k - b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k - \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{15}$$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k \qquad \text{si } M < m < N \tag{16}$$

Las pruebas de estos hechos se dejan como ejercicios (vea los problemas 104 a 106).

Ahora se usará la notación de sumatoria para probar la ley asociativa y la ley distributiva.

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 2 Y 3

Ley asociativa

Como A es de $n \times m$ y B es de $m \times p$, AB es de $n \times p$. Entonces $(AB)C = (n \times p) \times (p \times q)$ es una matriz de $n \times q$. De manera similar, BC es de $m \times q$ y $A(BC)$ es de $n \times q$ de manera que $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas del mismo tamaño. Debe demostrarse que la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Si se define $D = (d_{ij}) = AB$, entonces

$$d_{ij} \overset{\text{de (12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

La componente ij de $(AB)C = DC$ es

$$\sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Ahora se define $E = (e_{ij}) = BC$. Entonces

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}$$

y la componente ij de $A(BC) = AE$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Así, la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Esto demuestra la ley asociativa.

Leyes distributivas

Se demuestra la primera ley distributiva [ecuación (7)]. La demostración de la segunda [ecuación (8)] es idéntica y por lo mismo se omite. Sea A una matriz de $n \times m$ y sean B y C matrices de $m \times p$. La componente kj de $B + C$ es $b_{kj} + c_{kj}$ y la componente ij de $A(B + C)$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \overset{\text{de (12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj}$$ = componente ij de (AB más la componente ij de AC y esto demuestra la ecuación (7).

Arthur Cayley
(Library of Congress)

SEMBLANZA DE...

Arthur Cayley y el álgebra de matrices

Arthur Cayley (1821-1895), un matemático inglés, desarrolló en 1857 el álgebra de matrices, es decir, las reglas que ilustran la forma en la cual se suman y multiplican las matrices. Cayley nació en Richmond, en Surrey (cerca de Londres) y fue educado en el Trinity College, Cambridge, donde se graduó en 1842. Ese mismo año obtuvo el primer lugar en la difícil prueba para el premio Smith. Durante varios años estudió y ejerció la carrera de leyes, pero nunca dejó que su práctica en la abogacía interfiriera con su trabajo en las matemáticas. Siendo estudiante de la comisión viajó a Dublín y asistió a las conferencias de Hamilton sobre cuaterniones. Cuando se estableció la cátedra Sadlerian en Cambridge en 1863, le ofrecieron el puesto a Cayley y él lo aceptó, renunciando a un lucrativo futuro como abogado a cambio de la modesta remuneración de la vida académica. Pero fue entonces que pudo dedicar *todo* su tiempo a las matemáticas.

Cayley está clasificado como el tercer matemático más prolífico en la historia; lo sobrepasan sólo Euler y Cauchy. Comenzó a publicar siendo todavía estudiante de la Universidad en Cambridge. Durante sus años de abogado publicó entre 200 y 300 artículos y continuó su copioso trabajo a lo largo de toda su vida. La colección masiva *Collected Mathematical Papers* de Cayley contiene 966 artículos y consta de 13 grandes volúmenes con un promedio de 600 páginas por cada uno. Es casi imposible hallar un área dentro de las matemáticas puras que Cayley no haya estudiado y enriquecido.

Además de desarrollar la teoría de matrices, Cayley fue pionero en sus contribuciones a la geometría analítica, la teoría de determinantes, la geometría de n dimensiones, la teoría de curvas y superficies, el estudio de formas binarias, la teoría de funciones elípticas y el desarrollo de la teoría de invariantes.

El estilo matemático de Cayley refleja su formación legal ya que sus artículos son severos, directos, metódicos y claros. Poseía una memoria fenomenal y parecía nunca olvidar nada que hubiera visto o leído alguna vez. Tenía además un temperamento singularmente sereno, calmado y amable. Se le llamaba "el matemático de los matemáticos".

Cayley desarrolló un interés poco común por la lectura de novelas. Las leía mientras viajaba, mientras esperaba que una junta comenzara y en cualquier momento que considerara oportuno. Durante su vida leyó miles de novelas, no sólo en inglés, sino también en griego, francés, alemán e italiano. Disfrutaba mucho pintar, en especial con acuarela y mostraba un marcado talento como especialista de esta técnica. También era un estudiante apasionado de la botánica y la naturaleza en general.

Cayley era, en el verdadero sentido de la tradición inglesa, un alpinista amateur e hizo viajes frecuentes al continente para realizar caminatas y escalar montañas. Cuenta la historia que decía que la razón por la que se unió al alpinismo fue que, aunque sentía que el ascenso era arduo y cansado, la gloriosa sensación de goce que lograba cuando conquistaba una cima era como el que experimentaba cuando resolvía un problema difícil de matemáticas o cuando completaba una teoría matemática intrincada.

Las matrices surgieron con Cayley, relacionadas con las transformaciones lineales del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad \textbf{(17)}$$

donde a, b, c, d son números reales, y donde puede pensarse que son funciones que convierten al vector (x, y) en el vector (x', y'). Las transformaciones se estudiarán con detalle en el capítulo 5. Aquí se observa que la transformación (17) está completamente determinada por los cuatro coeficientes a, b, c, d y por lo tanto puede simbolizarse por el arreglo matricial cuadrado

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

al que se ha dado el nombre de matriz 2×2. Como dos transformaciones del tipo de (17) son idénticas si y sólo si tienen los mismos coeficientes, Cayley definió que dos matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

eran iguales si y sólo si $a = e$, $b = f$, $c = g$ y $d = h$.

Ahora suponga que la transformación (17) va seguida de la transformación

$$\begin{aligned} x'' &= ex' + fy' \\ y'' &= gx' + hy' \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

Entonces

$$x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

y

$$y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y$$

Esto llevó a Cayley a la siguiente definición para el producto de dos matrices:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

que es, por supuesto, un caso especial de la definición general del producto de matrices que se dio en la página 60.

Es interesante recalcar cómo, en matemáticas, observaciones muy sencillas pueden llevar a definiciones y teoremas importantes.

Problemas 1.6

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿De las siguientes afirmaciones, cuál es cierta para la multiplicación de las matrices A y B?

a) Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.

b) Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}.

c) $AB = BA$.

d) Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

II. ¿Cuál de los siguientes sería el tamaño de la matriz producto AB si se multiplica la matriz A de 2×4 por la matriz B de 4×3?

a) 2×3 ***b)*** 3×2 ***c)*** 4×4

d) Este producto no se puede calcular.

III. Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto para las matrices A y B si AB es un vector columna.

a) B es un vector columna.

b) A es un vector renglón.

c) A y B son matrices cuadradas.

d) El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B.

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto AB es cierta si A es una matriz de 4×5?

a) B debe tener cuatro renglones y el resultado tendrá cinco columnas.

b) B debe tener cinco columnas y el resultado será una matriz cuadrada.

c) B debe tener cuatro columnas y el resultado tendrá cinco renglones.

d) B debe tener cinco renglones y el resultado tendrá cuatro renglones.

En los problemas 1 a 8 calcule el producto escalar de los dos vectores.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $(1, 2, -1, 0); (3, -7, 4, -2)$

3. $(7, 4); (-1, -4)$

4. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. (8, 3, 1); (7, −4, 3)

6. (a, b); (c, d)

7. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

8. (−1, −3, 4, 5); (−1, −3, 4, 5)

9. Sea **a** un n-vector. Pruebe que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

10. Encuentre las condiciones sobre un vector **a** tales que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$.

En los problemas 11 a 17 realice las operaciones indicadas con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

11. $(2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b})$

12. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

13. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

14. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

15. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c} - 5\mathbf{a})$

16. $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$

17. $(3\mathbf{b} - 4\,\mathbf{a}) \cdot (4\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - \mathbf{a})$

En los problemas 18 a 34 realice los cálculos indicados.

18. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j$, son números reales.

35. Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

36. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ encuentre un vector no nulo $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Ab = 6b$.

37. Encuentre B tal que $AB = C$. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

38. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ determine el valor de α para el cual A es una raíz del polinomio $f(x) = x^2 - 25$.

39. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ encuentre las condiciones para a, b, c y d tal que $AB = BA$.

40. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, pruebe que $A^2 + B^2 = (A + B)^2$.

41. Demuestre que $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

42. Una matriz A de n x n tal que $A^2 = I_n$ se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

43. Dada la siguiente matriz pruebe que $A^2 = A$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

44. Sean a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} números reales dados tales que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Encuentre los números b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} tales que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45. Verifique la ley asociativa para la multiplicación de las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

46. De la misma forma que en el ejemplo 6 suponga que un grupo de personas ha contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas tienen contacto con un segundo grupo que, a su vez, tiene contacto con un tercer grupo. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa los contactos entre el grupo contagioso y los miembros del grupo 2, y si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa los contactos entre los grupos 2 y 3, *A*) ¿Cuántas personas hay en cada grupo? *B*) Encuentre la matriz de contactos indirectos entre los grupos 1 y 3.

47. Conteste las preguntas del problema 46 para $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$ y

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

VECTORES ORTOGONALES

Se dice que dos vectores **a** y **b** son **ortogonales** si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. En los problemas 48 a 53 determine cuáles pares de vectores son ortogonales.[10]

48. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

51. (1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)

52. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix}a\\0\\b\\0\\c\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\d\\0\\e\\0\end{pmatrix}$

54. Determine el número α tal que $(1,-2,3,5)$ es ortogonal a $(-4,\alpha,6,-1)$.

55. Determine todos los números α y β tales que los vectores $\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\5\\-2\beta\\3\end{pmatrix}$ son ortogonales.

56. Demuestre el teorema 1 usando la definición de producto escalar.

57. Un fabricante de joyería de diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le llevará 1 hora de mano de obra hacer un anillo, 1½ horas hacer un par de aretes, ½ hora para un prendedor y 2 horas para un collar.

a) Exprese las órdenes del fabricante como un vector renglón.

b) Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como un vector columna.

c) Utilice el producto escalar para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

58. Un turista regresó de un viaje por América del Sur con divisa extranjera de las siguientes denominaciones: 1 000 pesos argentinos, 20 reales del Brasil, 100 pesos colombianos, 5 000

[10] Los vectores ortogonales se manejarán extensamente en los capítulos 3 y 4.

pesos chilenos y 50 colones de Costa Rica. En dólares, un peso argentino valía \$0.3174, los reales brasileños \$0.4962, los pesos colombianos \$0.000471, los pesos chilenos \$0.00191 y los colones \$0.001928.

a) Exprese la cantidad de cada tipo de moneda por medio de un vector renglón.

b) Exprese el valor de cada tipo de moneda en dólares por medio de un vector columna.

c) Utilice el producto escalar para calcular cuántos dólares valía el dinero extranjero del turista.

59. Una compañía paga un salario a sus ejecutivos y les da un porcentaje de sus acciones como un bono anual. El año pasado el presidente de la compañía recibió \$80 000 y 50 acciones, se pagó a cada uno de los vicepresidentes \$45 000 y 20 acciones y el tesorero recibió \$40 000 y 10 acciones.

a) Exprese los pagos a los ejecutivos en dinero y acciones como una matriz de 2×3.

b) Exprese el número de ejecutivos de cada nivel como un vector columna.

c) Utilice la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero y el número total de acciones que pagó la compañía a los ejecutivos el año pasado.

60. La siguiente tabla contiene ventas, utilidades brutas por unidad y los impuestos por unidad sobre las ventas de una compañía grande:

	Producto					
Mes	**Artículo vendido** I	II	III	**Artículo**	**Utilidad unitaria (en cientos de dólares)**	**Impuestos unitarios (en cientos de dólares)**
Enero	4	2	20	I	3.5	1.5
Febrero	6	1	9	II	2.75	2
Marzo	5	3	12	III	1.5	0.6
Abril	8	2.5	20			

Elabore una matriz que muestre las utilidades y los impuestos totales para cada mes.

61. Sea A una matriz cuadrada. Entonces A^2 se define simplemente como AA. Calcule

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2.$$

62. Calcule A^2 si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

63. Calcule A^3 si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

64. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

65. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

66. Una matriz A de $n \times n$ tiene la propiedad de que AB es la matriz cero para cualquier matriz B de $n \times n$. Pruebe que A es la matriz cero.

67. Una **matriz de probabilidades** es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades: *i*) todos sus elementos son no negativos (≥ 0) y *ii*) la suma de los elementos en cada renglón es 1. Las siguientes matrices son matrices de probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

***68.** Sea P una matriz de probabilidades. Pruebe que P^2 es una matriz de probabilidades.

****69.** Sean P y Q dos matrices de probabilidades del mismo tamaño. Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

70. Pruebe la fórmula (6) usando la ley asociativa [ecuación (5)].

***71.** Se puede organizar un torneo de tenis de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz R de $n \times n$ de la siguiente forma:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde contra el tenista } j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} (R^2)_{ij}{}^{11}$$

[11] $(R^2)ij$ es la componente ij de la matriz R^2.

a) Para un torneo entre cuatro tenistas

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasifique a los tenistas según sus calificaciones.

b) Interprete el significado de la calificación.

72. Sea O una matriz cero de $m \times n$ y sea A una matriz de $n \times p$. Demuestre que $OA = O_1$, donde O_1 es la matriz cero de $m \times p$.

73. Verifique la ley distributiva [ecuación (7)] para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En los problemas 74 a 78 multiplique las matrices usando los bloques indicados.

74. $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}\right)$ **75.** $\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 6 \\ \hline 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c:c:c} 3 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right)$

76. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right)$

77. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

78. $\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

79. Sea $A=\begin{pmatrix} I & O \\ C & I \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} I & O \\ D & I \end{pmatrix}$. Si se hace una partición conformante de A y B demuestre que A y B conmutan. Para esto I está definida en el ejemplo 9.

En los problemas 80 a 89 evalúe las sumas dadas.

80. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ **81.** $\sum_{i=1}^{3} i^3$ **82.** $\sum_{k=0}^{6} 1$ **83.** $\sum_{n=1}^{3} 5n$

84. $\sum_{k=1}^{8} 3^k$ **85.** $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{1+i}$ **86.** $\sum_{m=-2}^{3} \frac{m+1}{m+10}$ **87.** $\sum_{j=5}^{7} \frac{2j+3}{j-2}$

88. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} ij$ **89.** $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=2}^{4} k^2 j^3$

En los problemas 90 a 103 escriba cada suma haciendo uso de la notación de sumatoria.

90. $1+2+4+8+16$

91. $1-3+9-27+81-243$

92. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{n}{n+1}$

93. $1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{5}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}$

94. $1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+x^{18}+x^{21}$

95. $-x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}$

96. $-1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^7}-\frac{1}{a^8}+\frac{1}{a^9}$

97. $1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+9\cdot 11+11\cdot 13+13\cdot 15+15\cdot 17$

98. $2^2\cdot 4+3^2\cdot 6+4^2\cdot 8+5^2\cdot 10+6^2\cdot 12+7^2\cdot 14$

99. $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}$

100. $a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}+a_{31}+a_{32}$

101. $a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}$

102. $a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}+a_{35}b_{52}$

103. $a_{21}b_{11}c_{15}+a_{21}b_{12}c_{25}+a_{21}b_{13}c_{35}+a_{21}b_{14}c_{45}$
$+a_{22}b_{21}c_{15}+a_{22}b_{12}c_{25}+a_{22}b_{23}c_{35}+a_{22}b_{24}c_{45}$
$+a_{23}b_{31}c_{15}+a_{23}b_{32}c_{25}+a_{23}b_{33}c_{35}+a_{23}b_{34}c_{45}$

104. Pruebe la fórmula (14) extendiendo los términos de

$$\sum_{k=M}^{N}(a_k+b_k)$$

105. Pruebe la fórmula (15)

[*Sugerencia*: Utilice (13) para demostrar que $\sum_{k=M}^{N}(-a_k)=-\sum_{k=M}^{N}a_n$. Luego use (14).]

106. Pruebe la fórmula (16).

Respuestas a la autoevaluación

I. *d*) **II.** *a*) **III.** *a*) **IV.** *d*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

La multiplicación de matrices de dimensiones compatibles es transparente al usuario, únicamente hay que tener a las matrices en la pila y oprimir la tecla de la multiplicación, por ejemplo, si se quiere multiplicar las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ la secuencia de teclas a oprimir es la siguiente (observación: se considera que se esta utilizando el modo RPN de la calculadora)

↰ [] ↰ [] 3 SPC 3 ▶ ↰ [] /

SPC 2 ENTER

↰ [] ↰ [] 5 +/− SPC 4 ▶ ↰ []

3 SPC 2 ENTER ×

En los problemas 107 a 109 utilice la calculadora para obtener cada producto.

107. $\begin{pmatrix} 1.23 & 4.69 & 5.21 \\ -1.08 & -3.96 & 8.57 \\ 6.28 & -5.31 & -4.27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9.61 & -2.30 \\ -8.06 & 0.69 \\ 2.67 & -5.23 \end{pmatrix}$

108. $\begin{pmatrix} 125 & 216 & 419 \\ 383 & 516 & 237 \\ 209 & 855 & 601 \\ 403 & 237 & 506 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 21 & 28 \\ 49 & 67 \end{pmatrix}$

109. $\begin{pmatrix} 23.2 & 56.3 & 19.6 & -31.4 \\ 18.9 & -9.6 & 17.4 & 51.2 \\ 30.8 & -17.9 & -14.4 & 28.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.071 & 0.068 \\ 0.051 & -0.023 \\ -0.011 & -0.082 \\ 0.053 & 0.065 \end{pmatrix}$

110. En el problema 69 se le pidió que demostrara que el producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidades. Sea

$$P = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.16 & 0.57 & 0.04 \\ 0.15 & 0.09 & 0.34 & 0.42 \\ 0.66 & 0.22 & 0.11 & 0.01 \\ 0.07 & 0.51 & 0.20 & 0.22 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.112 & 0.304 & 0.081 & 0.503 \\ 0.263 & 0.015 & 0.629 & 0.093 \\ 0.402 & 0.168 & 0.039 & 0.391 \\ 0.355 & 0.409 & 0.006 & 0.230 \end{pmatrix}$$

***a*)** Muestre que P y Q son matrices de probabilidades.

***b*)** Calcule PQ y muestre que es una matriz de probabilidades.

111. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^2, A^5, A^{10}, A^{50} y A^{100}.

[*Sugerencia*: Utilice la tecla Y^x para el cálculo de la potencia de la matriz, la sintaxis es la base, en este caso la matriz, seguida de ENTER después el exponente seguido de Y^x].

112. Sea $A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Con base en los cálculos del problema 111 deduzca la forma de las componentes de la diagonal A^n. Aquí, x, y y z denotan números reales.

MATLAB 1.6

Información de MATLAB

Una matriz producto AB se forma mediante **A*B**.

Una potencia entera de una matriz, A^n, se encuentra con **A^n**, donde n tiene un valor asignado previamente.

Se repiten algunos comandos básicos para generar matrices aleatorias; para una matriz aleatoria de $n \times m$ con elementos entre $-c$ y c, **A=c*(2*rand(n,m)−1)**; para una matriz aleatoria de $n \times m$ con elementos enteros entre $-c$ y c, **B= round(c*(2*rand(n,m)−1))**. Para generar matrices con elementos complejos se generan A y B como se acaba de indicar y se hace **C = A + i*B.** Si un problema pide que se generen matrices aleatorias con ciertos elementos, genere matrices tanto reales como complejas.

1. Introduzca cualesquiera dos matrices A de 3×4 y B de 4×2. Encuentre **A*B** y **B*A**. Comente acerca de los resultados.

2. Genere dos matrices aleatorias, A y B, con elementos entre -10 y 10. Encuentre AB y BA. Repita el proceso para, cuando menos, siete pares de matrices A y B. ¿Cuántos pares satisfacen $AB = BA$? ¿Qué puede concluir sobre la posibilidad de que $AB = BA$?

3. Introduzca las matrices A, **b**, **x** y **z** siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -23 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 4 \\ 7 & 5 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & -10 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \\ 15 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

b) Con base en sus conocimientos de la manipulación algebraica normal y usando los resultados del inciso **a**) ¿qué podría decir que sería igual $A(\mathbf{x} + s\mathbf{z})$, donde s es cualquier escalar? Pruebe calculando $A(\mathbf{x} + s\mathbf{z})$ para al menos cinco escalares s diferentes.

4. *a*) Genere dos matrices aleatorias con elementos enteros, A y B tales que el producto AB esté definido. Modifique B de manera que tenga dos columnas iguales. (Por ejemplo, **B(:,2) = B(:,3)**.)

b) Encuentre AB y vea sus columnas. ¿Qué puede decir sobre las columnas de AB si B tiene dos columnas iguales?

c) Pruebe su conclusión repitiendo las instrucciones anteriores para otros tres pares de matrices A y B (no elija sólo matrices cuadradas).

d) (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión haciendo uso de la definición de multiplicación de matrices.

5. Genere una matriz aleatoria A de 5×6 con elementos entre -10 y 10 y genere un vector aleatorio **x** de 6×1 con elementos entre -10 y 10. Encuentre

A*x−(x(1)*A(:,)+ ⋯ +x(m)*A(:,m)).

Repita el proceso para otros pares de A y **x**. ¿Qué relación tiene esto con la expresión (10) de esta sección?

6. ***a)*** Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Suponga que $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Establezca el sistema de ecuaciones, con incógnitas x_1 a x_4, que surge al hacer $AB = BA$.

Verifique que el sistema sea homogéneo con matriz de coeficientes

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ es necesario encontrar una matriz B tal que $AB = BA$.

i. Introduzca la matriz R anterior y obtenga x_1, x_2, x_3 y x_4 del sistema homogéneo con matriz de coeficientes R. Explique por qué hay un número infinito de soluciones con un valor arbitrario para una variable.

ii. Encuentre **rat(rref(R))** y utilice esto para elegir un valor para la variable arbitraria de manera que x_i sea un entero. Puede utilizar el comando **format rat** en la ventana de comandos de MATLAB seguido de **rref(R)**.

iii. Introduzca la matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ que resulta y verifique que $AB = BA$.

iv. Repita *iii*) para otra elección de la variable arbitraria.

c) Repita el proceso anterior para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

d) Repita el proceso anterior para una matriz A de 2×2 de su elección.

7. Genere un par de matrices aleatorias, A y B de 2×2 con elementos entre -10 y 10. Encuentre $C = (A + B)^2$ y $D = A^2 + 2AB + B^2$. Compare C y D (encuentre $C - D$). Genere dos pares más de matrices de 2×2 y repita lo anterior. Introduzca un par de matrices, A y B, generadas con MATLAB en el problema 6 *b*) de esta sección y encuentre $C - D$ como antes. Introduzca el par de matrices, A y B, generadas con MATLAB en el problema 6 *c*) de esta sección y encuentre $C - D$. Con esta evidencia, ¿cuál es su conclusión acerca de la afirmación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Pruebe su conclusión.

8. ***a)*** Introduzca **A = round(10*(2*rand(6,5)−1))**. Dé **E = [1 0 0 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Sea **E = [0 0 1 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que esto depende de la posición de los elementos iguales a 1 en la matriz E.

b) Sea **E = [2 0 0 0 0 0]**; encuentre **E*A**. Sea **E = [0 0 2 0 0 0]**; encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que esto depende de la posición del elemento 2 en la matriz E.

c) **i.** Sea **E = [1 0 1 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que la relación depende de la posición de los elementos 1 en la matriz E.

ii. Sea **E = [2 0 1 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que la relación depende de la posición de los elementos distintos de cero en la matriz E.

d) Asuma que A es una matriz de $n \times m$ y E es de $1 \times n$, donde el k-ésimo elemento de E es igual a algún número p. De *a*) y *b*) formule una conclusión sobre la relación entre A y EA. Pruebe su conclusión generando una matriz aleatoria A (para alguna elección de n y m), formando dos matrices E diferentes (para alguna elección de k y p), y encontrando EA para cada E. Repita esto para otra matriz A.

e) Suponga que A es una matriz de $n \times m$ y E es de $1 \times n$, donde el k-ésimo elemento de E es igual a algún número p y el j-ésimo elemento de E es igual a algún número q. Del inciso *c*) formule una conclusión sobre la relación entre A y EA. Pruebe su conclusión generando una matriz aleatoria A, formando dos matrices diferentes E de la forma descrita y encontrando EA para cada E. Repita lo anterior para otra matriz A.

f) Suponga que A es de $n \times m$ y F es de $m \times 1$, donde el k-ésimo elemento de F es igual a algún número p y el j-ésimo elemento de F es igual a algún número q. Considere AF. Realice un experimento como el anterior para determinar una conclusión sobre la relación entre AF y A.

9. Matriz triangular superior

a) Sean A y B cualesquiera dos matrices aleatorias de 3×3. Sea **UA = triu(A)** y **UB = triu(B)**. El comando **triu** (**doc triu**) forma matrices triangulares superiores. Encuentre **UA*UB**. ¿Qué propiedad tiene el producto? Repita para otros tres pares de matrices aleatorias de $n \times n$, haciendo uso de diferentes valores de n.

b) (*Lápiz y papel*) A partir de sus observaciones escriba una conclusión acerca del producto de dos matrices triangulares superiores. Pruebe su conclusión usando la definición de multiplicación de matrices.

c) ¿Cuál sería su conclusión acerca del producto de dos matrices triangulares inferiores? Pruebe su conclusión para al menos tres pares de matrices triangulares inferiores. [*Sugerencia*: Use **tril(A)** y **tril(B)** para generar matrices triangulares inferiores a partir de las matrices aleatorias A y B (**doc tril**).]

10. Matrices nilpotentes

Se dice que una matriz A diferente de cero es **nilpotente** si existe un entero k tal que $A^k = 0$. El **índice de nilpotencia** se define como el entero más pequeño para el que $A^k = 0$.

a) Genere una matriz aleatoria de 5×5. Sea **B=triu(A,1)**, ¿qué forma tiene B? Compare B^2, B^3, etcétera; demuestre que B es nilpotente y encuentre su índice de nilpotencia.

b) Repita las instrucciones del inciso *a*) para **B=triu(A,2)**.

c) Genere una matriz aleatoria A de 7×7. Repita los incisos *a*) y *b*) usando esta A.

d) Con base en la experiencia adquirida en las partes *a*), *b*) y *c*) (y más investigación sobre el comando **B=triu(A,j)**, donde j es un entero), genere una matriz C de 6×6 que sea nilpotente con un índice de nilpotencia igual a 3.

11. Matrices por bloques

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, entonces $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

Explique cuándo este patrón es cierto si *a, b*, . . . , *h*, son matrices en lugar de números.

Genere ocho matrices de 2×2, A, B, C, D, E, F, G y H. Encuentre **AA** = **[A B; C D]** y **BB** **[E F; G H]**. Encuentre **AA*BB** y compárela con **K** = **[A*E+B*G A*F+B*H; C*E+D*G C*F+D*H]** (es decir, encuentre **AA*BB** − **K**). Repita para otros dos conjuntos de matrices, A, B, . . . , H.

12. Producto exterior

Genere una matriz aleatoria A de 3×4 y una matriz aleatoria B de 4×5. Calcule

$$(\text{col } 1 \ A)(\text{row } 1 \ B) + (\text{col } 2 \ A)(\text{row } 2 \ B) + \cdots + (\text{col } 4 \ A)(\text{row } 4 \ B)$$

y etiquete esta expresión como D. Encuentre $D - AB$. Describa la relación entre D y AB. Repita esto para una matriz aleatoria A de tamaño 5×5 y una matriz aleatoria B de tamaño 5×6 (en este caso la suma para calcular D implica la suma de cinco productos).

13. Matrices de contacto

Considere cuatro grupos de personas: el grupo 1 está compuesto de $A1$, $A2$ y $A3$, el grupo 2 está compuesto de 5 personas, de $B1$ a $B5$; el grupo 3 consta de 8 personas, de $C1$ a $C8$; y el grupo 4 de 10 personas, $D1$ a $D10$.

a) Dada la siguiente información introduzca las tres matrices de contacto directo (vea en el problema 2 de MATLAB de la sección 1.5 una manera eficiente de introducir estas matrices).

