

RESISTENCIA DE MATERIALES

Conceptos

Los cuerpos absolutamente rígidos, indeformables, con los que se ha tratado en la primera parte de la Materia (ESTÁTICA), no existen en la realidad. Las deformaciones de los cuerpos, debida a la acción de cargas, en realidad son pequeñas y en general pueden ser detectadas solamente con instrumentos especiales. Las deformaciones pequeñas no influyen sensiblemente sobre las leyes del equilibrio y del movimiento del sólido, por lo que la Mecánica Teórica prescinde de ellas. Sin embargo, sin el estudio de estas deformaciones sería imposible resolver un problema de gran importancia práctica como es el de determinar las condiciones para las cuales puede tener lugar la falla de una pieza, o aquellas en las que la misma puede servir sin tal peligro.

Entenderemos por falla de un sistema o de determinadas partes del mismo a la rotura, o sin llegar a ello, a la existencia de un estado inadecuado. Esto último puede ocurrir por varios motivos: deformaciones demasiado grandes, falta de estabilidad de los materiales, fisuraciones, pérdida del equilibrio estático por pandeo, abollamiento o vuelco, etc. Nosotros limitaremos el estudio a la falla por rotura, deformaciones excesivas o pandeo.

La Resistencia de Materiales es la disciplina que estudia las sollicitaciones internas y las deformaciones que se producen en el cuerpo sometido a cargas exteriores. La diferencia entre la Mecánica Teórica y la Resistencia de Materiales radica en que para ésta lo esencial son las propiedades de los cuerpos deformables, mientras que en general, no tienen importancia para la primera. Feodosiev ha dicho que la Resistencia de Materiales puede considerarse como Mecánica de Los Sólidos Deformables.

La Resistencia de Materiales tiene como finalidad elaborar métodos simples de cálculo, aceptables desde el punto de vista práctico, de los elementos típicos más frecuentes de las estructuras o sistemas, empleando para ello diversos procedimientos aproximados. La necesidad de obtener resultados concretos al resolver los problemas prácticos nos obliga a recurrir a hipótesis simplificadoras, que pueden ser justificadas comparando los resultados de cálculo con los ensayos, o los obtenidos aplicando teorías más exactas, las cuales son más complicadas y por ende usualmente poco expeditivas.

Los problemas a resolver haciendo uso de esta ciencia son de dos tipos:

- a) Dimensionamiento
- b) Verificación

En el primer caso se trata de encontrar el material, las formas y dimensiones más adecuadas de una pieza, de manera tal que ésta pueda cumplir su cometido:

- Con seguridad
- En perfecto estado
- Con gastos adecuados

El segundo caso se presenta cuando las dimensiones ya han sido prefijadas y es necesario conocer si son las adecuadas para resistir el estado de sollicitaciones actuantes.

Hipótesis fundamentales

- a) El material se considera macizo (continuo).

El comportamiento real de los materiales cumple con esta hipótesis aun cuando pueda detectarse la presencia de poros o se considere la discontinuidad de la estructura de la materia, compuesta por átomos que no están en contacto rígido entre sí, ya que existen espacios entre ellos y fuerzas que los mantienen vinculados, formando una red ordenada.

Esta hipótesis es la que permite considerar al material dentro del campo de las funciones continuas.

- b) El material de la pieza es homogéneo (idénticas propiedades en todos los puntos).

El acero es un material altamente homogéneo; en cambio, la madera, el hormigón y la piedra son bastante heterogéneos. Sin embargo, los experimentos demuestran que los cálculos basados en esta hipótesis son satisfactorios.

- c) El material de la pieza es isótropo.

Esto significa que admitimos que el material mantiene idénticas propiedades en todas las direcciones.

- d) Las fuerzas interiores, originales, que preceden a las cargas, son nulas.

Las fuerzas interiores entre las partículas del material, cuyas distancias varían, se oponen al cambio de la forma y dimensiones del cuerpo sometido a cargas. Al hablar de fuerzas interiores no consideramos las fuerzas moleculares que existen en un sólido no sometido a cargas.

Esta hipótesis no se cumple prácticamente en ninguno de los materiales. En piezas de acero se originan estas fuerzas debido al enfriamiento, en la madera por el secamiento y en el hormigón durante el fraguado. Si estos efectos son importantes debe hacerse un estudio especial.

- e) Es válido el principio de superposición de efectos.

Ya se ha hecho uso de este principio en la ESTATICA, para el caso de sólidos indeformables. Al tratarse de sólidos deformables este principio es válido cuando:

- Los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas son pequeños en comparación con las dimensiones del sólido.

- Los desplazamientos que acompañan a las deformaciones del sólido dependen linealmente de las cargas. Estos sólidos se denominan "sólidos linealmente deformables".

Por otro lado, siendo que las deformaciones son pequeñas, las ecuaciones de equilibrio correspondientes a un cuerpo cargado pueden plantearse sobre su configuración inicial, es decir, sin deformaciones.

Lo que hemos enunciado en este último párrafo es válido en la mayoría de los casos, no obstante, cuando analicemos el problema del pandeo de una barra elástica veremos que este criterio no puede ser aplicado.

- f) Es aplicable el principio de Saint – Venant

Este principio establece que el valor de las fuerzas interiores en los puntos de un sólido, situados suficientemente lejos de los lugares de aplicación de las cargas, depende muy poco del modo concreto de aplicación de las mismas. Merced a este principio en muchos casos podremos

sustituir un sistema de fuerzas por otro estáticamente equivalente, lo que puede conducir a la simplificación del cálculo.

g) Las cargas son estáticas o cuasi-estáticas

Las cargas se dicen que son estáticas cuando demoran un tiempo infinito en aplicarse, mientras que se denominan cuasi-estáticas cuando el tiempo de aplicación es suficientemente prolongado. Las cargas que se aplican en un tiempo muy reducido se denominan dinámicas.

Método

Al realizarse el estudio de un objeto o sistema real se debe comenzar por la elección de un esquema de cálculo. Para realizar el cálculo de una estructura o sistema se debe, ante todo, separar lo importante de lo que carece de importancia, es decir, se debe esquematizar la estructura prescindiendo de todos aquellos factores que no influyen significativamente sobre el comportamiento del sistema como tal. Este tipo de simplificación es en todos los casos absolutamente necesario, puesto que la solución del problema que considere todas las propiedades de la estructura es imposible debido a que, en general éstas son inagotables.

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular la resistencia del cable de un ascensor (Fig. 1.1). Debemos considerar ante todo el peso de la cabina, su aceleración y, en el caso de que se eleve a gran altura, el peso del cable. Simultáneamente, podremos dejar de lado algunos factores de poca importancia como la resistencia aerodinámica que ofrece al ascensor, la presión barométrica a distintas alturas, la variación de la temperatura con la altura, etc.

Un mismo cuerpo puede tener esquemas de cálculo diferentes, según la exactitud pretendida y según el aspecto del fenómeno que interesa analizar. Por otro lado, un hecho muy importante a tener en cuenta es que a un mismo esquema de cálculo pueden corresponderle muchos objetos reales.

Esto reviste gran importancia, pues al estudiar teóricamente cierto esquema de cálculo se puede obtener la solución de toda una serie de problemas reales comunes al esquema dado.

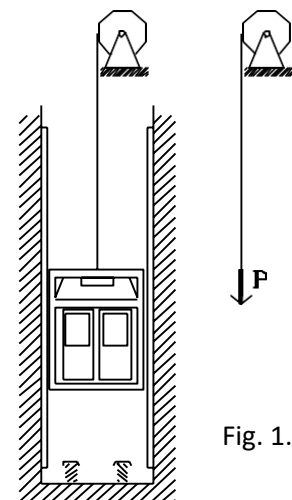


Fig. 1.1

Al escogerse el esquema de cálculo se introducen ciertas simplificaciones en:

- La geometría del objeto. Así un sólido muy alargado se puede idealizar con una barra.
- Los vínculos. Usualmente se consideran ideales.
- Los sistemas de fuerzas aplicadas: es conocido por ejemplo, que las cargas concentradas prácticamente no existen en la realidad, sino que son las resultantes de fuertes presiones localizadas en zonas pequeñas.
- Las propiedades de los materiales. En el ítem anterior hemos hecho consideraciones al respecto.

