APLICACIONES GRÁFICAS DE FUNCIONES COMPLEJAS

Maggi, Claudio(1); Martín, Héctor(1); De Rosa Maria Anna(2)

(1) Facultad Regional Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.(2) Faculty of Engineering, Department of Structural Engineering, (DiSGG), Italy.

ncmaggi@arnet.com.ar, hmartin@frrq.utn.edu.ar, derosa@scienzadellecostruzioni.co.uk

Área Temática: Aplicaciones de la Matemática

Palabras Claves: Funciones en variable compleja, Gráficos en variable compleja, fluidos.

Resumen

En el presente trabajo se muestran representaciones gráficas de funciones complejas utilizadas para ilustrar y optimizar la comprensión de diversas nociones conceptuales, en cursos de tercer año de las carreras de ingeniería. Se ilustran diversas maneras de representar funciones complejas. Pueden verse gráficos de las componentes de estas funciones, expresadas analíticamente en forma binómica y polar, transformaciones del plano y mapeo conforme, así como estudio de ceros y polos. Finalmente una aplicación de este tipo de funciones complejas a la mecánica de fluidos, donde pueden visualizarse líneas de corriente y curvas equipotenciales, con diversos tipos de fuentes, sumideros y obstáculos.

1. Introducción

Una función compleja es una función definida sobre un conjunto S de números complejos. La misma asigna a cada complejo z en S un número complejo w. Denotando $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos y f a la función, entonces $f:S\rightarrow \mathbb{C}$, o también $w = f(z)$. El conjunto S se denomina *dominio de definición* de f.

Dado que la representación gráfica de un número complejo $z = x + i\,y$ en un plano resulta un punto de coordenadas (x,y), para visualizar la relación funcional antes descripta se hace necesario contar con dos planos: uno para los valores complejos del dominio S y otro para el conjunto de las imágenes obtenidas al aplicar $w = f(z)$ a dicho conjunto S. Al primer plano se lo denomina *plano z)* y al segundo, *plano w).* Cuando z varía o describe una trayectoria sobre un conjunto S en el *plano z)*, el conjunto de puntos que son imágenes dadas por $w = f(z)$en el *plano w)* muestra cómo actúa la función w en dicha trayectoria o en los puntos de S. A este proceso por el cual una función compleja transforma los puntos del plano se le llama *transformación* o *mapeo*. La *figura 1* muestra el proceso general de transformación del plano.

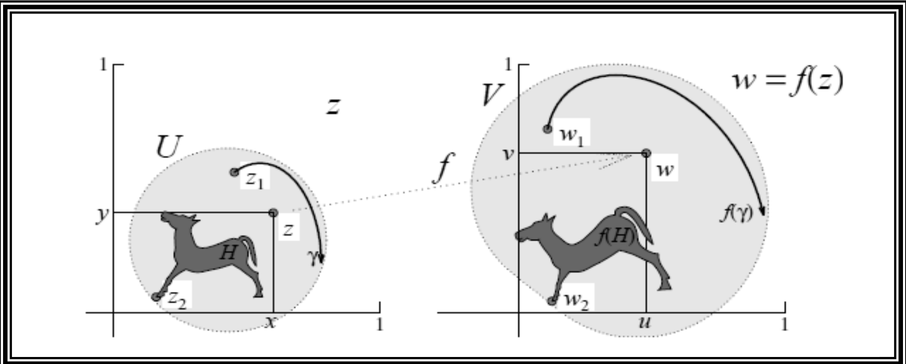

Figura 1: Las transformaciones del plano mediante funciones complejas

2. Fundamentación

La implementación de una propuesta didáctica que contribuya a mejorar el aprendizaje de la Matemática en los niveles superiores de las carreras de ingeniería es un objetivo perenne en el cuerpo docente del departamento de Ciencias Básicas. En el año 2007 se creó un espacio liberado de la exigencia formal de las clases habituales, apto para fomentar la experimentación, la innovación y la creatividad, en un ambiente provisto de una herramienta tecnológica muy potente, tanto desde el punto de vista simbólico, numérico como gráfico.

