4.1 OPERACIONES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

El álgebra de Boole son las matemáticas de los sistemas digitales. Es indispensable tener unos conocimientos básicos del álgebra booleana para estudiar y analizar los circuitos lógicos. En el capítulo anterior, se han presentado las operaciones y expresiones booleanas para las puertas NOT, AND, OR, NAND y NOR.

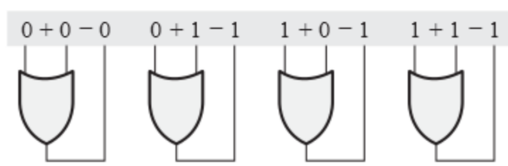
Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

- Definir *variable*.
- Definir *literal*.
- Identificar un término suma.
- Evaluar un término suma.
- Identificar un término producto.
- Evaluar un término producto.
- Explicar la adición booleana.
- Explicar la multiplicación booleana.

Los términos *variable, complemento* y *literal* son términos utilizados en el álgebra booleana. Una ***variable*** es un símbolo (normalmente una letra mayúscula en cursiva) que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Cualquier variable puede tener un valor de 0 o de 1. El **complemento** es el inverso de la variable y se indica mediante una barra encima de la misma. Por ejemplo, el complemento de la variable A es $\overline{A}$. Si $A = 1$, entonces $\overline{A} = 0$. Si $A = 0$, entonces $\overline{A} = 1$. El complemento de la variable A se lee "no A" o "A barra". En ocasiones, se emplea un apóstrofe en lugar de la barra para indicar el complemento de una variable; por ejemplo B' indica el complemento de B. En este libro, sólo se utiliza la barra. Un **literal** es una variable o el complemento de una variable.

Suma booleana

Como hemos visto en el Capítulo 3, la **suma booleana** es equivalente a la operación OR y a continuación se muestran sus reglas básicas junto con su relación con la puerta OR:



En el álgebra de Boole, un ***término suma*** es una suma de literales. En los circuitos lógicos, un término suma se obtiene mediante una operación OR, sin que exista ninguna operación AND en la expresión. Algunos ejemplos de términos suma son $A + B$, $A + \overline{B}$, $A + B + \overline{C}$ y $A + B + C + \overline{D}$.

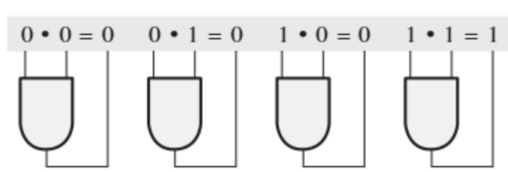
▲ La puerta OR es un sumador booleano.

Un término suma es igual a 1 cuando uno o más de los literales del término es 1. Un término suma es igual a 0 sólo si cada uno de los literales son iguales a 0.

Multiplicación booleana

▲ La puerta AND es un multiplicador booleano.

En el Capítulo 3 vimos también que la **multiplicación booleana** es equivalente a la operación AND y sus reglas básicas junto con sus relaciones con la puerta AND se ilustran a continuación:



NOTAS INFORMÁTICAS

En un microprocesador, la unidad aritmético lógica (ALU) realiza las operaciones aritméticas y lógicas booleanas sobre los datos digitales mediante instrucciones de programa. Las operaciones lógicas son equivalentes a las operaciones de las puertas básicas con las que ya estamos familiarizados, aunque se trabaja con ocho bits como mínimo a la vez. Ejemplos de instrucciones lógicas booleanas son AND, OR, NOT y XOR, que se denominan *mnemónicos*. Un programa en lenguaje ensamblador utiliza estos mnemónicos para especificar una operación. Y otro programa denominado *ensamblador* traduce los mnemónicos a un código binario que puede entender el microprocesador.

En el álgebra de Boole, un ***término producto*** es un producto de literales. En los circuitos lógicos, un término suma se obtiene mediante una operación AND, sin que existe ninguna operación OR en la expresión. Algunos ejemplos de términos suma son AB, $A\overline{B}$, ABC y $A\overline{B}C\overline{D}$.