Contactos:

($A1$ con $B1$, $B2$) ($A2$ con $B2$, $B3$) ($A3$ con $B1$, $B4$, $B5$)
($B1$ con $C1$, $C3$, $C5$) ($B2$ con $C3$, $C4$, $C7$)
($B3$ con $C1$, $C5$, $C6$, $C8$) ($B4$ con $C8$) ($B5$ con $C5$, $C6$, $C7$)
($C1$ con $D1$, $D2$, $D3$) ($C2$ con $D3$, $D4$, $D6$) ($C3$ con $D8$, $D9$, $D10$)
($C4$ con $D4$, $D5$, $D7$) ($C5$ con $D1$, $D4$, $D6$, $D8$) ($C6$ con $D2$, $D4$)
($C7$ con $D1$, $D5$, $D9$) ($C8$ con $D1$, $D2$, $D4$, $D6$, $D7$, $D9$, $D10$)

b) Encuentre la matriz de contacto indirecto para los contactos del grupo 1 con el grupo 4. ¿Cuáles elementos son cero? ¿Qué significa esto? Interprete el elemento (1, 5) y el (2, 4) de esta matriz de contacto indirecto.

c) ¿Cuál de las personas del grupo 4 tiene más contactos indirectos con el grupo 1? ¿Qué persona tiene menos contactos? ¿Qué persona del grupo 1 es la "más peligrosa" (por contagiar la enfermedad) para las personas del grupo 4? ¿Por qué?

[*Sugerencia*: Existe una manera de usar la multiplicación de matrices para calcular las sumas de renglón y columna. Utilice los vectores **d** = **ones(10,1)** y **e** = **ones(1,3)**. Aquí el comando **ones(n,m)** produce una matriz de tamaño $n \times m$, en donde todos los elementos son iguales a 1 (**doc ones**).]

14. Cadena de Markov

Una empresa que realiza estudios de mercado está estudiando los patrones de compra para tres productos que son competidores entre sí. La empresa ha determinado el porcentaje de residentes de casas que cambiarían de un producto a otro después de un mes (suponga que cada residente compra uno de los tres productos y que los porcentajes no cambian de un mes a otro). Esta información se presenta en forma de matriz:

p_{ij} = porcentaje que cambia *del* producto j *al* producto i

$$P = \begin{pmatrix} .8 & .2 & .05 \\ .05 & .75 & .05 \\ .15 & .05 & .9 \end{pmatrix}$$ P se llama **matriz de transición**.

Por ejemplo, $P_{12} = .2$ significa que el 20% de los residentes que compran el producto 2 cambia al producto 1 después de un mes y $P_{22} = .75$ significa que 75% de los residentes que compraban el producto 2 continúa comprándolo después de un mes. Suponga que existe un total de 30 000 residentes.

a) (*Lápiz y papel*) Interprete los otros elementos de P.

b) Sea $\mathbf{x}$ una matriz de 3×1, donde x_k= el número de residentes que compran el producto k. ¿Cuál es la interpretación de $P\mathbf{x}$? ¿Y de $P^2\mathbf{x} = P(P\mathbf{x})$?

c) Suponga inicialmente que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 10\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$$

Encuentre $P^n\mathbf{x}$ para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50. Describa el comportamiento de los vectores $P^n\mathbf{x}$ conforme n crece. ¿Qué interpretación se le puede dar a esto?

d) Suponga inicialmente que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Repita las instrucciones anteriores. Compare los resultados de *c*) y *d*).

e) Elija su propio vector inicial para $\mathbf{x}$, en donde las componentes de $\mathbf{x}$ sumen 30 000. Repita las instrucciones y haga una comparación con los resultados anteriores.

f) Calcule P^n y 30 000P^n para los valores de n dados antes. ¿Qué observa sobre las columnas de P^n? ¿Cuál es la relación de las columnas de 30 000 P^n y los resultados anteriores de este problema?

g) Tomemos el caso de una agencia de renta de automóviles que tiene tres oficinas. Un auto rentado en una oficina puede ser devuelto en cualquiera de ellas. Suponga que

$$P = \begin{pmatrix} .8 & .1 & .1 \\ .05 & .75 & .1 \\ .15 & .15 & .8 \end{pmatrix}$$

es una matriz de transición tal que P_{ij} = porcentaje de autos rentados en la oficina j y devueltos en la oficina i después de un periodo. Suponga que se tiene un total de 1000 automóviles. De acuerdo con sus observaciones en los incisos anteriores de este problema, encuentre la distribución a largo plazo de los autos, es decir, el número de autos que habrá a la larga en cada oficina. ¿Cómo puede usar esta información una oficina de renta de automóviles?

15. Matriz de población

PROBLEMA PROYECTO

Una población de peces está dividida en cinco grupos de edades distintas en donde el grupo 1 representa a los pequeños y el grupo 5 a los de mayor edad. La matriz siguiente representa las tasas de nacimiento y supervivencia:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ .4 & .2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 & .1 \end{pmatrix}$$

s_{1j} = número de peces que nacen por cada pez en el grupo j en un año

s_{ij} = número de peces en el grupo j que sobrevive y pasa al grupo i, donde $i > 1$

Por ejemplo, $s_{13} = 2$ dice que cada pez del grupo 3 tiene 2 bebés en un año y $s_{21} = .4$ dice que el 40% de los peces en el grupo 1 sobrevive al grupo 2 un año después.

a) (*Lápiz y papel*) Interprete los otros elementos de S.

b) (*Lápiz y papel*) Sea **x** la matriz de 5×1 tal que x_k = número de peces en el grupo k. Explique por qué $S^2\mathbf{x}$ representa el número de peces en cada grupo dos años más tarde.

c) Sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5\,000 \\ 10\,000 \\ 20\,000 \\ 20\,000 \\ 5\,000 \end{pmatrix}$$

Encuentre **floor(S^n*x)** para $n = 10, 20, 30, 40$ y 50 (el comando **floor** redondea al menor entero más cercano (**doc floor**)). ¿Qué sucede con la población de peces a través del tiempo? ¿Está creciendo o está pereciendo? Explique.

d) Los cambios en las tasas de nacimiento y supervivencia pueden afectar el crecimiento de la población. Cambie s_{13} de 2 a 1 y repita los comandos del inciso *c*). Describa lo ocurre con la población. Cambie s_{13} otra vez a 2 y s_{32} a .3 y repita los comandos del inciso *c*). Describa lo que parece estar sucediendo con la población.

e) (*Lápiz y papel*) Suponga que se tiene interés en criar esta población de peces. Sea **h** el vector de 5×1, en donde h_j = número de peces criados del grupo j al final del año. Argumente por qué **u = S*x−h** proporciona el número de peces que se tienen al final del año después de la cosecha y luego por qué el número de peces al final de dos años después de la cosecha está dado por **w = S*u−h**.

f) Cambie s_{13} otra vez a 2 y s_{32} otra vez a 5. Suponga que se decide criar sólo peces maduros, es decir, peces del grupo 5. Se examinarán las posibilidades de cosecha a través de un periodo de 15 años. Sea **h** = **[0;0;0;0;2000]**. Para demostrar que ésta no es una cosecha que se pueda seguir utilice los comandos

u = **S*****x**−**h**

u = **S*****u**−**h**

Repita el último comando (con la flecha hacia arriba) hasta que obtenga un número negativo de peces después de una cosecha. ¿Durante cuántos años se puede recoger esta cantidad?

g) Experimente con otras cosechas del grupo 5 para encontrar la cantidad máxima de peces que se pueden obtener en un año dado con el fin de sostener este nivel de cosecha durante 15 años (introduzca **h** = **[0;0;0;0;n]** para un número n y repita los comandos del inciso *f*) según sea necesario para representar 15 años de cosecha). Escriba una descripción de su experimento y de sus resultados.

h) Siga con el experimento hasta ver si se puede encontrar un vector **h** que represente las cosechas de los grupos 4 y 5 que permitirían que cada año se cosecharan más peces (y que se sostuviera la cosecha durante 15 años). Escriba una descripción de su experimento y de sus resultados.

1.7 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En la sección 1.3 de la página 16 se estudiaron los siguientes sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad (1)$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes, **x** el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y **b** el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de $m \times n$ y x es una matriz de $n \times 1$ el producto matricial $A\mathbf{x}$ es una matriz de $m \times 1$. No es difícil ver que el sistema (1) se puede escribir como

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (2)$$

EJEMPLO 1 **Cómo escribir un sistema mediante su representación matricial**

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (3)$$

(Vea el ejemplo 1.3.1 en la página 7.) Esto se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es mucho más sencillo escribir el sistema (1) en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además existen otras ventajas. En la sección 1.8 se observará la rapidez con que se puede resolver un sistema cuadrado si se conoce una matriz llamada la *inversa* de A. Aun sin ella, como ya se vio en la sección 1.3, es mucho más sencillo escribir los cálculos usando una matriz aumentada.

Si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector cero de $m \times 1$, entonces el sistema (1) es homogéneo (vea la sección 1.4) y se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(forma matricial de un sistema de ecuaciones homogéneo).}$$

Existe una relación fundamental entre los sistemas homogéneos y los no homogéneos. Sea A una matriz $m \times n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \overset{m \text{ ceros}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

El sistema lineal no homogéneo general se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (4)$$

SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

Con A y $\mathbf{x}$ dados en (4) y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un **sistema homogéneo asociado** se define como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (5)$$

TEOREMA 1

Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ soluciones al sistema no homogéneo (4). Entonces su diferencia $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución al sistema homogéneo relacionado (5).

DEMOSTRACIÓN

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \overset{\text{por la ley distributiva (7) en la página 64}}{=} A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

COROLARIO

Sea $\mathbf{x}$ una solución particular al sistema no homogéneo (4) y sea $\mathbf{y}$ otra solución a (4). Entonces existe una solución $\mathbf{h}$ al sistema homogéneo (5) tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN

Si $\mathbf{h}$ está definida por $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{h}$ es una solución de (5) por el teorema 1 y $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$.

El teorema 1 y su corolario son muy útiles. Establecen que

Con el objeto de encontrar todas las soluciones al sistema no homogéneo (4), basta con encontrar una solución a (4) y todas las soluciones al sistema homogéneo asociado (5).

Observación. Un resultado muy similar se cumple para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (vea los problemas 29 y 30). Una de las bondades de las matemáticas es que temas en apariencia muy diferentes tienen una fuerte interrelación.

EJEMPLO 2 **Cómo escribir un número infinito de soluciones como una solución particular a un sistema no homogéneo más las soluciones al sistema homogéneo**

Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

usando el resultado anterior.

Solución Primero, se encuentra una solución mediante la reducción por renglones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las ecuaciones correspondientes a los primeros dos renglones del último sistema son

$$x_1 = 4 - 13x_3 \quad \text{y} \quad x_2 = -1 + 7x_3$$

con lo que las soluciones son

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4 - 13x_3, -1 + 7x_3, x_3) = \mathbf{x}_\mathbf{p} + \mathbf{x}_\mathbf{h}$$

donde $\mathbf{x}_\mathbf{p} = (4, -1, 0)$ es una solución particular y $\mathbf{x}_\mathbf{h} = x_3(-13, 7, 1)$, donde x_3 es un número real, es una solución al sistema homogéneo asociado. Por ejemplo, $x_3 = 0$ lleva a la solución $(4, -1, 0)$ mientras que $x_3 = 2$ da la solución $(-22, 13, 2)$.

Problemas 1.7

AUTOEVALUACIÓN

I. Si el sistema $\begin{pmatrix} x & & -z=2 \\ & y & +z=3 \\ x & +2y & =4 \end{pmatrix}$ se escribe en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

entonces A = _______.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 a 8 escriba el sistema dado en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -5 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$

En los problemas 9 a 19 escriba el sistema de ecuaciones representado por la matriz aumentada correspondiente.

9. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right)$

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

11. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 5 \end{array}\right)$

12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

13. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

14. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$

15. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$

16. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

17. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

18. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ **19.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$

20. Encuentre la matriz A y los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ tales que el sistema representado por la siguiente matriz aumentada se escriba en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y resuelva el sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

En los problemas 21 a 28 encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo dado encontrando primero una solución (si es posible) y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado.

21. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_2 &= -4 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 3x_1 \qquad\qquad - x_5 &= 1 \\ x_1 - 2x_3 - 4x_4 \qquad &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \end{aligned}$

CÁLCULO †**29.** Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas y se supone que la función desconocida $\boldsymbol{y}$ tiene una segunda derivada. Muestre que si y_1 y y_2 son soluciones a (7), entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2.

CÁLCULO **30.** Suponga que y_p y y_q son soluciones a la ecuación no homogénea

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \qquad \textbf{(8)}$$

Demuestre que $y_p - y_q$ es una solución a (7). Suponga aquí que $f(x)$ no es la función cero.

CÁLCULO **31.** Si $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)$ encuentre los valores de c_1 y c_2 tales que $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$.

Respuesta a la autoevaluación

I. *d*)

† El símbolo CÁLCULO indica que se necesita el cálculo para resolver el problema.

MATLAB 1.7

Nota. Para generar matrices aleatorias revise la presentación anterior de los problemas de MATLAB 1.6.

1. ***a)*** Genere una matriz aleatoria **A** de 3 × 3 con elementos entre −10 y 10 y genere un vector aleatorio **b** de 3 × 1 con elementos entre −10 y 10. Haciendo uso de MATLAB resuelva el sistema con la matriz aumentada [A **b**] usando **rref**. Utilice la notación ":" para poner la solución en la variable **x**. Encuentre $A\mathbf{x}$ y compare con **b** (encuentre **A*x−b**). Encuentre **y** = **x(1)*A(:,1)+(x(2)*A(:,2)+ x(3)*A(:,3)** y compare con **b** (encuentre **y−b**). Repita esto para otros tres vectores **b**. ¿Cuál es su conclusión acerca de la relación entre $A\mathbf{x}$ **y** y **b**?

b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 17 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 5 & 9 & 19 & 4 \\ 9 & 5 & 23 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

i. Resuelva el sistema con la matriz aumentada [A **b**] usando **rref**. Si existe un número infinito de soluciones haga una elección para las variables arbitrarias y encuentre e introduzca el vector solución **x** correspondiente.

ii. Encuentre **A*x** y **y** = **x(1)*A(:,1)+(x(2)*A(:,2)+ x(3)*A(:,3)+ x(4)*A(:,4)** y compare $A\mathbf{x}$, **y** y **b**.

iii. Repita para otras dos variables arbitrarias.

iv. ¿Cuál es su conclusión acerca de la relación entre $A\mathbf{x}$, **y** y **b**?

2. ***a)*** Suponga que los elementos de A y **x** son números reales. Haciendo uso de la definición de multiplicación de matrices, argumente por qué $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que cada renglón de A es perpendicular a **x** (recuerde que dos vectores reales son perpendiculares si su producto escalar es cero).

b) Con el resultado del inciso *a)* encuentre todos los vectores **x** perpendiculares a los dos vectores:

$$(1, 2, -3, 0, 4) \quad \text{y} \quad (4, -5, 2, 0, 1)$$

3. ***a)*** Recuerde el problema 3 de MATLAB 1.6 (vuelva a resolverlo). ¿Cómo se relaciona esto con el corolario del teorema 1?

b) Considere las matrices A y **b** del problema 1*b*) de MATLAB en esta sección.

i. Verifique que el sistema [A **b**] tiene un número infinito de soluciones.

ii. Sea **x** = **A\b**. Verifique, usando la multiplicación de matrices, que esto produce una solución al sistema con la matriz aumentada [A **b**] (observe que hace una advertencia. Si no existe una solución única, el comando "\" (**doc mldivide**).

iii. Considerando **rref(A)** encuentre cuatro soluciones al sistema homogéneo [A **0**]. Introduzca uno a la vez, llamándolo **z** y verifique mediante la multiplicación de matrices que **x** + **z** es una solución al sistema con la matriz aumentada [A **b**].

4. ***a*)** Observe **rref(A)** para la A dada a continuación y argumente por qué el sistema [A **b**] tiene una solución independientemente del vector **b** de 4×1 que se elija.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

***b*)** Concluya que todo vector **b** es una combinación lineal de las columnas de A. Genere tres vectores aleatorios **b** de 4×1 y, para cada **b**, encuentre los coeficientes necesarios para escribir **b** como una combinación lineal de las columnas de A.

***c*)** Observando **rref(A)** para la siguiente A, argumente las razones por las cuales existe un vector **b** de 4×1 para el que el sistema [A **b**] no tiene solución. Realice un experimento para encontrar un vector **b** para el que no exista una solución.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & 9 & -15 & 9 \\ 9 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

***d*)** ¿Cómo se pueden generar vectores **b** que garanticen una solución? Tome una decisión sobre el procedimiento y descríbalo con un comentario. Pruebe su procedimiento formando con él tres vectores **b** y después resolviendo los sistemas correspondientes (vea el problema 6 de MATLAB en la sección 1.3).

***e*)** Pruebe que su procedimiento es válido usando la teoría desarrollada en el texto.

5. En este problema descubrirá las relaciones entre la forma escalonada reducida por renglones de una matriz y la información sobre las combinaciones lineales de las columnas de A. La parte de MATLAB del problema implica, únicamente, el cálculo de algunas formas escalonadas reducidas por renglones. La teoría se basa en los hechos de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que $\mathbf{x}$ es una solución al sistema [A **0**] y que

$$\mathbf{0} = x_1(\text{col } 1 \text{ de } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ de } A)$$

***a*)** **i.** Sea A la matriz del problema 4c) de MATLAB en esta sección. Encuentre **rref(A)**. (El resto de este inciso requiere de trabajo con papel y lápiz.)

ii. Encuentre las soluciones al sistema homogéneo escrito en términos de las elecciones naturales de las variables arbitrarias.

iii. Establezca una variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0 y encuentre las otras incógnitas para producir un vector solución **x**. Para esta **x**, escriba lo que dice la afirmación

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = x_1(\text{col } 1 \text{ de } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ de } A)$$

y despeje la columna de A que corresponde a la variable arbitraria que igualó a 1. Verifique sus datos.

iv. Ahora establezca otra variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0. Repita *iii*). Continúe de la misma manera para cada variable arbitraria.

v. Revise **rref(A)** y vea si reconoce algunas relaciones entre lo que acaba de descubrir y los números en **rref(A)**.

***b*)** Sea A la matriz en el problema 1*b*) de MATLAB en esta sección. Repita las instrucciones anteriores.

***c*)** Sea A una matriz aleatoria de 6×6. Modifique A de manera que

A(:,3) = 2*A(:,2) −3*A(:,1)

A(:,5) = −A(:,1) +2*A(:,2) −3*A(:,4)

A(:,6) = A(:,2) +4*A(:,4)

Repita las instrucciones anteriores.

1.8 INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

En esta sección se definen dos tipos de matrices que son básicas en la teoría de matrices. En primer lugar se presenta un ejemplo sencillo. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Un cálculo sencillo muestra que $AB = BA = I_2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz I_2 se llama *matriz identidad* de 2×2. La matriz B se llama *matriz inversa* de A y se denota por A^{-1}.

DEFINICIÓN 1

Matriz identidad

La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal**[12] son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$\boxed{I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 **Dos matrices identidad**

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[12] La diagonal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. A menos que se establezca de otra manera, se hará referencia a la diagonal principal simplemente como la **diagonal**.

TEOREMA 1

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{AI_n = I_nA = A}$$

Es decir, I_n, conmuta con toda matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Nota. I_n funciona para las matrices de $n \times n$ de la misma manera que el número 1 funciona para los números reales ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo número real a).

DEMOSTRACIÓN

Sea c_{ij} el elemento ij de AI_n. Entonces

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Pero por (1), esta suma es igual a a_{ij}. Así $AI_n = A$. De una manera similar se puede demostrar que $I_nA = A$ y esto demuestra el teorema.

Notación. De aquí en adelante se escribirá la matriz identidad únicamente como I ya que si A es de $n \times n$ los productos IA y AI están definidos sólo si I es también de $n \times n$.

DEFINICIÓN 2

La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es **invertible**.

Una matriz cuadrada que no es invertible se le denomina **singular** y una matriz invertible se llama **no singular**.

Observación 1. A partir de esta definición se deduce inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.

Observación 2. Esta definición *no* establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa (ejemplo 3 de la página 98).

En la definición 2 se establece *la* inversa de una matriz. Esta definición sugiere que la inversa es única. Y esta declaración es cierta, como lo dice el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que B y C son dos inversas de A. Se puede demostrar que $B = C$. Por definición se tiene $AB = BA = I$ y $AC = CA = I$. $B(AC) = (BA)C$ por la ley asociativa de la multiplicación de matrices. Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Entonces $B = C$ y el teorema queda demostrado.

A continuación se presenta otro fenómeno importante sobre las inversas.

TEOREMA 3

Sean A y B dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

DEMOSTRACIÓN

Para probar este resultado es necesaria la definición 2. Es decir, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ si y sólo si $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Se trata, únicamente, de una consecuencia ya que

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) \overset{\substack{\text{ecuación (6), página 64}\\ \downarrow}}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Nota. Del teorema 3 se concluye que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Vea el problema 22. Considere el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Y suponga que A es invertible. Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && \text{se multiplicó por la izquierda por } A^{-1} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && A^{-1}A = I \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && I\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Ésta es una solución al sistema porque

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Si $\mathbf{y}$ es un vector tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, entonces los cálculos anteriores demuestran que $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$. Es decir, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Se ha demostrado lo siguiente:

Si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ **(2)**

Ésta es una de las razones por la que se estudian las matrices inversas.

Ya que se ha definido la inversa de una matriz, surgen dos preguntas básicas.

Pregunta 1. ¿Qué matrices tienen inversa?

Pregunta 2. Si una matriz tiene inversa ¿cómo se puede calcular?

En la presente sección se contestan ambas preguntas. Se comenzará por analizar lo que ocurre en el caso 2×2.

EJEMPLO 2 Cálculo de la inversa de una matriz de 2 x 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución

Suponga que A^{-1} existe. Se escribe $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y se usa el hecho de que $AA^{-1} = I$. Entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z & 2y - 3w \\ -4x + 5z & -4y + 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices pueden ser iguales únicamente si cada una de sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa que

$$\begin{aligned} 2x \quad -3z \quad &= 1 && \textbf{(3)} \\ 2y \quad - 3w &= 0 && \textbf{(4)} \\ -4x \quad +5z \quad &= 0 && \textbf{(5)} \\ -4y \quad + 5w &= 1 && \textbf{(6)} \end{aligned}$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Observe que hay dos ecuaciones que involucran únicamente a x y a z [las ecuaciones (3) y (5)] y dos que incluyen sólo a y y w [las ecuaciones (4) y (6)]. Se escriben estos dos sistemas en la forma aumentada:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \qquad \textbf{(7)}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \qquad \textbf{(8)}$$

De la sección 1.3 se sabe que si el sistema (7) (con las variables x y z) tiene una solución única, la eliminación de Gauss-Jordan en (7) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

en donde (x,z) es el único para de números que satisface $2x - 3z = 1$ y $-4x + 5z = 0$. De igual manera, la reducción por renglones de (8) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & w \end{array}\right)$$

donde (y,w) es el único par de números que satisface $2y - 3w = 0$ y $-4y + 5w = 1$.

Como las matrices de coeficientes en (7) y (8) son iguales se puede realizar la reducción por renglones sobre las dos matrices aumentadas al mismo tiempo, considerando la nueva matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{9}$$

Si A es invertible, entonces el sistema definido por (3), (4), (5) y (6) tiene una solución única y, por lo que acaba de decirse, la reducción de renglones da

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & w \end{array}\right)$$

Ahora se llevan a cabo los cálculos, observando que la matriz de la izquierda en (9) es A y la matriz de la derecha es I:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Así, $x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2$, $w = -1$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Se calcula

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3 Una matriz de 2 x 2 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y si es así, calcule su inversa.

Solución Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ existe, entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ -2x - 4z & -2y - 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto conduce al sistema

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 2z \quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad + 2w &= 0 \\ -2x \quad\quad - 4z \quad\quad &= 0 \\ -2y \quad\quad - 4w &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Si se aplica la misma lógica que en el ejemplo 1 se puede escribir este sistema en la forma de matriz aumentada $(A \mid I)$ y reducir por renglones:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La última línea se lee $0 = 2$ o $0 = 1$, dependiendo de cuál de los dos sistemas de ecuaciones (en x y z o en y y w) se esté resolviendo. Entonces el sistema (10) es inconsistente y A no es invertible.

Los últimos dos ejemplos ilustran un procedimiento que siempre funciona cuando se quiere encontrar la inversa de una matriz.

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Observación. *a*) y *b*) se pueden expresar de otra manera:

Una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad; es decir, si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces se define

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ 2 X 2

$$\boxed{\text{Determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{11}$$

El determinante de A se denota por $\det A$.

TEOREMA 4

Sea A = una matriz de 2×2. Entonces

i. A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

ii. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}} \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN

Primero, suponga que $\det A \neq 0$ y sea $B = (1/\det A)\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Entonces

$$BA = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De manera similar, $AB = I$, lo que muestra que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Todavía debe demostrarse que si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$. Para esto, se considera el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Se lleva a cabo de esta forma porque del teorema de resumen (teorema 1.2.1, página 5) se sabe que si este sistema tiene una solución única, entonces $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. El sistema se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{14}$$

con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Entonces, como A es invertible, se ve de (2) que el sistema (14) tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Pero por el teorema 1.2.1, el hecho de que el sistema (13) tenga una solución única implica que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \neq 0$. Esto completa la prueba.

Nota. La fórmula (12) se puede obtener directamente aplicando el procedimiento para calcular una inversa (ver el problema 54).

EJEMPLO 4 **Cálculo de la inversa de una matriz de 2 x 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Se encuentra que $\det A = (2)(3) - (-4)(1) = 10$; por lo tanto A^{-1} existe. De la ecuación (12) se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5 Una matriz de 2 x 2 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución

Se encuentra que det $A = (1)(-4) - (2)(-2) = -4 + 4 = 0$, de manera que A^{-1} no existe, como se observó en el ejemplo 3.

El procedimiento descrito para encontrar la inversa (si existe) de una matriz de 2×2 funciona para matrices de $n \times n$ donde $n > 2$. Se ilustra con varios ejemplos.

EJEMPLO 6 Cálculo de la inversa de una matriz de 3 x 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (Vea el ejemplo 1.3.1 en la página 7). Calcule A^{-1} si existe.

Solución

Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y después se lleva a cabo la reducción por renglones.

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Como A se redujo a I se tiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

se factoriza $\frac{1}{6}$ para que los cálculos sean más sencillos.

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I.$$

También se puede verificar que $AA^{-1} = I$.

ADVERTENCIA

Cuando se calcula A^{-1} es fácil cometer errores numéricos. Por ello es importante verificar los cálculos viendo que $A^{-1}A = I$.

EJEMPLO 7 Una matriz de 3 x 3 que no es invertible

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución De acuerdo con el procedimiento anterior se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz A no puede reducirse a la matriz identidad, por lo que se puede concluir que A no es invertible.

Hay otra forma de ver el resultado del último ejemplo. Sea **b** cualquier vector de 3×1 y considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si se trata de resolver esto por el método de eliminación gaussiana, se terminaría con una ecuación que se lee $0 = c \neq 0$ como en el ejemplo 3, o $0 = 0$. Es decir, el sistema no tiene solución o bien, tiene un número infinito de soluciones. La posibilidad que se elimina es que el sistema tenga una solución única. Pero si A^{-1} existiera, entonces habría una solución única dada por $x = A^{-1}\mathbf{b}$. La conclusión que se obtiene es

Si la reducción por renglones de A produce un renglón de ceros, entonces A no es invertible.

DEFINICIÓN 3

Matrices equivalentes por renglones

Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son **equivalentes por renglones**.

El razonamiento anterior se puede usar para probar el siguiente teorema (vea el problema 55).

