

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL**

**MATEMÁTICA PARA  
INGENIERÍA  
ELECTROMECAÁNICA**

**FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA**



## Función compleja: de una variable compleja

**Definición:** dado un conjunto  $A$  incluido en el conjunto de los complejos, se denomina función compleja de una variable compleja con dominio en  $A$  y con valores en  $\mathbb{C}$ , a toda ley que haga corresponder a cada uno de los elementos de  $A$  un único elemento en  $\mathbb{C}$ .

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}$$

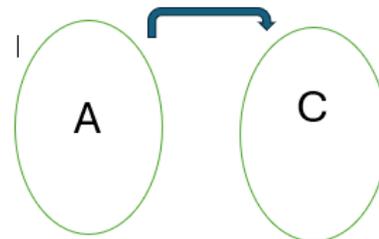
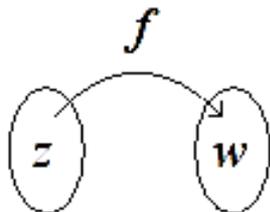
$$z \in A \quad w \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow f(z) = w$$

Se conviene llamar a  $z$  variable independiente, y a  $w$  variable dependiente.

El recorrido de la función es el conjunto de imágenes de los elementos del conjunto  $A$ , según la ley  $f$ . También se lo denomina imagen del conjunto  $A$  dado por  $f$ .

$$R: f(A) = \{w \in \mathbb{C} / w = f(z), z \in A\}$$

En conjunto:



***Forma binómica de una función compleja de una variable compleja.***

Sea:  $z = x + yi$                        $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

Vemos en esta función que  $z$  es función de  $x \wedge y$ . Por lo tanto, en la función  $w = f(z)$ ,  $w$  será función de  $x \wedge y$ . Pero como también  $w$  es función de un número complejo también, podemos escribirla en forma binómico y también en función de  $x \wedge y$ .

$$w = f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + i v(x, y) \quad u, v: \text{función de dos variables reales}$$

$$\operatorname{Re}(w) = u(x, y)$$

$$\operatorname{Im}(w) = v(x, y)$$

Ejemplo:

$$w : f(z) = z^2 \quad z : x + yi$$

$$w : (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2(-1) = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$$

$$\operatorname{Im}(z^2) = 2xy$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si: } u(x, y) = 3x^2 - 2y + 1 \\ \quad v(x, y) = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} \Rightarrow f(z) = (3x^2 - 2y + 1) + i \operatorname{sen} x$$

Ejemplo:

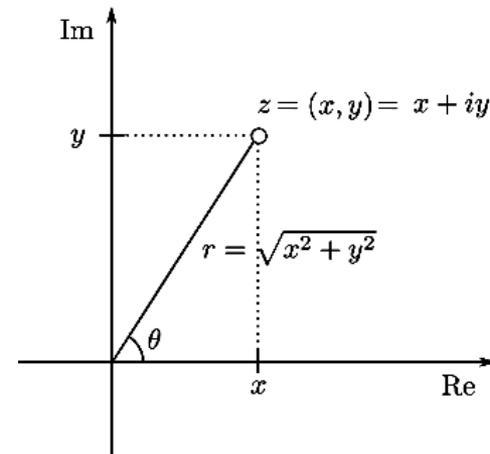
$$f(z) = w = |z|^2$$

$$w = |x + yi|^2 = \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2$$

Donde:

$$\operatorname{Re}(w) = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{Im}(w) = 0$$



# Función compleja de variable compleja

$$f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \rightarrow f(z)$$



$$(x, y) \rightarrow [u(x, y), v(x, y)]$$

Se designa  $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y);$   $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y);$

Argumento de  $f(z) = \varphi$

$$\arg[f(z)] = \arctan \frac{v(x, y)}{u(x, y)}$$

Módulo de  $f(z) = \mathbf{R}$

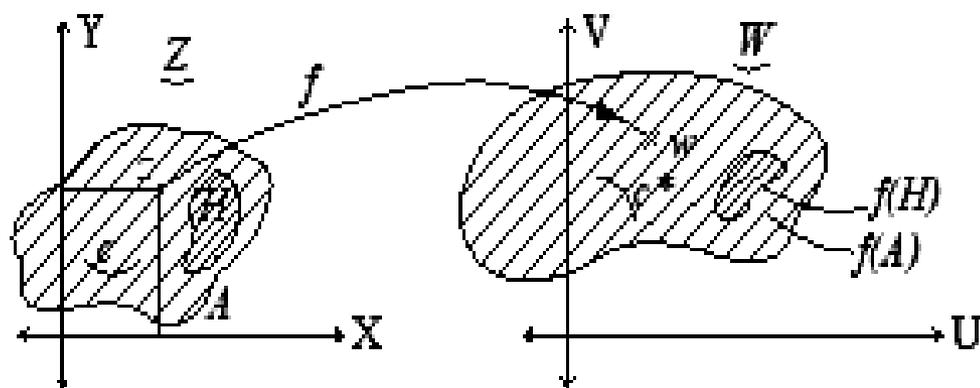
$$|f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$$

### *Interpretación geométrica de una función compleja de una variable compleja.*

Sea:

$$w : f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad z = x + yi \quad w \in \mathbb{C}$$

Convenimos en representar a  $w$  en el plano complejo "Z".