Un término producto es igual a 1 sólo si cada uno de los literales del término es 1. Un término producto es igual a 0 cuando uno o más de los literales son iguales a 0.

EJEMPLO 4.1

Determinar los valores de A, B, C y D que hacen que el término suma $A+\overline{B}+C+\overline{D}$ sea igual a cero.

Solución Para que el término suma sea 0, cada uno de los literales del término debe ser igual a 0. Por tanto, $A = \mathbf{0}$, $B = 1$ (para que $\overline{B} = 0$) y $D = \mathbf{1}$) para que $\overline{D} = 0$).

$$A+\overline{B}+C+\overline{D} = 0+\overline{1}+0+\overline{1} = 0+0+0+0 = 0$$

Problema relacionado* Determinar los valores de A y B de modo que el término suma $\overline{A}+B$ sea igual a 0.

* Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

EJEMPLO 4.2

Determinar los valores de A, B, C y D que hacen que el término producto $A\overline{B}C\overline{D}$ sea igual a 1.

Solución Para que el término producto sea 1, cada uno de los literales del término debe ser igual a 1. Por tanto, $A = \mathbf{1}$, $B = \mathbf{0}$ (para que $\overline{B} = 1$), $C = \mathbf{1}$ y $D = \mathbf{0}$ (para que $\overline{D} = 1$).

$$A\overline{B}C\overline{D} = 1\cdot\overline{0}\cdot 1\cdot\overline{0} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Problema relacionado Determinar los valores de A y B de modo que el término suma $\overline{A}\overline{B}$ sea igual a 1.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.1

Las respuestas se encuentran al final del capítulo

1. Si $A = 0$, ¿cuánto vale $\overline{A}$?
2. Determinar los valores de A, B y C que hacen que el término suma $\overline{A}+\overline{B}+C$ sea igual a 0.
3. Determinar los valores de A, B y C que hacen que el término producto $A\overline{B}C$ sea igual a 1.

4.2 LEYES Y REGLAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Al igual que en otras áreas de las matemáticas, existen en el álgebra de Boole una serie de reglas y leyes bien determinadas que tienen que seguirse para aplicarla correctamente. Las más importantes son las que se presentan en esta sección.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Aplicar las leyes conmutativas de la adición y multiplicación. ■ Aplicar las leyes asociativas de la adición y multiplicación. ■ Aplicar la ley distributiva. ■ Aplicar las doce reglas básicas del álgebra de Boole.

Leyes del álgebra de Boole

Las leyes básicas del álgebra de Boole (las **leyes conmutativas** de la suma y la multiplicación, y las **leyes asociativas** de la suma y la multiplicación y la **ley distributiva**) son las mismas que las del álgebra ordinaria. Cada una de las leyes se ilustra con dos o tres variables, pero el número de variables no está limitado a esta cantidad.

Leyes conmutativas La *ley conmutativa de la suma* para dos variables se escribe como sigue:

Ecuación 4.1

$$A + B = B + A$$

Esta ley establece que el orden en que se aplica a las variables la operación OR es indiferente. Recuerde que cuando se aplica a los circuitos lógicos, la suma y la operación OR es lo mismo. La Figura 4.1 ilustra la ley conmutativa aplicada a una puerta OR, en la que se puede ver que es indistinto a qué entrada asignemos cada una de las variables. (El símbolo ≡ significa "equivalente a".)

FIGURA 4.1 Aplicación de la ley conmutativa de la suma.

La *ley conmutativa de la multiplicación* para dos variables es

Ecuación 4.2

$$AB = BA$$

Esta ley establece que el orden en que se aplica a las variables la operación AND es indiferente. La Figura 4.2 ilustra esta ley tal y como se aplica a la puerta AND.

FIGURA 4.2 Aplicación de la ley conmutativa de la multiplicación.