TEOREMA 5

Sea A una matriz de $n \times n$.

i. A es invertible si y sólo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n; esto es, si la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

ii. A es invertible si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iii. Si A es invertible, entonces la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

iv. A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

EJEMPLO 8 Uso de la inversa de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se puede escribir como $Ax = \mathbf{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, la solución única está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(15)}$$

EJEMPLO 9 La tecnología y las matrices de Leontief: modelo de la economía estadounidense en 1958

En el modelo de insumo-producto de Leontief, descrito en el ejemplo 1.3.9 en de la página 18, se obtuvo el sistema

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad\;\; \vdots \;\; &\;\; \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{x} = I\mathbf{x}$$

o

$$(I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{e} \tag{16}$$

La matriz A de demandas internas se llama **matriz tecnológica**, y la matriz $I - A$ se llama **matriz de Leontief**. Si la matriz de Leontief es invertible, entonces los sistemas (15) y (16) tienen soluciones únicas.

Leontief utilizó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos en 1958.[13] Dividió la economía en 81 sectores y los agrupó en seis familias de sectores relacionados. Con el objeto de simplificar se tratará cada familia de sectores como un solo sector, de manera que se pueda ver la economía estadounidense como una economía con seis industrias. Estas industrias se enumeran en la tabla 1.1.

Tabla 1.1

Sector	Ejemplos
No metales terminados (NMT)	Muebles, alimentos procesados
Metales terminados (MT)	Electrodomésticos, vehículos automotores
Metales básicos (MB)	Herramientas (producción intermitente), minería
No metales básicos (NMB)	Agricultura, imprenta
Energía (E)	Petróleo, carbón
Servicio (s)	Diversiones, bienes raíces

La tabla de insumo-producto, tabla 1.2, presenta las demandas internas durante 1958 sobre la base de las cifras de Leontief. Las unidades en la tabla están expresadas en millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.173 en la posición 6,5 significa que para producir energía equivalente a $1 millón, es necesario proporcionar $0.173 millones = $173 000 en servicios. De forma similar, 0.037 en la posición 4,2 significa que con el fin de producir artículos metálicos terminados, es necesario gastar $0.037 millones = $37 000 en productos no metálicos básicos.

Tabla 1.2 Demandas internas en 1958 en la economía de Estados Unidos

	NMT	MT	MB	NMB	E	S
NMT	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
MT	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MB	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
NMB	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.029	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

[13] *Scientific American* (abril de 1965): 26-27.

Por último, las demandas externas estimadas por Leontief sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares) se presentan en la tabla 1.3.

Tabla 1.3 Demandas externas sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares)

NMT	99 640
MT	75 548
MB	14 444
NMB	33 501
E	23 527
S	263 985

Con el fin de manejar la economía de Estados Unidos en 1958 para satisfacer todas las demandas externas, ¿cuántas unidades deben producirse en cada uno de los seis sectores?

Solución La matriz tecnológica está dada por

$$A=\begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}=\begin{pmatrix} 99\,640 \\ 75\,548 \\ 14\,444 \\ 33\,501 \\ 23\,527 \\ 263\,985 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de Leontief, se resta

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la inversa de una matriz de 6×6 es una actividad laboriosa. Los siguientes resultados (redondeados a tres cifras decimales) se obtuvieron usando MATLAB:

$$(I-A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.007 & 0.064 & 0.006 & 0.017 \\ 0.017 & 1.436 & 0.056 & 0.014 & 0.019 & 0.032 \\ 0.078 & 0.467 & 1.878 & 0.036 & 0.044 & 0.031 \\ 0.752 & 0.133 & 0.101 & 1.741 & 0.065 & 0.123 \\ 0.061 & 0.045 & 0.130 & 0.083 & 1.578 & 0.059 \\ 0.340 & 0.236 & 0.307 & 0.315 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el vector de la salida "ideal" está dado por

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{e} \approx \begin{pmatrix} 131\,033.21 \\ 120\,458.90 \\ 80\,680.56 \\ 178\,732.04 \\ 66\,929.26 \\ 431\,562.04 \end{pmatrix}$$

Esto significa que se requería aproximadamente de 131 033 unidades (equivalentes a $131 033 millones) de productos no metálicos terminados, 120 459 unidades de productos metálicos terminados, 80 681 unidades de productos metálicos básicos, 178 732 unidades de productos no metálicos básicos, 66 929 unidades de energía y 431 562 unidades de servicios, para manejar la economía de Estados Unidos y cumplir con las demandas externas en 1958.

En la sección 1.2 se encontró la primera forma del teorema de resumen (teorema 1.2.1, página 4). Ahora se puede mejorar. El siguiente teorema establece que varias afirmaciones sobre la inversa, la unicidad de las soluciones, la equivalencia por renglones y los determinantes son equivalentes. En este momento, se puede probar la equivalencia de los incisos *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *v*). La prueba concluirá después de desarrollar cierta teoría básica sobre determinantes (vea el teorema 2.4.4 en la página 208).

TEOREMA 6

Teorema de resumen (punto de vista 2)

Sea A una matriz de $n \times n$. Por lo que las seis afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ellas implica las otras cinco (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n, de $n \times n$; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vi. $\det A \neq 0$ (hasta ahora sólo se ha definido $\det A$ si A es una matriz de 2×2).

DEMOSTRACIÓN

Ya se ha visto que las afirmaciones *i*), *iii*), *iv*) y *vi*) son equivalentes [teorema 5]. Se demostrará que *ii*) y *iv*) son equivalentes. Suponga que *ii*) se cumple. Entonces la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes; de otra manera al menos una columna de esta forma no tendría pivote y entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tendría un número infinito de soluciones porque se podría dar un valor arbitrario a la variable correspondiente a esa columna (los coeficientes en la columna son cero). Pero si la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes, entonces se trata de I_n.

Inversamente, suponga que *iv*) se cumple; esto es, suponga que A es equivalente por renglones a I_n. Entonces por el teorema 5, inciso *i*), A es invertible y, por el teorema 5, inciso *iii*), la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\times = A^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, *ii*) y *iv*) son equivalentes. En el teorema 1.2.1 se demostró que *i*) y *vi*) son equivalentes en el caso de 2×2. Se probará la equivalencia de *i*) y *vi*) en la sección 2.4.

Observación. Si la forma escalonada por renglones de A tiene n-pivotes, entonces tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Es decir, R es una matriz con unos en la diagonal y ceros debajo de ella.

Para verificar que $B = A^{-1}$ se debe comprobar que $AB = BA = I$. Resulta que sólo se tiene que hacer la mitad de este trabajo.

TEOREMA 7

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces A es invertible y $B = A^{-1}$ ya sea si *i*) $BA = I$ o si *ii*) $AB = I$.

DEMOSTRACIÓN

i. Se supone que $BA = I$. Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si se multiplican por la izquierda ambos lados de esta ecuación por B, se obtiene

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \qquad (18)$$

Pero $BA = I$ y $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que (18) se convierte en $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto muestra que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por el teorema 6, incisos *i*) y *ii*), esto quiere decir que A es invertible. Todavía debe demostrarse que $B = A^{-1}$. Sea $A^{-1} = C$. Entonces, $AC = I$. Así

$$BAC = B(AC) = BI = B \quad \text{y} \quad BAC = (BA)C = IC = C$$

Por lo tanto, $B = C$ y el inciso *i*) queda demostrado.

ii. Sea $AB = I$. Entonces del inciso *i*), $A = B^{-1}$. De la definición 2 esto significa que $AB = BA = I$, lo que prueba que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Esto completa la demostración.

Problemas 1.8

AUTOEVALUACIÓN

I. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

***a*)** Toda matriz cuadrada tiene inversa.

***b*)** Una matriz cuadrada tiene inversa si su reducción por renglones lleva a un renglón de ceros.

c) Una matriz cuadrada es invertible si tiene inversa.

***d*)** Una matriz cuadrada B es la inversa de A si $AI = B$.

II. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre un sistema de ecuaciones en forma de matriz?

***a*)** Es de la forma $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

***b*)** Si tiene una solución única, la solución será $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

c) Tiene solución si A no es invertible.

d) Tiene una solución única.

III. ¿Cuál de las siguientes matrices es invertible?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

IV. Considere una matriz invertible A y señale cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

a) El producto de A por I es A^{-1}.

b) A es una matriz de 2×3.

c) $A = A^{-1}$.

d) A es una matriz cuadrada.

V. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema?

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 3 \\ 6x + 7y &= 4 \end{aligned}$$

a) No tiene solución porque $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ no es invertible.

b) Tiene solución $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

c) Si tuviera una solución se encontraría resolviendo $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d) Su solución es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En los problemas 1 a 21 determine si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

22. Muestre que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

23. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son matrices invertibles de $n \times n$, muestre que $A_1 \cdot A_2, \cdots, A_m$ es invertible y calcule su inversa.

24. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

25. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es su propia inversa si $A = \pm I$ o si $a_{11} = -a_{22}$ y $a_{21}a_{12} = 1 - a^2_{11}$.

26. Encuentre el vector de producción $\mathbf{x}$ en el modelo de insumo-producto de Leontief si $n = 3$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

***27.** Asuma que A es de $n \times m$ y B es de $m \times n$, de manera que AB es de $n \times n$. Demuestre que AB no es invertible si $n > m$. [*Sugerencia:* Muestre que existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y luego aplique el teorema 6.]

***28.** Utilice los métodos de esta sección para encontrar las inversas de las siguientes matrices con elementos complejos:

a) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

29. Demuestre que para todo número real θ la matriz $\begin{pmatrix} \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

30. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

31. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama **diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (la matriz del problema 30 es diagonal). Demuestre que una matriz diagonal es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

32. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal tal que sus componentes en la diagonal principal son todas diferentes de cero. Calcule A^{-1}.

33. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

34. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible.

***35.** Una matriz cuadrada se llama **triangular superior** (**inferior**) si todos sus elementos abajo (arriba) de la diagonal principal son cero (la matriz en el problema 33 es triangular superior y la matriz en el problema 34 es triangular inferior). Demuestre que una matriz triangular superior o triangular inferior es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

36. Demuestre que la inversa de una matriz invertible es triangular superior. [*Sugerencia*: Primero demuestre el resultado para una matriz de 3×3.]

En los problemas 37 y 38 se da una matriz. En cada caso demuestre que la matriz no es invertible encontrando un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

37. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

39. Sean A, B, F, y M matrices invertibles de $m \times n$. Si $M = I + F(\lambda I - A_F)-1\ B$ y $A_F = A + BF$.

Demuestre que $M^{-1} = B^{-1}(\lambda I - A_F)(\lambda I - A)^{-1}B$.

40. Sean A, B, C, D, F y N matrices invertibles de $m \times n$. Si $N = D + C_F(\lambda I - A_F)^{-1}B$, $M^{-1} = B^{-1}(\lambda I - A_F)(\lambda I - A)^{-1}B$, CF = C + DF y $A_F = A + BF$.

Demuestre que $NM^{-1} = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$.

41. Una fábrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: un taller de máquinas herramienta donde se fabrican las partes de los muebles, y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto final. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga también que se producen únicamente dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante desea mantener ocupados a todos sus empleados, ¿cuántas sillas y cuántas mesas puede producir esta fábrica al día?

42. La alacena de ingredientes mágicos de una hechicera contiene 10 onzas de tréboles de cuatro hojas molidos y 14 onzas de raíz de mandrágora en polvo. La alacena se resurte en forma automática siempre y cuando ella termine con todo lo que tiene. Una poción de amor requiere $\frac{1}{13}$ onzas de tréboles y $2\frac{2}{13}$ onzas de mandrágora. Una receta de un conocido tratamiento para el resfriado común requiere $5\frac{5}{13}$ onzas de tréboles y $10\frac{10}{13}$ onzas de mandrágora. ¿Qué cantidad de la poción de amor y del remedio para resfriado debe combinar la hechicera para usar toda la reserva en su alacena?

43. Un granjero nutre a su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10% del requerimiento diario de proteína y 15% del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con el 100% de los requerimientos mínimos diarios de proteínas y carbohidratos, ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe recibir un novillo al día?

44. Una versión muy simplificada de una tabla de insumo-producto para la economía de Israel en 1958 divide dicha economía en tres sectores —agricultura, manufactura y energía— con los siguientes resultados.[14]

	Agricultura	Manufactura	Energía
Agricultura	0.293	0	0
Manufactura	0.014	0.207	0.017
Energía	0.044	0.010	0.216

a) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener una unidad de producto agrícola?

b) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 200 000 unidades de productos de esta naturaleza?

c) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 50 000 unidades de energía?

d) ¿Cuántas unidades de energía se requieren para obtener 50 000 unidades de productos agrícolas?

45. Si se continúa con el problema 44, las exportaciones (en miles de libras israelíes) en 1958 fueron las siguientes:

Agricultura	13 213
Manufactura	17 597
Energía	1 786

a) Calcule la matriz tecnológica y la de Leontief.

b) Determine el valor en libras israelíes de los productos agrícolas, la energía y los artículos manufacturados necesarios para hacer funcionar este modelo y exportar el valor establecido de cada producto.

[14] Wassily Leontief, *Input-output Economics* (Nueva York: Oxford University Press, 1966), 54-57.

En los problemas 46 a 53 calcule la forma escalonada por renglones de la matriz dada y utilícela para determinar en forma directa si es invertible.

46. La matriz del problema 4.

47. La matriz del problema 1.

48. La matriz del problema 5.

49. La matriz del problema 10.

50. La matriz del problema 13.

51. La matriz del problema 16.

52. La matriz del problema 18.

53. La matriz del problema 19.

54. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Derive la fórmula (12) mediante reducción por renglones de la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right)$.

55. Demuestre los incisos *i*), *ii*) y *iv*) del teorema 5.

56. Calcule la inversa de $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donde A es una matriz cuadrada. (*Sugerencia:* Revise la multiplicación de matrices por bloques en la página 66.)[15]

57. Considere que A_{11} y A_{22} son invertibles y encuentre la inversa de $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

58. Si A y B son matrices invertibles, resuelva para X:

***a*)** $BXA = B$

***b*)** $A^{-1}X = A$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c*) **II.** *b*) **III.** *c*) **IV.** *d*) **V.** *c*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

Para obtener la inversa de una inversa se procede de la forma siguiente. Una vez que se tiene a la matriz en la pila, se oprime la tecla (1/x). Si la matriz no es invertible aparecerán símbolos de infinito en alguna(s) posición(es) de la matriz resultante.

De los problemas 59 a 62 utilice la calculadora para calcular la inversa de la matriz dada.

59. $\begin{pmatrix} 1.6 & 2.3 & 7.5 \\ -4.2 & 3.9 & 5.7 \\ -6.8 & -0.9 & 4.1 \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} 20 & 37 & 11 \\ 26 & 49 & 10 \\ 57 & 98 & 36 \end{pmatrix}$

[15] David Carlson presentó este problema y el siguiente en su artículo "*Teaching Linear Álgebra: Must the Fog Always Roll in*? En The Collage Mathematics Journal, 24(1), enero de 1993, 29-40.

61. $\begin{pmatrix} -0.03 & 0.21 & 0.46 & -0.33 \\ -0.27 & 0.79 & 0.16 & 0.22 \\ 0.33 & 0.02 & 0 & -0.88 \\ 0.44 & -0.68 & 0.37 & 0.79 \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 23.46 & -59.62 & 38.36 & -44.21 \\ -59.32 & 77.01 & 91.38 & 50.02 \\ 36.38 & 67.92 & -81.31 & 15.06 \\ -61.31 & -70.80 & 43.59 & 71.22 \end{pmatrix}$

63. Demuestre que la inversa de

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 8 & 13 & 22 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

tiene ceros debajo de la diagonal.

64. Haga lo mismo para la matriz

$$\begin{pmatrix} 23.1 & -42.1 & -63.7 & -19.4 & 23.8 \\ 0 & -14.5 & 36.2 & -15.9 & 61.3 \\ 0 & 0 & -37.2 & 64.8 & 23.5 \\ 0 & 0 & 0 & 91.2 & 13.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 46.9 \end{pmatrix}$$

65. Las matrices en los problemas 63 y 64 se llaman **triangulares superiores**. Haciendo uso de los resultados de dichos problemas obtenga una conclusión sobre la inversa de una matriz triangular superior.

MATLAB 1.8

Información de MATLAB. El comando de MATLAB **eye(n)** forma la matriz identidad de $n \times n$ (**doc eye**). El comando de MATLAB **size(A)** reporta el número de renglones y columnas de la matriz A (**doc size**).

1. ***a)*** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, forme **R** = **[A eye(size(A))]**.

i. Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de R. Utilice la notación ":" para asignar el nombre de la variable S a la matriz que consiste en las tres últimas columnas de la forma escalonada reducida por renglones de R.

ii. Encuentre SA y AS. Describa la relación entre A y S.

iii. Compare S con **inv(A)** (doc **inv**).

b) Repita las instrucciones anteriores para **A=2*rand(5)− 1**, (Utilice **R** = **[A eye(size(A))]** y haga S igual a las cinco últimas columnas de la forma escalonada reducida por renglones.)

2. Considere las matrices

i. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & -14 & 0 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

v. $\frac{-1}{56}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **vi.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Para cada matriz A:

a) Use el comando **rref** para probar si es invertible y encuentre **inv(A)**.

b) Si A no es invertible, ponga atención en los mensajes de MATLAB cuando dé **inv(A)**.

c) Si A es invertible, verifique que **inv(A)** da la inversa. Seleccione un vector aleatorio b para el lado derecho, muestre que el sistema [A **b**] tiene una solución única usando el comando **rref**, asigne la solución a la variable **x** y compare **x** con **y** = **inv(A)*b** (encuentre **x−y**). Repita esto para otro vector **b**.

3. ***a)*** Sea **A** = **round(10*(2*rand(5)−1))**. Sea **B** = **A** pero modifique uno de los renglones de B a **B(3,:)** = **3*B(1,:)** + **5*B(2,:).** Muestre que B no es invertible.

b) Sea **B** = **A** y cambie el renglón que quiera por una combinación lineal de otros renglones de B. Muestre que B no es invertible.

c) (*Lápiz y papel*) Considerando el proceso de reducción a la forma escalonada reducida por renglones, demuestre que una matriz B no es invertible si un renglón es una combinación lineal de otros renglones.

4. Sea **A** = **round(10*(2*rand(7)−1)).**

Sea **B** = **A** pero **B(:,3)** = **2*B(:,1)** − **B(:,2).**

Sea **C** = **A** pero **C(:,4)** = **C(:,1)** + **C(:,2)−C(:,3) y C(:,6)= 3*C(:,2).**

Sea D = **A** pero **D(:,2)** = **3*D(:,1), D(:,4)** = **2*D(:,1)−D(:,2)+4*D(:,3), D(:,5)** = **D(:,2)− 5*D(:,3).**

a) Encuentre **rref** de B, C y D. ¿Qué puede concluir acerca de la invertibilidad de una matriz en la que algunas columnas son combinaciones lineales de otras columnas?

b) Pruebe su conclusión con otra matriz aleatoria generada E y modificada cambiando algunas columnas a una combinación lineal de otras.

c) Para B, C, D y E, busque patrones en los números de **rref** que reflejen los coeficientes de las combinaciones lineales. Describa dichos patrones.

d) ¿De qué forma se relaciona este problema con el problema 5 de MATLAB 1.7?

5. **Tipos especiales de matrices**

***a*)** Genere cinco matrices aleatorias triangulares superiores con elementos enteros entre -10 y 10. Utilice el comando **triu**. Para dos de las matrices generadas cambie un elemento de la diagonal a 0 (por ejemplo, si la matriz se llama A, modifíquela con el comando **A(2,2)=0**).

i. Pruebe si cada una es invertible. Describa una conclusión que relacione los términos de la diagonal de la matriz triangular superior con la propiedad de ser o no invertible. Pruebe su conclusión con tres o más matrices triangulares superiores.

ii. Para cada matriz invertible encontrada en *i*) encuentre la inversa utilizando el comando **inv.** ¿Cuál es su conclusión acerca de la forma de la inversa de una matriz triangular superior? ¿Cómo son los elementos de la diagonal de la inversa en relación con los elementos de la diagonal de la matriz original? ¿De qué forma se relaciona esta observación con *i*)?

iii. (*Lápiz y papel*) Suponga que A es una matriz triangular superior de 3×3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Describa los pasos necesarios para reducir la matriz aumentada $[A \;\; I]$ (I es la matriz identidad) a la forma escalonada reducida por renglones y utilice la descripción para verificar las conclusiones sobre las inversas de matrices triangulares superiores a las que llegó en *i*) y *ii*).

***b*)** Pruebe si las siguientes matrices y otras con el mismo patrón general son o no invertibles. Describa sus resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

***c*)** En el problema 11 de MATLAB 1.3 se aseguró que el sistema obtenido al ajustar un polinomio de grado n a $n + 1$ puntos con coordenadas distintas llevara a una solución única. ¿Qué indica este hecho acerca de la matriz de coeficientes? Pruebe su conclusión: primero dé un vector **x** con coordenadas distintas y encuentre **V** = **vander(x)**; después pruebe V. Repita el mismo procedimiento para otros tres vectores **x**.

6. Considere las siguientes matrices.

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 10 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad A4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A5 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -9 \\ 7 & -14 & 8 & 7 & -2 \\ 7 & -14 & 0 & 4 & 11 \\ 9 & -18 & 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

***a*)** Haciendo uso de comando **rref**, pruebe si las matrices *A1* a *A5* son o no invertibles. Pruebe la invertibilidad de *A1*A2, A1*A3, A1*A4, A1*A5, A2*A3, A2*A4, A2*A5, A3*A4, A3*A5* y *A4*A5*. Obtenga una conclusión sobre la relación entre la invertibilidad de dos matrices y la invertibilidad de su producto. Explique la forma en la cual la evidencia soporta su conclusión.

***b*)** Para cada par de matrices A y B del problema anterior tales que AB es invertible, encuentre

inv(A*B)−inv(A)*inv(B) e **inv(A*B)−inv(B)*inv(A)**

Obtenga una fórmula para $(AB)^{-1}$ en términos de A^{-1} y B^{-1}. Explique.

7. Perturbaciones: matrices cercanas a una matriz no invertible

Introduzca la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Verifique que A no es invertible. En lo que sigue A se cambia a una matriz invertible C que es cercana a A, modificando uno de los elementos de A:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+f \end{pmatrix}$$

donde f es un número pequeño.

Antes de continuar, dé el comando **format short e**. Este comando hará que los números aparezcan en notación científica. En MATLAB, por ejemplo, **1.e−5** representa 10^{-5}.

***a*)** Introduzca

f = 1. e−5; C = A; C(3,3) = A(3,3) + f;

Verifique que C es invertible y encuentre **inv(C)**.

***b*)** Repita para **f = 1.e−7** y **f = 1.e−10.**

c) Comente acerca del tamaño de los elementos de **inv(C) (**realizando una comparación con el tamaño de los elementos de *C*) conforme *f* se hace pequeño, es decir, conforme *C* se acerca más a no ser invertible.

d) Se investigará la exactitud de las soluciones a los sistemas en los que la matriz de coeficientes es cercana a ser invertible. Observe que si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+f \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24+f \end{pmatrix}$$

entonces C**x** = **b**, donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir, **x** es la solución exacta. Introduzca **x** = **[1;1;1]**.

Para cada *f* utilizada en *a*) y *b*), forme *C* y **b** y resuelva el sistema *C***y** = **b** haciendo uso de **inv(C)**(dando el nombre de **y** a la solución). Encuentre **z=x−y.** ¿Qué tan cercana es la solución calculada **y** a la solución exacta **x**? ¿Cómo cambia la exactitud conforme *f* se hace más pequeña, es decir, conforme *C* se acerca a no ser invertible?

8. Este problema se refiere al modelo de insumo-producto de Lenotief. Resuelva los problemas usando $(I-A)^{-1}$, donde *A* es la matriz tecnológica que describe las demandas internas. Interprete sus resultados. [*Sugerencia* de MATLAB: la matriz *I* de $n \times n$ se puede generar con **eye(n)**.]

a) El problema 45 de esta sección.

b) El problema 9*b*) de MATLAB 1.3.

Utilice **format long** si desea más dígitos en las respuestas.

9. **Criptografía**

Uno de los procedimientos que se utilizan para encriptar un mensaje secreto es hacer uso de una determinada matriz cuadrada cuyos elementos son enteros y cuya matriz inversa también contiene elementos enteros. Se recibe un mensaje, se asigna un número a cada letra (por ejemplo A=1, B = 2, etc., y espacio = 27), se arreglan los números en una matriz de izquierda a derecha en cada renglón, donde el número de elementos en el renglón es igual al tamaño de la matriz de código, se multiplica esta matriz por la matriz de código *por la derecha*, se transcribe el mensaje a una cadena de números (que se lee de izquierda a derecha a lo largo de cada renglón) y se manda el mensaje.

El destinatario del mensaje conoce la matriz de código. Él o ella reacomodan el mensaje encriptado en una matriz de izquierda a derecha en cada renglón, en donde el número de elementos en un renglón coincide con el tamaño de la matriz de código, multiplica *por la derecha* por el inverso de la matriz de código y puede leer el mensaje decodificado (de izquierda a derecha en cada renglón).

a) (*Lápiz y papel*) Si se arregla el mensaje en una matriz realizando una lectura de izquierda a derecha de manera que el número de elementos en un renglón coincida con el tamaño de la matriz de código, ¿por qué debe multiplicarse por la derecha? ¿Por qué al multiplicar por la inversa se decodifica el mensaje (es decir, se deshace el encriptado)?

b) Usted ha recibido el siguiente mensaje que fue encriptado usando la matriz dada *A*. Decodifíquelo (suponga que A=1, B=2, y así sucesivamente, y espacio = 27).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Mensaje. 47, 49, −19, 257, 487, 10, −9, 63, 137, 236, 79, 142, −184, 372, 536, 59, 70, −40, 332, 588

Nota. El primer renglón de la matriz que necesita construir es 47 49 −19 257 487. Ahora continúe con el segundo reglón.

1.9 TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

En correspondencia a toda matriz existe otra que, como se verá en el capítulo 2, tiene propiedades muy similares a las de la matriz original.

DEFINICIÓN 1

Transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A, que se escribe A^t, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$. En otras palabras

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Simplemente se coloca el renglón i de A como la columna i de A^t y la columna j de A como el renglón j de A^t.

EJEMPLO 1 **Obtención de las transpuestas de tres matrices**

Encuentre las transpuestas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución Al intercambiar los renglones y las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Observe, por ejemplo, que 4 es la componente en el renglón 2 y la columna 3 de C mientras que 4 es la componente en el renglón 3 y la columnas 2 de C^t. Esto significa que el elemento 2,3 de C es el elemento (3,2) de C^t.

TEOREMA 1

Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times m$ y $B(b_{ij})$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

i. $(A^t)^t = A$. **(2)**

ii. $(AB)^t = B^tA^t$. **(3)**

iii. Si A y B son de $n \times m$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$. **(4)**

iv. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. **(5)**

DEMOSTRACIÓN

i. Esto sigue directamente de la definición de la transpuesta.

ii. Primero, se observa que AB es una matriz de $n \times p$, de manera que $(AB)^t$ es de $p \times n$. También B^t es de $p \times m$ y A^t es de $m \times n$, de manera que B^tA^t es de $p \times n$. De esta forma, ambas matrices en la ecuación (3) tienen el mismo tamaño. Ahora, el elemento ij de AB es $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, y éste es el elemento ji de $(AB)^t$. Sean $C = B^t$ y $D = A^t$. Entonces el elemento ij, c_{ij}, de C es b_{ji} y el elemento ij, d_{ij}, de D es a_{ji}. Así, el elemento ji de CD = elemento ji de $B^tA^t = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}d_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ = elemento ji de $(AB)^t$. Lo dicho completa la demostración de la parte *ii*).

iii. Esta parte se deja como ejercicio (vea el problema 14).

iv. Sea $A^{-1} = B$. Entonces $AB = BA = I$ de manera que, del inciso *ii*), $(AB)^t = B^tA^t = I^t = I$ y $(BA)^t = A^tB^t = I$. Por lo tanto, A^t es invertible y B^t es el inverso de A^t, es decir, $(A^t)^{-1} = B^t = (A^{-1})^t$.

La transpuesta juega un papel de suma importancia en la teoría de matrices. En capítulos posteriores se verá que A y A^t tienen muchas propiedades en común. Como las columnas de A^t son renglones de A se podrán establecer hechos sobre la transpuesta para concluir que casi todo lo que es cierto para los renglones de una matriz se cumple para sus columnas.