Otro objetivo fundacional del espacio curricular creado es la integración del área disciplinar Matemática con otras áreas de la carrera de ingeniería, como Física y sus disciplinas derivadas, presentes en el mismo nivel de la carrera. De esta manera se pretende lograr un integración horizontal de la asignatura Matemática para Ingeniería Electromecánica.

El espacio curricular en el que se desarrolló la actividad objeto del presente trabajo, el Taller de Mathematica, posee características didácticas innovadoras: se ubica fuera del horario de cursado, no posee obligatoriedad de asistencia, la modalidad es del tipo taller: se plantean problemas de asignaturas del mismo nivel, con el apoyo presencial y virtual del docente. Cabe destacar que los Trabajos Prácticos planteados se aprueban mediante un coloquio para poder rendir la asignatura vinculada, esto significa que en el nivel de tercer año debe aprobar el taller antes de presentarse a rendir la asignatura Matemática para Ingeniería Electromecánica.

3. Desarrollo

Se describe en forma sintética la experiencia de cátedra realizada en el marco del Taller de Mathematica sobre aplicaciones gráficas de funciones de variable compleja. Es una serie de desarrollos exploratorios sobre representaciones gráficas y aplicaciones físicas del tema.

a) Representaciones y mapeos

Es posible representar una función compleja mediante dos planos: uno para la variable z y otro para la variable w, de modo que se visualice la *transformación* o *aplicación* de los puntos del plano de acuerdo a las leyes de la función por $w = f(z)$.

En las figuras siguientes se muestran mapeos de funciones complejas realizados en el Taller de Mathematica. En la *figura 2* las funciones se expresaron en forma binómica $w = u + i.v$ Para ilustrar los casos de forma uniforme, se han utilizado el Dominio conjuntos de puntos de valor constante $x = cte$ e $y = cte$.

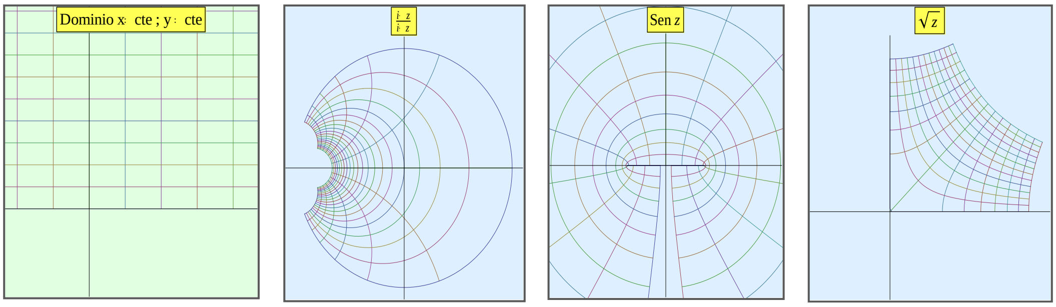

Figura 2: Mapeos del plano complejo mediante funciones sencillas. Forma binómica.

En la *figura 3* las funciones se desarrollaron en su forma polar $w = \psi_{\varphi}$, y los conjuntos del Dominio como módulo $\rho = cte$ y argumento $\theta = cte$.

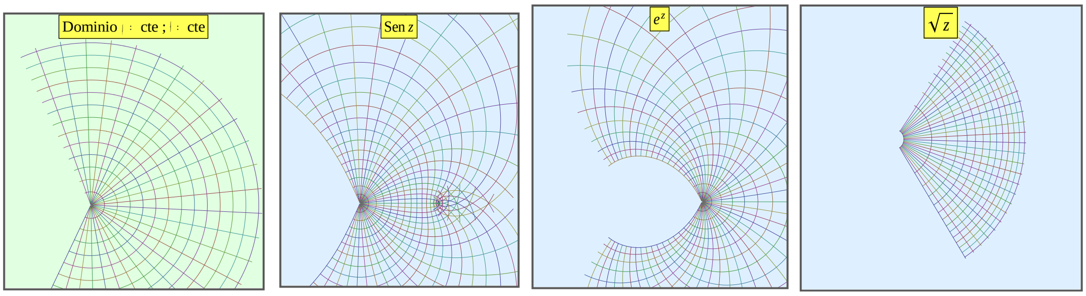

Figura 3: Mapeos del plano complejo mediante funciones sencillas. Forma polar

En la resolución de problemas físicos, estas transformaciones del plano mediante funciones complejas se utiliza a menudo para obtener regiones más simples del mismo, conservando ciertas propiedades que no afecten la solución final. Es menester entonces conocer con exactitud la mecánica que gobierna estas transformaciones, y esta herramienta gráfica proporciona una verificación de las operaciones con funciones utilizadas en cada caso. Más adelante se expondrán aplicaciones de este método al estudio de fenómenos físicos.