Leyes asociativas La *ley asociativa de la suma* para tres variables se escribe como sigue:

Ecuación 4.3

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Esta ley establece que cuando se aplica la operación OR a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables. La Figura 4.3 ilustra esta ley aplicada a puertas OR de dos entradas.

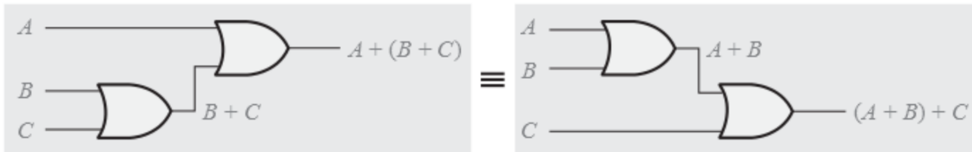


FIGURA 4.3 Aplicación de la ley asociativa de la suma.

La *ley asociativa de la multiplicación* para tres variables se escribe del siguiente modo:

Ecuación 4.4 $$A(BC) = (AB)C$$

Esta ley establece que cuando se aplica la operación AND a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables. La Figura 4.4 ilustra esta ley aplicada a puertas AND de dos entradas.

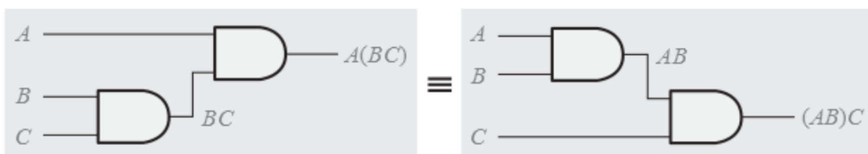


FIGURA 4.4 Aplicación de la ley asociativa de la multiplicación.

Ley distributiva La *ley distributiva* para tres variables se escribe como sigue:

Ecuación 4.5 $$A(B + C) = AB + AC$$

Esta ley establece que aplicar la operación OR a dos o más variables y luego aplicar la operación AND al resultado de esa operación y a otra variable aislada, es equivalente a aplicar la operación AND a la variable aislada con cada uno de los sumandos y luego realizar la operación OR con los productos resultantes. La ley distributiva expresa también el proceso de *sacar factor común* en el que la variable común A se saca como factor de los productos parciales, como por ejemplo, $AB + AC = A(B + C)$. La Figura 4.5 ilustra la ley distributiva mediante su implementación de puertas.

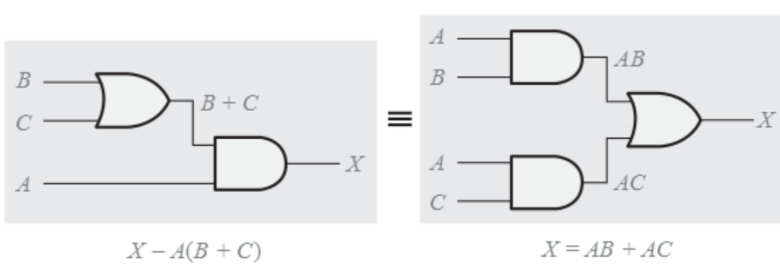


FIGURA 4.5 Aplicación de la ley distributiva.

Reglas del álgebra booleana

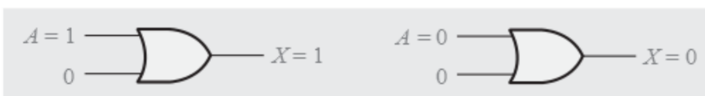
La Tabla 4.1 enumera las doce reglas básicas, muy útiles, para la manipulación y simplificación de **expresiones booleanas**. Las nueve primeras reglas las veremos en términos de su aplicación a las puertas lógicas. Las reglas 10 a 12 se obtendrán a partir de las reglas más sencillas y de las leyes anteriormente explicadas.

1. $A + 0 = A$	**7.** $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	**8.** $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	**9.** $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	**10.** $A + AB = A$
5. $A + A = A$	**11.** $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	**12.** $(A + B)(A + C) = A + BC$

A, B o C pueden representar una sola variable o una combinación de variables.