La siguiente definición es fundamental en la teoría de matrices.

DEFINICIÓN 2

Matriz simétrica

La matriz (cuadrada) A de $n \times n$ se denomina **simétrica** si $A^t = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A.

EJEMPLO 2 Cuatro matrices simétricas

Las siguientes cuatro matrices son simétricas:

$$I \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En los capítulos 5 y 6 se verá la importancia de las matrices simétricas reales.

OTRA FORMA DE ESCRIBIR EL PRODUCTO ESCALAR

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores columna con n componentes. Entonces, de la ecuación (1) en la página 58,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_2 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Ahora bien, **a** es una matriz de $n \times 1$ de manera que a^t es una matriz de $1 \times n$ y

$$\mathbf{a}^t = (a_1, a_2 \ldots a_n)$$

Entonces $\mathbf{a}^t\mathbf{b}$ es una matriz de 1×1 (o escalar), y por la definición de la multiplicación de matriz

$$\mathbf{a}^t\mathbf{b} = (a_1a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

De ese modo, si **a** y **b** son vectores columna de n componentes, entonces

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^t\mathbf{b}} \qquad (6)$$

La fórmula (6) será de utilidad más adelante en este libro.

Problemas 1.9

AUTOEVALUACIÓN

I. Si una matriz A es de 3×4, entonces A^t es una matriz de _______.

a) 4×3 *b)* 3×4 *c)* 3×3 *d)* 4×4

II. *Falso-verdadero*: A^t está definida sólo si A es una matriz cuadrada.

III. *Falso-verdadero*: Si A es una matriz de $n \times n$, entonces la diagonal principal de A^t es la misma que la diagonal principal de A.

IV. *Falso-verdadero*: $[(A^t)^t]^t = A^t$

V. La transpuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es _______.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 a 13 encuentre la transpuesta de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Sean A y B matrices de $n \times m$. Demuestre, usando la definición 1, que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

15. Una matriz A de $n \times n$ es normal si $AA^t = A^tA$. Pruebe que la siguiente matriz es normal.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Encuentre los números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica.

17. Si A y B son matrices simétricas de n $\times$ n, pruebe que $A + B$ es simétrica.

18. Si A y B son matrices simétricas de n $\times$ n, demuestre que $(AB)^t = BA$.

19. Demuestre que para cualquier matriz A la matriz producto AA^t está definida y es una matriz simétrica.

20. Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica (vea el problema 1.8.31, página 109).

21. Demuestre que la transpuesta de toda matriz diagonal superior es triangular inferior (vea el problema 1.8.35, página 110).

22. Una matriz cuadrada se denomina **antisimétrica** si $A^t = -A$ (es decir $a_{ij} = -a_{ji}$). ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

23. Sean A y B dos matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $A + B$ es antisimétrica.

24. Si A es una matriz real antisimétrica, demuestre que toda componente en la diagonal principal de A es cero.

25. Si A y B son matrices antisimétricas de $n \times n$, demuestre que $(AB)^t = BA$ de manera que AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

26. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz ½$(A + A^t)$ es simétrica.

27. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz ½$(A - A^t)$ es antisimétrica.

***28.** Demuestre que cualquier matriz cuadrada se puede escribir de una forma única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

***29.** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz con elementos reales no negativos que tiene las propiedades siguientes: *i)* $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ y $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ y *ii)* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^t$.

De los problemas 30 a 34 calcule $(A^t)^{-1}$ y $(A^{-1})^t$ y demuestre que son iguales.

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

32. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

33. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

34. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *a)** **II.** *F)* **III.** *V)* **IV.** *V)* **V.** *b)*

MANEJO DE LA CALCULADORA

Para obtener A^t una vez que se tiene a la matriz en la pila se oprime la siguiente secuencia de teclas (observación: se considera que se está trabajando en modo RPN y con la bandera (flag) 117 en la posición SOFT)

↰ MTH MATRX MAKE TRN

MATLAB 1.9

Información de MATLAB. En la mayoría de las aplicaciones, para encontrar la transpuesta de A, A^t, se da **A'**. Aquí ' es el apóstrofe. Si A tiene elementos complejos, **A'** ocasionará la transpuesta conjugada compleja; si desea encontrar la transpuesta de A (sin conjugación compleja), utilice **A.'**

Para generar matrices aleatorias consulte los problemas que aparecen en la sección anterior, MATLAB 1.6.

1. Genere cuatro pares, A y B, de matrices aleatorias tales que AB esté definido. Elija algunas matrices cuadradas y otras no cuadradas. Encuentre $(AB)^t - A^tB^t$ y $(AB)^t - B^tA^t$. Concluya una fórmula para $(AB)^t$ en términos de las transpuestas de A y B.

2. Consulte el problema 2 de MATLAB 1.8. Para cada matriz presentada, verifique si A^t es o no invertible y relacione este dato con la invertibilidad de A. Cuando tenga sentido para la matriz, compare **inv(A')** con **inv(A)'**.

3. Genere cuatro matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.

   a) Para cada matriz A, encuentre **B** = **A'** + **A**. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices B.

   b) Para cada matriz A, sea **C** = **A'** − **A**. Describa los patrones observados en estas matrices C.

   c) Genere cuatro matrices aleatorias de diferentes tamaños, algunas cuadradas y otras no cuadradas. Para cada matriz F generada, encuentre **G** = **F*F'**. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices G.

   d) (*Lápiz y papel*) Pruebe sus observaciones en los incisos *a*), *b*) y *c*) usando las propiedades de la transpuesta.

4. ***a***) (*Lápiz y papel*) Si A es una matriz con elementos reales, explique las razones por las cuales al resolver el sistema $A^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se obtienen todos los vectores reales **x** tales que **x** es perpendicular a todas las *columnas* de A.

   b) Para cada matriz A dada encuentre todos los vectores reales **x** tales que **x** es perpendicular a todas las *columnas* de A.

   i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. **Matrices ortogonales**

   PROBLEMA PROYECTO

   Sea **A**= **2*rand(4)−1** y sea **Q** = **orth(A)** (**doc orth**). Q es un ejemplo de matriz *ortogonal*. Las matrices ortogonales tienen propiedades especiales que se explorarán en este problema.

   a) Genere un par de vectores aleatorios de 4×1, **x** y **y**. Calcule el producto escalar de **x** y **y**, llámelo **s**. Calcule el producto escalar de Q**x** y Q**y**; llámelo **r**. Encuentre **s−r** y utilice **format short e** para el despliegue en pantalla. Repita para otros tres pares de **x** y **y**. ¿Cuál es su conclusión al comparar el producto escalar de **x** y **y** con el producto escalar de Q**x** y Q**y**?

   b) Pruebe su conclusión del inciso *a*). Genere tres matrices ortogonales Q de diferentes tamaños (usando el comando **orth**) y al menos dos pares de vectores **x** y **y** por cada Q. Genere cuando menos una matriz compleja Q. Para cada Q y par **x** y **y**, compare el producto escalar de Q**x** y Q**y**. Escriba una descripción de su proceso y sus respectivos resultados.

   c) Para cada Q generada demuestre que la longitud de cada columna de Q es igual a 1 y que cualesquiera dos columnas diferentes de Q son perpendiculares entre sí (la longitud de un vector está dada por la raíz cuadrada del producto escalar de un vector consigo mismo: longitud = **sqrt(x'*x)** puede utilizar el comando **norm** en MATLAB (**doc norm**). Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es igual a cero.

d) Para cada Q explore la relación entre **Q,Q'** e **inv(Q)**. Formule una conclusión sobre esta relación. Describa su investigación y su proceso de pensamiento. Genere otras dos matrices aleatorias ortogonales de tamaños más grandes y pruebe su conclusión.

e) (*Lápiz y papel*) Utilice la conclusión resultante del inciso *d*) (y otras propiedades conocidas) para probar la conclusión del inciso *b*).

Utilice la conclusión del inciso *b*) para probar la observación del inciso *c*). [*Sugerencia:* Dada la columna de Q seleccione un vector adecuado **x** tal que $Q\mathbf{x}$ sea igual a la columna dada.]

1.10 MATRICES ELEMENTALES Y MATRICES INVERSAS

Considere que A es una matriz de $m \times n$. Entonces, como se muestra a continuación, se pueden realizar operaciones elementales con renglones en A multiplicando A por la izquierda por una matriz adecuada. Las operaciones elementales con renglones son:

i. Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero $\quad R_i \rightarrow cR_i$

ii. Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j $\quad R_j \rightarrow R_j + cR_i$

iii. Permutar (intercambiar) los renglones i y j $\quad R_i \rightleftarrows R_j$

DEFINICIÓN 1

Matriz elemental

Una matriz (cuadrada) E de $n \times n$ se denomina una **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad, I_n, de $n \times n$ mediante *una sola* operación elemental con renglones.

Notación. Una matriz elemental se denota por E, o por cR_i, $R_j + cR_i$, o por P_{ij} de acuerdo con la forma en que se obtuvo de I. En este caso, P_{ij} es la matriz obtenida a partir del intercambio de los renglones de i y j de I.

EJEMPLO 1 **Tres matrices elementales**

Obtenga tres matrices elementales de 3×3.

i. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5R_2$ Matriz obtenida multiplicando el segundo renglón de I por 5

ii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 - 3R_1$ Matriz obtenida multiplicando el primer renglón de I por -3 y sumándolo al tercer renglón

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$ Matriz obtenida permutando el segundo y tercer renglones de I

La prueba del siguiente teorema se deja como ejercicio (vea los problemas 68 a 70).

TEOREMA 1

Para realizar una operación elemental en una matriz A se multiplica A por la izquierda por la matriz elemental adecuada.

EJEMPLO 2 **Operaciones elementales mediante la multiplicación por matrices elementales**

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Realice las siguientes operaciones elementales con los renglones de A multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental adecuada.

i. Multiplique el segundo renglón por 5.

ii. Multiplique el primer renglón por -3 y súmelo al tercer renglón.

iii. Permute el segundo y tercer renglones.

Solución Como A es una matriz de 3×4, cada matriz elemental E debe ser de 3×3, ya que E debe ser cuadrada y multiplica a A por la izquierda. Se usan aquí los resultados del ejemplo 1.

i. $$(5R_2)A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 20 & 10 & 15 & -25\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

ii. $$(R_3-3R_1)A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 0 & -8 & -8 & 1\end{pmatrix}$$

iii. $$(P_{23})A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 4\\ 4 & 2 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

Considere los siguientes tres productos, con $c \neq 0$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{c} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ c & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -c & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) indican que toda matriz elemental es invertible y que su inversa es del mismo tipo (tabla 1.4). Estos datos se deducen a partir del teorema 1. Es obvio que si se realizan las operaciones $R_j \to R_j + cR_i$ seguida de $R_j \to R_j - cR_i$ sobre la matriz A, la matriz A no cambia. También $R_i \to cR_i$ seguida de $R_i \to \frac{1}{c}R_i$, y la permuta de los mismos dos renglones dos veces deja la matriz A sin cambio. Se tiene

$$(cR_i)^{-1} = \frac{1}{c}R_i \tag{4}$$

$$(R_j + cR_i)^{-1} = R_j - cR_i \tag{5}$$

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij} \tag{6}$$

La ecuación (6) indica que

Toda matriz de permutación elemental es su propia inversa.

Resumiendo los resultados:

Tabla 1.4

Matriz elemental tipo *E*	Efecto de multiplicar *A* por la izquierda por *E*	Representación simbólica de las operaciones elementales	Al multiplicar por la izquierda, E^{-1} hace lo siguiente	Representación simbólica de la operación inversa
Multiplicación	Multiplica el renglón i de A por $c \neq 0$	cR_i	Multiplica el renglón i de A por $\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}R_i$
Suma	Multiplica el renglón i de A por c y lo suma al renglón j	$R_j + cR_i$	Multiplica el renglón i de A por $-c$ y lo suma al renglón j	$R_j - cR_i$
Permutación	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}

TEOREMA 2

Toda matriz elemental es invertible. El inverso de una matriz elemental es una matriz del mismo tipo.

Nota. El inverso de una matriz elemental se puede encontrar por inspección. No es necesario realizar cálculos.

TEOREMA 3

Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales.

DEMOSTRACIÓN

Sea $A = E_1 E_2, \ldots, E_m$ donde cada E_i es una matriz elemental. Por el teorema 2, cada E_i es invertible. Más aún, por el teorema 1.8.3, página 96, A es invertible[16] y

[16] Aquí se usó le generalización del teorema 1.8.3 para más de dos matrices. Vea, por ejemplo, el problema 1.8.22 en la página 109.

$$A^{-1} = E_m^{-1}E_{m-1}^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$$

En forma inversa, suponga que A es invertible. De acuerdo con el teorema 1.8.6 (teorema de resumen), A es equivalente por renglones a la matriz identidad, lo que significa que A se puede reducir a I mediante un número finito de operaciones elementales. Para el teorema 1 cada operación de este tipo se logra multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental y, por consiguiente, existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ tales que

$$E_m, E_{m-1}, \ldots, E_2E_1A = I$$

Así, del teorema 1.8.7 en la página 107,

$$E_m, E_{m-1}, \ldots, E_2E_1 = A^{-1}$$

y como cada E_i, es invertible por el teorema 2,

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = (E_mE_{m-1}\cdots E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{m-1}^{-1}E_m^{-1} \quad \textbf{(7)}$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, se ha escrito A como el producto de matrices elementales y esto completa la prueba.

EJEMPLO 3 **Cómo escribir una matriz invertible como el producto de matrices elementales**

Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

Solución Ya se ha trabajado con esta matriz, en el ejemplo 1.3.1 en la página 7. Para resolver el problema se reduce A a I y se registran las operaciones elementales con renglones. En el ejemplo 1.8.6 en la página 101 se redujo A a I haciendo uso de las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}R_1 & R_2 - 4R_1 & R_3 - 3R_1 & -\frac{1}{3}R_2 \\ R_1 - 2R_2 & R_3 + 5R_2 & -R_3 & R_1 + R_3 \\ R_2 - 2R_3 & & & \end{array}$$

A^{-1} se obtuvo comenzando con I y aplicando estas nueve operaciones elementales. De este modo, A^{-1} es el producto de nueve matrices elementales:

$$A^{-1} = \underset{R_2-2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1+R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_3+5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1-2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{-\frac{1}{3}R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3-3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2-4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-\frac{1}{2}R_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Por lo que $A = (A^{-1})^{-1}$ = producto de las inversas de las nueve matrices en orden opuesto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \underset{2R_1}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2+4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3+3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-3R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1+2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{R_3-5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_1-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2+2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Se puede hacer uso del teorema 3 para extender el teorema de resumen, cuya última versión se presentó en la página 106.

TEOREMA 4

Teorema de resumen (punto de vista 3)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una afirmación es cierta, todas son ciertas, y si una es falsa, todas son falsas).

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

Existe un resultado adicional que será útil en la sección 2.3. En primera instancia se necesita una definición (dada antes en el problema 1.8.29, página 109).

DEFINICIÓN 2

Matriz triangular superior y matriz triangular inferior

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior (inferior)** si todas sus componentes abajo (arriba) de la diagonal principal son cero.

Nota. a_{ij} está debajo de la diagonal principal si $i > j$.

EJEMPLO 4

Dos matrices triangulares superiores y dos matrices triangulares inferiores

Las matrices U y V son triangulares superiores mientras que las matrices L y M son triangulares inferiores:

$$U=\begin{pmatrix}2&-3&5\\0&1&6\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad V=\begin{pmatrix}1&5\\0&-2\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}0&0\\5&1\end{pmatrix}\qquad M=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-5&4&0&0\\6&1&2&0\\3&0&1&5\end{pmatrix}$$

TEOREMA 5

Sea A una matriz cuadrada. Entonces A se puede escribir como un producto de matrices elementales y una matriz triangular superior U. En el producto, las matrices elementales se encuentran a la izquierda y la matriz triangular superior a la derecha.

DEMOSTRACIÓN

La eliminación gaussiana para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ da como resultado una matriz triangular superior. Para que esto sea evidente, observe que la eliminación gaussiana terminará cuando la matriz esté en la forma escalonada por renglones, y la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada sea triangular superior. Se denota mediante U a la forma escalonada por renglones de A. Entonces A se reduce a U a través de una serie de operaciones elementales por renglón, cada una de las cuales se puede obtener multiplicando por una matriz elemental. Así,

$$U = E_m E_{m-1} \dots E_2 E_1 A$$

y

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} U$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental se ha escrito A como el producto de matrices elementales y U.

EJEMPLO 5 Cómo escribir una matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior

Escriba la matriz

$$A=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}$$

como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Solución Se reduce A por renglones para obtener la forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=U$$

Después, al trabajar hacia atrás, se ve que

$$U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=\underset{R_3+R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_3-R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_2-2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{\frac{1}{3}R_1}{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}}$$

y tomando las inversas de las cuatro matrices elementales se obtiene

$$A=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}=\underset{3R_1}{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_2+2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_3+R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_3-R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}\underset{U}{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

Problemas 1.10

AUTOEVALUACIÓN

De las afirmaciones siguientes indique si son falsas o verdaderas

I. El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.

II. El inverso de una matriz elemental es una matriz elemental.

III. Toda matriz se puede escribir como el producto de matrices elementales.

IV. Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales.

V. Toda matriz invertible se puede escribir como el producto de matrices elementales.

VI. Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Elija la opción que represente la respuesta correcta

VII. La inversa de $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ es ____________.

a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

VIII. La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **es ____________.**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

IX. La inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **es ____________.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 1 a 15 determine cuáles matrices **son** matrices elementales.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 16 a 26 escriba la matriz elemental de 3×3 que lleva a cabo las operaciones con renglones dadas sobre una matriz A de 3×5 mediante multiplicaciones por la izquierda.

16. $R_2 \to 4R_2$ **17.** $R_2 \to R_2 + 2R_1$ **18.** $R_3 \to R_3 + 3R_2$

19. $R_1 \to R_1 - 3R_2$ **20.** $R_1 \to R_1 + 4R_3$ **21.** $R_1 \rightleftarrows R_3$

22. $R_2 \rightleftarrows R_3$ **23.** $R_1 \rightleftarrows R_2$ **24.** $R_2 \to R_2 + R_3$

25. $R_3 \to -R_3$ **26.** $R_1 \to R_1 - 4R_2$

De los problemas 27 a 39 encuentre la matriz elemental E tal que $EA = B$.

27. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

31. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

32. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

33. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

34. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

35. $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

36. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

37. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

38. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -27 & -3 \end{pmatrix}$

39. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

De los problemas 40 a 52 encuentre la inversa de la matriz elemental dada.

40. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 53 a 62 demuestre que cada matriz es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

53. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

56. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

63. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$. Escriba A como un producto de tres matrices elementales y concluya que A es invertible.

64. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ donde $adf \neq 0$. Escriba A como un producto de seis matrices elementales y concluya que A es invertible.

***65.** Sea A una matriz triangular superior de $n \times n$. Pruebe que si toda componente en la diagonal de A es diferente de cero, entonces A es invertible. [*Sugerencia:* Remítase a los problemas 63 y 64.]

***66.** Demuestre que si A es una matriz triangular superior de $n \times n$ con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A^{-1} es triangular superior.

***67.** Utilice el teorema 1.9.1 *iv*), página 119 y el resultado del problema 66 para demostrar que si A es una matriz triangular inferior con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A es invertible y A^{-1} es triangular inferior.

68. Demuestre que si P_{ij} es la matriz de $n \times n$ obtenida permutando los renglones i y j de I_n, entonces $P_{ij}A$ es la matriz obtenida al permutar los renglones i y j de A.

69. Sea A_{ij} la matriz con c en la posición ji, unos en la diagonal y ceros en otro lado. Demuestre que $A_{ij}A$ es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c y sumarlo al renglón de j.

70. Sea M_i la matriz con c en la posición ii, unos en las otras posiciones de la diagonal, y ceros en otro lado. Demuestre que M_iA es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c.

De los problemas 71 a 78 escriba cada matriz cuadrada como un producto de matrices elementales y de una matriz triangular superior.

71. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

72. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

73. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

74. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

75. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

76. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

77. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

78. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *F* **II.** *V* **III.** *F* **IV.** *F* **V.** *V* **VI.** *V*

VII. *a)* **VIII.** *b)* **IX.** *d)*

MATLAB 1.10

1. El presente problema explora la forma de las matrices elementales. Observe que cada matriz elemental se puede obtener a partir de la matriz identidad con una modificación. Por ejemplo,

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con } F(2, 2) = c$$

En MATLAB, **F = eye(3); F(2,2) = c**

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad de } F(3, 2) = c$$

En MATLAB, **F = eye(3); F(3,2) = c**

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con renglones 2 y 3 intercambiados}$$

En MATLAB, **F = eye(3); F([2, 3],:) = F([3, 2],:)**

a) Dé **A= round(10*(2*rand(4)−1)).** De la manera recién descrita, introduzca las matrices F que representan las siguientes operaciones con renglones. Encuentre **F*A** para probar que F lleva a cabo las operaciones realizadas.

i. $R_3 \to 4R_3$ **ii.** $R_1 \to R_1 - 3R_2$ **iii.** Intercambio de R_1 y R_4

b) Encuentre **inv(F)** para cada F de *a*). Para cada F, explique las razones por las cuales **inv(F)** es una matriz elemental y describa qué operaciones representa con renglones. ¿Por qué es esta operación la “inversa” de la operación original con renglones?

2. Es necesario reducir una matriz dada a la forma escalonada reducida por renglones multiplicándola por matrices elementales, guardando el producto en el orden en el que se usa. Por cuestión de exactitud deberán calcularse los multiplicadores usando la notación matricial (vea en MATLAB 1.5, problema 1, el cálculo de los multiplicadores y observe en el problema 1 de esta sección cómo se forman las matrices elementales).

a) Sea $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

introduzca esta matriz y guárdela en A. Dé **B = A**. Esto coloca una copia de A en B. Se puede reducir B de manera que contenga **rref(A)** y quede en A la matriz original.

c = −B(2,1)/B(1,1)
F1 = eye(3); F1(2,1) = c
B = F1*B
F = F1
c = −B(3,1)/B(1,1)
forme **F2** con c en la posición correcta
B = F2*B
F = F2*F

Continúe de esta manera hasta que **B** se encuentre en la forma escalonada reducida por renglones. Si cualquier elemento pivote es cero, será necesario realizar un intercambio de renglones multiplicando por la matriz elemental adecuada.

b) Encuentre **F*A** y **A*F** donde F es el producto de las matrices elementales usadas y A es la matriz original. ¿Qué le dice esto sobre la relación entre F y A? (justifique su respuesta).

c) Encuentre D = $F1^{-1}{*}\, F2^{-1}{*} \cdots {*}Fm^{-1}$, donde $F1$ es la primera matriz elemental usada y Fm es la última. ¿Cuál es la relación entre D y A? (justifique su respuesta).

d) Repita de los incisos *a*) a *c*) para $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. *a*) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Realice las operaciones por renglones haciendo uso de la multiplicación por matrices elementales que se describió en el problema 1 de esta sección, guardando los productos de las matrices elementales pero realizando únicamente operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$ hasta que A se reduzca a la forma triangular superior (no cree unos en las posiciones pivote). Dé a cada matriz elemental un nombre de variable y despliegue todas las que use y sus inversas. Llame U a la forma triangular superior, que es el resultado final, y F al producto de todas las matrices elementales utilizadas.

***b*)** Encuentre $L = F1^{-1} * F2^{-1} * \ldots Fm^{-1}$, donde $F1$ es la primera matriz elemental usada y Fm la última. ¿Qué puede deducir acerca de la forma de L, los de las matrices elementales y los de las inversas de éstas? (analice los elementos y sus posiciones).

***c*)** Verifique que $LU = A$ (asegúrese de que A sea la matriz original. Recuerde que U es el resultado final de la reducción). Pruebe que esto sea cierto.

***d*)** Repita de los incisos *a*) a *c*) para $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

1.11 FACTORIZACIONES *LU* DE UNA MATRIZ

En esta sección se muestra la forma en la cual se escribe una matriz cuadrada como un producto de matrices triangulares. Esta factorización resulta útil para resolver sistemas lineales con una computadora y se puede utilizar para probar resultados importantes sobre matrices.

En la sección 1.3 se estudió la **eliminación gaussiana**. En ese proceso se puede reducir una matriz a la forma escalonada por renglones. Recuerde que la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada es una matriz triangular superior con unos y ceros en la diagonal principal. A manera de ejemplo, la forma escalonada por renglones de una matriz de 3×3 se ve como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para los propósitos de esta sección se pretende reducir por renglones una matriz a la forma triangular superior donde los números diferentes de cero en la diagonal principal no son necesariamente unos. Esto se logra no insistiendo en que cada pivote sea igual a 1.

EJEMPLO 1 Encuentre una factorización *LU* de una matriz *A*

Reduzca por renglones la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ a una matriz triangular superior y después escriba A como un producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

Solución Se procede como antes; sólo que esta vez no se dividen los elementos de la diagonal (pivotes) por sí mismos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + \frac{3}{2}R_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & \frac{5}{2} & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - \frac{5}{8}R_2 \\ R_4 \to R_4 - \frac{7}{4}R_2}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{20}{3}R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix} = U$$

Usando las matrices elementales como en el ejemplo 1.10.5, página 129, se puede escribir

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

o

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} U$$

Se ha escrito A como un producto de seis matrices elementales y una matriz triangular superior. Sea L el producto de las matrices elementales. Debe verificar que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix},$$ que se trata de una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

Después se puede escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Los elementos de la diagonal de L son todos iguales a 1 y los elementos de la diagonal de U son los pivotes. Esta factorización se llama **factorización LU de A**.

El procedimiento utilizado en el ejemplo 1 se puede llevar a cabo mientras no se requieran permutaciones para poder reducir A a la forma triangular. Esto no siempre es factible. Por ejemplo, el primer paso en la reducción por renglones de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

es permutar (intercambiar) los renglones 1 y 2 o los renglones 1 y 3.

Suponga que por el momento dicha permutación no es necesaria. Entonces, al igual que en el ejemplo 1, se puede escribir $A = E_1, E_2, \ldots E_n U$, donde U es una matriz triangular superior y cada matriz elemental es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Esto se deduce del hecho de que E es de la forma $R_j + cR_i$ (no hay permutaciones ni multiplicaciones de renglones por constantes). Más aún, los números que se hacen cero en la reducción por renglones están siempre *abajo* de la diagonal de manera que en $R_j + cR_i$ siempre se cumple que $j > i$. De este modo, las c aparecen abajo de la diagonal. La prueba del siguiente teorema no es complicada (vea los problemas 31 y 32).

TEOREMA 1

El producto de las matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Más aún, el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

TEOREMA 2

Teorema de la factorización *LU*

Sea A una matriz cuadrada ($n \times n$) y suponga que A se puede reducir por renglones a una matriz triangular U sin hacer alguna permutación entre sus renglones. Entonces existe una matriz triangular inferior L invertible con unos en la diagonal tal que $A = LU$. Si, además, U tiene n pivotes (es decir, A es invertible), entonces esta factorización es única.

DEMOSTRACIÓN

U y L se obtienen como en el ejemplo 1. Sólo es necesario probar la unicidad en el caso de que A sea invertible. Como U tiene n pivotes, su forma escalonada por renglones también tiene n pivotes (para verificar esto divida cada renglón de U por el pivote en ese renglón). Entonces, de acuerdo con el teorema de resumen en la página 128, U es invertible.