El conjunto imagen es un conjunto del plano complejo  $Z$ .

Si en el dominio tiene una curva  $c$ , en la imagen tengo una curva  $c^*$ .

Si en el dominio tengo un subconjunto  $H$ , en la imagen tengo un subconjunto  $f(H)$ .

# Representación gráfica de funciones complejas

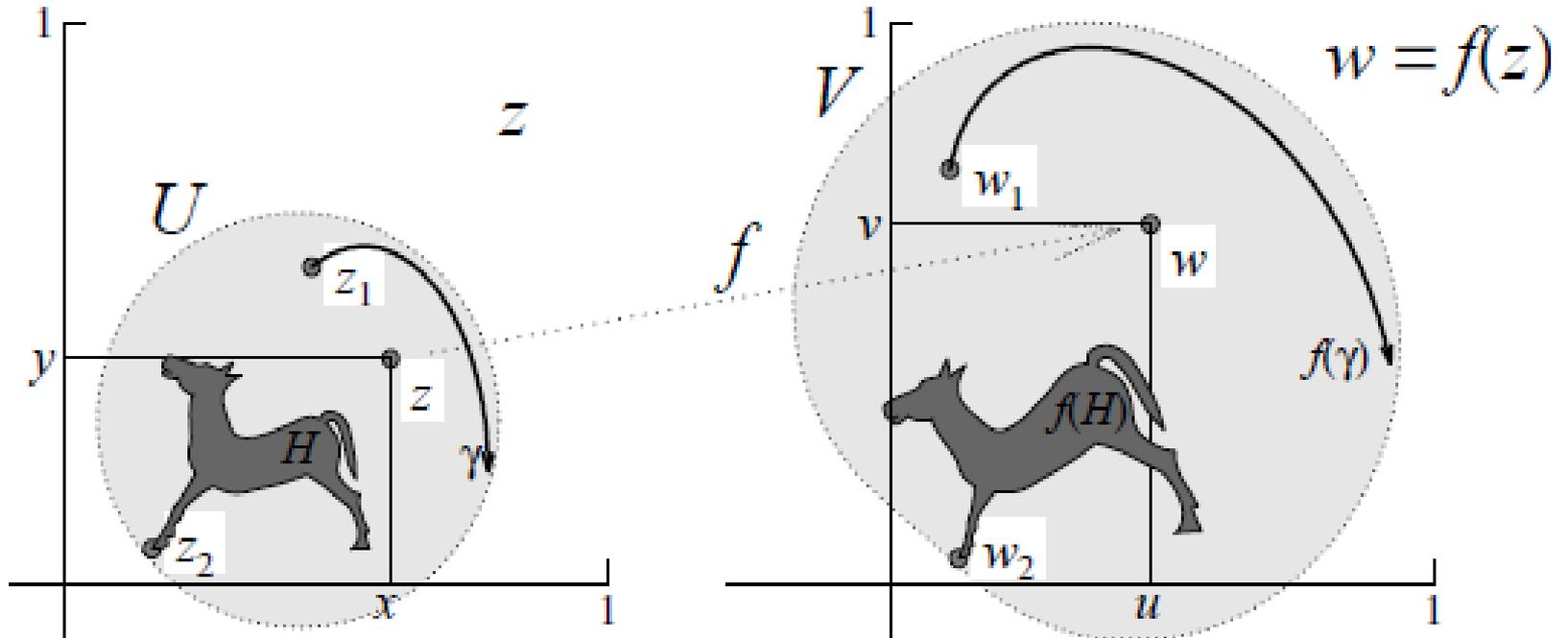


Figura 2: Las transformaciones del plano mediante funciones complejas

# Transformaciones del plano complejo

Llamaremos *transformación del plano* a una correspondencia puntual, biunívoca entre los puntos de dicho plano, tal que a cada punto  $(x,y)$  considerado como origen, le hace corresponder en el mismo plano un solo punto  $(u,w)$  que se denomina imagen, transformado un homólogo del primero de acuerdo con una condición previamente establecida.