TABLA 4.1 Reglas básicas del Álgebra de Boole.

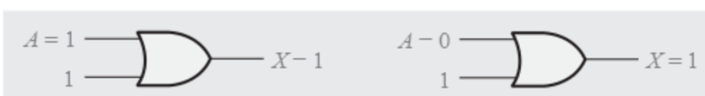
Regla 1. $A + 0 = A$ Si aplicamos la operación OR a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 1, la salida es igual a 1 y, por tanto, igual a A. Si A es 0, la salida es 0 e igualmente idéntica a A. Esta ley se ilustra en la Figura 4.6 en la que la entrada inferior está siempre a 0.



$X = A + 0 = A$

FIGURA 4.6

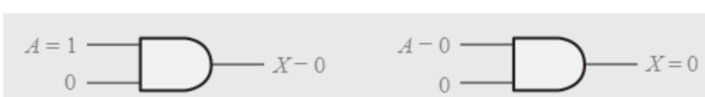
Regla 2. $A + 1 = 1$ Si se aplica la operación OR a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a 1. Un 1 en una entrada de una puerta OR produce siempre un 1 en la salida, independientemente del valor de la otra entrada. Esta regla se ilustra en la Figura 4.7, en la que la entrada inferior está siempre a 1.



$X - A + 1 - 1$

FIGURA 4.7

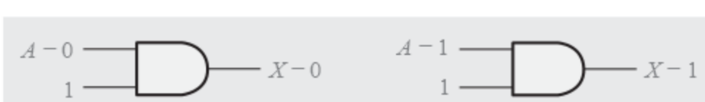
Regla 3. $A \cdot 0 = 0$ Si se aplica la operación AND a una variable y a 0, el resultado es siempre igual a 0. Siempre que una de las entradas de una puerta AND sea 0, la salida siempre es 0, independientemente del valor de la otra entrada. Esta regla se ilustra en la Figura 4.8, en la que la entrada inferior está siempre a 0.



$X - A \bullet 0 - 0$

FIGURA 4.8

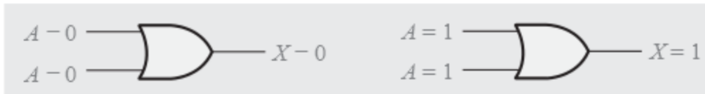
Regla 4. $A \cdot 1 = A$ Si se aplica la operación AND a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a la variable. Si la variable A es 0, la salida de la puerta AND será siempre 0, mientras que si A es 1, la salida será 1, dado que las dos entradas son 1. Esta regla se ilustra en la Figura 4.9, en la que la entrada inferior está siempre a 1.



$X = A \bullet 1 = A$

FIGURA 4.9

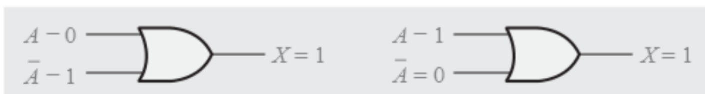
Regla 5. $\boldsymbol{A + A = A}$ Si se aplica la operación OR a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 0, entonces $0 + 0 = 0$, mientras que si A es 1, $1 + 1 = 1$. Esto se muestra en la Figura 4.10, en la que se aplica la misma variable a ambas entradas.



$X = A + A = A$

FIGURA 4.10

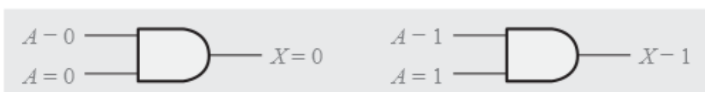
Regla 6. $\boldsymbol{A + \overline{A} = 1}$ Si se aplica la operación OR a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 1. Si A es 0, entonces $0 + \overline{0} = 0 + 1 = 1$. Si A es 1, entonces $1 + \overline{1} = 1 + 0 = 1$. En la Figura 4.11 podemos ver una puerta OR en la que sus entradas son una variable y su complemento.