Para demostrar que L es invertible, considere la ecuación $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se deduce que $x_1 = 0$, $a_{21}x_1 + x_2 = 0$, etc. lo que demuestra que $x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0$ y L es invertible por el teorema de resumen. Para demostrar la unicidad, suponga que $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Entonces

$$U_1U_2^{-1} = \left(L_1^{-1}L_1\right)\left(U_1U_2^{-1}\right) = L_1^{-1}\left(L_1U_1\right)U_2^{-1} = L_1^{-1}\left(L_2U_2\right)U_2^{-1} = \left(L_1^{-1}L_2\right)\left(U_2U_2^{-1}\right) = L_1^{-1}L_2$$

Para el resultado del problema 1.8.36 en la página 110, U_2^{-1} es triangular superior y L_1^{-1} es triangular inferior. Todavía más, según el teorema 1, $L_1^{-1}L_2$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal mientras que $U_1U_2^{-1}$ es triangular superior. La única forma en que una matriz triangular superior y una inferior pueden ser iguales es si ambas son diagonales. Como $L_1^{-1}L_2$ tiene unos en la diagonal se ve que

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I$$

de lo que se deduce que $U_1 = U_2$ y $L_1 = L_2$. ■

USO DE LA FACTORIZACIÓN *LU* PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES

Suponga que se quiere resolver el sistema A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$, donde A es invertible. Si A satisface la hipótesis del teorema 2 se puede escribir

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como L es invertible, existe un vector único y tal que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Como U también es invertible, existe un vector único $\mathbf{x}$ tal que $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $A\mathbf{x} = L(U\mathbf{x}) = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y nuestro sistema está resuelto. Observe que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ se puede resolver directamente mediante la sustitución hacia atrás. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Uso de la factorización *LU* para resolver un sistema

Resuelva el sistema A$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución Del ejemplo 1 se puede escribir $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

El sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 4 \\ 2y_1 + y_2 \qquad\qquad\quad &= -8 \\ -\tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 + y_3 \qquad &= -4 \\ -y_1 + \tfrac{7}{4}y_2 + \tfrac{20}{3}y_3 + y_4 &= -1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= -8 - 2y_1 = -16 \\ y_3 &= -4 + \tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 = 12 \\ y_4 &= -1 + y_1 - \tfrac{7}{4}y_2 - \tfrac{20}{3}y_3 = -49 \end{aligned}$$

Se acaba de realizar la sustitución hacia delante. Ahora, de $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_2 - 8x_3 - 8x_4 &= -16 \\ 3x_3 + 9x_4 &= 12 \\ +49x_4 &= -49 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
x_4 &= 1\\
3x_3 &= 12 - 9x_4 = 3\text{, de manera que } x_3 = 1\\
4x_2 &= -16 + 8x_3 + 8x_4 = 0\text{, de manera que } x_2 = 0\\
2x_1 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2\text{, por lo que } x_1 = -1
\end{aligned}$$

La solución es

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LA FACTORIZACIÓN $PA = LU$

Suponga que con el propósito de reducir A a una matriz triangular se requiere alguna permutación. Una matriz de permutación elemental es una matriz elemental asociada con la operación con renglones $R_i \rightleftarrows R_j$. Suponga que, de momento, se sabe por anticipado cuáles permutaciones deben realizarse. Cada permutación se lleva a cabo multiplicando A por la izquierda por una matriz de permutación elemental denotada por P_i. Suponga que en la reducción por renglones se realizan m permutaciones. Sea

$$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$$

El producto de las matrices de permutaciones elementales se llama **matriz de permutación**. De forma alternativa, una matriz de permutación es una matriz $n \times n$ cuyos renglones son los renglones de I_n, pero no necesariamente en el mismo orden.

Ahora, hacer las n permutaciones de antemano es equivalente a multiplicar A por la izquierda por P. Es decir,

> PA es una matriz que debe ser reducida por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones adicionales.

EJEMPLO 3 **Una factorización $PA = LU$**

Para reducir A por renglones a la forma triangular superior, primero se intercambian los renglones 1 y 3 y después se continúa como se muestra a continuación

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Al realizar esta reducción por renglones se hicieron dos permutaciones. Primero se intercambiaron los renglones 1 y 3 y después los renglones 2 y 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede reducir a una forma triangular superior sin permutaciones. Se tiene

$$P = P_2P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, como en el ejemplo 1.

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Al generalizar el resultado del ejemplo 3 se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 3

Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Entonces existe una matriz de permutación P tal que

$$PA = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior. Para cada P (puede haber más de una), las matrices L y U son únicas.

Nota. Si se elige una P diferente se obtienen matrices diferentes. Si consideramos el ejemplo 3, sea

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (que corresponde a la permutación de los dos primeros renglones en el primer paso).

Se debe verificar que

$$P^* A = L_1U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA USANDO LA FACTORIZACIÓN $PA = LU$

Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y suponga que $PA = LU$. Entonces

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$
$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

y se puede resolver este sistema de la misma manera que en el ejemplo 2.

EJEMPLO 4 Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solución Se puede escribir este sistema como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Entonces, del ejemplo 3

$$LU\mathbf{x} = PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Se busca una $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Entonces $y_1 = -6$, $y_2 = 7$ y $2y_1 + y_3 = 9$, por lo que $y_3 = 21$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$

Continuando, se busca una $\mathbf{x}$ tal que $U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$; es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_3 &= 21 \end{aligned}$$

Por último,

$$x_3 = -7$$

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3(-7) &= 7, \text{ de manera que } x_2 = 14 \\ x_1 - 2(14) + 5(-7) &= -6, \text{ por lo que } x_1 = 57 \end{aligned}$$

La solución es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 57 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

UNA FORMA SENCILLA PARA ENCONTRAR LA FACTORIZACIÓN *LU* DE UNA MATRIZ

Suponga que A es una matriz cuadrada que se puede reducir a una matriz triangular superior sin llevar a cabo permutaciones. Por ende existe un camino más sencillo para encontrar la factorización LU de A sin hacer uso de la reducción por renglones. Este método se ilustrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Un camino más sencillo para obtener la factorización *LU*

Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución El presente problema se resolvió en el ejemplo 1. Ahora se hará uso de un método más sencillo. Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2,1 de A es 4. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a 4:

$$4 = 2a \text{ o } a = 2$$

Así

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{b} -\frac{3}{2} & \cancel{c}\ \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ \cancel{d} -1 & \cancel{e}\ \frac{7}{4} & \cancel{f}\ \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & \cancel{u}4 & \cancel{v} -8 & \cancel{w} -8 \\ 0 & 0 & \cancel{x}3 & \cancel{y}9 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{z} -49 \end{pmatrix}$$

Después se tiene:

componente 2, 2: $\quad 10 = 6 + u \Rightarrow\ u = 4$

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente 2, 3: $-4 = 4 + v \Rightarrow v = -8$

componente 2, 4: $0 = 8 + w \Rightarrow w = -8$

componente 3, 1: $-3 = 2b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

componente 3, 2: $-2 = -\frac{9}{2} + 4c \Rightarrow c = \frac{5}{8}$

componente 3, 3: $-5 = -3 - 5 + x \Rightarrow x = 3$

componente 3, 4: $-2 = -6 - 5 + y \Rightarrow y = 9$

componente 4, 1: $-2 = 2d \Rightarrow d = -1$

componente 4, 2: $4 = -3 + 4e \Rightarrow e = \frac{7}{4}$

componente 4, 3: $4 = -2 - 14 + 3f \Rightarrow f = \frac{20}{3}$

componente 4, 4: $-7 = -4 - 14 + 60 + z \Rightarrow z = -49$

La factorización es el resultado que se obtuvo en el ejemplo 1 con un esfuerzo considerablemente menor.

Observación. Resulta sencillo, en una computadora, poner en práctica la técnica ilustrada en el ejemplo 5.

ADVERTENCIA

La técnica que se ilustra en el ejemplo 5 funciona únicamente si A se puede reducir a una matriz triangular sin realizar permutaciones. Si las permutaciones son necesarias, primero se debe multiplicar A por la izquierda por una matriz de permutación adecuada; después se puede aplicar este proceso para obtener la factorización $PA = LU$.

FACTORIZACIÓN LU PARA MATRICES SINGULARES

Si A es una matriz cuadrada singular (no invertible), la forma escalonada por renglones de A tendrá al menos un renglón de ceros, al igual que la forma triangular de A. Es posible que todavía se pueda escribir $A = LU$ o $PA = LU$, pero en este caso U no será invertible y L y U pueden no ser únicas.

EJEMPLO 6 **Cuando A no es invertible, la factorización *LU* puede no ser única**

Haciendo uso de la técnica de los ejemplos 1 o 5 se obtiene la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Sin embargo, si se hace $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A = L_1U$ para cualquier número real x.

En cuyo caso, A tiene una factorización LU pero no es única. Debe verificarse que A no es invertible.

Por otro lado,

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=L'U'$$

y esta factorización es única, aunque B no sea invertible. El lector debe verificar estos datos.

Este ejemplo muestra que si una matriz cuadrada con una factorización LU no es invertible, su factorización LU puede ser o no única.

Factorización *LU* para matrices no cuadradas

En ocasiones es posible encontrar factorizaciones LU para matrices que no son cuadradas.

Teorema 4

Factorización *LU* para matrices no cuadradas

Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que A se puede reducir a su forma escalonada por renglones sin realizar permutaciones. Entonces existen una matriz L triangular inferior de $m \times m$ con unos en la diagonal y una matriz U de $m \times n$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ tales que $A = LU$.

Nota. La condición $U_{ij} = 0$ si $i > j$ significa que U es triangular superior en el sentido de que todos los elementos que se encuentran por debajo de la "diagonal" son 0. Por ejemplo, una matriz U de 3×5 que satisface esta condición tiene la forma

$$U=\begin{pmatrix}d_1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15}\\ 0 & d_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25}\\ 0 & 0 & d_3 & u_{34} & u_{35}\end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

mientras que una matriz U de 5×3 que satisface esta condición tiene la forma

$$U=\begin{pmatrix}d_1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & d_2 & u_{23}\\ 0 & 0 & d_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

La prueba de este teorema no se presenta aquí; su lugar se ilustra con dos ejemplos.

EJEMPLO 7 Factorización *LU* de una matriz 4 x 3

Encuentre la factorización LU de

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -4 & 5\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & 1 & -12\end{pmatrix}$$

Solución Procediendo como en el ejemplo 5 se establece

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Debe verificar que esto lleva de inmediato a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & \frac{15}{2} & 1 & 0 \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{13}{19} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 8 Factorización *LU* de una matriz 3 × 4

Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución Se escribe

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \end{pmatrix}$$

Al despejar las variables como en el ejemplo 5 se obtiene

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Nota. Como en el caso de una matriz cuadrada singular, si una matriz no cuadrada tiene una factorización LU, puede ser o no única.

UNA OBSERVACIÓN SOBRE LAS COMPUTADORAS Y LA FACTORIZACIÓN *LU*

Los sistemas de software HP50g, MATLAB y otros, pueden llevar a cabo la factorización $PA = LU$ de una matriz cuadrada. Sin embargo, la matriz L que se obtiene a veces no es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal pero puede ser una permutación de dicha matriz. De otro modo, el sistema puede dar una matriz triangular inferior L y una U con unos en la diagonal. La razón de esto es que estos sistemas usan una factorización LU para calcular las inversas y los determinantes y para resolver sistemas de ecuaciones. Ciertos reordenamientos o permutaciones minimizarán los errores de redondeo acumulados. Se profundiza sobre estos errores y procedimientos en los apéndices 3 y 4.

Mientras tanto, debe tenerse en cuenta que los resultados que se obtienen en la calculadora o computadora con frecuencia serán diferentes de los obtenidos a mano. En particular, si A se puede reducir a una matriz triangular sin permutaciones, entonces cuando $PA = LU$, $P = I$. No obstante, muchas veces se obtendrá una P diferente en la calculadora. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

igual que en los ejemplos 1 y 5, entonces MATLAB da la factorización $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{9} & -\frac{40}{83} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{11}{18} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{83}{9} & \frac{41}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{294}{83} \end{pmatrix}$$

Nota. Una permutación de renglones de L lleva a una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

Problemas 1.11

Autoevaluación

De las aseveraciones siguientes, indique cuál es verdadera y cuál es falsa

I. Para toda matriz cuadrada A existen matrices invertibles L y U tales que $A = LU$, donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior.

II. Para toda matriz invertible A, existen L y U como en el problema 1.

III. Para toda matriz invertible A existe una matriz de permutación P tal que $PA = LU$, donde L y U son como en el problema 1.

IV. El producto de matrices de permutación es una matriz de permutación.

De los problemas 1 a 11 encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

De los problemas 12 a 21 resuelva el sistema dado usando la factorización LU encontrada en los problemas 1 a 8. Esto es, resuelva $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

De los problemas 22 a 30, *a*) encuentre una matriz de permutación P y matrices triangulares inferior y superior L y U tales que $PA = LU$; *b*) utilice el resultado del inciso *a*) para resolver el sistema $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

22. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

26. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

27. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 5 & -10 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

31. Suponga que L y M son triangulares inferiores con unos en la diagonal. Demuestre que LM es triangular inferior con unos en la diagonal. [*Sugerencia*: Si $B = LM$, demuestre que

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} m_{ki} = 1 \quad \text{y} \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} m_{kj} = 0 \qquad \text{si } j > i.]$$

32. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.

33. Demuestre que $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ tiene más de una factorización LU.

34. Realice el mismo procedimiento con la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

De los problemas 35 a 41 encuentre una factorización LU para cada matriz singular:

35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & 2 \\ -13 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -3 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \\ -6 & -13 & 1 & 10 \\ 2 & -24 & 2 & 20 \end{pmatrix}$

De los problemas 42 a 47 encuentre una factorización LU para cada matriz no cuadrada.

42. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *F* **II.** *F* **III.** *V* **IV.** *V*

MANEJO DE LA CALCULADORA

La factorización $PA = LU$ se puede obtener en la calculadora, por ejemplo:

```
[[-1, 2, 5] [3, 1, -2] [7, 6, 5]] LU
```

Observe que primero se da el argumento que va a utilizar la función LU, la solución aparece en la pila como L en el renglón 3, U en el renglón 2, P en el renglón 1. La factorización tiene la propiedad de que $PA=LU$.

De los problemas 48 a 53 encuentre la factorización $PA = LU$ en la calculadora.

48. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

49. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ 4 & 12 & 16 & -8 \\ 13 & 2 & 5 & 3 \\ 16 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

50. $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 16 & -5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

51. $A = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 4 & -8 & 26 \\ 14 & 5 & 9 & -18 & 13 \\ 71 & -46 & 59 & 65 & -22 \\ 35 & 47 & -81 & 23 & -50 \\ 14 & 29 & 31 & 26 & 92 \end{pmatrix}$

52. $A = \begin{pmatrix} 0.21 & 0.32 & -0.34 & 0.37 \\ 0.91 & 0.23 & 0.16 & -0.20 \\ 0.46 & 0.08 & 0.33 & -0.59 \\ 0.83 & 0.71 & -0.68 & 0.77 \end{pmatrix}$

53. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

MATLAB 1.11

1. Si se siguen los pasos descritos en el problema 3 de MATLAB 1.10, encuentre la descomposición LU para A; es decir, encuentre L y U y verifique que $LU = A$. Aquí U no es triangular superior sino que se encuentra en la forma escalonada reducida por renglones (excepto que los pivotes no necesariamente son iguales a 1):

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 & 6 \\ 10 & 1 & -8 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

2. El uso de la descomposición LU para resolver sistemas (con soluciones únicas) es más eficiente que los métodos presentados anteriormente.

Información de MATLAB. El comando **x** = **A\b** resuelve el sistema [A **b**] encontrando la factorizacion LU de la matriz A y haciendo sustituciones hacia delante y hacia atrás. Se puede comparar la eficiencia del algoritmo utilizado para resolver un problema, si medimos el tiempo que requirió para llegar al resultado. En MATLAB, con los comandos **tic**, **toc** (**doc tic**, **doc toc**), se puede medir el tiempo transcurrido desde que se inició un comando hasta su fin. Con el objetivo de poder comparar la eficiencia de los diferentes algoritmos introduzca los siguientes comandos de MATLAB en la ventana de comando

***a*)** Elija **A** = **rand(50)** y **b** = **rand(50,1)**. Introduzca

tic;A\b;toc

tic;A\b;t_lu=toc

Es necesario llevar a cabo este proceso ya que la primera vez que se llama a un algoritmo la computadora tiene que cargar en memoria el programa adecuado. Con el segundo comando, únicamente se mide el tiempo de ejecución del programa sin incluir el tiempo de carga en memoria del algoritmo.

Repita ahora con

tic;rref([A,b]);toc

tic;rref([A,b]);t_rref=toc

***b*)** Repita para otros tres pares A y **b** (utilice tamaños diferentes y mayores que 50).

***c*)** Comente la comparación de los dos intervalos de tiempo **t_lu** y **t_rref**.

3. MATLAB puede encontrar una descomposición LU, pero puede no ser lo que usted espera. Casi siempre existe una matriz de permutación P implícita.

***a*)** Sea **A** = **2*rand(3)−1**. Introduzca **[L,U,P] = lu(A) (doc lu)** y verifique que $LU = PA$. Repita para dos o más matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.

***b*)** La razón por la que casi siempre existe una P es que para minimizar los errores de redondeo, se intercambian los renglones con el objeto de que el elemento mayor (en valor absoluto) de una columna (entre los renglones que no se han usado) esté en la posición pivote.

Sea **A** = **round(10*(2*rand(4)−1))**. Para esta A, encuentre L, U y P usando el comando **lu**. Sea **C** = **P*A**.

i. Reduzca a la forma triangular utilizando operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + c{*}R_i$ (calcule sus multiplicadores haciendo uso de la notación matricial y realizando las operaciones con renglones mediante la multiplicación por matrices elementales) (vea el problema 3 de MATLAB 1.10).

ii. Demuestre que puede proceder la reducción y que en cada etapa el pivote es el elemento más grande (en valor absoluto) de los elementos de la columna que está abajo de la posición pivote. Verifique que el resultado final es la matriz U producida por el comando **lu**.

iii. Describa la relación entre los multiplicadores y sus posiciones (en la matriz elemental que realiza la operación con el renglón) y los elementos de L y sus posiciones en L.

4. Introduzca una matriz aleatoria A de 3 × 3. Encuentre L, U y P utilizando el comando **lu** como en el problema 3 de MATLAB en esta sección. Interprete la información almacenada en L al igual que en el problema 3 de MATLAB 1.10 (o como se observó en el problema 3 de esta sección), realice las operaciones con renglones indicadas para PA y muestre que el resultado final es U (debe estar seguro de referirse a un elemento de L usando la notación matricial y no el número desplegado).

1.12 TEORÍA DE GRÁFICAS: UNA APLICACIÓN DE MATRICES

En los últimos años se ha dedicado mucha atención a un área relativamente nueva de la investigación matemática denominada **teoría de gráficas**. Las gráficas, que se definirán en breve, son útiles en el estudio de la forma en la cual se interrelacionan las componentes de las redes que surgen en el comercio, las ciencias sociales, la medicina y otras áreas más. Por ejemplo, las gráficas resultan de utilidad en el estudio de las relaciones familiares en una tribu, la propagación de una enfermedad contagiosa o una red de vuelos comerciales que comunican a un número dado de ciudades importantes. La teoría de gráficas es un tema de gran amplitud. En esta sección se presentarán únicamente algunas definiciones y se mostrará la cercanía de la relación entre la teoría de gráficas y la teoría de matrices.

A continuación se ilustrará de qué manera surge una gráfica en la práctica.

EJEMPLO 1 Representación de un sistema de comunicación mediante una gráfica

Suponga que se está analizando un sistema de comunicaciones unido por líneas telefónicas.

En este sistema hay cinco estaciones. En la siguiente tabla se indican las líneas disponibles en dirección "a", y provenientes "de" las estaciones:

Estación	1	2	3	4	5
1		■			
2	■				■
3				■	
4		■	■		
5	■			■	

Por ejemplo, la marca del cuadro (1,2) indica que hay una línea de la estación 1 a la estación 2. La información en la tabla se puede representar por una gráfica dirigida como la que se ilustra en la figura 1.9.

GRÁFICA DIRIGIDA

VÉRTICES

ARISTAS

En general, una **gráfica dirigida** es una colección de n puntos denominados **vértices**, denotados por $V_1, V_2, \ldots V_n$, junto con un número finito de **aristas** que unen distintos pares de vértices. Cualquier gráfica dirigida se puede representar mediante una matriz de $n \times n$ en donde el número de la posición ij es el número de aristas que unen el vértice i con el vértice j.

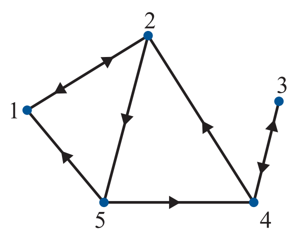


Figura 1.9

La gráfica muestra las líneas de una estación en dirección a las otras.

EJEMPLO 2 Representación matricial de una gráfica dirigida

La representación matricial de la gráfica en la figura 1.9 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

EJEMPLO 3 Representación matricial de dos gráficas dirigidas

Encuentre las representaciones matriciales de las gráficas dirigidas en la figura 1.10.

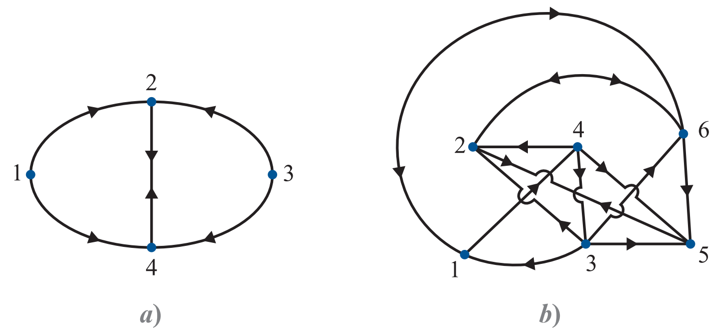


Figura 1.10
Dos gráficas dirigidas.

Solución *a)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 4 Obtención de una gráfica a partir de su representación matricial

Esboce la gráfica representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Como A es una matriz de 5×5, la gráfica tiene cinco vértices. Vea la figura 1.11.

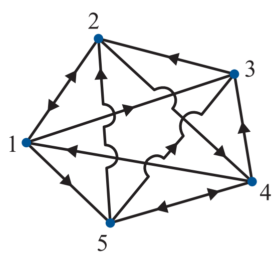


Figura 1.11
La gráfica dirigida representada por *A*.

Observación. En los ejemplos presentados se tienen gráficas dirigidas que satisfacen las siguientes dos condiciones:

i. Ningún vértice está conectado consigo mismo.

ii. A lo más una arista lleva de un vértice a otro.

MATRIZ DE INCIDENCIA

La matriz que representa una gráfica dirigida que satisface estas condiciones se denomina **matriz de incidencia**. Sin embargo, en términos generales es posible tener ya sea un 1 en la diagonal principal de una representación matricial (indicando una arista de un vértice hacia sí mismo) o un entero mayor que 1 en la matriz (indicando más de una trayectoria de un vértice a otro). Para evitar situaciones más complicadas (pero manejables), se ha supuesto, y se seguirá suponiendo, que *i*) y *ii*) se satisfacen.

EJEMPLO 5 Una gráfica dirigida que describe el dominio de un grupo

Las gráficas dirigidas se utilizan con frecuencia en sociología para estudiar las interacciones grupales. En muchas situaciones de esta naturaleza, algunos individuos dominan a otros. El dominio puede ser de índole física, intelectual o emocional. Para ser más específicos, se supone que en una situación que incluye a seis personas, un sociólogo ha podido determinar quién domina a quién (esto se pudo lograr mediante pruebas psicológicas, cuestionarios o simplemente por observación). La gráfica dirigida en la figura 1.12 indica los hallazgos del sociólogo.

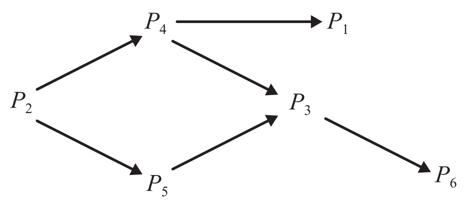


Figura 1.12
La gráfica muestra quién domina a quién en el grupo.

La representación matricial de esta gráfica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

No tendría mucho sentido introducir la representación matricial de una gráfica si lo único viable fuera escribirlas. Existen varios hechos no tan visibles que se pueden preguntar sobre las gráficas. Para ilustrar lo anterior considere la gráfica en la figura 1.13.

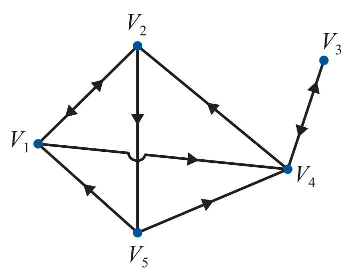


Figura 1.13
Existen trayectorias de V_1 a V_5 aun cuando no hay una arista de V_1 a V_5. Una de estas trayectorias es $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5$.

Observe que aunque no hay una arista de V_1 a V_5 es posible mandar un mensaje entre estos dos vértices. De hecho, hay cuando menos dos maneras de hacerlo:

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \tag{2}$$

y

$$V_1 \to V_4 \to V_2 \to V_5 \tag{3}$$

TRAYECTORIA

CADENA

La ruta de un vértice hacia otro se denomina **trayectoria** o **cadena**. La trayectoria de V_1 a V_5 en (2) se llama **2-cadena** porque atraviesa por dos aristas. La trayectoria (3) se llama **3-cadena**. En general una trayectoria que atraviesa por n aristas (y por lo tanto pasa por $n + 1$ vértices) se llama ***n*-cadena**. Ahora, regresando a la gráfica, se puede observar que es posible ir de V_1 a V_5 a lo largo de la 5-cadena

$$V_1 \to V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2 \to V_5 \tag{4}$$

Sin embargo, no resultaría muy interesante hacerlo, ya que con una parte de la trayectoria no se obtiene nada. Una trayectoria en la que un vértice se encuentra más de una vez se denomina **redundante**. La 5-cadena (4) es redundante porque el vértice 4 se encuentra dos veces.

Es de gran interés poder determinar la trayectoria más corta (si es que existe) que une a dos vértices en una gráfica dirigida. Existe un teorema que muestra cómo esto se puede lograr, pero primero se hará una observación importante. Como se ha visto, la representación matricial de la gráfica en la figura 1.9 está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe con más cuidado las componentes de A^2. Por ejemplo, el 1 en la posición (2, 4) es el producto escalar del segundo renglón y la cuarta columna de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

El último 1 del segundo renglón representa la arista

$$V_2 \to V_5$$

El último 1 en la cuarta columna representa la arista

$$V_5 \to V_4$$

Al multiplicar, estos unos representan la 2-cadena

$$V_2 \to V_5 \to V_4$$

De igual manera, el 2 en la posición (5, 2) de A^2 es el producto escalar del quinto renglón y la segunda columna de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Siguiendo el razonamiento anterior se puede apreciar que esto indica el par de 2-cadenas:

$$V_5 \to V_1 \to V_2$$

y

$$V_5 \to V_4 \to V_2$$

Si se generalizan estos hechos se pueden probar los siguientes resultados:

TEOREMA 1 Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, la componente ij de A^2 da el número de 2-cadenas de un vértice i a un vértice j.

Haciendo uso de este teorema se puede demostrar que el número de 3-cadenas que unen el vértice i con el vértice j es la componente ij de A^3. En el ejemplo 2

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, las dos 3-cadenas del vértice 4 al vértice 2 son

$$V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2$$

y

$$V_4 \to V_2 \to V_1 \to V_2$$

Ambas cadenas son redundantes. Las dos 3-cadenas del vértice 5 al vértice 1 son

$$V_5 \to V_4 \to V_2 \to V_1$$

y

$$V_5 \to V_1 \to V_2 \to V_1$$

El siguiente teorema responde la pregunta que se hizo acerca de encontrar la trayectoria más corta entre dos vértices.

TEOREMA 2

Sea A una matriz de incidencia de una gráfica dirigida. Sea $a_{ij}^{(n)}$ la componente ij de A^n.

i. Si $a_{ij}^{(n)} = k$, entonces existen exactamente k n-cadenas del vértice i al vértice j.

ii. Más aún, si $a_{ij}^{(m)} = 0$ para toda $m < n$ y $a_{ij}^{(n)} \neq 0$, entonces la cadena más corta del vértice i al vértice j es una n-cadena.