b) Representación gráfica de componentes de funciones complejas

Cuando un concepto logra representarse de maneras diferentes, aumenta la posibilidad de comprenderlo, y si se logra dominar el proceso de cambio de una representación a otra, la eficacia didáctica de la actividad aumenta. La representación gráfica de funciones complejas puede realizarse de diversas maneras, dada la existencia de componentes reales e imaginarias tanto para el Dominio como para el Conjunto de imágenes.

Esto aparentemente constituye una dificultad adicional para la comprensión, pero las posibilidades analíticas y gráficas del programa Mathematica brindan una oportunidad interesante que vale la pena explorar. Enumeramos algunas formas de representación gráfica que se han explorado:

c) **<u>Gráfica de las componentes de una función</u>**

Sea una función *f*: $D \subset R^2 \rightarrow R^2$, donde *f* es, por ejemplo, la componente Real *u(x,y)* de *f(z)*, la componente Imaginaria *v(x,y)* de *f(z)* -si se han expresado en forma binómica-, el Módulo $\psi(\rho,\ \theta)$ o el Argumento $\varphi(\rho,\ \theta)$. Las diferentes gráficas se muestran en la *figura 4*.

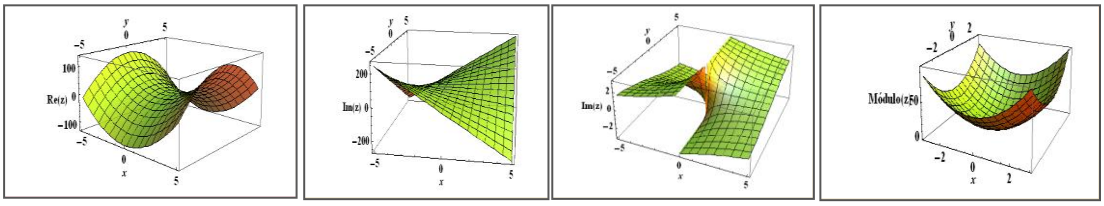

Figura 4: ***f(z) =5. (z + 0.2)²***. Imágenes de la componente Real, Imaginaria, Argumento y Módulo.

c$_1$) **<u>Gráfica del campo de vectores o campo de direcciones</u>**

Esta representación está asociada a las funciones componentes Real e Imaginaria de una función compleja *w = u(x,y)+i.v(x,y)* . Resulta útil en aplicaciones físicas, donde al modelizar una situación práctica aparecen ecuaciones diferenciales. La *figura 5* ilustra sobre esta forma de representación.

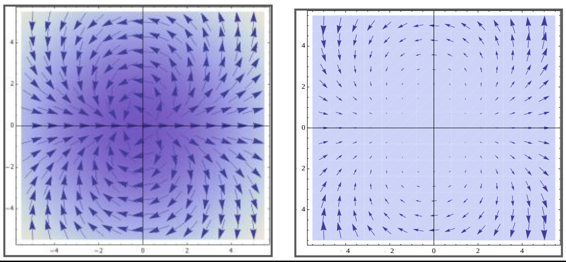

Figura 5: ***f(z) =5. (z + 0.2)²***. Imágenes del campo de vectores asociado con *f(z)*.

c$_2$) **<u>Gráfica de una función compleja expresada en forma polar mediante el método de *coloración del dominio*.</u>**

Esta técnica permite modificar los colores del dominio de acuerdo al *argumento de f(z)* y lo combina con gráficos de grillas que son gobernadas por el *módulo de f(z).* De esta manera en un mismo gráfico puede apreciarse la variación de las dos componentes de la función, sobre el fondo del *plano z)*, lo que posibilita la ubicación de puntos notables que puede contener la función.

.