$X - A + \overline{A} - 1$

FIGURA 4.11

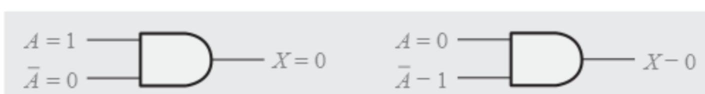
Regla 7. $\boldsymbol{A \cdot A = A}$ Si se aplica la operación AND a una variable consigo misma, el resultado siempre es igual a la variable. Si A = 0, entonces $0 \cdot 0 = 0$, y si $A = 1$, entonces $1 \cdot 1 = 1$. Esta regla se ilustra en la Figura 4.12.



$X = A \bullet A = A$

FIGURA 4.12

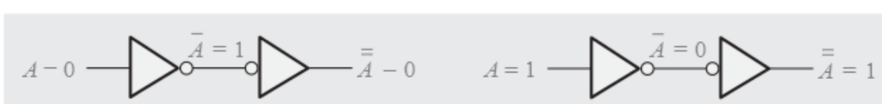
Regla 8. $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$ Si se aplica la operación AND a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 0. Esta regla se basa en que siempre A o $\overline{A}$ será 0, y además en que cuando se aplica un 0 a una de las entradas de una puerta AND, la salida siempre es 0. Esta regla se ilustra en la Figura 4.13.



$X = A \bullet \overline{A} = 0$

FIGURA 4.13

Regla 9. $\boldsymbol{\overline{\overline{A}} = A}$ El complemento del complemento de una variable es siempre la propia variable. El complemento de la variable A es $\overline{A}$ y el complemento de $\overline{A}$ será de nuevo A, que es la variable original. Esta regla se muestra en la Figura 4.14 mediante el uso de dos inversores.



$\overline{\overline{A}} = A$

FIGURA 4.14

Regla 10. $\boldsymbol{A + AB = A}$ Esta regla se puede obtener aplicando la ley distributiva y las reglas 2 y 4, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A + AB &= A(1 + B) && \text{Sacar factor común (ley distributiva)} \\ &= A \cdot 1 && \text{Regla 2: } (1 + B) = 1 \\ &= A && \text{Regla 4: } A \cdot 1 = A \end{aligned}$$

La demostración se muestra en la Tabla 4.2, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual

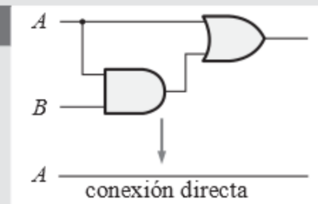


TABLA 4.2 Regla 10: $A + AB = A$.

Regla 11. $\boldsymbol{A + \overline{A}B - A + B}$ Esta regla puede demostrarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A + \overline{A}B &= (A + AB) + \overline{A}B && \text{Regla 10: } A = A + AB \\ &= (AA + AB) + \overline{A}B && \text{Regla 7: } A = AA \\ &= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B && \text{Regla 8: sumar } A\overline{A} = 0 \\ &= (A + \overline{A})(A + B) && \text{Sacar factor común} \\ &= 1 \cdot (A + B) && \text{Regla 6: } A + \overline{A} = 1 \\ &= A + B && \text{Regla 4: eliminar el 1} \end{aligned}$$

La demostración se muestra en la Tabla 4.3, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

igual

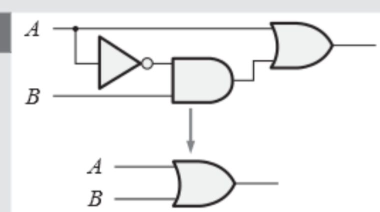


TABLA 4.3 Regla 11: $A + \overline{A}B = A + B$.