EJEMPLO 6 Cálculo de cadenas mediante las potencias de la matriz de incidencia

En el ejemplo 2 se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(3)} = 0$ y $a_{13}^{(4)} = 1$, se observa que la ruta más corta del vértice 1 al vértice 3 es una 4-cadena que está dada por

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3$$

Nota. También se tienen 5-cadenas (todas redundantes) que unen el vértice 2 consigo mismo.

EJEMPLO 7 Dominio indirecto de un grupo

En el ejemplo de sociología (ejemplo 5), una cadena (que no es una arista) representa control indirecto de una persona sobre otra. Es decir, si Pedro domina a Pablo, quien domina a María, se puede ver que Pedro ejerce algún control (aunque sea indirecto) sobre María. Para determinar quién tiene control directo o indirecto sobre quién, sólo es necesario calcular las potencias de la matriz de incidencia A. Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

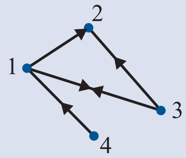
Como se vio en la gráfica de la página 154, estas matrices muestran que la persona P_2 tiene control directo o indirecto sobre todas las demás. Él o ella tiene control directo sobre P_4 y P_5, control de segundo orden sobre P_1 y P_3, y control de tercer orden sobre P_6.

Nota. En situaciones reales las situaciones son mucho más complejas. Puede haber cientos de estaciones en una red de comunicaciones o cientos de individuos en un estudio sociológico dominante-pasivo. En estos casos, las matrices son esenciales para manejar la gran cantidad de datos que deben estudiarse.

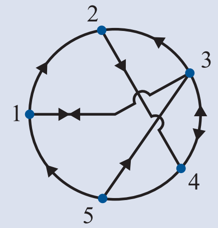
Problemas 1.12

De los problemas 1 a 4 encuentre la representación matricial de la gráfica dirigida dada.

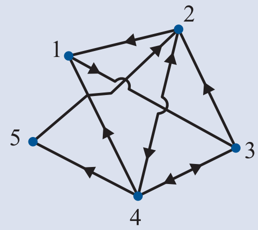
1.



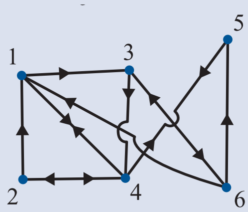
2.



3.



4.



De los problemas 5 a 8 dibuje las gráficas que representan las matrices dadas.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. **Determine el número de 2−, 3− y 4−cadenas que unen los vértices en la gráfica del problema 2.**

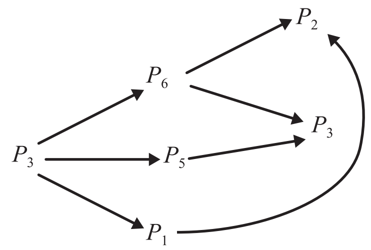
10. **Aplique el mismo procedimiento para la gráfica del problema 3.**

11. **Pruebe que la ruta más corta que une dos vértices en una gráfica dirigida no es redundante.**

12. **Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, muestre que $A + A^2$ representa el número total de 1− y 2− cadenas entre los vértices.**

13. **Describa la dominación directa e indirecta dada por la siguiente gráfica:**

Figura 1.14



Resumen

- Un **vector renglón de n componentes** es un conjunto ordenado de n números denominados **escalares**, escritos como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (p. 42)

- Un **vector columna de n componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos como (p. 43)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Un vector cuyas componentes son todas cero se denomina **vector cero.** (p. 43)

- La **suma de vectores** y la **multiplicación por escalares** están definidas por (pp. 48, 49)

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- Una **matriz de $m \times n$** es un arreglo rectangular de mn números arreglados en m renglones y n columnas (pp. 9, 45)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuyas componentes son todas cero se denomina **matriz cero.** (p. 45)

- Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces $A + B$ y αA (α un escalar) son matrices de $m \times n$ (pp. 48, 49)

La componente ij de $A + B$ es $a_{ij} + b_{ij}$

La componente de ij de αA es αa_{ij}.

- El **producto escalar** de dos vectores de n componentes es: (pp. 58, 59)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

- ***Productos de matrices***

  Sea A una matriz de $m \times n$ y B una matriz de $n \times p$. Entonces AB es una matriz de $m \times p$ y la componente de ij de AB = (renglón i de A) · (columna j de B) (p. 60)

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

- En términos, los productos de matrices no son conmutativos; es decir, casi siempre ocurre que $AB \neq BA$. (p. 61)
- ***Ley asociativa de la multiplicación de matrices***

  Si A es una matriz de $n \times m$, B es de $m \times p$ y C es de $p \times q$, entonces (p. 63)

$$A(BC) = (AB)C$$

  y tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de $n \times q$.
- ***Leyes distributivas para la multiplicación de matrices***

  Si todos los productos están definidos, entonces (p. 64)

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (A + B)C = AC + BC$$

- La **matriz de coeficientes** de un sistema lineal

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix}$$

  es la matriz (pp. 9, 16)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir utilizando la **matriz aumentada** (pp. 9, 10, 15)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

También se puede escribir como A**x** = **b**, donde (p. 87)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la página 13 (p. 13)
- Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las primeras tres condiciones de la página 13 (p. 13)
- Un **pivote** es el primer componente diferente de cero en el renglón de una matriz (p. 13)
- Las tres **operaciones elementales con renglones** son (p. 10)

  Multiplicar el renglón i de una matriz por c: $R_i \rightarrow cR_i$, donde $c \neq 0$.

  Multiplicar el renglón i por c y sumarlo al renglón j: $R_j \rightarrow R_j + cR_i$.

  Permutar los renglones i y j: $R_i \rightleftarrows R_j$.
- El proceso de aplicación de operaciones elementales con renglones a una matriz se denomina **reducción por renglones.** (p. 10)
- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, usando el proceso descrito en la página 9. (pp. 9, 15)
- La **eliminación de Gauss** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones reduciendo por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y utilizando la **sustitución hacia atrás.** (p. 15)
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se denomina **consistente.** (p. 12)
- Un sistema lineal que no tiene solución se denomina **inconsistente.** (pp. 11, 12)
- Un sistema lineal que tiene soluciones cuenta con, ya sea, una solución única o un número infinito de soluciones. (p. 14)
- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma (p. 36)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad\ \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**) (p. 37)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales.** (p. 37)

- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$). (p. 38)

- La **matriz identidad $n \times n$, I_n**, es la matriz de $n \times n$ con unos en la **diagonal principal** y ceros en otra parte. I_n se denota generalmente por I. (p. 94)

- Si A es una matriz cuadrada, entonces $AI = IA = A$. (p. 95)

- La matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que (p. 95)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1$$

En este caso la matriz A^{-1} se llama la **inversa** de A.

- Si A es invertible, su inversa es única. (p. 96)

- Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible y (p. 96)

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Para determinar si una matriz A de $n \times n$ es invertible: (p. 99)

  i. Se escribe la matriz cuadrada aumentada $(A|I)$.

  ii. Se reduce A por renglones a la forma escalonada reducida por renglones.

  iii. ***a*)** Si la forma escalonada reducida por renglones de A es I, entonces A^{-1} será la matriz a la derecha de la raya vertical punteada.

  ***b*)** Si la forma escalonada reducida por renglones de A contiene un renglón de ceros, entonces A no es invertible.

- La matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es invertible si y sólo si (p. 100)

el determinante de A, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

En cuyo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Dos matrices A y B son **equivalentes por renglón** si A se puede transformar en B reduciendo por renglones. (p. 103)

- Sea A una matriz de $n \times n$. Si $AB = I$ o $BA = I$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$. (p. 107)

- Si $A = (a_{ij})$, entonces la **transpuesta de A**, denotada por A^t, está dada por $A^t = (a_{ij})$. (p. 118)

Esto es, A^t se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de A.

- ***Hechos sobre la transpuesta***

  Si todas las sumas y productos están definidos y A es invertible, entonces (p. 119)

  $(A^t)^t = A \qquad (AB)^t = B^tA^t \qquad (A + B)^t = A^t + B^t \qquad$ si A es invertible, entonces $(A^{-1})^t = (A^{-1})^t$

- Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$. (p. 119)

- Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada que se obtiene llevando a cabo exactamente una operación con renglones sobre la matriz identidad. Los tres tipos de matrices elementales son: (p. 124)

  cR_i se multiplica el renglón i de I por c: $c \neq 0$.

  $R_j + cR_i$ se multiplica el renglón i de I por c y se suma al renglón j: $c \neq 0$.

  P_{ij} se permutan los renglones i y j.

- Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales. (p. 129)

- Cualquier matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior. (p. 129)

- ***Factorización LU***

  Suponga que la matriz invertible A se puede reducir por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones. Entonces existen matrices únicas L y U tales que L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es una matriz superior invertible y $A = LU$. (p. 138)

- ***Matriz de permutación***

  $E = P_{ij}$ es una **matriz de permutación elemental**. Un producto de matrices permutación elementales se denomina **matriz de permutación.** (p. 140)

- ***Factorización PA = LU***

  Sea cualquier matriz $m \times n$. Entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$, donde L y U son como en la factorización LU. En términos generales, P, A y U no son únicas. (p. 141)

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes: (pp. 128, 141)

  i. A es invertible.

  ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = 0$).

  iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

  iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

  v. A se puede escribir como un producto de matrices elementales.

  vi. det A ≠ 0 (por ahora, det A está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

  vii. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

  viii. Existen una matriz permutación P, una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, y una matriz triangular superior invertible U, tales que $PA = LU$.

EJERCICIOS DE REPASO

De los ejercicios 1 a 18 encuentre las soluciones (si existen) a los sistemas dados:

1. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 5 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 15 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -6x_1 - 13x_2 + x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 24x_2 - 2x_3 + 20x_4 &= 0 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

De los ejercicios 19 a 28 realice los cálculos indicados:

19. $3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

21. $5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

23. $6\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 29 a 33 determine si la matriz dada está en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 34 a 36 reduzca la matriz a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

34. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 37 a 43 calcule la forma escalonada por renglones y la inversa (si existe) de la matriz dada.

37. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **43.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 44 a 47 primero escriba el sistema en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, después calcule A^{-1} y, por último use la multiplicación de matrices para obtener el vector solución.

44. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}+ 3x_2} + 4x_3 &= 7 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

48. Sea $E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determine si la matriz E dada es invertible; si lo es, calcule su inversa utilizando la adjunta.

b) Determine $E^{-1} + AdjE =$

c) Determine $E^t + E^{-1} + AdjE =$

d) Determine $(E^{-1} + E^t) + E^t + E^{-1} + AdjE =$

De los ejercicios 49 a 57 calcule la transpuesta de la matriz dada y determine si la matriz es simétrica o antisimétrica.[17]

49. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **50.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ **53.** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **54.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

57. Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ calcule $\left(F^t + F^{-1}\right)^{-1}$

De los ejercicios 58 a 62 encuentre una matriz elemental de 3×3 que llevaría a cabo las operaciones con renglones dadas.

58. $R_2 \to -2R_2$ **59.** $R_1 \to R_1 + 2R_2$ **60.** $R_3 \to R_3 - 5R_1$

[17] Del problema 1.9.22 de la página 121 se tiene que A es antisimétrica si $A^t = -A$.

61. $R_3 \rightleftarrows R_1$ **62.** $R_2 \to R_2 + \frac{1}{5}R_3$

De los ejercicios 63 a 66 encuentre la inversa de la matriz elemental.

63. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **64.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **65.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **66.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 67 y 68 escriba la matriz como el producto de matrices elementales.

67. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **68.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 69 y 70 escriba cada matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

69. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **70.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 71 y 72 encuentre la factorización LU de A y utilícela para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

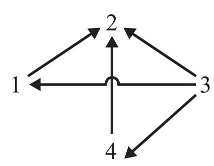
71. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **72.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 11 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 73 y 74 encuentre una matriz permutación P y las matrices L y U tales que $PA = LU$ y utilícelas para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

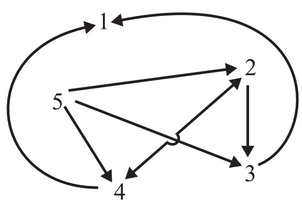
73. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **74.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 75 y 76 encuentre la matriz que representa cada gráfica.

75.



76.



77. Dibuje la gráfica representada por la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Capítulo

2

DETERMINANTES

2.1 Definiciones

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2 × 2. En la sección 1.8 en la página 99 se definió el determinante de A por

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad \textbf{(1)}$$

Con frecuencia se denotará det A por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Observación. No hay que confundir esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota det A si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Se demostró que A es invertible, si y sólo si, det $A \neq 0$. Como se verá más adelante, este importante teorema es válido para las matrices de $n \times n$.

En este capítulo se desarrollarán algunas propiedades básicas de los determinantes y se verá cómo se pueden utilizar para calcular la inversa de una matriz y resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El determinante de una matriz de $n \times n$ se definirá de manera *inductiva*. En otras palabras, se usará lo que se sabe sobre un determinante de 2 × 2 para definir un determinante de 3 × 3, que a su vez se usará para definir un determinante de 4 × 4, y así sucesivamente. Se comienza por definir un determinante de 3 × 3.[†]

[†] Existen varias maneras de definir un determinante y ésta es una de ellas. Es importante darse cuenta de que "det" es una función que asigna un *número* a una matriz *cuadrada*.

DEFINICIÓN 1

Determinante de 3 × 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

Observe el signo *menos* antes del segundo término del lado derecho de (3).

EJEMPLO 1 **Cálculo de un determinante de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$$

EJEMPLO 2 **Cálculo de un determinante de 3 × 3**

Calcule $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 12 + 3(-3) + 5(-3) = 0$$

Hay otro método con el que se pueden calcular determinantes de 3 × 3. De la ecuación (3) se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

es decir

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33} \qquad (4)$$

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & - & - \; - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & + & + \; + \end{array}$$

A continuación se calculan los seis productos, poniendo signo *menos* antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (4).

EJEMPLO 3 **Cálculo de un determinante de 3 × 3 usando el nuevo método**

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

Solución Si se escribe $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right.$ y se multiplica como lo indican las flechas se obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5) \\ &= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69 \end{aligned}$$

ADVERTENCIA Este método *no* funciona para determinantes de $n \times n$ si $n > 3$. Si intenta algo similar para determinantes de 4×4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada.

Antes de definir los determinantes de $n \times n$ debe observarse que en la ecuación (3) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz que se obtiene al eliminar el primer renglón y la primera columna de A; $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz que se obtiene al eliminar el primer renglón y la segunda columna de A, y $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la tercera columna de A. Si estas matrices se denotan por M_{11}, M_{12} y M_{13}, respectivamente, y si $A_{11} = \det M_{11}$, $A_{12} = -\det M_{12}$ y $A_{13} = \det M_{13}$, la ecuación (3) se puede escribir como

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}} \qquad \textbf{(5)}$$

DEFINICIÓN 2 **Menor**

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor *ij*** de A.

EJEMPLO 4 **Cálculo de dos menores de una matriz de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32}.

Solución Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 5 **Cálculo de dos menores de una matriz de 4 × 4**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} y M_{24}.

Solución Al quitar el tercer renglón y la segunda columna de A se encuentra que $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. De igual manera, $M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

DEFINICIÓN 3

Cofactor

Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|} \qquad \textbf{(6)}$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

Observación. La definición 3 tiene sentido a partir de la definición de un determinante de $n \times n$ con la suposición de que ya se sabe lo que es un determinante de $(n - 1) \times (n - 1)$.

EJEMPLO 6 **Cálculo de dos cofactores de una matriz de 4 × 4**

En el ejemplo 5 se tiene

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\left|M_{32}\right| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$

Ahora se considerará la matriz general de $n \times n$. Aquí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

DEFINICIÓN 4

Determinante $n \times n$

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por det A o $|A|$, está dado por

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \end{aligned}} \tag{8}$$

La expresión en el lado derecho de (8) se llama **expansión por cofactores**.

Observación. En la ecuación (8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A. En la siguiente sección se verá (teorema 2.2.5) que se obtiene la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

EJEMPLO 7 Cálculo del determinante de una matriz de 4 × 4

Calcule det A, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160$$

Es obvio que el cálculo del determinante de una matriz de $n \times n$ puede ser laborioso. Para calcular un determinante de 4×4 deben calcularse cuatro determinantes de 3×3. Para calcular un determinante de 5×5 deben calcularse cinco determinantes de 4×4, lo que equivale a calcular veinte determinantes de 3×3. Por fortuna existen técnicas que simplifican estos cálculos. Algunos de estos métodos se presentan en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunas matrices para las cuales es muy sencillo calcular los determinantes. Se comienza por repetir la definición dada en la página 128.

DEFINICIÓN 5

Matriz triangular

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se denomina **diagonal** si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$, y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

EJEMPLO 8 **Seis matrices triangulares**

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores; $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la matriz identidad) y $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior.

EJEMPLO 9 **El determinante de una matriz triangular inferior**

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ es triangular inferior. Calcule det A.

Solución

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} = a_{11}A_{11} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \end{aligned}$$

El ejemplo 9 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}} \qquad \textbf{(9)}$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

DEMOSTRACIÓN

La parte triangular inferior del teorema se deduce del ejemplo 9. Se demostrará la parte triangular superior por inducción matemática comenzando con $n = 2$. Si A es una matriz triangular superior de 2×2, entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}$ de manera que el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrará para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \times n$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n - 1) \times (n - 1)$ que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices excepto la primera tienen una columna de ceros, por lo que por lo menos una de sus componentes diagonales es cero. De este modo, todos los determinantes, excepto el primero, son cero. Por último,

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})$$

lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n \times n$.

EJEMPLO 10 Determinantes de seis matrices triangulares

Los determinantes de las seis matrices triangulares en el ejemplo 8 son $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; $|B| = (-2)(0)(1)(-2) = 0$; $|C| = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$; $|D| = 0$; $|I| = 1$; $|E| = (2)(-7)(-4) = 56$.

El siguiente teorema será de gran utilidad.

TEOREMA 2

Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y sólo si $\det T \neq 0$.

Demostración

Sea

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Del teorema 1,

$$\det T = a_{11}a_{22}\cap a_{nn}$$

Así det $T \neq 0$ si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Si det $T \neq 0$, entonces T se puede reducir por renglones a I de la siguiente manera. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se divide el renglón i de T por $a_{ii} \neq 0$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la forma escalonada por renglones de T, que tiene n pivotes, y por el teorema de resumen en la página 128, T es invertible.

Suponga que det $T = 0$. Entonces al menos una de las componentes de la diagonal es cero. Sea a_{ii} la primera de estas componentes. Entonces T se puede escribir como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando T se reduce a su forma escalonada por renglones, no se tiene pivote en la columna i (explique por qué). Entonces la forma escalonada por renglones de T tiene menos de n pivotes y por el teorema de resumen se puede concluir que T no es invertible.

Interpretación geométrica del determinante de 2 × 2

Sea $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. En la figura 2.1 se graficaron los puntos (a, c) y (b, d) en el plano xy y se dibujaron los segmentos de recta de (0, 0) a cada uno de estos puntos. Se supone que estas dos rectas no son colineales. Esto equivale a suponer que (b, d) no es un múltiplo de (a, c).

El **área generada por A** se define como el área del paralelogramo con tres vértices en (0, 0), (a, c) y (b, d).

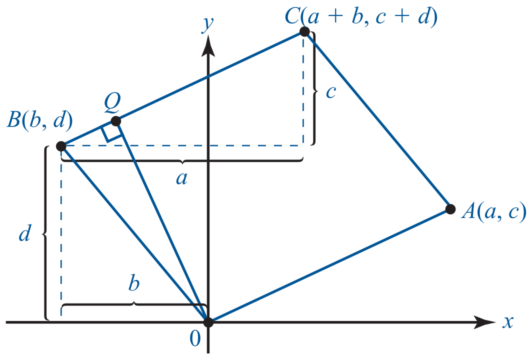


Figura 2.1

Q está en el segmento de línea *BC* y también en la recta perpendicular a *BC* que pasa por el origen. El área del paralelogramo es $\overline{0Q} \times \overline{0A}$.

TEOREMA 3

El área generada por $A = |\det A|$.†

DEMOSTRACIÓN

Se supone que a y c son diferentes de cero. La prueba para $a = 0$ o $c = 0$ se dejará como ejercicio (vea el problema 18).

El área del paralelogramo = base × altura. La base del paralelogramo en la figura 2.1 tiene longitud $\overline{0A} = \sqrt{a^2 + c^2}$. La altura del paralelogramo es $\overline{0Q}$, de donde $0Q$ es el segmento perpendicular a BC. De la figura se ve que las coordenadas de C, el cuarto vértice del paralelogramo, son $x = a + b$ y $y = c + d$. Así

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+d)-d}{(a+b)-b} = \frac{c}{a}$$

Entonces la ecuación de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{y-d}{x-b} = \frac{c}{a} \qquad \text{o} \qquad y = \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a}$$

$$\text{Pendiente de } 0Q \overset{\substack{\text{Hecho } iv\text{), página 2} \\ \downarrow}}{=} -\frac{1}{\text{pendiente de } BC} = -\frac{a}{c}$$

La ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y Q es

$$\frac{(y-0)}{(x-0)} = -\frac{a}{c} \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{a}{c}x$$

Q es la intersección de BC y $0Q$, por lo que satisface ambas ecuaciones. En el punto de intersección se tiene

$$\frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a} = -\frac{a}{c}x$$

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)x = \frac{bc}{a} - d$$

$$\frac{a^2 + c^2}{ac}x = \frac{bc - ad}{a}$$

$$x = \frac{ac(bc - ad)}{a(a^2 + c^2)} = \frac{c(bc - ad)}{a^2 + c^2} = -\frac{c(ad - bc)}{a^2 + c^2} = -\frac{c \det A}{a^2 + c^2}$$

† Aquí $|\det A|$ denota el valor absoluto del determinante de A.

y

$$y = -\frac{a}{c}x = -\frac{a}{c}\cdot -\frac{c \det A}{a^2+c^2} = \frac{a \det A}{a^2+c^2}$$

Entonces Q tiene coordenadas $\left(\frac{-c \det A}{a^2+c^2}, \frac{a \det A}{a^2+c^2}\right)$

y

$$\overline{0Q} = \text{distancia de } (0, 0) \text{ a } Q = \sqrt{\frac{c^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2} + \frac{a^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(c^2+a^2)(\det A)^2}{(c^2+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\det A)^2}{a^2+c^2}} = \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Finalmente,

$$\text{Área del paralelogramo } = \overline{0A}\times\overline{0Q} = \sqrt{a^2+c^2}\times\frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}} = |\det A|$$

Se podrá dar una demostración mucho más sencilla de este teorema cuando se analice el producto cruz de dos vectores en la sección 3.4.

Problemas 2.1

Autoevaluación

I. ¿Cuál de los siguientes es el cofactor de 3 en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a) 8 ***b)*** −8 ***c)*** 3

d) 6 ***e)*** −10 ***f)*** 0

II. ¿Cuál de las siguientes es 0 para toda a y b?

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$

d) Los determinantes no se pueden establecer porque no se parecen los valores de a y b.

III. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces det A = ____________.

a) 0 ***b)*** 12 ***c)*** −12 ***d)*** 6 ***e)*** −6

IV. ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 13 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

14. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, entonces $\det AB = \det A \det B$.

***15.** Demuestre que si A y B son matrices triangulares inferiores, entonces $AB = \det A \det B$.

16. Demuestre que, en general, no se cumple que $\det (A + B) = \det A + \det B$.

17. Muestre que si A es triangular, entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

18. Pruebe el teorema 3 cuando A tiene coordenadas $(0, c)$ o $(a, 0)$.

****19.** **Más sobre la interpretación geométrica del determinante:** Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos 2-vectores y sean $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$. Demuestre que (área generada por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$) = (área generada por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) $|\det A|$.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *a)* **II.** *b)* **III.** *c)* **IV.** *b), c)*

MANEJO DE LA CALCULADORA

Se puede calcular el determinante de una matriz de una forma sencilla como se muestra a continuación. Una vez que se tiene una matriz en la pila se da el comando DET seguido de la tecla Enter, por ejemplo

↰ [] ↰ [] 3 SPC 3 ▶ ↰ [] 1

SPC 2 ENTER

ALPHA ALPHA D E T ENTER

En los problemas 20 al 23 utilice una calculadora para encontrar el determinante de cada matriz.

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & -6 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & -12 & 6 \\ 9 & 4 & 13 & 8 & 15 \\ 8 & 11 & -9 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 16 & 4 \\ 37 & -6 & 0 & 23 \\ 14 & 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -238 & -159 & 146 & 382 & -189 \\ -319 & 248 & -556 & 700 & 682 \\ 462 & 96 & -331 & 516 & -322 \\ 511 & 856 & 619 & 384 & 906 \\ 603 & -431 & -236 & 692 & -857 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 0.62 & 0.37 & 0.42 & 0.56 & 0.33 \\ 0.29 & 0.46 & 0.33 & 0.48 & 0.97 \\ 0.81 & 0.37 & 0.91 & 0.33 & 0.77 \\ 0.35 & 0.62 & 0.73 & 0.98 & 0.18 \\ 0.29 & 0.08 & 0.46 & 0.71 & 0.29 \end{pmatrix}$

MATLAB 2.1

Información de MATLAB

El comando **det(*A*)** encuentra el determinante de A **(doc det)**. Al igual que antes se puede utilizar MATLAB para generar matrices aleatorias de $n \times n$. Por ejemplo,

A = 2∗rand(n)−1 (con elementos entre -1 y 1)

A = 2∗rand(n)−1 + i∗(2∗rand(n)−1) (con elementos reales e imaginarios entre -1 y 1)

A = round(10∗(2∗rand(n)−1)) (con elementos enteros entre -10 y 10)

1. En este problema deberá investigar la relación entre det(A) y la invertibilidad de A.

***a*)** Para cada matriz, determine si A es o no es invertible (utilizando **rref**) y encontrando det(A). ¿De qué forma puede usar **det(*A*)** para determinar si A es o no invertible?

i. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -9 & 9 & 7 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} -9 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -9 & 9 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \\ -10 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **iii.** $\begin{pmatrix} 23 & 19 & 11 \\ 5 & 1 & 5 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 & -9 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & -5 \\ -9 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ **v.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

***b*)** Los incisos *i*) y *ii*) que se muestran a continuación prueban su conclusión del inciso *a*) con varias matrices aleatorias (elija por lo menos cuatro matrices en *i*) de distintos tamaños y al menos cuatro matrices en *ii*). Incluya cuando menos una matriz con elementos complejos para cada inciso.

i. Sea A una matriz aleatoria de $n \times n$. Encuentre det(A). Utilice los conocimientos anteriores para determinar si A es o no es invertible. ¿De qué forma apoya su conclusión esta evidencia?

ii. Sea B una matriz aleatoria de $n \times n$, pero para alguna j arbitraria, sea **B(:, j)** igual a una combinación lineal de algunas columnas de B (de su elección). Por ejemplo, **B(:,3) = B(:,1) + 2*B(:,2).** Determine si B es o no invertible y encuentre det(B). ¿De qué forma apoya su conclusión esta evidencia?

2. Para seis matrices aleatorias A con elementos reales (para valores diferentes de n), compare **det(*A*)** con **det(*A*′)** donde A' denota (en MATLAB) la transpuesta de A. Incluya por lo menos dos matrices no invertibles (vea la descripción en el problema 1 *b*) *ii*) de MATLAB en esta sección). ¿Qué le indica su comparación? Repita el mismo procedimiento para matrices con elementos complejos.

3. Construya seis pares de matrices aleatorias, A y B, de $n \times n$ (use valores de n). Para cada par, sea $C = A + B$. Compare det(C) y det(A) + det(B). Obtenga una conclusión sobre la afirmación

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

4. ***a***) Haciendo uso de los pares de matrices (A y B) dados, formule una conclusión respecto a **det(A*B)** en términos de los determinantes de A y B.

i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ **ii.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

iii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ **iv.** $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

b) Pruebe también su conclusión generando matrices aleatorias de $n \times n$ (genere cuando menos seis pares con diferentes valores de n. Incluya un par en el que una de las matrices sea no invertible. Incluya matrices con elementos complejos).