El paso siguiente a la elaboración del esquema de cálculo corresponde a la resolución numérica del problema, para lo cual, las bases fundamentales de la Resistencia de Materiales se apoyan en la Estática, la que resulta sumamente importante en la determinación de las solicitaciones internas y de las deformaciones.

Aun cuando a partir del encauzamiento del estudio por la vía de las operaciones matemáticas pareciera que el trabajo ha concluido, debemos dejar bien en claro que el cálculo no consiste solamente en el empleo de fórmulas. En efecto, debemos tener muy presente que lo que se ha resuelto no es el sistema real sino un modelo matemático. Esto significa que los resultados deben ser adecuadamente interpretados, y eventualmente corregidos para acercarse lo más próximo posible a la solución real.

Finalmente, y a título de resumen, podemos decir que el método de la Resistencia de Materiales, que no es sino el de la Mecánica Aplicada puede enunciarse de la siguiente manera:

- 1) Elección de un esquema de cálculo (elaboración de un modelo matemático).
- 2) Resolución matemática del problema.
- 3) Interpretación de los resultados en función del sistema físico real.

CONCEPTOS DE TENSIÓN Y DE DEFORMACIONES ESPECÍFICAS

Como introducción al tema observemos la máquina de la figura 1.2 la función de esta prensa es la de ensayar muestras de materiales sometidos a esfuerzos de compresión. Para ello se coloca la muestra sobre el piso de la base y se aprieta el extremo del tornillo contra ella haciendo girar el volante del extremo superior. Esta acción somete así a la porción inferior del tornillo (4) a compresión axial y a las barras laterales (1) a tracción axial. Se observa también que la cruceta de cabeza (3) está sometida a flexión y corte, y la parte superior del tornillo (2) a torsión.

Si consideramos los componentes de la prensa, vemos que los mismos están sometidos a diferentes tipos de solicitaciones, las que como ya se ha estudiado en ESTÁTICA, generan esfuerzos internos. Por ejemplo, podríamos trazar los diagramas característicos correspondientes a momentos flectores y corte en la cruceta de cabeza (3).

Si tomamos ahora una de las barras laterales y le realizamos un corte como el a-a indicado, veremos que para que la parte superior se encuentre en equilibrio (ver figura 1.3), en esta sección debe aparecer una fuerza F que en realidad representa la acción de la otra parte eliminada. Ahora bien, ¿debemos suponer que en la sección indicada aparece en realidad una fuerza concentrada F ? La intuición nos dice que eso no parece lógico, lo razonable es que aparezcan solicitaciones en cada punto de la sección considerada, que no son otra cosa que los esfuerzos que actúan en cada partícula manteniendo la continuidad del cuerpo. La ley matemática que podría corresponderle a estas solicitaciones podría ser la que se indica en la figura 1.3, aunque no lo podemos afirmar rigurosamente si no hacemos un buen estudio del problema.

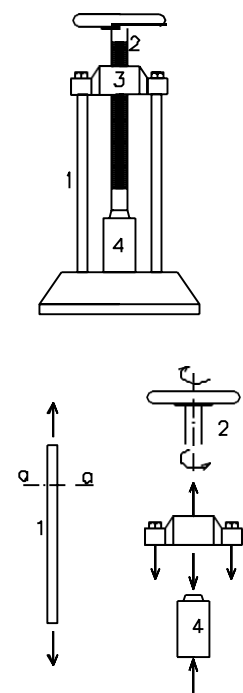


Fig. 1.2

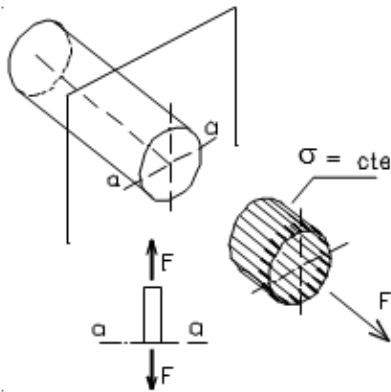


Fig. 1.3

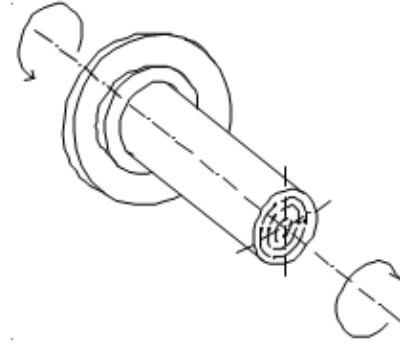


Fig. 1.4

Observemos a continuación el tornillo (2), vemos que en la sección indicada aparece un momento torsor. Nuevamente, es de suponer que este esfuerzo es en realidad el resultante de un conjunto de sollicitaciones que actúan punto a punto, y con una ley semejante a la indicada en la figura 1.4 (Ampliaremos este tema en la Unidad Temática de Torsión). También podemos observar que en este caso las sollicitaciones no son similares a las anteriores, ya que antes teníamos fuerzas distribuidas uniformemente y perpendiculares a la sección, mientras que ahora las fuerzas son tangentes a la sección, con intensidades y sentido cambiantes.

A partir de todas las consideraciones anteriores podemos formular una hipótesis: “Los esfuerzos internos en una sección cualquiera de un cuerpo se desarrollan punto a punto”. Esta hipótesis será de gran importancia y pueden demostrarse experimentalmente.

Si consideramos un cuerpo sometido a cargas exteriores en equilibrio, y lo dividimos en dos partes mediante la intersección con un plano cualquiera, sabemos que en la sección originada aparecerán fuerzas que mantienen el equilibrio de la porción (Fig. 1.5). Si en la sección tomamos un punto P y un entorno de área $\Delta\Omega$, sobre dicha área existirá una fuerza elemental ΔF . Haciendo el cociente de $\Delta F/\Delta\Omega$, con $\Delta\Omega$ tendiendo a cero, definiremos como “vector tensión total o tensión resultante en el punto P, al siguiente límite.

$$\rho = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\Omega} \quad (1.1)$$

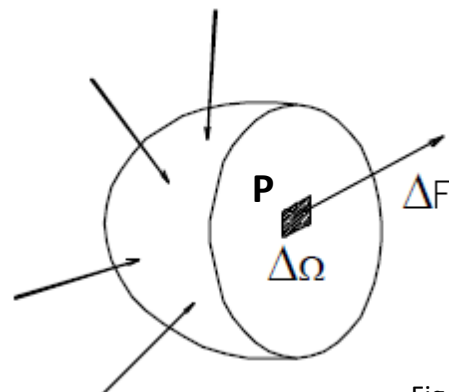


Fig. 1.5

La tensión es una magnitud vectorial, por lo tanto, queda definida mediante tres parámetros: intensidad, dirección y sentido. Por otro lado, la dimensión que tiene es la de una fuerza por unidad de área, y puede medírsela, por ejemplo, en Kg/cm^2 (KN/cm^2).

| Sistema Internacional de Unidades | | |
|-----------------------------------|-----------------------|--|
| Fuerza | Newton | $1 \text{ N} \cong 0,1 \text{ Kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$ |
| Momento | Newton \times metro | $\text{N} \cdot \text{m}$ |
| Presión | Pascal | $\text{Pa} = \text{N} / \text{m}^2$ |

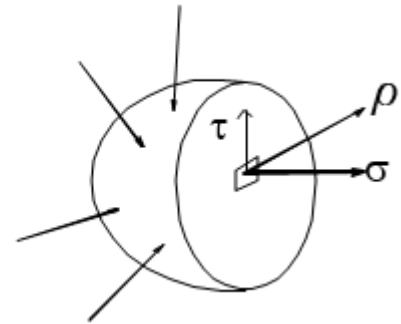


Fig. 1.6

El vector tensión total puede descomponerse según dos direcciones, una normal al plano de la sección y otra contenida en el mismo, obteniéndose así dos componentes de tensión denominadas tensión normal (σ) y tensión tangencial (τ). Ver figura 1.6.

Volviendo nuevamente al caso de la barra lateral de la prensa, cuando más gira el volante superior mayor es la fuerza que debe absorber la barra. Se observa, así mismo, que la barra se estira ligeramente de modo que para cada valor de F se produce un pequeño alargamiento δ .