Regla 12. $\boldsymbol{(A + B)(A + C) = A + BC}$ Esta regla puede demostrarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (A + B)(A + C) &= AA + AC + AB + BC && \text{Ley distributiva} \\ &= A + AC + AB + BC && \text{Regla 7: } AA = A \\ &= A(1 + C) + AB + BC && \text{Sacar factor común (ley distributiva)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A \cdot 1 + AB + BC && \text{Regla 2: } 1 + C = 1 \\
&= A(1 + B) + BC && \text{Sacar factor común (ley distributiva)} \\
&= A \cdot 1 + BC && \text{Regla 2: } 1 + B = 1 \\
&= A + BC && \text{Regla 4: } A \cdot 1 = A
\end{aligned}
$$

La demostración se muestra en la Tabla 4.4, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual

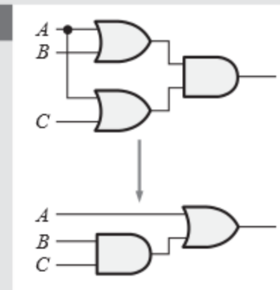


TABLA 4.4 Regla 12: $(A + B)(A + C) = A + BC$.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.2

1. Aplicar la ley asociativa de la adición a la expresión $A+(B+C+D)$.
2. Aplicar la ley distributiva a la expresión $A(B+C+D)$.

4.3 TEOREMAS DE DeMORGAN

DeMorgan, matemático que conoció a Boole, propuso dos teoremas que constituyen una parte muy importante del álgebra de Boole. En términos prácticos, los teoremas de DeMorgan proporcionan una verificación matemática de la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y las puertas NOR y negativa-AND, que se han tratado en el Capítulo 3.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Enunciar los teoremas de DeMorgan. ■ Relacionar los teoremas de DeMorgan con la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y entre las puertas NOR y negativa-AND. ■ Aplicar los teoremas de DeMorgan para simplificar las expresiones booleanas.

El primer teorema de DeMorgan se enuncia de la siguiente forma:

El complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables.

O dicho de otra manera

El complemento de dos o más variables a las que se aplica la operación AND es equivalente a aplicar la operación OR a los complementos de cada variable.

La fórmula para expresar este teorema para dos variables es:

Ecuación 4.6 $$\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$$

El segundo teorema de DeMorgan se enuncia como sigue:

El complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables.

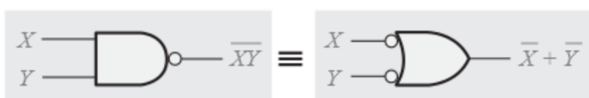
O dicho de otra manera,

El complemento de dos o más variables a las que se aplica la operación OR es equivalente a aplicar la operación AND a los complementos de cada variable.

La fórmula para expresar este teorema es:

Ecuación 4.7 $$\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$$

Las puertas equivalentes y tablas de verdad correspondientes a las Ecuaciones 4.6 y 4.7 se muestran en la Figura 4.15.



NAND Negativa-OR

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{XY}$	$\overline{X}+\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

NOR Negativa-AND

Entradas		Salida	
X	Y	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

FIGURA 4.15 Equivalencias de las puertas lógicas y tablas de verdad que ilustran los teoremas de DeMorgan. Observe la igualdad entre las dos columnas de salida de cada tabla. Esto demuestra que las puertas equivalentes realizan la misma función lógica.

Como se ha comentado, los teoremas de DeMorgan se aplican también a expresiones en las que existen más de dos variables. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los teoremas de DeMorgan a expresiones de 3 y 4 variables.

EJEMPLO 4.3

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{XYZ}$ y $\overline{X+Y+Z}$.

$$\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}$. .