5. ***a***) Para las siguientes matrices, formule una conclusión respecto a **det(A)** y **det(inv(A))**.

i. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **iii.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

b) Pruebe su conclusión con varias (cuando menos seis) matrices aleatorias invertibles de $n \times n$ para diferentes valores de n. Incluya matrices con elementos complejos.

c) **(*Lápiz y papel*)** Pruebe su conclusión utilizando la definición de la inversa (es decir, considere AA^{-1}) y la propiedad descubierta en el problema 4 de MATLAB de esta sección.

6. Sea **A = 2*rand(6)−1**.

a) Elija i, j y c y sea B la matriz obtenida al realizar la operación con renglones $R_j \rightarrow cR_i + R_j$ sobre A. Compare det(A) y det(B). Repita para cuando menos otros cuatro valores de i, j y c. ¿A qué conclusión llega sobre la relación entre el determinante de A y el determinante de la matriz obtenida a partir de A realizando el tipo de operación con renglones dada?

b) Siga las instrucciones del inciso *a*) pero para la operación con renglones $R_i \rightarrow cR_i$.

c) Siga las instrucciones del inciso *a*) pero para la operación con renglones que intercambia R_i y R_j.

***d*)** Para cada operación con renglones realizada en *a*), *b*) y *c*) encuentre la matriz elemental F tal que FA sea la matriz obtenida al realizar la operación sobre los renglones de A. Encuentre det(F). Explique los resultados obtenidos en los incisos *a*), *b*) y *c*) utilizando su observación sobre det(F) y su conclusión del problema 4 de MATLAB en esta sección.

7. Es sabido que si A es una matriz triangular superior, entonces det(A) es el producto de los elementos de la diagonal. Considere la siguiente matriz M, donde A, B y D son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz que consiste sólo de ceros:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

¿Puede obtener una relación entre det(M) y los determinantes de A, B y D?

***a*)** Introduzca matrices aleatorias de $n \times n$, A, B y D. Sea **C = zeros(n)**. A partir de la matriz bloque **M = [AB; CD]**. Pruebe su conclusión (si todavía no ha formulado una conclusión, encuentre los determinantes de M, A, B y D y busque patrones). Repita para otros n, A, B y D.

***b*)** Repita el proceso anterior para

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

donde A, B, C, D, E y F son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz de $n \times n$ cuyos elementos son todos cero (es decir **zeros(n)**).

M

8. (***Este problema usa el archivo con extensión m, ornt.m***) Una aplicación geométrica de los determinantes de 2×2 hace referencia a la orientación. Si se viaja por las aristas de un paralelogramo, se va en el sentido (orientación) de las manecillas del reloj o en sentido contrario. La multiplicación por una matriz de 2×2 puede afectar dicha orientación.

Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, suponga que se traza el paralelogramo formado al comenzar en (0, 0), recorrer hasta el final de $\mathbf{u}$, después hasta el final de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, luego hasta el final de $\mathbf{v}$ y después de regreso a (0, 0); se lleva a cabo esto mismo para el paralelogramo formado por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$, donde A es una matriz de 2×2 (el cual se recorre primero a lo largo de $A\mathbf{u}$).

¿Cuándo se invertirá la orientación (en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario) del paralelogramo formado por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$ respecto a la orientación del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?

La siguiente función de MATLAB, de nombre *ornt*, *m* se puede utilizar para investigar esta pregunta. Una vez que haya escrito la función en el archivo de nombre *ornt.m*, dé **doc ornt** para obtener una descripción de lo que hace este archivo.

```
function ornt(u,v,A)

% ORNT grafica paralelogramos formados por u,v y Au, Av con
%      la orientacion descrita en la pantalla.
%
%      u: vector de 2×1
%      v: vector de 2×1
%      A: Matriz 2×2

% paralelogramo del origen−>u−>u+v−>v−>origen
PP=[[0;0],u,u+v,v,[0;0]];
PP1=PP(:,1:4);
% datos originales
```

```
subplot(121)
pplot(PP,PP1)
axis square
title('Orientacion Inicial')
Xlabel('De 1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1')
% datos despues de la multiplicacion por A
subplot(122)
pplot(A*PP,A*PP1)
axis square
title(['Despues de la mult por A=[',...
   num2str(A(1,:)),';',num2str(A(2,:)),']'])
Xlabel('De 1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1')

% funcion auxiliar unicamente visible dentro de ornt
function pplot(PP,PP1)
plot(PP(1,:),PP(2,:),'b',PP1(1,:),PP1(2,:),'*');
text(PP1(1,:)',PP1(2,:)',num2str((1:4)'));
grid
```

Para cada uno de los siguientes problemas, introduzca **u**, **v** y A (aquí **u** y **v** son vectores de 2×1 y A es una matriz de 2×2). Encuentre **det A**. Dé **ornt(u, v, A)**. En una pantalla de gráficas aparecerán los paralelogramos formados por **u** y **v** y por A**u** y A**v** con la orientación descrita en la misma. ¿Se modificó la orientación? Después de resolver el siguiente problema formule una conclusión respecto a la forma en la cual se puede utilizar **det(A)** para determinar si cambiará o no la orientación. Pruebe su conclusión con más ejemplos (cambie A y/o **u** y **v**).

Para cada A utilice **u = [1;0]** y **v = [0;1]** y después **u = [−2;1]** y **v = [1;3]**.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Nota importante. Cuando termine con este problema, asegúrese de dar el comando **clg (doc clg)** para limpiar la ventana de gráficas antes de comenzar otro problema.

2.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Existen algunos problemas en matemáticas que, en estricta teoría, son sencillos pero que en la práctica son imposibles. Piense por ejemplo en el caso de un determinante de una matriz de 50×50. Se puede calcular expandiendo por **cofactores**. Esto implica 50 determinantes de 49×49 que a su vez implican $50 \cdot 49$ determinantes de 48×48 que implican a su vez… $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \ldots \cdot 3$ determinantes de 2×2. Ahora bien, $50 \cdot 49 \ldots \cdot 3 = 50!/2 \approx 1.5 \times 10^{64}$ determinantes de 2×2. Suponga que se cuenta con una computadora que puede calcular un millón $= 10^6$ determinantes de 2×2 por segundo. Tomaría alrededor de 1.5×10^{58} segundos $\approx 4.8 \times 10^{50}$ *años* terminar el cálculo (el universo tiene alrededor de 15 mil millones de años $= 1.5 \times 10^{10}$ años según la versión teórica más reciente). Es obvio que, si bien el cálculo de un determinante de 50×50, siguiendo la definición, es teóricamente directo, en la práctica es imposible.

Por otra parte, la matriz de 50×50 no es tan rara. Piense en 50 tiendas en las que se ofrecen 50 productos diferentes. De hecho, las matrices de $n \times n$ con $n > 100$ surgen con frecuencia en la práctica. Por fortuna, existen cuando menos dos maneras de reducir de manera significativa la cantidad de trabajo necesaria para calcular un determinante.

El primer resultado que se necesita es quizá el teorema más importante sobre determinantes. Este teorema establece que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

TEOREMA 1

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det AB = \det A \det B} \tag{8}$$

Es decir: *el determinante del producto es el producto de los determinantes*.

Observación. Note que el producto de la izquierda es un producto de matrices mientras que el de la derecha es de escalares.

DEMOSTRACIÓN

Si se utilizan matrices elementales, la prueba está dada en la sección 2.3. En el problema 48 se pide que verifique este resultado para el caso 2×2.

EJEMPLO 1 Ilustración del hecho de que det AB = det A det B

Verifique el teorema 1 para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución Det $A = 16$ y det $B = -8$. Se puede calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

y det $AB = -128 = (16)(-8) =$ det A det B.

ADVERTENCIA

El determinante de la suma *no* siempre es igual a la suma de los determinantes. Es decir, para la mayoría de los pares de matrices, A y B,

$$\det (A + B) \neq \det A + \det B$$

Por ejemplo, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\det A = -2 \qquad \det B = 6 \qquad \text{y}$$

$$\det (A + B) = 22 \neq \det A + \det B = -2 + 6 = 4$$

Ahora sea $A = LU$ una factorización LU de una matriz de $n \times n$ (vea la página 138). Entonces, por el teorema 1,

$$\det A = \det LU = \det L \det U$$

Pero L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, así

$$\det L = \text{producto de los elementos en la diagonal} = 1$$

De manera similar, como U es triangular superior,

$$\det U = \text{producto de los elementos en la diagonal}$$

Entonces se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2

Si una matriz cuadrada A tiene la factorización LU, $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal, entonces

$$\det A = \det U = \text{producto de los elementos de la diagonal de } U$$

EJEMPLO 2 Uso de la factorización *LU* para calcular el determinante de una matriz de 4 × 4

Calcule det A, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Solución Del ejemplo 1.11.1 en la página 136, $A = LU$, donde

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\det A = \det U = (2)(4)(3)(-49) = -1\,176$.

Si A no se puede reducir a la forma triangular sin hacer permutaciones, por el teorema 1.11.3 en la página 141, existe una matriz permutación P tal que

$$PA = LU$$

Es sencillo probar que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \pm 1$ (vea el problema 52). Entonces

$$\begin{aligned} \det PA &= \det LU \\ \det P \det A &= \det L \det U = \det U \qquad \boxed{\det L = 1} \\ \pm \det A &= \det U \\ \det A &= \pm \det U \end{aligned}$$

TEOREMA 3

Si $PA = LU$, donde P es una matriz permutación y L y U son como antes, entonces

$$\det A = \frac{\det U}{\det P} = \pm \det U$$

EJEMPLO 3 Uso de la factorización *PA* = *LU* para calcular el determinante de una matriz de 3 × 3

Encuentre det A, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución Del ejemplo 1.11.3 en la página 140, se encontró que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $\det P = 1$ y $\det U = (1)(2)(-3)$, de manera que $\det A = \dfrac{-6}{1} = -6$.

Se establecerá un importante teorema sobre determinantes.

TEOREMA 4 **$\det A^t = \det A$**

DEMOSTRACIÓN Suponga que $A = LU$. Entonces $A^t = (LU)^t = U^tL^t$ por el teorema 1.9.1 *ii)* en la página 119. Se calcula

$$\det A = \det L \det U = \det U$$

$$\det A^t = \det U^t \det L^t = \det U^t = \det U = \det A \qquad \boxed{\det L = 1}$$

El último paso se basa en que la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y viceversa, y en el hecho de que obtener la transpuesta no cambia las componentes de la diagonal de una matriz.

Si A no se puede escribir como LU, entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$. Por lo que se acaba de probar,

$$\det PA = \det (PA)^t = \det (A^tP^t)$$

y por el teorema 1,

$$\det P \det A = \det PA = \det (A^tP^t) = \det A^t \det P^t$$

No es complicado probar (vea el problema 53) que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \det P^t$. Como $\det P = \det P^t = \pm 1$, se concluye que $\det A = \det A^t$.

EJEMPLO 4 Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y es fácil verificar que $|A| = |A^t| = 16$.

Observación. Dado que los renglones de una matriz son las columnas de su transpuesta, se deduce que todo lo que se pueda decir sobre los renglones de los determinantes comprenden una segunda forma de simplificar los cálculos de los determinantes. Los resultados se prueban para los renglones. Por lo que se acaba de decir, los teoremas se cumplen también para las columnas.

En primera instancia se describen estas propiedades estableciendo un teorema del que se deducen diversos resultados importantes. La demostración de este teorema es difícil y se pospone a la siguiente sección.

TEOREMA 5 **Teorema básico**

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}} \quad \textbf{(1)}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A**. Más aún,

$$\boxed{\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}} \quad \textbf{(2)}$$

como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, la ecuación (2) indica que **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A**.

EJEMPLO 5 Obtención del determinante expandiendo en el segundo renglón o la tercera columna

En el ejemplo 2.1.1 de la página 169 se vio que para $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, det $A = -69$. Expandiendo en el segundo renglón se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= 4A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} \\ &= 4(1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4(16) + 2(14) - 3(11) = -69 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si se expande en la tercera columna se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= 2A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33} \\ &= 2\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(10) - 3(11) + 4(-14) = -69 \end{aligned}$$

El lector debe verificar que se obtiene el mismo resultado con la expansión por cofactores en el tercer renglón o la primera o segunda columna.

Ahora se presentan y se demuestran algunas propiedades adicionales de los determinantes. En cada paso se supone que A es una matriz de $n \times n$. Se observará que estas propiedades se pueden utilizar para reducir mucho el trabajo necesario para evaluar un determinante.

PROPIEDAD 1

Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que el renglón i de A contiene sólo ceros. Esto es $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. La misma prueba funciona si la columna j es el vector cero.

EJEMPLO 6 Si A tiene un renglón o columna de ceros, entonces $\det A = 0$

Es fácil verificar que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

PROPIEDAD 2

Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $\det A$ se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \ldots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\,|A| \qquad (3)$$

DEMOSTRACIÓN

Para probar (3) se expande el renglón i de A para obtener

$$\begin{aligned} \det B &= ca_{i1}A_{i1} + ca_{i2}A_{i2} + \cdots + ca_{in}A_{in} \\ &= c(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = c \det A \end{aligned}$$

En el caso de las columnas se puede hacer una prueba similar.

EJEMPLO 7 Ilustración de la propiedad 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$. Si se multiplica el segundo renglón por 4 se tiene $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $\det B = 64 = 4 \det A$. Si se multiplica la tercera columna por -3 se obtiene $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{pmatrix}$ y $\det C = -48 = -3 \det A$.

Observación. Al utilizar la propiedad 2 se puede probar (vea el problema 36) el interesante hecho de que para cualquier escalar α y cualquier matriz A de $n \times n$, $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

PROPIEDAD 3

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+\alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+\alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+\alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boxed{\det C = \det A + \det B} \tag{4}$$

En otros términos, suponga que A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B. Entonces, $\det C = \det A + \det B$. La misma afirmación es cierta para renglones.

DEMOSTRACIÓN

Se expande $\det C$ respecto a la columna j para obtener

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + \alpha_{1j}) A_{1j} + (a_{2j} + \alpha_{2j}) A_{2j} + \cdots + (a_{nj} + \alpha_{nj}) A_{nj} \\ &= (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}) \\ &\quad + (\alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \cdots + \alpha_{nj}A_{nj}) = \det A + \det B \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 **Ilustración de la propiedad 3**

$$\text{Sea } A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } C = \begin{vmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Entonces $\det A = 16$, $\det B = 108$ y $\det C = 124 = \det A + \det B$.

PROPIEDAD 4

El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.

DEMOSTRACIÓN

Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes. Es decir, se supone que se intercambian los renglones i y el $(i + 1)$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Después, expandiendo det A respecto al renglón i y B respecto al renglón $(i + 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ \det B &= a_{i1}B_{i+1,1} + a_{i2}B_{i+1,2} + \cdots + a_{in}B_{i+1,n} \end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

Aquí, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$, donde M_{ij} se obtiene eliminando el renglón i y la columna A. Observe ahora que si se elimina el renglón $(i + 1)$ y la columna j de B se obtiene el mismo M_{ij}. Entonces

$$B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j}\,|M_{ij}| = -(-1)^{i+j}\,|M_{ij}| = -A_{ij}$$

de manera que, de la ecuación (5), det $B = -$det A.

Ahora, suponga que $i < j$ y que deben intercambiarse los renglones i y j. Esto se puede llevar a cabo intercambiando renglones varias veces. Se harán $j - i$ intercambiados para mover el renglón j al renglón i. Entonces el renglón i estará en el renglón $(i + 1)$ y pasará por otros $j - i - 1$ intercambios para mover el renglón i al renglón j. Para ilustrar esto, se intercambian los renglones 2 y 6:†

$$\underbrace{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\6\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\2\\3\\6\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\2\\6\\3\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\2\\3\\4\\5\\7\end{matrix}}_{\substack{\textbf{6 − 2 = 4 intercambia para}\\ \textbf{mover el 6 a la posición 2}}} \rightarrow \underbrace{\begin{matrix}1\\6\\3\\2\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\2\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\5\\2\\7\end{matrix}}_{\substack{\textbf{6 − 2 = 4 intercambia para}\\ \textbf{mover el 2 a la posición 6}}}$$

Por último, el número total de intercambios de renglones adyacentes es $(j - i) + (j - i - 1) = 2j - 2i - 1$, que es impar. Entonces, det A se multiplica por -1 un número impar de veces, que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO 9 Ilustración de la propiedad 4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar los renglones 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por lo que, haciendo los cálculos directos, se encuentra que det $A = 16$ y det $B =$ det $C = -16$.

Propiedad 5

Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det $A = 0$.

Demostración

Suponga que los renglones i y j de A son iguales. Al intercambiar dichos renglones se obtiene una matriz B que tiene la propiedad de que det $B = -$det A (de la propiedad 4). Pero como renglón i = renglón j, al intercambiarlos se obtiene la misma matriz. Así, $A = B$ y det A = det $B = -$det A. Por lo tanto, 2 det $A = 0$, lo que puede ocurrir sólo si det $A = 0$.

† Observe que todos los números se refieren a renglones.

EJEMPLO 10 **Ilustración de la propiedad 5**

Mediante el cálculo directo se puede verificar que para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ [dos renglones iguales] y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ [dos columnas iguales], det A = det B = 0.

PROPIEDAD 6

Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces det $A = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}) = c(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Entonces por la propiedad 2,

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \textbf{renglón } j \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \det A = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(de la propiedad 5)}$$

EJEMPLO 11 **Ilustración de la propiedad 6**

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ ya que el tercer renglón es igual a -2 veces el primero.

EJEMPLO 12 **Otra ilustración de la propiedad 6**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 & -3 \\ 7 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ porque la cuarta columna es igual a tres veces la segunda.

PROPIEDAD 7

Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

DEMOSTRACIÓN

Sea B la matriz obtenida sumando c veces el renglón i de A al renglón j de A. Entonces

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ca_{i1} & a_{j2} + ca_{i2} & \cdots & a_{jn} + ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{(por la propiedad 3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= \det A + 0 = \det A$ (el cero viene de la propiedad 6)

EJEMPLO 13 Ilustración de la propiedad 7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces det $A = 16$. Si se multiplica el tercer renglón por 4 y se suma al segundo renglón, se obtiene una nueva matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3+4(0) & 1+4(-2) & 4+5(4) \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y det $B = 16 =$ det A.

Las propiedades que se acaban de presentar simplifican la evaluación de determinantes de alto orden. Se "reduce por renglones" el determinante, usando la propiedad 7, hasta que tenga una forma en la que se pueda evaluar con facilidad. La meta más común será utilizando la propiedad 7 de manera repetida hasta que 1) el nuevo determinante, tenga un renglón (columna) de ceros o un renglón (columna) que sea múltiplo de otro —en cuyo caso el determinante es cero— o 2) que la nueva matriz sea triangular, con lo que su determinante será el producto de sus elementos en la diagonal.

EJEMPLO 14 Utilice las propiedades de los determinantes para calcular un determinante de 4 × 4

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

Solución

(Vea el ejemplo 2.1.7, página 172.)

Ya existe un cero en la primera columna, por lo que lo más sencillo es reducir otros elementos de la primera columna a cero. Se puede continuar la reducción buscando una matriz triangular.

Se multiplica el primer renglón por -2 y se suma al tercer renglón; se multiplica el primer renglón por -3 y se suma al cuarto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el segundo renglón por -5 y -7 y se suma el tercer y cuarto renglones, respectivamente.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se factoriza -16 del tercer renglón (utilizando la propiedad 2).

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por 32 y se suma al cuarto.

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz triangular superior y $|A| = -16(1)(-1)(1)(10) = (-16)(-10) = 160$.

EJEMPLO 15 Uso de las propiedades para calcular un determinante de 4 × 4

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Solución Existen varias formas de proceder en este caso y no es evidente cuál de ellas será la más rápida para llegar a la respuesta. Sin embargo, como ya existe un cero en el primer renglón, se comienza la reducción en ese renglón.

Se multiplica la segunda columna por 2 y por -4 y se suma a la primera y cuarta columnas, respectivamente

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & -27 \\ -11 & -7 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se intercambian las primeras dos columnas.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 3 & -27 \\ -7 & -11 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la segunda columna por -5 y por -6 y se suma a la tercera y cuarta columnas, respectivamente.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & -57 & -99 \\ -7 & -11 & 57 & 99 \end{vmatrix}$$

Como la cuarta columna es ahora un múltiplo de la tercera (columna 4 $= \frac{99}{57} \times$ columna 3) se ve que $|A| = 0$.

EJEMPLO 16 Uso de las propiedades para calcular un determinante de 5 × 5

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$

Solución Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(por la propiedad 1)}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que un poco de observación antes de comenzar los cálculos puede simplificar las cosas considerablemente.

Existe un hecho adicional sobre determinantes que resultará de gran utilidad.

TEOREMA 6

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2}, + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad \text{si } i \neq j} \qquad \textbf{(6)}$$

Nota. Del teorema 5 la suma en la ecuación (6) es igual a det A si $i = j$.

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \textbf{renglón } j \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces, como dos renglones de B son iguales, det $B = 0$. Pero $B = A$ excepto por el renglón j. De esta forma se calcula det B expandiendo en el renglón j de B, se obtiene la suma en (6) y el teorema queda demostrado. Observe que al hacer la expansión respecto al renglón j, este renglón se elimina al calcular los cofactores de B. Así, $B_{jk} = A_{jk}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Problemas 2.2

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

II. ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

III. El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **es _________.**

a) 4 *b)* 10 *c)* −10 *d)* 8 *e)* 6

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *b)* **II.** *c)* **III.** *a)*

De los problemas 1 al 26 evalúe el determinante usando los métodos de esta sección.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

De los problemas 27 al 35 calcule el determinante suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

27. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **31.** $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ **32.** $\begin{vmatrix} 4a_{11} & -2a_{13} & 3a_{12} \\ 4a_{21} & -2a_{23} & 3a_{22} \\ 4a_{31} & -2a_{33} & 3a_{32} \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$ **34.** $\begin{vmatrix} a_{11} - a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

36. Usando la propiedad 2, demuestre que si α es un escalar y A es una matriz, entonces det $\alpha A = \alpha^n$ det A.

***37.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

***38.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cap + a_1\lambda^1 + a_0$$

39. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la suma de todos los elementos de cada columna de A es cero, entonces $|A| = 0$.

***40.** Una matriz es **antisimétrica** si $A^t = -A$. Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, demuestre que det $A^t = (-1)^n$ det A.

41. Usando el resultado del problema 40, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces det $A = 0$.

42. Una matriz A se llama **ortogonal** si A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Demuestre que si A es ortogonal, entonces det $A = \pm 1$.

****43.** Sea Δ el triángulo del plano con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que el área del triángulo está dada por

$$\text{Área de } \Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

¿Bajo qué circunstancias este determinante será igual a cero?

****44.** Tres rectas que no son paralelas por pares determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{2A_{13}A_{23}A_{33}}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

45. El **determinante de Vandermonde**† de 3×3 está dado por

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Demuestre que $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

46. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de 4×4. Demuestre que $D_4 =$ $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$.

****47.** ***a)*** Defina el determinante de Vandermonde de $n \times n$, D_n.

b) Demuestre que $D_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i)$, donde $\prod$ representa la palabra "producto". Observe que el producto en el problema 46 se puede escribir $\prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{3} (a_j - a_i)$.

48. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

a) Escriba el producto AB.

b) Calcule det A, det B y det AB.

c) Demuestre que det AB = (det A)(det B).

49. La matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$, la matriz cero, para algún entero $k \geq 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes y encuentre la k más pequeña, tal que

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

50. Demuestre que si A es nilpotente, entonces det $A = 0$.

51. La matriz A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para det A si A es idempotente?

† A.T. Vandermonde (1735-1796) fue un matemático francés.

52. Sea P una matriz permutación. Demuestre que det $P = \pm 1$. [*Sugerencia*: por la definición en la página 140 $P = P_n P_{n+1} \ldots P_2 P_1$, donde cada P_i es una matriz permutación elemental. Utilice la propiedad 4 para demostrar que det $P_i = -1$ y después calcule det P usando el teorema 1.]

53. Sea P una matriz permutación. Demuestre que P^t también es una matriz permutación y que det P = det P^t. [*Sugerencia*: si P_i es una matriz permutación elemental, demuestre que $P_i^t = P_i$.]

MATLAB 2.2

1. ***a)*** Sea **A = round(10*(2*rand(n)-1))** para $n = 2$. Encuentre **det(A)**. Ahora encuentre **det(2*A)**. Repita para $n = 3$ y $n = 4$.

b) (*Papel y lápiz*) Concluya una fórmula para det($2A$) en términos de n y det(A). Concluya una fórmula para det(kA) para k general.

c) Use MATLAB para probar su fórmula para det ($3A$).

d) (*Papel y lápiz*) Pruebe la fórmula utilizando las propiedades aprendidas en esta sección.

2. Para las siguientes matrices, primero encuentre det (A). Después reduzca A a la forma triangular superior U, utilizando operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$, o intercambiando R_i y R_j. Encuentre det (U) y verifique que det (A) = $(-1)^k$ det (U), donde k es el número de intercambios de renglones realizado en el proceso de reducción.

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ***b)*** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) Para esta matriz, antes de cada operación con renglones, intercambie los renglones de manera que el elemento en la posición pivote sea el de mayor valor absoluto de los elementos posibles a usar como ese pivote:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Elija una matriz aleatoria A de $n \times n$ y redúzcala a la forma triangular superior encontrando la descomposición LU de A mediante el comando **[L,U,P] = lu(A)**. Use P para determinar el número de intercambios de renglones realizados y verifique que det (A) = $(-1)^k$ det (U), donde k es el número de intercambios de renglones. Describa el papel de det(P). Repita para otras dos matrices A.

2.3 DEMOSTRACIÓN DE TRES TEOREMAS IMPORTANTES Y ALGO DE HISTORIA

Antes se citaron tres teoremas que resultan de fundamental importancia en la teoría de matrices determinantes. Las demostraciones de estos teoremas son más complicadas que las demostraciones que ya se analizaron. Trabaje despacio en estas demostraciones; la recompensa será un mejor entendimiento de algunas ideas importantes acerca del álgebra lineal.

TEOREMA 1

Teorema básico

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (1) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (2) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota. La primera igualdad es la definición 2.1.4 del determinante mediante la expansión por cofactores del primer renglón; la segunda igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier otro renglón lleva al determinante; la tercera igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier columna da el determinante. De acuerdo con la observación de la página 190 se necesita, únicamente, probar el teorema para los renglones [ecuación (1)].

DEMOSTRACIÓN

Se probará la igualdad (1) por inducción matemática. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de 2×2, primero se expande por cofactores el primer renglón: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. De este modo, expandiendo en el segundo renglón se obtiene $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Entonces se obtiene el mismo resultado expandiendo en cualquier renglón de una matriz de 2×2, y esto prueba la igualdad (1) en el caso 2×2.

Ahora se supone que la igualdad (1) se cumple para todas las matrices de $(n - 1) \times (n - 1)$. Debe demostrarse que se cumple para las matrices de $n \times n$. El procedimiento será expandir por cofactores de los renglones 1 e i, y demostrar que las expansiones son idénticas. La expansión en el primer renglón da el siguiente término general

$$a_{1k}A_{1k} = (-1)^{1+k}a_{1k}|M_{1k}| \qquad (3)$$

Observe que éste es el único lugar en la expansión de $|A|$ en el cual aparece el término a_{1k} ya que otro término general sería $a_{1m}A_{1m} = (-1)^{1+m}a_{1m}|M_{1m}|$, con $k \neq m$ y M_{1m} se obtiene eliminando el primer renglón y la m-ésima columna de A (y a_{1k} está en el primer renglón de A). Como M_{1k} es una matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$, por la hipótesis de inducción se puede calcular $|M_{1k}|$ expandiendo en el renglón i de A [que es el renglón $(i - 1)$ de M_{1k}]. Un término general de esta expansión es

$$a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \qquad (4)$$

Por las razones descritas, éste es el único término en la expansión de $|M_{1k}|$ en el i-ésimo renglón de A que contiene el término a_{il}. Sustituyendo (4) en la ecuación (3) se encuentra que

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \ (k \neq l) \qquad (5)$$

es la única ocurrencia del término $a_{1k}a_{il}$ en la expansión por cofactores de $\det A$ en el primer renglón.