Como el esfuerzo F es constante en toda la barra, todas las fibras longitudinales están estiradas uniformemente. Podemos entonces establecer el cociente entre el desplazamiento δ y la longitud L de la barra cuando está descargada, a este cociente lo denominamos "deformación unitaria o específica"

Observamos que ésta no tiene unidades, es decir, es una magnitud adimensional. Ahora bien, si todas las fibras se han alargado igual, cada punto del cuerpo está caracterizado por tener la misma deformación específica, aunque en otros casos esto podría no ser así, con lo que cada punto tendría un valor distinto de ϵ .

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1.2)$$

De las consideraciones anteriores podemos deducir que cada punto de la barra tiene una tensión y una deformación. Cabe entonces una pregunta: ¿las tensiones y las deformaciones están relacionadas entre sí? Resolveremos este interrogante en el próximo ítem.

Supongamos ahora que quisiéramos graficar la variación Carga – Desplazamiento (F – δ):

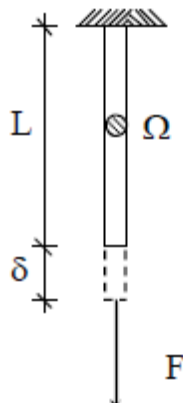


Fig. 1.7

Para nuestro análisis, consideremos la posibilidad de combinar las variables sección y longitud; manteniendo las características del material constante.

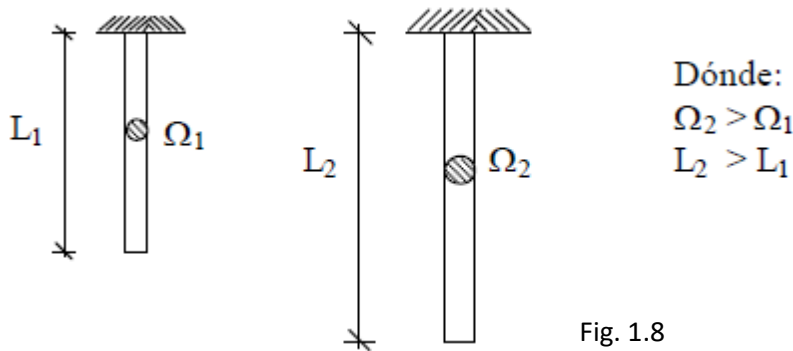


Fig. 1.8

Aun cuando se trata del mismo material, la representación Carga – Desplazamiento va a variar si tomamos en cuenta la sección o la longitud de la barra. La conclusión que se puede obtener del gráfico de la Fig. 1.9 es que: ante una misma carga, y un mismo material, las deformaciones mayores se obtienen en barras de menor sección y mayor longitud.

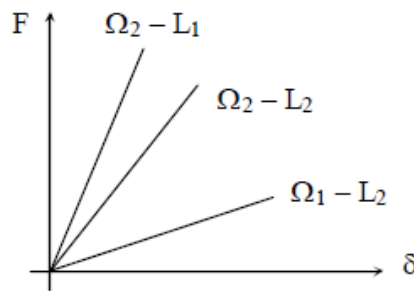


Fig. 1.9

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Elasticidad y Plasticidad

Si retomamos nuevamente el ejemplo de la barra traccionada, podemos ver que, si la fuerza F cesa, el alargamiento δ desaparece completa o parcialmente, es decir, la barra tiende a recuperar su longitud original L . Esta propiedad que posee un material de volver parcial o completamente a su forma inicial una vez que desaparece la carga es lo que se llama “elasticidad”. Si la barra recupera completamente su longitud inicial, se dice que el material es “perfectamente elástico”; de lo contrario se dice que es “parcialmente elástico”.

La “plasticidad” es una propiedad opuesta, un material es “perfectamente plástico” cuando al dejar de actuar la carga que lo deforma mantiene su configuración deformada.

En la realidad ningún material resulta perfectamente elástico o perfectamente plástico. Algunos materiales como el acero, aluminio, goma e incluso la madera y el hormigón pueden ser considerados como perfectamente elásticos dentro de ciertos límites, es decir, si no están excesivamente cargados. Otros materiales como la arcilla y la masilla pueden considerarse como perfectamente plásticos.

Ley de Hooke

La denominada Ley de Hooke constituye la base de la Resistencia de Materiales y es válida dentro de lo que se denomina régimen lineal elástico (Fig. 1.10). Esta ley establece que si la tensión normal σ se mantiene por debajo de un cierto valor σ_p , llamado tensión de proporcionalidad, las deformaciones específicas y las tensiones son directamente proporcionales. (Ec. 1.3)

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (1.3)$$

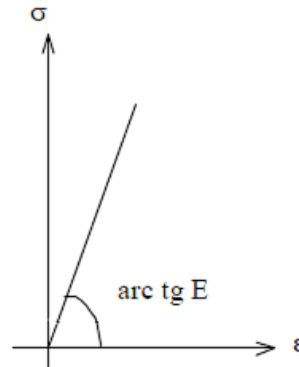


Fig. 1.10

E: Recibe el nombre de Módulo de Elasticidad Longitudinal, o módulo de Young. El valor de E es una característica de cada material.

Diagrama tensión - deformación ($\sigma - \epsilon$) del acero común

Al resolver los problemas de la Resistencia de Materiales nos encontramos con la necesidad de tener ciertos datos experimentales previos sobre los cuales se pueda basar la teoría. Por ejemplo, para poder establecer la ley de Hooke se hace necesario conocer el módulo E, el cual debe determinarse experimentalmente.

Para obtener los datos antes mencionados se pueden realizar distintos tipos de ensayo, de los cuales uno muy difundido es el de tracción. Para este ensayo usualmente se emplean probetas especiales (Fig. 1.11), que consisten en barras de sección circular, las cuales son estiradas en una máquina especialmente diseñada para el ensayo. Cuando una barra está sometido a un esfuerzo axial P, aparecen internamente tensiones normales σ calculables a través de la siguiente expresión:

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \quad (1.4)$$

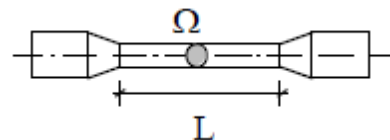


Fig. 1.11: Probeta de acero

Dónde Ω es el área de la sección transversal de la barra. Sabemos también que se originan desplazamientos δ . Si entonces se miden los valores (P ; δ) para cada escalón de carga, se pueden graficar los valores (σ ; ϵ), que se evalúan mediante las expresiones ya conocidas.

Para el caso del acero común, también llamado acero dulce, que es de bajo contenido de carbono, el diagrama tenso-deformación resulta como el de la figura siguiente.

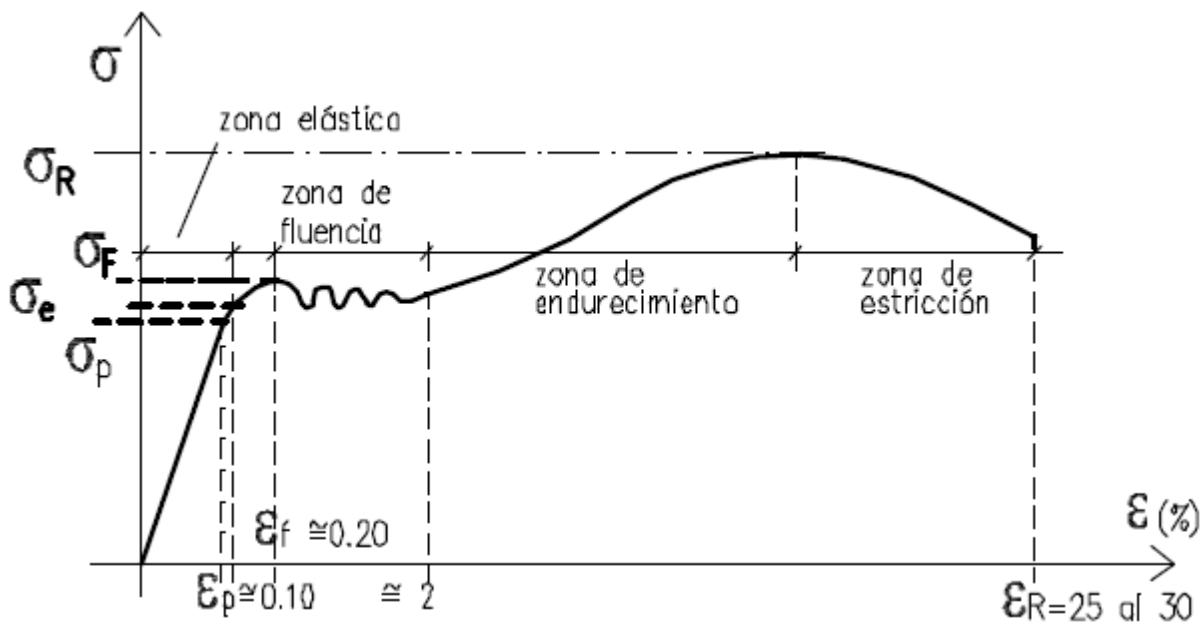


Fig. 1.12: Diagrama Tensión - Deformación

En este diagrama pueden distinguirse ciertas zonas con determinadas características:

a) Período elástico

Este período queda delimitado por la tensión σ_e (límite de elasticidad). El límite de elasticidad se caracteriza porque, hasta llegar al mismo, el material se comporta elásticamente, es decir que, producida la descarga, la probeta recupera su longitud inicial. En la práctica, este límite se considera como tal cuando en la descarga queda una deformación específica remanente igual al 0.001 %.

Este período comprende dos zonas: la primera, hasta el σ_p (límite de proporcionalidad), donde el material verifica la ley de Hooke. La segunda entre σ_p y σ_e , si bien es elástica, no manifiesta proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.

En la primera zona:
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad (1.5)$$

En la segunda zona:
$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = f(\varepsilon) = \text{Módulo de elasticidad reducido} \quad (1.6)$$

En general, los límites de proporcionalidad y de elasticidad difieren muy poco entre sí.

b) Período elasto-plástico

Para valores de tensión superiores al límite elástico, si la pieza fuera descargada no recobraría su dimensión original, apreciándose una deformación remanente acorde con la carga aplicada. A medida que aumenta la sollicitación, la gráfica representativa es la de una función para la cual disminuye el valor de su tangente, tendiendo a anularse en el tramo final del período, al

cual se llega con un valor de tensión que se indica como σ_f (tensión de fluencia).

c) Período plástico (fluencia)

Una vez arribado al valor de tensión σ_f (límite de fluencia), el material fluye, es decir, aumentan las deformaciones sin que exista aumento de tensión. En realidad, este fenómeno no es tan simple, ya que puede verse que la tensión oscila entre dos valores límites y cercanos entre sí, denominados límites de fluencia superior e inferior, respectivamente.

La tensión de proporcionalidad resulta ser aproximadamente el 80% de la tensión de fluencia.

$$\sigma_p \cong 0.8 \sigma_f \quad (1.7)$$

Las investigaciones demuestran que durante la fluencia se producen importantes deslizamientos relativos entre los cristales. Como consecuencia de estos deslizamientos, en la superficie de la probeta aparecen las llamadas líneas de Chernov - Lüders, que forman con el eje de la misma un ángulo de 45°.

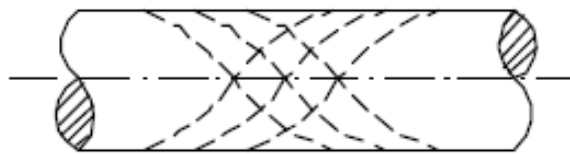


Fig. 1.13

d) Período de endurecimiento y de estricción

Como consecuencia de un reacomodamiento cristalográfico, luego de la fluencia el material sufre un re-endurecimiento, que le confiere la capacidad de incrementar la resistencia, es decir, puede admitir un incremento de carga. Sin embargo, en este período las deformaciones son muy pronunciadas. La tensión aumenta hasta alcanzar un valor máximo σ_R , denominado “tensión de rotura”, a partir del cual la tensión disminuye hasta que alcanza una determinada deformación de rotura, produciéndose la rotura física.



Fig. 1.14: Fenómeno de estricción

La tensión σ_R no es en realidad la máxima tensión que se origina en la probeta sometida a carga. En efecto, alcanzado el valor de la deformación específica correspondiente a σ_R , comienza a manifestarse en la probeta un fenómeno denominado “estricción”. (Fig. 1.14)

Este consiste en la reducción de una sección central de la pieza. Esta reducción, progresiva con el aumento de la carga, hace que las tensiones aumenten y que, en realidad, el diagrama efectivo en lugar de presentar su concavidad hacia abajo muestra un punto de inflexión en las vecindades de σ_R y cambia su curvatura presentando una rama creciente hasta alcanzar la deformación de rotura ϵ_R . Ver Fig. 1.15

Debido a lo que hemos mencionado recientemente el diagrama que acabamos de ver

suele denominarse “diagrama convencional $\sigma - \epsilon$ ”, ya que los cálculos de las tensiones se realizan siempre sobre la base de suponer la sección transversal constante, con área igual a la inicial.

Una valoración cuantitativa del fenómeno de estricción está dada por el “coeficiente de estricción lateral”, el cual se define según la siguiente expresión:

$$\varphi = \frac{\Omega_i - \Omega_f}{\Omega_f}$$

Dónde:

Ω_i = área inicial

Ω_f = área final

En los aceros comunes $\varphi \approx 50 \%$

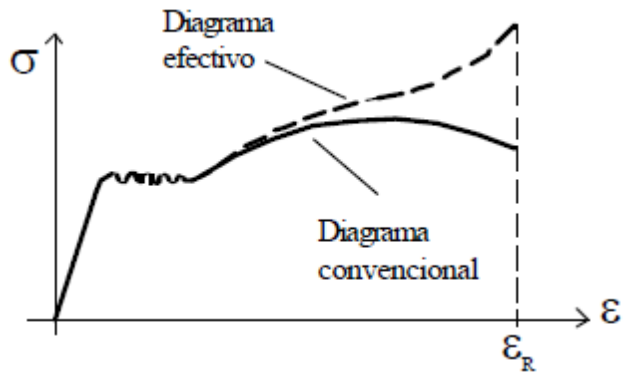


Fig. 1.15: Diagrama efectivo y convencional

Si al realizar el ensayo de un acero común, una vez alcanzado un punto tal como el M de la gráfica de la Figura 1.16, se descarga la probeta, se llega a una tensión nula a través de una recta paralela a la que define el período elástico, quedando una deformación remanente. Si la probeta vuelve a cargarse retoma la curva en el punto N, pero con un nuevo recorrido donde ya no existe el período de fluencia. Así mismo, la zona recta se prolonga hasta un valor $\sigma'_p > \sigma_p$.

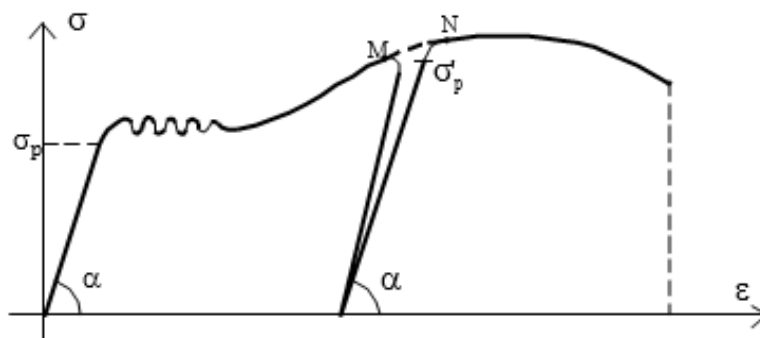


Fig. 1.16: Endurecimiento mecánico del acero dulce

El fenómeno anterior se denomina endurecimiento mecánico o por trabajo en frío, y también puede lograrse por laminado en frío, trafilado o torsión. El trafilado se utiliza para endurecer alambres o barras circulares finas, y el torsionado especialmente para barras redondas (en general, con conformaciones superficiales), para hormigón armado.