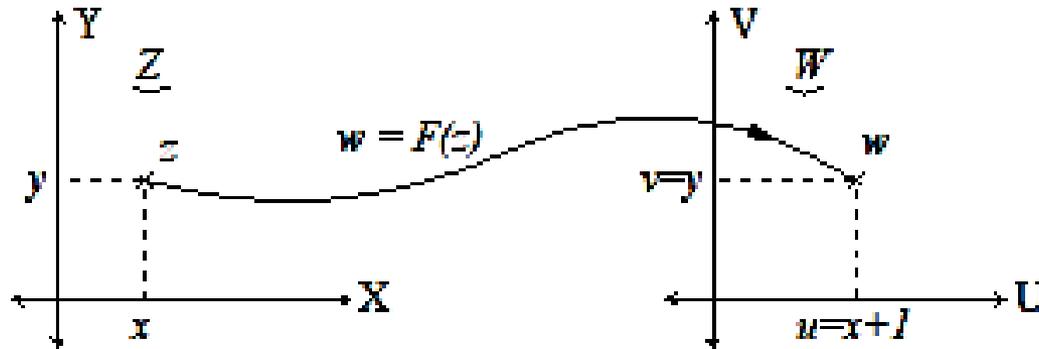
*Mapping = Mapeo*

Se define como una aplicación o transformación de puntos del plano complejo  $Z$ , en puntos del plano  $W$ , entendiéndose por transformación a toda ley o regla que asocie a cada punto del plano complejo  $Z$ , en el dominio, un único punto del plano  $W$ , en el conjunto imagen del dominio. A veces para analizar características de una cierta función dada es conveniente analizar las imágenes de subconjuntos incluidos en el dominio de esa función.

# Transformaciones del plano complejo

## Transformaciones.

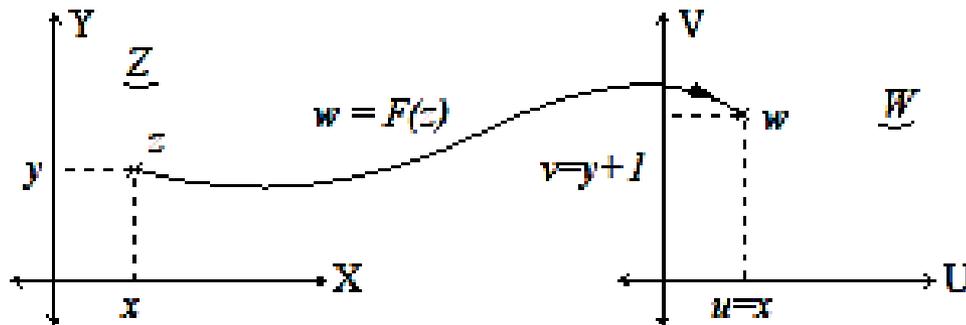
a) La función lineal  $w = F(z) = z + 1$  efectúa un desplazamiento de los puntos del plano complejo  $Z$  de una unidad hacia la derecha.



$$w = F(z) = x + 1 + iy \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = x + 1 \rightarrow \text{desplazamiento una unidad} \\ \operatorname{Im}(w) = y \end{cases}$$

# Transformaciones del plano complejo

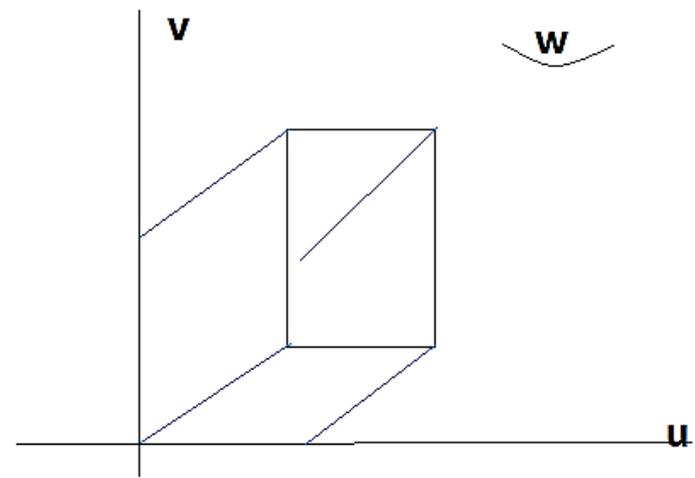
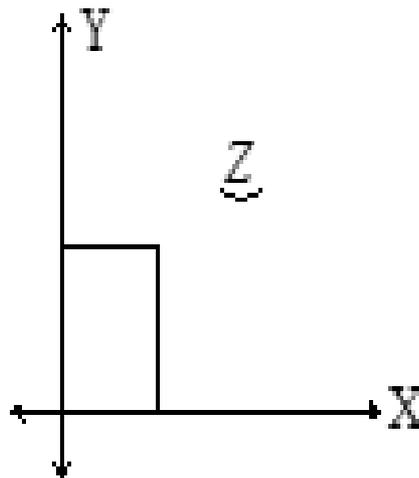
b) La función  $w = F(z) = z + i$  efectúa una traslación de los puntos del plano  $Z$  de una unidad hacia arriba.