Ahora, si se expande por cofactores en el renglón i de A (donde $i \neq 1$), el término general es

$$(-1)^{1+l}a_{il}|M_{il}| \qquad (6)$$

y el término general en la expansión de $|M_{il}|$ en el primer renglón de M_{il} es

$$a_{1k}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il}) \quad (k \neq l) \qquad (7)$$

Si se inserta (7) en el término (6) se encuentra que la única ocurrencia del término $a_{il}a_{1k}$ en la expansión del renglón i de det A es

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il})\ (k \neq l) \tag{8}$$

Si se puede demostrar que las expansiones (5) y (8) son la misma, entonces (1) quedará demostrada, ya que el término en (5) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del primer renglón, el término en (8) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del i-ésimo renglón, y k, i y l, son arbitrarios. Lo que demostrará que las sumas de términos en las expansiones en los renglones 1 e i son iguales.

Ahora, sea $M_{1i,kl}$ la matriz de $(n-2) \times (n-2)$ obtenida al eliminar los renglones 1 e i y las columnas k y l de A (esto se llama **menor de segundo orden** de A). Primero se supone que $k < l$. Después

$$M_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$M_{il} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

De (9) y (10) se aprecia que

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| \tag{11}$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| \tag{12}$$

Entonces (5) se convierte en

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l-1}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}| \tag{13}$$

y (8) se convierte en

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l+1}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}| \tag{14}$$

Pero $(-1)^{i+k+l-1} = (-1)^{i+k+l+1}$, de modo que los lados derechos de las ecuaciones (13) y (14) son iguales. Así, las expresiones (5) y (8) son iguales y (1) queda demostrado en el caso $k < l$; después por un razonamiento similar se encuentra que si $k > l$,

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+(k-1)}|M_{1i,kl}|$$

de manera que (5) se convierte en

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}|$$

y (8) se convierte en

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(-1)^{1+k-1}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}|$$

y esto completa la prueba de la ecuación (1).

Ahora se quiere probar que para cualesquiera dos matrices de $n \times n$, A y B, det AB = det A det B. La prueba es más compleja e incluye varios pasos. Se usarán diversos hechos sobre las matrices elementales probados en la sección 1.10.

Primero se calculan los determinantes de las matrices elementales.

LEMA 1

Sea E una matriz elemental:

i. Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_i \rightleftarrows R_j$, entonces det $E = -1$. **(15)**

ii. Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_j \to R_j + cR_i$ entonces det $E = 1$. **(16)**

iii. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \to cR_i$, entonces det $E = c$. **(17)**

DEMOSTRACIÓN

i. det $I = 1$. E se obtiene de I intercambiando los renglones i y j de I. Por la propiedad 4 de la página 188, det $E = (-1)$ det $I = -1$.

ii. E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c y sumándolo al renglón j. Entonces por la propiedad 7 de la página 190, det E = det $I = 1$.

iii. E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c. Así, por la propiedad 2 en la página 187, det $E = c$ det $I = c$.

LEMA 2

Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det EB = \det E \det B \tag{18}$$

La prueba de este lema se deduce del lema 1 y los resultados presentados en la sección 2.2 que relacionan las operaciones elementales con renglones en los determinantes. Los pasos de la prueba se indican de los problemas 1 al 3 de la sección que nos ocupa.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de matrices.

TEOREMA 2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Del teorema 1.10.5 en la página 129, se sabe que existen matrices elementales $E_1, E_2, \cdots,$ E_m y una matriz triangular superior T tal que

$$A = E_1E_2, \cdots, E_mT \tag{19}$$

Usando el lema 2 m veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det A &= \det E_1 \det (E_2E_3 \cdots E_mT) \\ &= \det E_1 \det E_2 \det (E_3 \cdots E_mT) \\ &\vdots \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det (E_mT) \end{aligned}$$

o sea

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det E_m \det T \tag{20}$$

Por el lema 1, det $E_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Se concluye que det $A \neq 0$ si y sólo si det $T \neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Al usar (19) y el hecho de que toda matriz elemental es invertible $E_m^{-1} \cdots E_l^{-1}A$ es el producto de matrices invertibles. Así, T es invertible y por el teorema 2.1.2 en la página 174, det $T \neq 0$. Por lo tanto, det $A \neq 0$.

Si det $A \neq 0$ entonces (20), det $T \neq 0$, por lo que T es invertible (por el teorema 2.1.2). Entonces el lado derecho de (20) es el producto de matrices invertibles, y A es invertible. Esto completa la demostración.

Al fin, ahora se puede demostrar el resultado principal. Usando estos resultados establecidos, la prueba es directa.

TEOREMA 3

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det AB = \det A \det B \tag{21}$$

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: det A = det $B = 0$. Entonces por el teorema 2, B no es invertible, así por el teorema 1.8.6, existe un n-vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, de nuevo por el teorema 1.8.6, AB no es invertible. Por el teorema 2,

$$0 = \det AB = 0 \cdot 0 = \det A \det B$$

Caso 2: det $A = 0$ y det $B \neq 0$. A no es invertible, por lo que existe un n-vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que A$\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Como det $B \neq 0$, B es invertible y existe un vector único $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Así, AB no es invertible, esto es

$$\det AB = 0 = 0 \det B = \det A \det B$$

Caso 3: det $A \neq 0$. A no es invertible y se puede escribir como un producto de matrices elementales:

$$A = E_1, E_2, \cdots, E_m$$

Entonces

$$AB = E_1, E_2, \cdots, E_m B$$

Usando el resultado del lema 2 repetidas veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det AB &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m B) \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_m \det B \\ &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m) \det B \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

SEMBLANZA DE...

Breve historia de los determinantes

Gottfried Willhelm Leibniz
(*Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University*)

Augustin-Louis Cauchy
(*Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University*)

Los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. El término *matriz* fue utilizado por primera vez por James Joseph Silvestre, cuya intención era que su significado fuera "madre de los determinantes".

Algunos grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX participaron en el desarrollo de las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores cree que la teoría de los determinantes encuentra su origen en el matemático alemán Gottfried Willhelm Leibniz (1646-1716), quien junto con Newton, fue coinventor del cálculo. Leibniz utilizó los determinantes en 1693 en referencia a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Sin embargo, algunos piensan que un matemático japonés, Seki Kowa, hizo lo mismo casi 10 años antes.

Quien contribuyó de manera más importante en la teoría de los determinantes fue el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy redactó una memoria de 84 páginas, en 1812, que contenía la primera prueba del teorema $\det AB = \det A \det B$. En 1840 definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial $\det(A - \lambda I) = 0$. Dicha ecuación se estudiará con detalle en el capítulo 6.

Cauchy escribió en forma extensa, tanto sobre matemáticas puras como sobre matemáticas aplicadas. Sólo Euler contribuyó en mayor medida. Cauchy participó en muchas áreas que incluyen teoría de funciones reales y complejas, teoría de la probabilidad, la geometría, la teoría de propagación de ondas y series infinitas.

Se otorga a Cauchy el crédito de establecer un nuevo estándar de rigor en las publicaciones matemáticas. Después de Cauchy, se tornó más difícil publicar un artículo basado en la intuición; se pedía adhesión estricta a las demostraciones formales.

El vasto volumen de las publicaciones de Cauchy era una inspiración. Cuando la Academia Francesa de las Ciencias inició sus publicaciones periódicas *Comptes Rendu* en 1835, Cauchy les envió su trabajo para que lo publicaran. Pronto la cuenta de impresión de sólo el trabajo de Cauchy creció tanto que la Academia puso un límite de cuatro páginas por artículo publicado. Esta regla todavía está en vigor.

Vale la pena mencionar aquí algunos matemáticos. La expansión de un determinante por cofactores fue utilizada por primera vez por un matemático francés, Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Laplace es más conocido por la transformada de Laplace que se estudia en cursos de matemáticas aplicadas.

Una aportación importante a la teoría de determinantes (después de Cauchy) fue la del matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Fue con él que la palabra "determinante" ganó su aceptación final. Jacobi usó primero un determinante aplicado a las funciones para establecer la teoría de funciones de diversas variables. Más tarde, Sylvester bautizó a este determinante el *jacobiano*. Los estudiantes actuales estudian los jacobianos en los cursos de cálculo de distintas variables.

Por último, ninguna historia de determinantes estaría completa sin el libro *An Elementary Theory of Determinants*, escrito en 1867 por Charles Dogdson (1832-1898). En dicho libro Dogdson da las condiciones bajo las cuales los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Estas condiciones están escritas en términos de los determinantes de los menores de las matrices de coeficientes. Charles Dogdson es más conocido por su seudónimo de escritor, Lewis Carroll. Con ese nombre publicó su famoso libro *Alicia en el país de las maravillas*.

Problemas 2.3

I. Sea E la representación $R_i \leftrightarrows R_j$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que det EB = det E det B. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (15) y la propiedad 4.]

II. Sea E la representación $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que det EB = det E det B. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (16) y la propiedad 7.]

III. Sea E la representación $R_j \rightarrow cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que det EB = det E det B. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (7) y la propiedad 2.]

2.4 DETERMINANTES E INVERSAS

En esta sección se analiza la forma en que se pueden calcular las inversas de las matrices haciendo uso de los determinantes. Más aún, se completa la tarea iniciada en el capítulo 1, de probar el importante teorema de resumen (vea los teoremas 1.8.6 en la página 106 y 1.10.4 en la página 128), que muestra la equivalencia de varias propiedades de las matrices. Se comienza con un resultado sencillo.

TEOREMA 1

Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN

Suponga que A es invertible. Según el teorema 2.3.2 en la página 201, $\det A \neq 0$. Del teorema 2.2.1, página 183

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} \tag{2}$$

lo que implica que

$$\det A^{-1} = 1/\det A$$

Antes de utilizar determinantes para calcular las inversas es necesario definir la *adjunta* de una matriz $A = (a_{ij})$. Sea $B = (A_{ij})$ la matriz de cofactores de A (recuerde que un cofactor, definido en la página 171, es un número). Entonces

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

DEFINICIÓN 1

La adjunta

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B, dada por (3), la matriz de sus cofactores. Entonces, la **adjunta** de A, escrito adj A, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir,

$$\text{adj } A = B^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

Observación. En algunos libros se usa el término **adjugada** de A en lugar de **adjunta** ya que adjunta tiene un segundo significado en matemáticas. En este libro se usará la palabra adjunta.

EJEMPLO 1 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule adj A.

Solución Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3$, $A_{13} = -3$, $A_{21} = -13$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 2$ y $A_{33} = 2$. Así, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

y adj $A = B^t = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 4 × 4**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcule adj A.

Solución Esto es más laborioso ya que se tienen que calcular dieciséis determinantes de 3 × 3. Por ejemplo, se tiene

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Al comparar estos cálculos se encuentra que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{adj } A = B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3 **La adjunta de una matriz de 2 × 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces adj $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

ADVERTENCIA Al calcular la adjunta de una matriz, no olvide transponer la matriz de cofactores.

TEOREMA 2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $C = (c_{ij}) = (A)(\text{adj } A)$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Se tiene

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de adj } A)$$

$$= (a_{i1} \quad a_{i2} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix}$$

Así

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \tag{7}$$

Ahora, si $i = j$, la suma en (7) es igual a $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ que es la expansión de det A sobre el renglón i de A. Por otro lado, si $i \neq j$, entonces del teorema 2.2.6 en la página 193, la suma en (7) es igual a cero. Por lo tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto prueba el teorema.

Ahora se puede establecer el resultado principal.

TEOREMA 3

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A} \tag{8}$$

Observe que el teorema 1.8.4, en la página 100, para matrices de 2×2 es un caso especial de este teorema.

DEMOSTRACIÓN

La primera parte de este teorema es el teorema 2.3.2. Si $\det A \neq 0$, entonces se demuestra que $(1/\det A)(\operatorname{adj} A)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right) = \frac{1}{\det A}[A(\operatorname{adj} A)] \overset{\text{teorema 2}}{=} \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

Pero por el teorema 1.8.7, de la página 107, si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Así,

$$(1/\det A)\operatorname{adj} A = A^{-1}$$

EJEMPLO 4 Uso del determinante y la adjunta para calcular la inversa

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, de ser así, calcule A^{-1}.

Solución Como $\det A = 3 \neq 0$ se ve que A es invertible. Del ejemplo 1

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$

EJEMPLO 5 **Cálculo de la inversa de una matriz de 4 × 4 usando el determinante y la adjunta**

Sea
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine si A es invertible y, si lo es, calcule A^{-1}.

Solución Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, se calcula $\det A = -1 \neq 0$ y por lo tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 2 se tiene

$$\text{adj } A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así
$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota 1. Como ya se habrá observado, si $n > 3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que utilizando adj A; aun para el caso de 4×4 es necesario calcular 17 determinantes (16 para la adjunta de A más $\det A$). Sin embargo, el teorema 3 es de suma importancia ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de $\det A$ (si se puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no existe.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. En cuyo caso, la mejor forma de proceder será considerando muchas veces el cálculo de los determinantes. Esto es particularmente cierto en algunas aplicaciones de ingeniería, como la teoría de control.

En la sección 1.10 se presentó el teorema de resumen (teoremas 1.2.1, 1.8.6 y 1.10.4). Éste es el teorema que una muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

TEOREMA 4 **Teorema de resumen (punto de vista 4)**

Sea A una matriz de $n \times n$. Las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una es cierta, todas lo son).

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v. A es el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. $\det A \neq 0$.

En el teorema 1.8.6 se demostró la equivalencia de las partes *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *vi*). En el teorema 1.10.3 se demostró la equivalencia de las partes *i*) y *v*). El teorema 1 (o teorema 2.3.2) demuestra la equivalencia de *i*) y *vii*).

Problemas 2.4

Autoevaluación

I. El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ es -149. La componente 2,3 de A^{-1} está dada por

a) $-\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, *b*) $\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$,

c) $-\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, *d*) $\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

II. El determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ es 468. La componente 3,1 de A^{-1} es

a) $-\frac{26}{468}$ *b*) $\frac{26}{468}$ *c*) $\frac{46}{468}$ *d*) $\frac{46}{468}$

De los problemas 1 al 15 utilice los métodos de esta sección para determinar si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -21 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

16. Utilice determinantes para demostrar que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si A^t es invertible.

17. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ verifique que det $A^{-1} = 1/\det A$.

18. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ verifique que det $A^{-1} = 1/\det A$.

19. ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?

20. ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

21. Suponga que la matriz A de $n \times n$ es no invertible. Demuestre que $(A)(\text{adj } A)$ es la matriz cero.

22. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta \\ -\text{sen }\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

23. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen }\theta & 0 \\ -\text{sen }\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *d*) II. *a*)

MATLAB 2.4

1. Genere una matriz aleatoria de $n \times m$ con **A = 2*rand(n,m)−1** para algunos valores de n y m tales que $m > n$. Encuentre el determinante de A^tA. ¿Cuál es su conclusión acerca de A^tA? Pruebe su conclusión para otras tres matrices A. ¿Es válida su conclusión si $m < n$?

2. La siguiente secuencia de instrucciones de MATLAB calcula la matriz adjunta de una matriz aleatoria A de orden n

```
% Orden de la matriz de interes
n=4;
% Define matriz de interes
A = rand(n);
% Inicializa matriz que al final sera la matriz adjunta de A
C = zeros(size(A));
% Ciclo para obtener la matriz de cofactores
for i=1:n
   vec_renglon=1:n;
   vec_renglon(i)=[]; % excluir el renglon i
   for j=1:n
      vec_columna=1:n;
      vec_columna(j)=[]; % excluir la columna j
```

```
        C(i,j)=det(A(vec_renglon,vec_columna))*(-1)^(i+j);
    end
end
% Matriz Adjunta, es la transpuesta de la matriz de
% cofactores
C=C';
```

Escriba estas instrucciones en el archivo tipo m **adjunta.m**

a) Modifique el orden de la matriz A dado en la segunda línea a 50. En la pantalla de comando escriba la siguiente secuencia de instrucciones

```
tic;adjunta;toc
tic;adjunta;t_adjunta=toc
```

En la variable **t_adjunta** se guarda el tiempo que se utilizó para ejecutar el programa **adjunta.m**

b) Calcule la adjunta como

```
tic;D = det(A)*inv(A);toc
tic; D = det(A)*inv(A);t_det_inv=toc.
```

En la variable `t_det_inv` se guarda el tiempo que se utilizó para ejecutar los comandos que producen la matriz adjunta de A.

c) Compare adj(A), calculada en el inciso *a*), con D, calculada en el inciso *b*). ¿Por qué esperaría eso? [*Sugerencia:* encuentre la máxima variación entre los elementos de C y D, los comandos **`abs, max`** le pueden ser útiles.]

d) Compare los tiempos de ejecución. ¿Qué descubrió al comparar estos tiempos?

3. Se ha demostrado que A no es invertible si det(A) = 0. Una suposición natural es que si A es cercana a ser no invertible, entonces det(A) estará cerca de 0.

Considere la siguiente matriz C. Verifique que C es no invertible. Dé **`A = C; A(3,3) = C(3,3) + 1.e-10`**. Verifique que A es invertible y observe que A es cercana a la matriz no invertible C. Encuentre **`det(A)`**. ¿Qué puede concluir sobre la "suposición natural" que se mencionó?

$$C = 20 * \begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -10 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & -5 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & -9 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 9 & 10 & 8 \\ 1 & 9 & -17 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA PROYECTO

4. ***a***) Introduzca una matriz A triangular superior de 5×5 con elementos enteros de manera que el determinante de A es 1. Elija valores de c (entero), i y j y realice varias operaciones con renglones de la forma $R_j \rightarrow R_j + cR_j$ de manera que la matriz esté completa, es decir, que tenga el menor número de ceros posible. Llame A a la nueva matriz.

b) Verifique que det(A) es todavía igual a 1. ¿Por qué es esto de esperarse? Encuentre inv(A) y verifique que tiene elementos enteros. ¿Por qué es esto de esperarse?

c) Consulte el problema 9 de MATLAB 1.8 sobre encriptar y decodificar los mensajes. Este problema le pide que encripte un mensaje para su profesor haciendo uso de la matriz A creada anteriormente.

i. Cree un mensaje para su profesor. Utilizando números en lugar de letras, tal y como se describió en el problema 9 de MATLAB 1.8, escriba el mensaje en forma matricial para que pueda multiplicarlo por la derecha por A para codificar el mensaje (puede ser que necesite colocar espacios adicionales al final del mensaje).

ii. Utilice A para encriptar el mensaje.

iii. Entregue el mensaje encriptado a su profesor (como una cadena de números) y la matriz A.

2.5 REGLA DE CRAMER (OPCIONAL)

En la presente sección se examina un viejo método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Considere el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

que puede escribirse en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

Si $\det A \neq 0$, el sistema (2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se puede desarrollar un método para encontrar dicha solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea $D = \det A$. Se definen n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por $\mathbf{b}$. Por último, sea $D_1 = \det A_1$, $D_2 = \det A_2$, … , $D_n = \det A_n$.

TEOREMA 1 **Regla de Cramer**

Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_i = \frac{D_i}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}} \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN La solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero

$$A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora bien, (adj A)**b** es un n-vector cuya componente j es

$$(A_{1j}\ A_{2j}\ \ldots\ A_{nj}),\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \tag{5}$$

Considere la matriz

$$Aj = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \textbf{columna } j \end{array} \tag{6}$$

Si se expande el determinante de A_j respecto a su columna j, se obtiene

$$D_j = b_1\text{ (cofactor de } b_1) + b_2\text{ (cofactor de } b_2) + \cdots + b_n\text{ (cofactor de } b_n) \tag{7}$$

Pero para encontrar el cofactor de b_i, por ejemplo, se elimina el renglón i y la columna j de A_j (ya que b_i está en la columna j de A_j). Pero la columna j de A_j es **b**, y si se elimina se tendrá simplemente el menor ij, M_{ij}, de A. Entonces

$$\text{cofactor de } b_i \text{ en } A_j = A_{ij}$$

De manera que (7) se convierte en

$$D_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \tag{8}$$

Por esta razón se trata de lo mismo que el lado derecho de (5). Por lo tanto, la componente i de (adj A)**b** es D_i y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ \vdots \\ D_n/D \end{pmatrix}$$

y la prueba queda completa.

Nota histórica. La regla de Cramer recibe su nombre en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752). Cramer publicó la regla en 1750 en su libro *Introduction to the Analysis of Lines of Algebraic Curves*. De hecho, existe evidencia que sugiere que Colin Maclaurin (1698-1746) conocía la regla desde 1729; Maclaurin fue quizá el matemático británico más sobresaliente en los años que siguieron a la muerte de Newton. La regla de Cramer es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas. Durante casi 200 años fue fundamental en la enseñanza del álgebra y de la teoría de las ecuaciones. Debido al gran número de cálculos requeridos, se utiliza muy poco en la actualidad. Sin embargo, el resultado fue muy determinante en su tiempo.

EJEMPLO 1 **Solución de un sistema de 3 × 3 utilizando la regla de Cramer**

Resuelva el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (9)$$

Solución El presente ejemplo ya se resolvió en el ejemplo 1.3.1 de la página: haciendo uso de la reducción por renglones. También se pudo resolver calculando A^{-1} (ejemplo 1.8.6, página 101) y después encontrando $A^{-1}\mathbf{b}$. Ahora se resolverá usando la regla de Cramer. Primero, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

de manera que el sistema (9) tiene una solución única. Después $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24,$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12$ y $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18.$ Por lo tanto, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4,$

$x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{12}{6} = -2$ y $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3.$

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema de 4 × 4 usando la regla de Cramer**

Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \end{aligned} \qquad (10)$$

tiene una solución única y encuéntrela utilizando la regla de Cramer.

Solución En el ejemplo 2.2.14 de la página 191 se vio que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

Por lo que el sistema tiene una solución única. Para encontrarla se calcula $D_l = -464$; $D_2 = 280$; $D_3 = -56$; $D_4 = 112$. Así, $x_1 = D_1/D = -464/160$, $x_2 = D_2/D = 280/160$, $x_3 = D_3/D = -56/160$ y x_4 $D_4/D = 112/160$. Estas soluciones se pueden verificar por sustitución directa en el sistema 10.

Problemas 2.5

AUTOEVALUACIÓN

I. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 3x + 8y - z &= 2 \\ -5x - 12y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Si $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -5 & -12 & 6 \end{vmatrix}$, **entonces** $y =$ ________.

a) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -1 \\ 11 & -12 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ -5 & -12 & 11 \end{vmatrix}$

c) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & 11 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\dfrac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

De los problemas 1 al 9 resuelva el sistema dado usando la regla de Cramer.

1. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -7x_1 + 4x_2 &= 47 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 11 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$

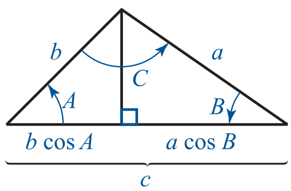
7. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ -x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_1 - x_4 &= 5 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 7 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 &= -3 \\ 3x_3 - 5x_4 &= 2 \end{aligned}$

***10.** Considere el triángulo en la figura 2.2

Figura 2.2



a) Demuestre, utilizando la trigonometría elemental, que

$$\begin{aligned} c\cos A \qquad\qquad\qquad + a\cos C &= b \\ b\cos A + a\cos B \qquad\qquad &= c \\ c\cos B + b\cos C &= a \end{aligned}$$

b) Si se piensa que el sistema del inciso *a*) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cos *A*, cos *B* y cos *C*, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c) Utilice la regla de Cramer para despejar cos C.

d) Utilice el inciso *c*) para probar la **ley de cosenos**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

RESPUESTA A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c*)

MATLAB 2.5

1. Las siguientes instrucciones resuelven el sistema Ax=b utilizando la regla de Cramer

```
% Orden del sistema a resolver
n=50;
% Generar matriz A y vector b;
A=rand(n);
b=rand(n,1);
% Inicializacion del vector de resultados
x=zeros(n,1);
% Calculo del determinante de A
detA=det(A);
% Ciclo para encontrar vector x utilizando
% regla de Cramer
for i=1:n
   C=A;
   C(:,i)=b;
   x(i)=det(C)/detA;
end
```

Guarde las instrucciones en un archivo tipo *m* con nombre **cramer.m**

a) Ejecute las siguientes instrucciones desde la línea de comando de MATLAB

```
tic;cramer;toc
tic;cramer;t_cramer=toc
```

En la variable t_cramer se guarda el tiempo de ejecución de este programa.

b) Resuelva el sistema usando **z = A\b**. Dé los siguientes comandos

```
tic;z=A\b;toc
tic;z=A\b;t_lu=toc
```

En la variable t_lu se guarda el tiempo de ejecución.

c) Compare **x** y **z** calculando **x** – **z** y despliegue el resultado utilizando **format short e**. Compare los tiempos de ejecución. ¿Cuáles fueron sus hallazgos con estas comparaciones?

d) Repita para una matriz aleatoria de 70 × 70. ¿Qué otras afirmaciones puede hacer sobre los tiempos de ejecución?

Resumen

- El **determinante** de una matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ está dado por (p. 168)

$$\text{Determinante de } A = \textbf{det } A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de 3 × 3**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ (p. 169)

- El **menor *ij*** de la matriz A de $n \times n$, denotado por M_{ij}, es la matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j de A. (p. 170)

- El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$A_{ij} = (-i)^{i+j} \det M_{ij}$$ (p. 171)

- ***Determinante de n × n***

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces (p. 172)

$$\det A = a_{11}A_{11} = a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

La suma anterior se denomina la **expansión de det A por cofactores en el primer renglón**.

- Si A es una matriz de $n \times n$, triangular superior, triangular inferior o diagonal, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, entonces (p. 173)

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

- Si $A = LU$ es una factorización LU de A, entonces $\det A = \det U$ (p. 183)

- Si $PA = LU$ es una factorización LU de PA, entonces $\det A = \det U/\det P = \pm\det U$ (p. 184)

- ***Teorema básico***

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

y (pp. 186, 199)

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Es decir, el determinante de A se puede obtener expandiendo en cualquier renglón o columna de A.

- Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces $\det A = 0$. (p. 187)

- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar, entonces $\det A$ se multiplica por c. (p. 187)

- Si A y B son dos matrices de $n \times n$ que son iguales excepto por la columna j (renglón i) y C es la matriz que es idéntica a A y B excepto que la columna j (renglón i) de C es la suma de la columna j de A y la columna j de B (renglón i de A y renglón i de B), entonces $\det C = \det A + \det B$. (p. 188)

- El intercambio de cualesquiera dos columnas o renglones distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1. (p. 188)

- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar y se suma a cualquier otro renglón (columna) de A, entonces det A no cambia. (p. 190)
- Si un renglón (columna) de A es un múltiplo de otro renglón (columna) de A, entonces det $A = 0$. (p. 190)
- det A = det A^t. (p. 191)
- La matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si det $A \neq 0$. (p. 204)
- det AB = det A det B. (pp. 183, 204)
- Si A es invertible, entonces det $A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \qquad \text{(p. 207)}$$

- Sea A una matriz de $n \times n$. La **adjunta** o **adjugada** de A, denotada por adj A, es la matriz de $n \times n$ cuya componente ij es A_{ji}, el cofactor ji de A. (p. 207)
- Si det $A \neq 0$, entonces A es invertible y (p. 207)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes: (p. 208)

  i. A es invertible.

  ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

  iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

  iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

  v. A es el producto de matrices elementales.

  vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

  vii. det $A \neq 0$.

- ***Regla de Cramer***

  Sea A una matriz de $n \times n$ con det $A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por (p. 219)

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A},\ x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{\det A}$$

  donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna j de A por el vector columna $\mathbf{b}$.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 10 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & 100 & 6 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 17 & 19 \\ 0 & 2 & 21 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

De los ejercicios 11 al 18 utilice determinantes para calcular la inversa (si existe).

11. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 19 al 24 resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer.

19. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 \qquad - 5x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 8 \\ -x_3 - x_2 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 8 \\ -x_3 - x_2 &= 3 \\ x_1 - x_3 &= -1 \\ x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$