Para estos aceros endurecidos mecánicamente o los de dureza natural, logrado por un mayor contenido de carbono o mediante aleaciones especiales, el diagrama $\sigma - \epsilon$ resulta ser substancialmente distinto del que hemos visto hasta este punto. Las características más

importantes son las siguientes:

- Sus límites de proporcionalidad y elasticidad son más elevados que los aceros comunes.
- No poseen un límite de fluencia definido ni tampoco zonas de escurrimiento plástico.
- La deformación de rotura se reduce considerablemente.
- Como consecuencia de no existir un límite de fluencia definido, este se determina en forma convencional como la tensión para la cual la deformación específica remanente alcanzan al 0.2 %.

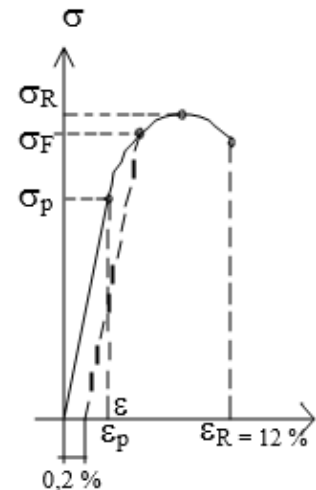


Fig. 1.17: Límite Convencional de Fluencia $\sigma_{0,2}$

Los materiales como el acero dulce, que presentan una gran capacidad de deformación antes de alcanzar la rotura, se denominan “dúctiles”. Podemos decir que estos materiales avisan la rotura física, ya que antes de alcanzarse la misma las deformaciones son tan grandes, que el sistema llega a la falla por este motivo. Los materiales como el acero duro, para los cuales la rotura se produce bruscamente, sin grandes deformaciones previas, se denominan “frágiles”.

Diagrama tensión – deformación para otros materiales

Hay algunos materiales para los cuales se observa que el diagrama $\sigma - \epsilon$ es una curva continua sin tramos rectos, es decir, que prácticamente en ningún momento verifican la ley Hooke. Un ejemplo clásico es el hormigón, para el cual en general interesa su curva $\sigma - \epsilon$ en compresión.

En estos casos no puede hablarse de un módulo de elasticidad único. Caben distinguir tres valores del módulo de elasticidad:

a) Módulo al origen $E = \text{tg } \alpha$ (1.9)

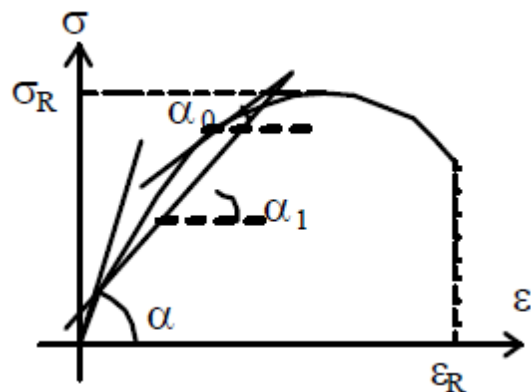


Fig. 1.18: Módulos tangentes y secantes

b) Módulo instantáneo o tangente. Su valor lo da la pendiente a la curva $\sigma - \epsilon$ en cada punto:

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \text{tg } \alpha_0 \quad (1.10)$$

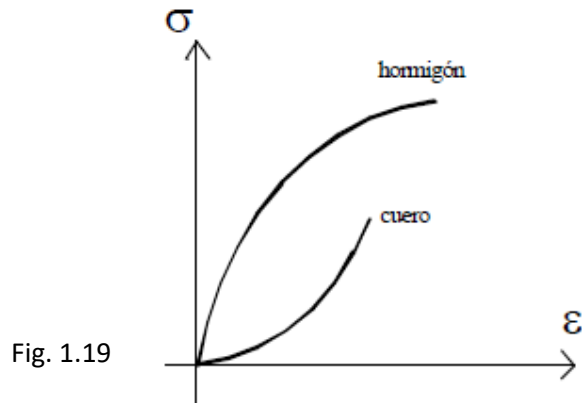
c) Módulo secante, el que viene dado por la tangente trigonométrica del ángulo α_1 .

Para estos materiales, Bach, sobre la base de numerosos ensayos, propuso como relación entre σ y ϵ una ley de tipo exponencial que lleva su nombre:

$$\sigma^k = E \times \epsilon \quad (1.11)$$

donde el coeficiente k depende del material (valor medio, ya que depende de muchas variables):

| Material | Coeficiente k |
|----------|---------------|
| Hormigón | k = 1,15 |
| Cobre | k = 1,10 |
| Latón | k = 1,085 |
| Cuero | k = 0,70 |



En el caso particular en que se toma $k = 1,0$ se obtiene la ley de Hooke. Ciertos materiales presentan además la particularidad de tener un comportamiento diferente en compresión que, a tracción, tal es el caso del hormigón.

Diagramas ideales

Los diagramas que hemos visto suelen no ser prácticos para trabajar con ellos, por lo que en determinadas circunstancias se los reemplaza por diagramas idealizados debidos a Prandtl, que resumen las características fundamentales de los tres tipos básicos de materiales.

El diagrama ideal correspondiente a un material dúctil se compone de dos tramos rectos: uno inclinado, correspondiente al período elástico; el otro horizontal, materializando el período de fluencia. El período de endurecimiento no interesa porque la deformación al final de la fluencia es tan significativa que el material está en falla antes de llegar a la rotura.

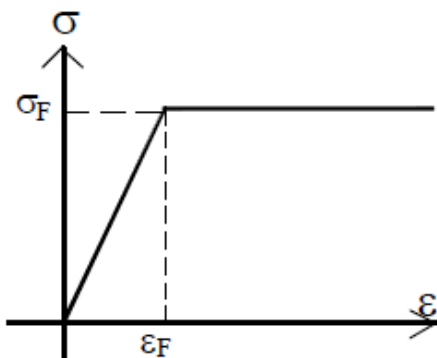


Fig. 1.20.1: Diagrama ideal Material Dúctil

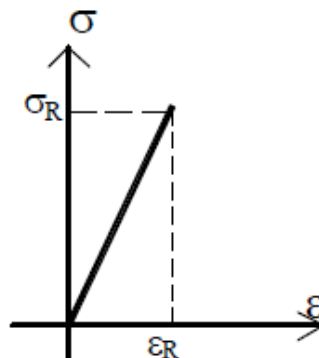


Fig. 1.20.2: Diagrama ideal Material Frágil

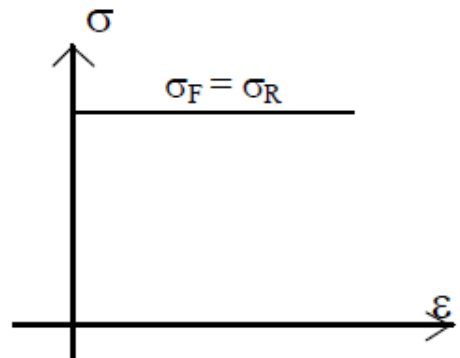


Fig. 1.20.3: Diagrama ideal Material Plástico

En los materiales frágiles el límite de proporcionalidad es muy próximo a la tensión de rotura, prescindiéndose entonces del tramo curvo.

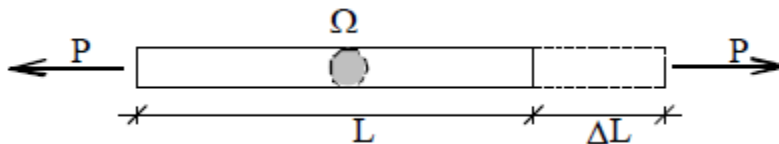
Para los materiales plásticos el diagrama es una recta horizontal, lo que significa que, sometidos a una carga, se deforman indefinidamente sin incremento de tensión.

CONSTANTES ELÁSTICAS

El comportamiento lineal elástico de los sólidos, permite determinar valores característicos o constantes elásticas, para cada material, agrupando entre ellos a los llamados módulos de elasticidad.