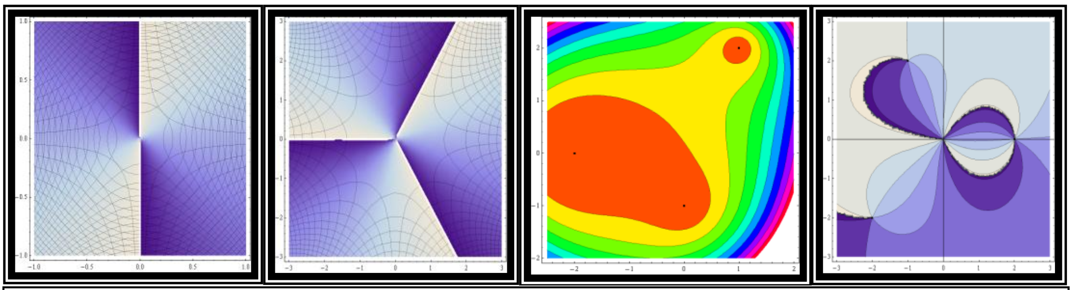

Figura 6: Imágenes de funciones complejas obtenidas con el método de coloración del dominio.

d) **<u>Estudio de ceros y polos de funciones complejas mediante la combinación de las técnicas anteriores.</u>**

El manejo diestro de estas técnicas de representación gráfica permite investigar la ubicación de ceros y polos, así como estudiar la convergencia de la función hacia dichos puntos. El trabajo puede extenderse al estudio de derivadas de funciones analíticas y armónicas, de aplicación en el modelizado de situaciones reales. La *figura 7* muestra un ejemplo de este estudio.

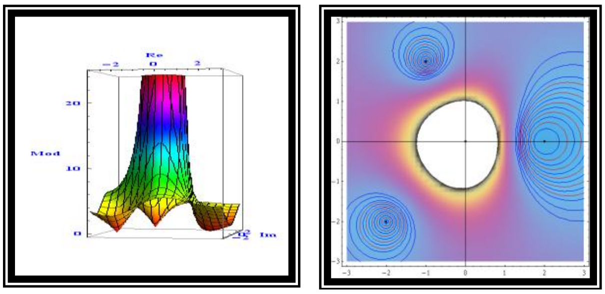

Figura 7: Imágenes de la función $w = f(z) = \frac{(z-2)^2.(z+1-2i).(z+2+2i)}{z^3}$ mostrando ceros y polos.

e) **Aplicaciones a Mecánica de Fluidos:**

Las funciones complejas pueden utilizarse en la modelización y el análisis del flujo de fluidos. En este caso se ha aplicado al estudio de un movimiento bidimensional estacionario (independiente del tiempo). La velocidad de una partícula de fluido en un punto está dada por
$V(x,y) = p(x,y) + i\, q(x,y)$, las que pueden expresarse como $p(x,y)= \Phi_x(x,y)$ y $q(x,y)= \Phi_y(x,y)$.
La función $\Phi(x,y)$ se denomina *potencial de velocidad* y la función armónica conjugada de $\Phi(x,y)$ es $\psi(x,y)$, de modo que la función analítica compleja $F(z) = \Phi(x,y)+ i\ \psi(x,y)$ se denomina *potencial complejo del flujo* y la función $\psi(x,y)$ *función de corriente.*
Los gráficos de las curvas de nivel de $\Phi(x,y) = cte$ (curvas equipotenciales) y $\psi(x,y)=cte$ (curvas de corriente) permiten estudiar el movimiento de un fluido en un plano, ya que las trayectorias representan los caminos reales de las partículas de fluido al modelar el flujo, y las curvas equipotenciales resultan ortogonales a las de corriente.
La práctica asociada a esta teoría se basó en modelado de movimiento de fluidos, desde los más simples como flujos uniformes, manantiales y sumideros, hasta la superposición de los casos anteriores, movimientos irrotacionales y de rotación, torbellinos y aplicaciones de transformaciones del plano complejo a circulaciones alrededor de obstáculos de forma diversa. En la *figura 8* se exhiben algunos resultados.