$$w = F(z) = z + i = (x + iy) + i = x + (y + 1)i \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = x \\ \operatorname{Im}(w) = y + 1 \rightarrow \text{desplazamiento una unidad} \end{cases}$$

# Transformaciones del plano complejo

c) En general, la Función  $w = F(z) = z + z_1$ , donde  $z_1$  es cualquier número complejo, aplica o transforma a una región del plano complejo en otra, de la misma forma y orientación que la anterior, aunque cada punto ha sufrido una traslación dirigida según el vector posición de  $z_1$ .

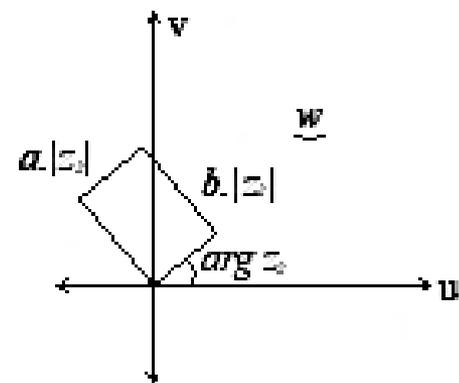
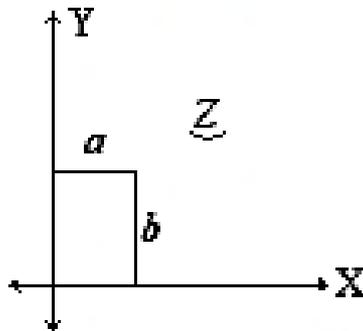


# Transformaciones del plano en coordenadas polares

d) La función lineal  $w = z_2 \cdot z_1$ , donde  $z_2$  es cualquier número complejo, es una transformación que consiste en un giro del mismo valor que el argumento de  $z_2$  y multiplicación por una constante que es el módulo de  $|z_2|$ .

Si  $z = \rho_\theta$ ;  $w = f(z) = z_2 \cdot z$ ;  $z_2 = \rho_{2\theta_2}$

$$w = z z_2 = R_\varphi \begin{cases} R = \rho \cdot \rho_2 \\ \varphi = \theta + \theta_2 \end{cases}$$