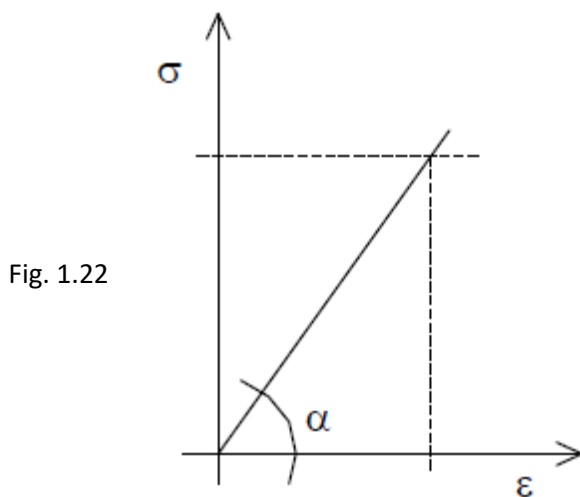
Módulo de elasticidad longitudinal (E)

Consideremos una barra de longitud inicial L sometida a la acción de fuerzas axiales. Esta pieza por acción de la fuerza sufre un alargamiento ΔL .



La relación $\Delta L/L$, deformación específica unitaria, la identificamos con ϵ . Admitiendo para el material el cumplimiento de la ley de Hooke:

la tensión, $\sigma = \frac{P}{\Omega}$ será proporcional a la deformación ϵ .



$$\text{tg } \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E \quad (1.12)$$

$$\sigma = E \epsilon$$

La constante E , llamada módulo de elasticidad longitudinal, es también conocida como módulo de Young. Es la más importante de las cuatro constantes elásticas.

Módulo de elasticidad transversal (G)

Sea un paralelepípedo fijo en su parte inferior y *de baja altura* lo sometemos a una fuerza P en su cara superior.

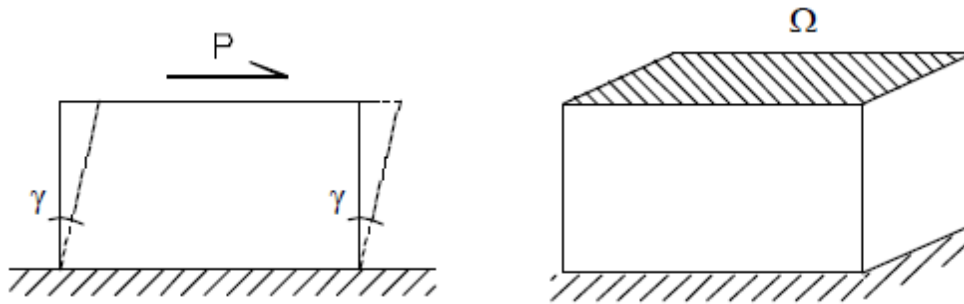


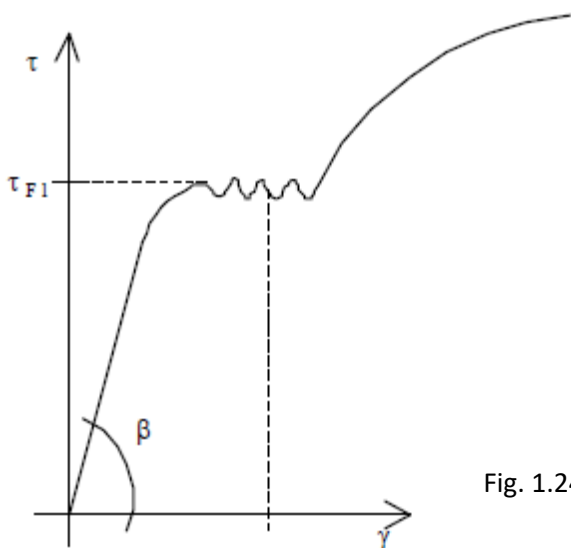
Fig. 1.23: Distorsión

La deformación que se produce, muy pequeña, es una distorsión (deformación angular); al ángulo lo llamamos γ . La tensión (coincidente con el plano de la sección) la designamos como τ , siendo:

$$\tau = \frac{P}{\Omega} \quad (1.13) \quad \tau = \text{tensión tangencial o tensión de corte}$$

De la misma forma que se grafica la relación $\sigma - \epsilon$, puede hacerse con la de $\tau - \gamma$. Para el caso del acero común la gráfica representativa, es similar a la ya vista para las tensiones normales.

Dentro del campo lineal elástico, la constante que vincula la tensión tangencial con la deformación angular, es llamada módulo de elasticidad transversal (G).



$$\text{tg}\beta = \frac{\tau}{\gamma} = G \quad (1.14)$$

$$\tau = G \gamma$$

Para el acero común $\tau_{Fl} \cong 0,57 \sigma_{Fl}$

Fig. 1.24: Diagrama Tensión – Distorsión angular

Módulo de elasticidad de volumen (K)

Se define como el módulo de elasticidad de volumen (K), a la constante que permite obtener la deformación cúbica específica de un paralelepípedo elemental sometido a presión uniforme.

Sea un paralelepípedo inicialmente de lados Δx , Δy , Δz , sometidos a una presión hidrostática p ; cada una de las aristas experimentará un acortamiento, lo cual se traduce en una variación de volumen $\Delta V = V_f - V_i$.

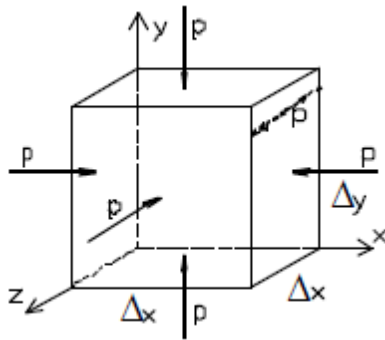


Fig. 1.25: Elemento Diferencial

La deformación específica volumétrica está dada por:

$$\epsilon_v = \frac{V_f - V_i}{V_i} \quad (1.15)$$

Esta deformación se vincula a la presión actuante mediante una constante de proporcionalidad, el módulo K.

$$p = K \epsilon_v \quad (1.16)$$

Siendo ϵ_v adimensional, la unidad de K será (Kg/cm²). Este módulo de elasticidad volumétrica no es independiente de los dos vistos anteriormente.

Coefficiente de Poisson

Al someter a una barra a un esfuerzo axial, además de experimentar deformación según la dirección de la fuerza, el cuerpo también deforma en las direcciones normales a ella.

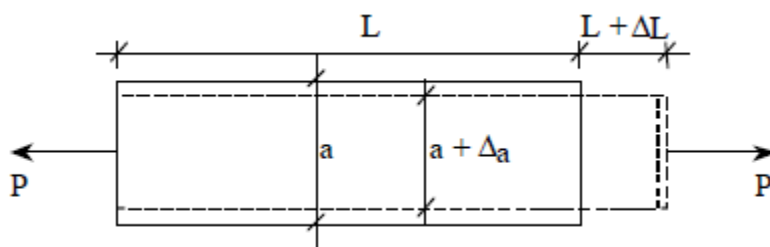


Fig. 1.26

$$\epsilon_L = \frac{\Delta L}{L} \quad ; \quad \epsilon_t = \frac{\Delta a}{a}$$

Llamando con ϵ_L el alargamiento específico en dirección de la fuerza y ϵ_t la deformación específica transversal, se define como coeficiente de Poisson (o módulo de Poisson) a la relación entre:

$$\mu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon_L} \quad (1.17)$$

o bien:

$$m = \frac{1}{\mu} = -\frac{\epsilon_L}{\epsilon_t} \quad (1.18)$$

El valor de μ es función del material, aunque su variación es pequeña. En general para materiales isótropos, μ varía entre 0,25 y 0,33.

En cualquier caso $\mu < 0,50$

Valores de Constantes Elásticas según el material

| Material | E (t/cm ²) | μ |
|------------------------------|------------------------|----------------|
| Acero | 2.000 a 2.100 | 0.22 a 0.33 |
| Cobre | 1.160 a 1.300 | 0.31 a 0.34 |
| Bronce | 1.100 | 0.32 a 0.35 |
| Hierro fundido | 750 a 1600 | 0.23 a 0.27 |
| Aluminio | 760 | 0.32 a 0.36 |
| Madera (paralela a la fibra) | 80 a 120 | - |
| Hormigón | 150 a 350 | 0.10 a 0.20 |
| Mampostería de ladrillo | < 120 | - |
| Caucho | 0.01 | 0.47 |
| Corcho | - | ≈ 0.00 |

CONCEPTOS DE COEFICIENTES DE SEGURIDAD, DE TENSIÓN ADMISIBLE Y DE CARGA ADMISIBLE

Al principio del tema hemos enunciado algunas de las causas que pueden provocar la falla de una pieza. Al realizar el dimensionamiento debemos crear seguridad contra todas las clases de falla posible, la cual puede producirse por coincidir varias circunstancias desfavorables, por ejemplo, un crecimiento no previsto de las cargas que gravitan en las secciones, cuya resistencia se ha debilitado por la existencia de vicios ocultos.