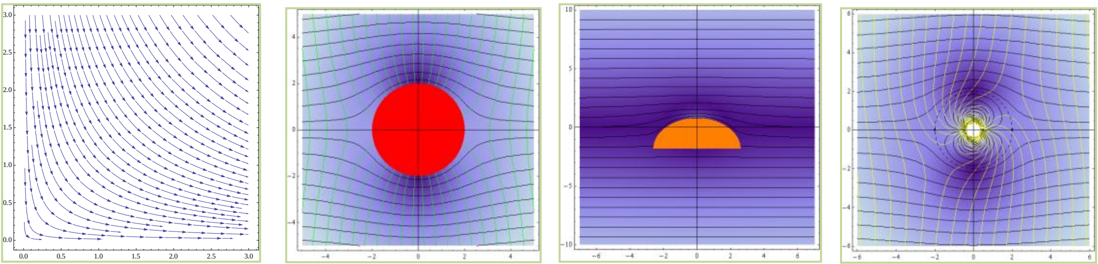

Figura 8: Imágenes de modelización de movimiento bidimensional de fluidos mediante funciones complejas.

4. Resultados y conclusiones

La experiencia acumulada desde el año 2007 hasta la fecha permite comprobar la eficacia de esta instancia de aprendizaje, desde varias perspectivas:

Desde el alumno: Se verificó un aumento en el interés por participar en las clases, una mejora en el rendimiento académico en exámenes, promoción de la asignatura y mejora en la calidad de los trabajos realizados. Se plantearon trabajos de exploración sobre aplicación de contenidos a cuestiones prácticas, ya presentados en otros encuentros sobre experiencias de cátedra .

Desde el docente: La experiencia para el equipo de cátedra resultó valiosa, permitiendo enriquecer el proceso enseñanza-aprendizaje, afianzar la compresión de los conceptos y plantear nuevos temas de investigación exploratoria. Se logró la aplicación de los temas matemáticos a situaciones problemáticas de otras asignaturas.

La permanencia de esta propuesta didáctica permitirá que la misma se consolide, mejore y se perfeccione, con el aporte de alumnos y docentes de la cátedra y de otras asignaturas, en un intercambio continuo de experiencias.

5. Referencias bibliográficas

- CROWDY, D. **Analytical solutions for uniform potencial flow past multiple cylinders**. European Journal of Mechanics B/Fluids. 25 (2006). Pp. 459-470. Disponible en http://www2.imperial.ac.uk/~dgcrowdy/_publications/PubFiles/Paper-15.pdf

- CHORIN, A.; MARSDEN, J. **A mathematical introduction to fluid mechanics**. Disponible en ftp://pvictor.homeftp.net/public/Sci_Library/Phys%20Library/PC_Classical%20physics/PCfm_Fluid%20mechanics/Chorin%20A.,%20Marsden%20J.E.%20Mathematical%20introduction%20to%20fluid%20mechanics%20(Springer,%20draft,%202000)(181s).pdf

- CHURCHILL, R., BROWN, J. **Variable compleja y aplicaciones**. 7º Edic. Mc Graw-Hill. 2004.

- KERVOR, J. **Aplicaciones técnicas de las funciones de variable compleja**. Edit. Don Bosco. 1967.

- KNODEL, M. **Complex variables and conformal mapping in fluid flow dynamics**. Drake University Conference on Undergraduate Research in the Sciences. Abril 2005. Disponible en http://escholarshare.drake.edu/handle/2092/266.

- LUNDMARK, H**. Visualizing complex analytic functions using domain coloring.** Department of Mathematics Linköping University, Sweden. Mayo 2004. Disponible en http://www.mai.liu.se/~halun/complex/domain_coloring-unicode.html

- MAIXNER, M. **The use of MathCad in teaching ideal fluid with complex variables**. Int J. Engng Ed. Vol 15 N° 6. Pp 456-458. 1999. Disponible en http://www.ijee.ie/articles/Vol15-6/ijee1102.pdf

- OLVER, P. **Complex analysis and conformal mapping**. Disponible en http://www.math.umn.edu/~olver/.

- SPIEGEL, M. **Variable compleja**. Mc Graw-Hill. 1991.

- O'NEIL, P. **Matemáticas avanzadas para ingeniería.** Thomson. 6ta. Edición. 2008.

- WOLFRAM, S. **Wolfram Demonstration Project**. Disponible en http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Complex+Analysis&limit=20