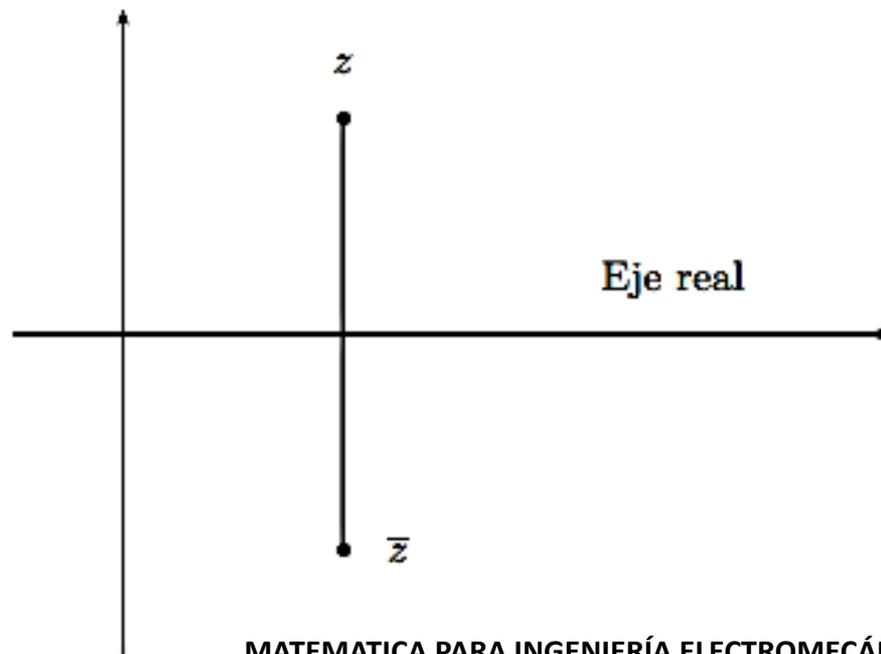


# Transformaciones del plano : Reflexión

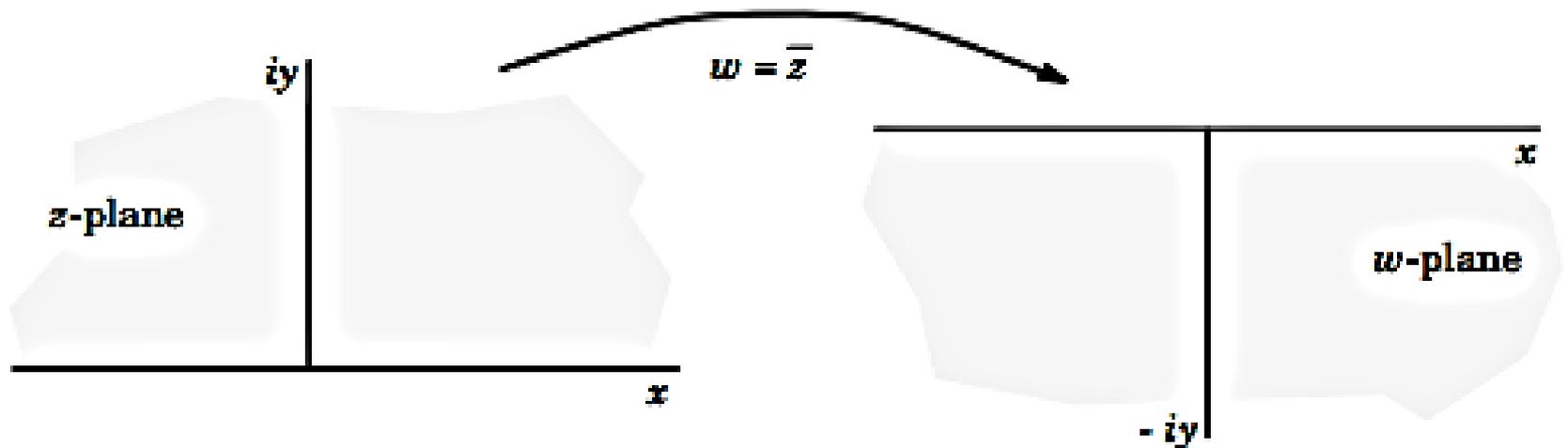
$$f(z) = \text{Conjugado}(z) = \bar{z}$$

1. El segmento que une a  $z$  con  $T(z)$  es perpendicular al eje real.
2. El eje real corta a este segmento en su punto medio

Nótese que todos los puntos de la recta real permanecen fijos bajo esta transformación. El número  $T(z)$ , se llama la imagen reflejada de  $z$ . (Ver la figura.)