La teoría de probabilidades nos enseña que no se puede lograr una seguridad absoluta, lo único que puede hacerse es mantener reducidas las probabilidades de falla.

“La seguridad de una construcción siempre estará amenazada por incertidumbres, será satisfactoria cuando las probabilidades de falla queden por debajo del valor considerado como admisible”.

Existen numerosas causas de incertidumbres:

- Las hipótesis de cargas
- Las hipótesis de cálculo
- Los errores de cálculos

- Defectos del material
- Errores de las dimensiones
- Errores de ejecución

El método de cálculo fundamental y más difundido de los Coeficientes de Seguridad es el basado en las tensiones. Según este método, el cálculo de la resistencia se realiza controlando el valor de la tensión máxima que se produce en cierto punto de una estructura. La tensión máxima de trabajo no debe superar cierto valor.

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \frac{\sigma_L}{\nu} \quad (1.19)$$

Para el caso de materiales dúctiles el valor límite σ_L es el límite de fluencia, en el caso de materiales frágiles σ_L es el límite de resistencia o tensión de rotura. La relación σ/ν recibe el nombre de “tensión admisible”.

$$\frac{\sigma_L}{\nu} = \sigma_{\text{adm}} \quad (1.20)$$

La elección del coeficiente de seguridad depende del mayor o menor grado de incertidumbre que exista en un problema, y se realiza basándose en toda una serie de criterios, en general probabilísticos, que escapan a los alcances de esta materia. Existen reglamentos que establecen los criterios de Dimensionamiento del coeficiente de seguridad, pero, para los casos más frecuentes ya existen valores establecidos de dichos coeficientes de seguridad. Podemos hacer referencia a disposiciones reglamentarias que tratan sobre construcciones de acero; indican valores que varían entre 1.25 y 1.60 según los recaudos constructivos, el destino de las estructuras y los estados de carga considerados. Para el caso de la madera, material que presenta muchas incertidumbres en cuanto a su comportamiento, los coeficientes de seguridad suelen ser bastantes más grandes.

En los materiales que tienen un período lineal elástico, la tensión admisible se encuentra en dicha zona, por lo tanto, puede considerarse como válida la ley de Hooke, ya que la tensión de trabajo resulta menor o igual que la admisible. Para los materiales donde no existe un período elástico bien definido, también puede considerarse válida la ley de Hooke ya que, para valores bajos de las tensiones, el diagrama $\sigma - \epsilon$ se aproxima bastante a una recta.

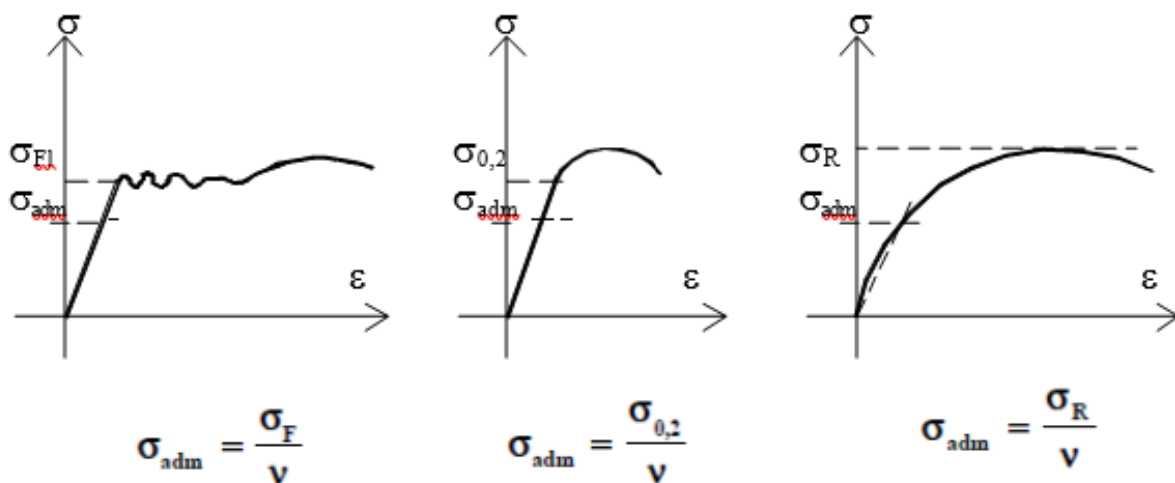


Fig. 1.27: Tensiones admisibles para los distintos materiales

Al criterio utilizado para determinar el valor del coeficiente de seguridad basado en relación de tensiones lo llamaremos criterio elástico. Además de este existe otro al cual lo llamaremos plástico. La denominación utilizada para identificar a cada criterio, está relacionada al método de cálculo empleado para establecer valores de solicitaciones en la estructura: es decir que un método de cálculo elástico, y método de cálculo plástico.

El coeficiente de seguridad a través del criterio plástico se establece en base a relación de cargas. Entenderemos como máxima carga estructural, el límite del valor de carga que puede soportar una estructura sin dejar de cumplir satisfactoriamente los fines constructivos a que está destinada. En este caso el valor del coeficiente de seguridad viene dado por

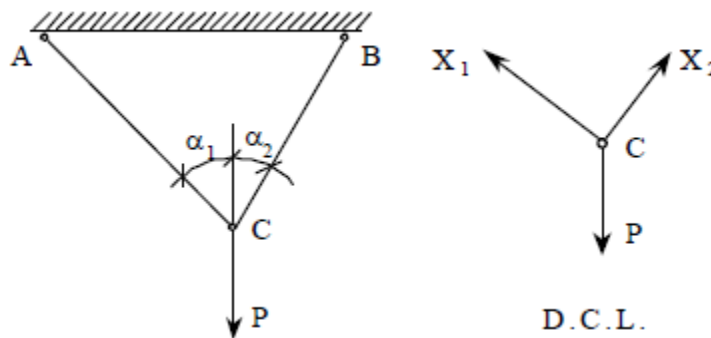
$$v_p = \frac{\text{Máxima Carga Estructural I}}{\text{Carga real (Carga Admisible)}} = \frac{P_{rot}}{P_{trab}(P_{adm})}$$

En la materia nos referiremos al coeficiente que compara tensiones (Criterio Elástico).

Ejemplos de cálculo del Coeficiente de Seguridad.

Interpretación del concepto de tensión admisible.

Dimensionar las barras de la figura con secciones circulares macizas de acero común.
Condición: $\Omega_1 = \Omega_2$.



Datos:

$$\alpha_1 = 45^\circ$$

$$\alpha_2 = 30^\circ$$

$$P = 3 \text{ T}$$

Material: Acero St 37 (Tensión de fluencia = $\sigma_{Fl} = 2.400 \text{ kg/cm}^2$)

Condición de seguridad requerida: $v = 1,71$

$$\sigma = \frac{\sigma_{Fl}}{v} = \frac{2,40 \text{ T/cm}^2}{1,71} = 1,40 \text{ T/cm}^2$$

Por condición estática, calculamos los valores de los esfuerzos normales (X_1 y X_2) en las barras 1 y 2 respectivamente.

$$\sum F_x = 0 \quad X_2 \cdot \text{sen } 30^\circ - X_1 \cdot \text{sen } 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad X_2 \cdot \text{cos } 30^\circ + X_1 \cdot \text{cos } 45^\circ - 3 T = 0$$

$$X_2 = \sqrt{2} \cdot X_1$$

$$(\sqrt{2} \cdot X_1) \cdot \text{cos } 30^\circ + X_1 \cdot \text{cos } 45^\circ - 3 T = 0$$

$$1,93 \cdot X_1 = 3 T \quad X_1 = 1,55 T$$

$$X_2 = \sqrt{2} \cdot 1,55 T \quad X_2 = 2,19 T$$

Dimensionamiento: determinación de la sección necesaria para resistir el esfuerzo máximo

$$\Omega_{nec} = \frac{X_{m\acute{a}x}}{\sigma_{adm}} = \frac{2,19 T}{1,40 T/cm^2} = 1,56 cm^2$$

Tabla

| \varnothing (mm) | Ω (cm ²) |
|-----------------------|--------------------------------|
| 10 | 0,78 |
| 12 | 1,13 |
| 16 | 2,01 |
| 20 | 3,14 |

Como es necesaria una sección de 1,56 cm², de tabla voy a adoptar una sección igual o mayor de manera de cumplir con la condición de resistencia. Si elijo una sección superior me ubico en una condición de seguridad, ya que estoy considerando una sección más grande de la necesaria.