EJEMPLO 4.4

Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones $\overline{WXYZ}$ y $\overline{W+X+Y+Z}$.

$$\overline{WXYZ} = \overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$$
$$\overline{W+X+Y+Z} = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}}$

Como se ha establecido en las Ecuaciones 4.6 y 4.7 que enuncian los teoremas de DeMorgan, cada variable puede representar una combinación de otras variables. Por ejemplo, X puede ser igual al término $AB + C$, e Y puede ser igual a $A + BC$. De esta forma, si aplicamos el teorema de DeMorgan para dos variables expresado según $\overline{XY} = \overline{X}+\overline{Y}$ a la expresión $\overline{(AB+C)(A+BC)}$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{(AB+C)(A+BC)} = (\overline{AB+C})+(\overline{A+BC})$$

Observe que el resultado anterior tiene dos términos $\overline{AB+C}$ y $\overline{A+BC}$, a los que podemos aplicar individualmente otra vez el teorema de DeMorgan $\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$ del siguiente modo:

$$(\overline{AB+C})+(\overline{A+BC}) = (\overline{AB})\overline{C}+\overline{A}(\overline{BC})$$

De esta manera obtenemos otros dos términos en la expresión a los que de nuevo podemos aplicar el teorema de DeMorgan. Estos términos son $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Una última aplicación del teorema de DeMorgan nos proporciona el siguiente resultado:

$$(\overline{AB})\overline{C}+\overline{A}(\overline{BC}) = (\overline{A}+\overline{B})\overline{C}+\overline{A}(\overline{B}+\overline{C})$$

Aunque este resultado puede simplificarse aún más utilizando las leyes y reglas de Boole, los teoremas de DeMorgan ya no se pueden aplicar más.

Aplicación de los teoremas de DeMorgan

El siguiente procedimiento ilustra la aplicación de los teoremas de DeMorgan y del álgebra de Boole a la expresión:

$$\overline{\overline{A+B\overline{C}}+D(\overline{E+\overline{F}})}$$

Paso 1. Identificamos los términos a los que se pueden aplicar los teorema de DeMorgan y consideramos cada término como una única variable, por lo que establecemos $\overline{A+B\overline{C}} = X$ y $D(\overline{E+\overline{F}}) = Y$.

Paso 2. Dado que $\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$.

$$\overline{(\overline{A+B\overline{C}})+(D(\overline{E+\overline{F}}))} = (\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$

Paso 3. Utilizamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para eliminar la bara doble sobre el término de la izquierda (esto no es parte del teorema de DeMorgan).

$$(\overline{\overline{A+B\overline{C}}})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})})$$

Paso 4. Aplicando el teorema de DeMorgan al segundo término:

$$(A+B\overline{C})(\overline{D(\overline{E+\overline{F}})}) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}}))$$

Paso 5. Empleamos la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para cancelar las barras dobles sobre la parte $E+\overline{F}$ del término.

$$(A+B\overline{C})(\overline{D}+(\overline{\overline{E+\overline{F}}})) = (A+B\overline{C})(\overline{D}+E+\overline{F})$$

Los siguientes tres ejemplos ilustrarán detalladamente cómo emplear los teoremas de DeMorgan.

EJEMPLO 4.5

Aplicar los teoremas de DeMorgan a cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\overline{(A+B+C)D}$ **(b)** $\overline{ABC+DEF}$ **(c)** $\overline{A\overline{B}+\overline{C}D+EF}$

Solución **(a)** Sea $A + B + C – X$ y $D – Y$. La expresión $\overline{(A+B+C)D}$ es de la forma $\overline{XY} = \overline{X}+\overline{Y}$ y se puede escribir como sigue:

$$\overline{(A+B+C)D} = \overline{A+B+C}+\overline{D}$$

A continuación, aplicamos el teorema de DeMorgan al término $\overline{A+B+C}$

$$\overline{A+B+C}+\overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{D}$$

(b) Sea $ABC = X$ y $DEF = Y$. La expresión $\overline{ABC+DEF}$ es de la forma $\overline{X+Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$ y podemos reescribirla de la forma:

$$\overline{ABC+DEF} = (\overline{ABC})(\overline{DEF})$$

A continuación, aplicamos el teorema de DeMorgan a cada uno de los términos $\overline{ABC}$ y $\overline{DEF}$.

$$(\overline{ABC})(\overline{DEF}) = (\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{D}+\overline{E}+\overline{F})$$