$$f(z) = \text{Conjugado}(z) = \bar{z}$$



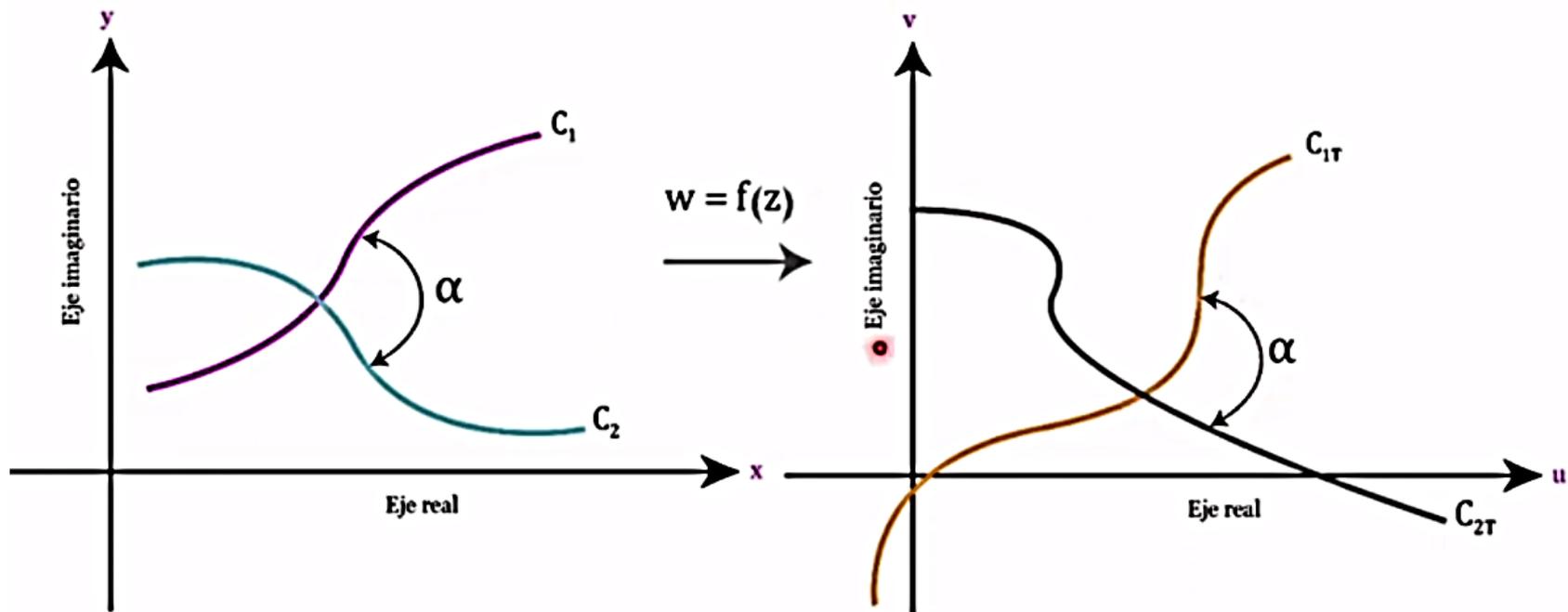
**Fig. 1.2.5. Conjugate mapping**

# Representaciones conformes

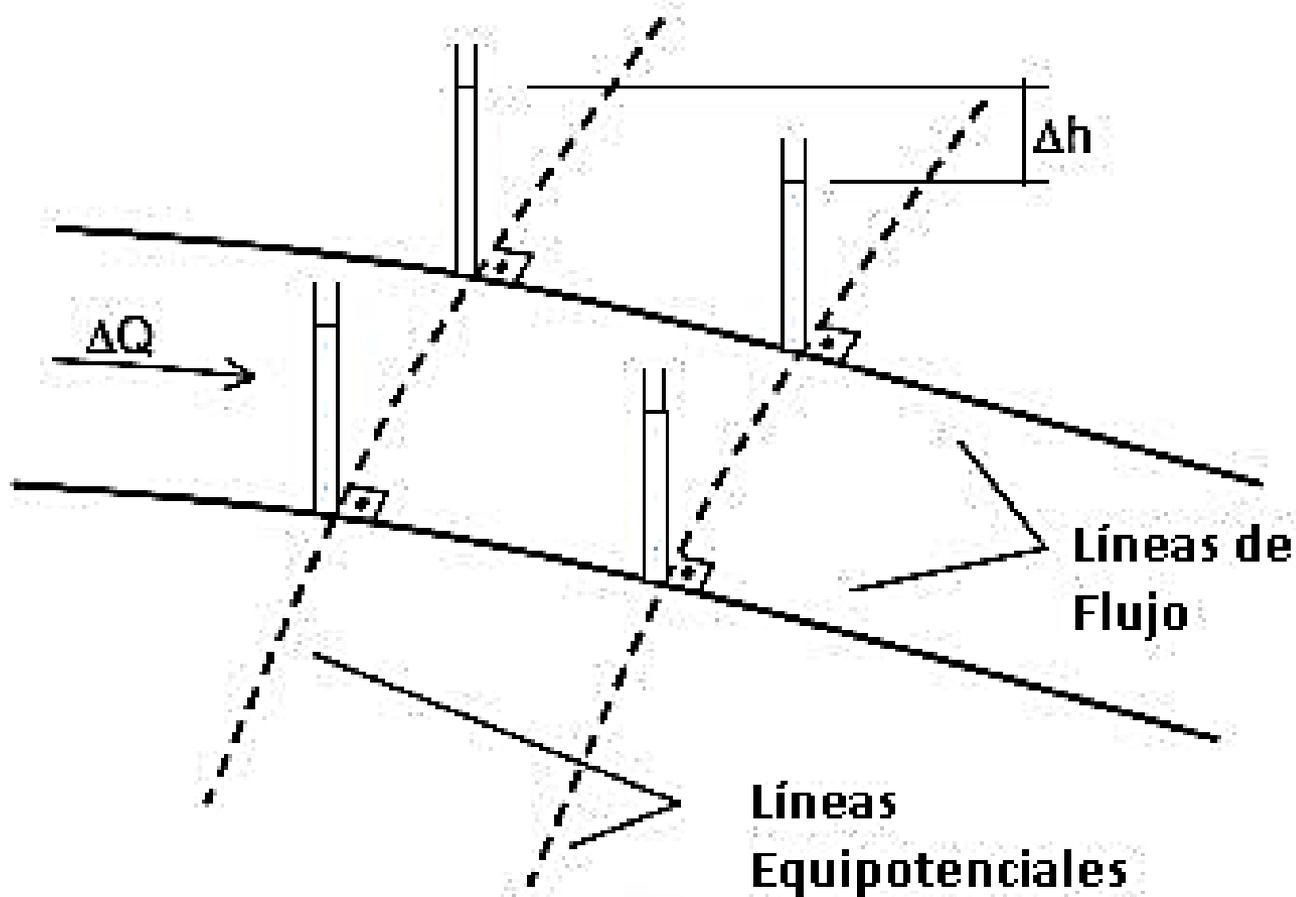
## Representaciones conformes.