De Tabla adopto una barra de \varnothing 16 mm y de sección $\Omega = 2,01 cm^2$

Tensión de trabajo. Coeficiente de seguridad del sistema:

$$\sigma_{T1} = \frac{X_1}{\Omega_1} = \frac{1,55 T}{2,01 cm^2} = 0,77 T/cm^2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{\sigma_{Fl}}{\sigma_{T1}} = \frac{2,40}{0,77} = 3,12$$

$$\sigma_{T2} = \frac{X_2}{\Omega_2} = \frac{2,19 T}{2,01 cm^2} = 1,09 T/cm^2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{\sigma_{Fl}}{\sigma_{T2}} = \frac{2,40}{1,09} = 2,20$$

$$v_{sistema} = 2,20$$

Mediante el ejemplo anterior tratamos de diferenciar el concepto de tensión admisible, respecto del de tensión de trabajo o de servicio. En el primer caso se determina un valor de referencia, al cual se llega adoptando un coeficiente de seguridad (1,71), que se estima razonable. En tanto los de tensión de trabajo corresponderían a los valores reales que tendría el sistema proyectado, de acuerdo al material utilizado.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE EFECTOS

Muchas veces nos vamos a encontrar con elementos sometidos a sistemas de fuerzas en donde el análisis de efectos es complejo. En estos casos contamos con un recurso que es el Principio de Superposición de Efectos que nos permite analizar el efecto que produce cada fuerza (por ejemplo, el esfuerzo que produce), por separado, y luego sumar dichos efectos para obtener el comportamiento general.

Si tenemos un sólido elástico lineal al cual aplicamos un sistema de fuerzas (causa) se producirán distintos efectos, como, por ejemplo: reacciones de apoyo, tensiones, deformaciones, sollicitaciones, etc.(efectos). Si pensamos en una estructura podemos decir: "El efecto que produce un conjunto de fuerzas que actúan en forma simultánea es igual a la suma de los efectos que produce cada una de las fuerzas por separado". En su expresión más general dice: "La relación entre causa y efecto es lineal." Como consecuencia de ello:

A una causa C_1 le corresponde un efecto E_1 y a una causa C_2 le corresponde un efecto E_2 a una causa $C = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2$, con α y β constantes, le corresponderá un efecto $E = \alpha \cdot E_1 + \beta \cdot E_2$.

El principio implica una absoluta linealidad entre las cargas y las deformaciones, esfuerzos o sollicitaciones.

Esta linealidad no se da principalmente en los siguientes casos:

- a) Cuando no se cumple la ley de Hooke, o sea, no existe linealidad entre tensiones y deformaciones.
- b) Cuando la geometría de la estructura cambia en forma apreciable, y para el equilibrio es necesario tomar en cuenta la modificación sufrida por el sistema.

En la mayor parte de la materia se utilizará el principio de Superposición de efectos para la resolución de problemas (análisis elástico y campo de las pequeñas deformaciones).

ENERGÍA POTENCIAL DE DEFORMACIÓN (Trabajo interno de deformación)

Vamos a analizar el proceso de deformación de un sólido elástico desde el punto de vista energético. Las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo elástico realizan cierto trabajo que designaremos con la letra W . Como resultado del trabajo realizado, en el cuerpo se acumula cierta energía potencial U del sólido deformado. Al mismo tiempo, parte del trabajo sirve para transmitir ciertas velocidades a la masa del sólido, es decir, se transforma en energía cinética K . El balance de la energía, en el supuesto que no haya pérdidas por fricción, calor, etc., es el siguiente:

$$W = U + K \quad (1.21)$$

Si la carga se aplica lentamente, la velocidad del desplazamiento de las masas del cuerpo será pequeña, con lo que la energía cinética será despreciable, luego:

$$W = U \quad (1.22)$$

Al descargar el cuerpo, debido a la energía potencial, se realiza cierto trabajo, el necesario para devolver al cuerpo su forma original.

En este sentido, un sólido es un acumulador de energía, comportándose como un resorte.

Si consideramos, por ejemplo, el caso de una barra traccionada mediante una fuerza que varía en forma estática, para un valor de carga P' la misma tendrá un desplazamiento δ' . Si a partir de ese instante se realiza un incremento de la carga, el alargamiento δ' tendrá un incremento $d\delta'$. La fuerza P realizará en consecuencia un trabajo, el que producirá un incremento de la energía de deformación acumulada.

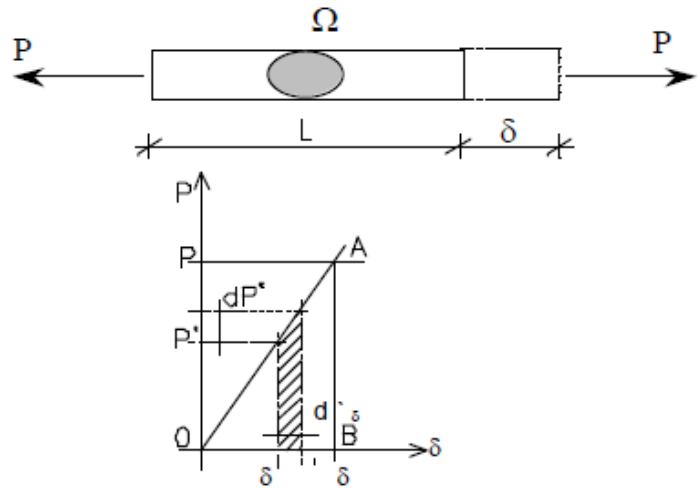


Fig. 1.32: Energía de deformación acumulada en una barra

$$dW = dU = P' d\delta' + \frac{1}{2} dP' d\delta'$$

Como el término $\frac{1}{2} dP' d\delta'$ tiende a cero por ser infinitésimo de orden superior, podemos afirmar:

$$dW = dU \cong P' d\delta' \quad (1.23)$$

Para un determinado valor de P , la energía acumulada será:

$$U = \int_0^{\delta} P' d\delta' = \text{area } OAB = \frac{1}{2} P \delta \quad (1.24)$$

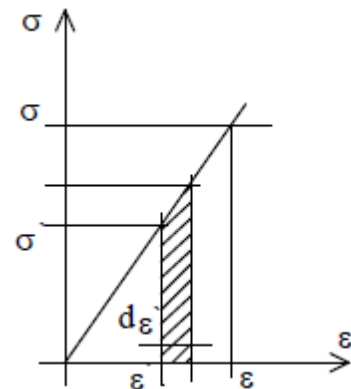
Podemos ver que el trabajo de la fuerza se obtiene tomando la mitad del producto de la fuerza por el desplazamiento correspondiente. Si la relación entre fuerza y desplazamiento no es lineal, el coeficiente $\frac{1}{2}$ es otro. Si la carga mantiene su valor constante desde el comienzo, el coeficiente se hace igual a la unidad.

En algunas aplicaciones es de importancia la energía de deformación por unidad de volumen, también denominada “energía específica de deformación”.

$$U = \int_0^\delta P \, d\delta \quad d\delta = d\varepsilon L \quad P = \sigma \Omega$$

$$U = \int_0^\varepsilon \sigma \Omega L \, d\varepsilon = \Omega L \int_0^\varepsilon \sigma \, d\varepsilon \quad (1.25)$$

$$u = \frac{U}{\text{Vol}} = \int_0^\varepsilon \sigma \, d\varepsilon$$



Podemos ver que la energía de deformación por unidad de volumen resulta ser igual al área encerrada por el diagrama $\sigma - \varepsilon$.

Si la tensión se encuentra dentro del período lineal elástico:

$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (1.26)$$