(c) Sean $A\overline{B} = X, \overline{C}D = Y$ y $EF = Z$. La expresión $\overline{A\overline{B}+\overline{C}D+EF}$ es de la forma $\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ y se puede reescribir como:

$$\overline{A\overline{B}+\overline{C}D+EF} = (\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{C}D})(\overline{EF})$$

A continuación, aplicamos el teorema de DeMorgan a cada uno de los términos $\overline{A\overline{B}}$, $\overline{\overline{C}D}$ y $\overline{EF}$.

$$(\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{C}D})(\overline{EF}) = (\overline{A}+B)(C+\overline{D})(\overline{E}+\overline{F})$$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\overline{ABC}+D+E}$.

EJEMPLO 4.6

Aplicar los teoremas de DeMorgan a cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\overline{(\overline{A+B})+\bar{C}}$ **(b)** $\overline{(\bar{A}+B)+CD}$ **(c)** $\overline{(A+B)\bar{C}\bar{D}+E+\bar{F}}$

Solución

(a) $\overline{(\overline{A+B})+\bar{C}} = (\overline{\overline{A+B}})\bar{\bar{C}} = (A+B)C$

(b) $\overline{(\bar{A}+B)+CD} = (\overline{\bar{A}+B})\overline{CD} = (\bar{\bar{A}}\bar{B})(\bar{C}+\bar{D}) = A\bar{B}(\bar{C}+\bar{D})$

(c) $\overline{(A+B)\bar{C}\bar{D}+E+\bar{F}} = ((\overline{(A+B)\bar{C}\bar{D}})(\overline{E+\bar{F}}) = (\bar{A}\bar{B}+C+D)\bar{E}F$

Problema relacionado Aplicar los teoremas de DeMorgan a la expresión $\overline{\bar{A}B(C+\bar{D})+E}$.

EJEMPLO 4.7

La expresión booleana de una puerta OR-exclusiva es $A\bar{B}+\bar{A}B$. Tomando esto como punto de partida, desarrollar una expresión para una puerta NOR-exclusiva, utilizando los teoremas de DeMorgan y aquellas leyes o reglas que puedan aplicarse.

Solución En primer lugar se complementa la expresión OR-exclusiva y luego se aplican los teorema de DeMorgan del siguiente modo:

$$\overline{A\bar{B}+\bar{A}B} = (\overline{A\bar{B}})(\overline{\bar{A}B}) = (\bar{A}+\bar{\bar{B}})(\bar{\bar{A}}+\bar{B}) = (\bar{A}+B)(A+\bar{B})$$

A continuación se aplica la ley distributiva y la regla 8 $(A \cdot \bar{A} = 0)$.

$$(\bar{A}+B)(A+\bar{B}) = \bar{A}A + \bar{A}\bar{B} + AB + B\bar{B} = \bar{A}\bar{B} + AB$$

La expresión resultante para una puerta XNOR es $\bar{A}\bar{B}+AB$. Observe que esta expresión es igual a 1 siempre que ambas variables sean 0 o 1.

Problema relacionado A partir de la expresión para una puerta NAND de 4 entradas, utilizar los teoremas de DeMorgan para desarrollar una expresión para una puerta negativa-OR de 4 entradas.

REVISIÓN DE LA SECCIÓN 4.3

1. Aplicar los teoremas de DeMorgan a las siguientes expresiones:

(a) $\overline{ABC}+(\overline{\bar{D}+E})$ **(b)** $\overline{(A+B)C}$ **(c)** $\overline{A+B+C}+\overline{\bar{D}E}$

4.4 ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

El álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el funcionamiento de un circuito lógico formado por una combinación de puertas lógicas, de tal forma que la salida puede determinarse por la combinación de los valores de entrada.

Al finalizar esta sección, el lector deberá ser capaz de:

■ Determinar las expresiones booleanas de una combinación de puertas. ■ Evaluar el funcionamiento lógico de un circuito a partir de su expresión booleana. ■ Construir una tabla de verdad.