Se dice que una aplicación o transformación del plano complejo es conforme cuando conserva los ángulos.

En general, las figuras geométricas del plano  $Z$  sufren una rotación, un aumento / disminución de tamaño en el plano  $w$  siempre que se les aplique una transformación definida por una función analítica. Toda transformación conforme transforma curvas ortogonales en curvas ortogonales.



# Representaciones conformes en Mecánica de Fluidos



## Transformaciones del plano : Reflexión

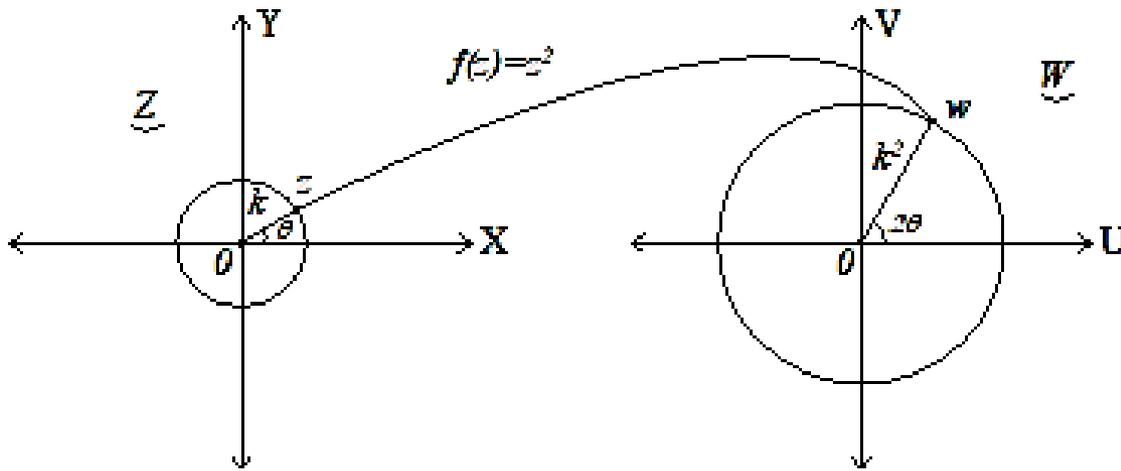
Sea por ejemplo  $w = f(z) = z^2$

Hallar las imágenes de los subconjuntos siguientes, que están incluidos en su dominio.

$Dom(z^2) \subset \mathbb{C}$  más estrictamente  $Dom(z^2) = \mathbb{C}$

Curva  $C \xrightarrow{w=f(z)} \text{Curva } C^*$

$$c: \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{|z| = k, k \in \mathbb{R}^+} \right\}$$



Dominio Z

$$z_1 = x + yi = \rho_\theta$$

$$|z| = k, k \in \mathbb{R}^+$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Imagen W

$$w = z^2 = (\rho_\theta)^2 = \rho^2_{2\theta} = R_\varphi$$

$$R = \rho^2 = k^2, k \in \mathbb{R}^+$$

$$0 \leq \theta \leq 4\pi$$

Conclusión:

$$C^* = \left\{ \frac{w \in C}{|w|=k^2, k \in \mathbb{R}^+} \right\}$$

La función  $w = f(z) = z^2$  transforma una circunferencia de radio  $k$  en otra de radio  $k^2$ .

$$b) c: \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{\arg z = k, k \in \mathbb{R}} \right\}$$

Dominio Z

$$z = \frac{\rho \theta}{\theta: \arg z = k}$$

$$\rho \in \mathbb{R}^+$$

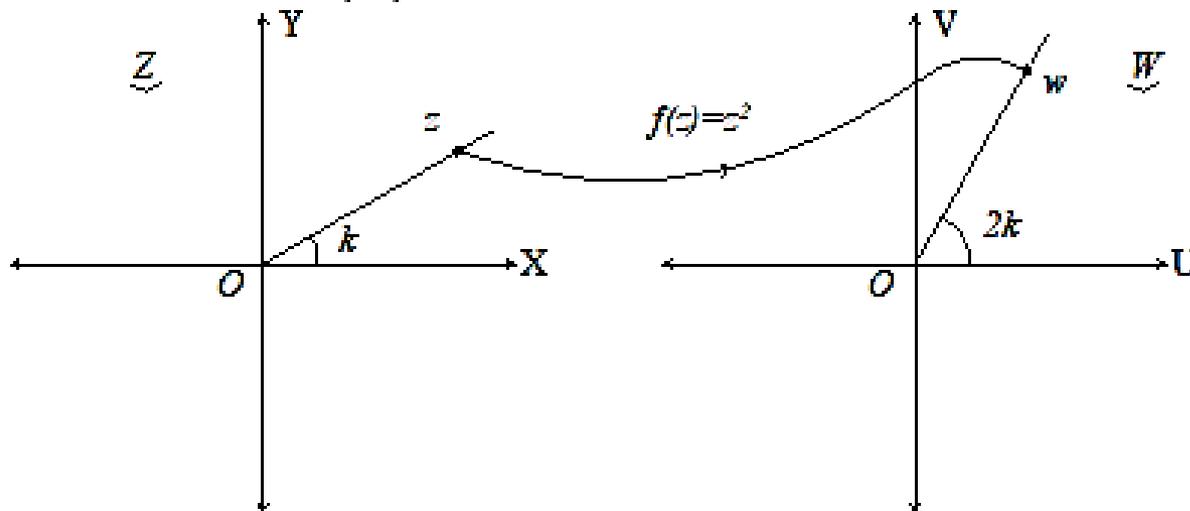
$$R = |w| \in \mathbb{R}$$

Imagen W

$$w = f(z) = z^2 = (\rho \theta)^2 = \rho^2_{2\theta} = R_{\varphi}$$

$$\varphi = \arg w = 2\theta = 2k, k \in \mathbb{R}$$

$$R = |w| \in \mathbb{R}$$



$c^*: \left\{ \frac{w \in \mathbb{C}}{\arg w = 2k, k \in \mathbb{R}} \right\}$  La función  $w = f(z) = z^2$  transforma la semirrecta  $r$  de argumento  $k$  en otra  $r^*$  de argumento  $2k$

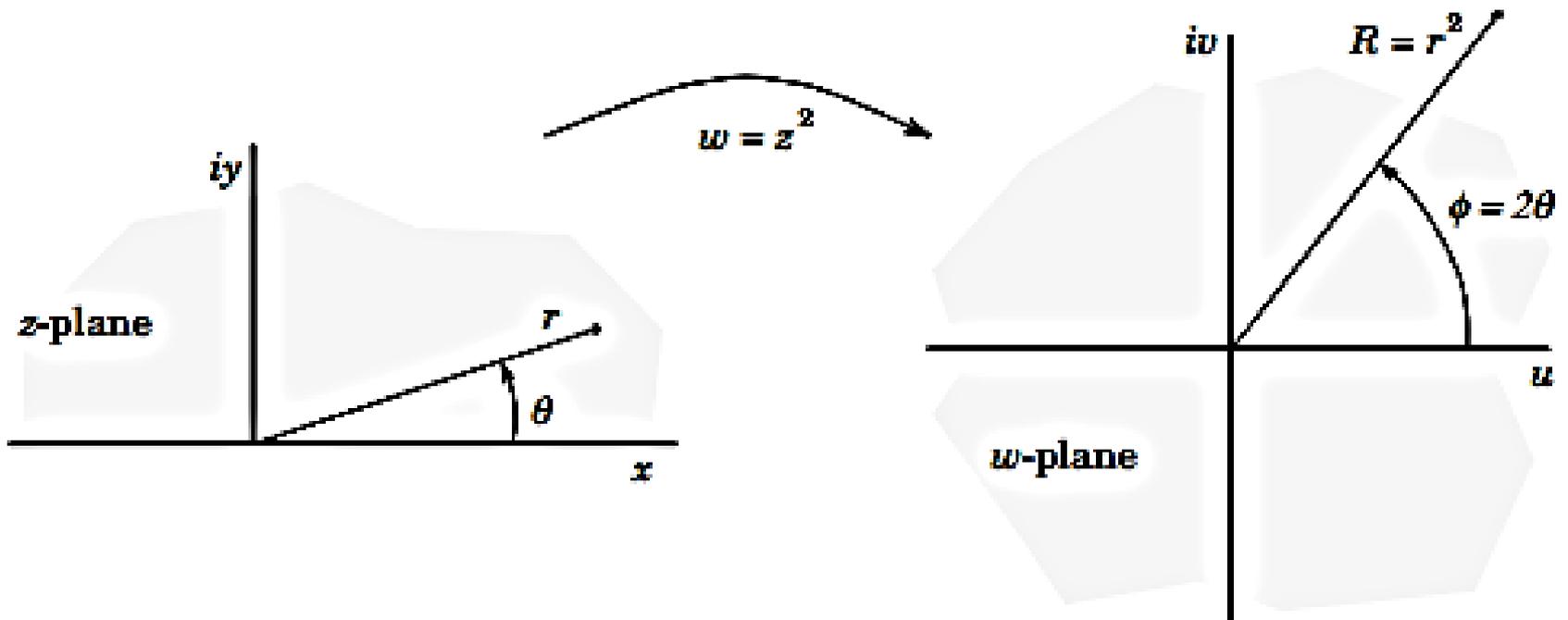
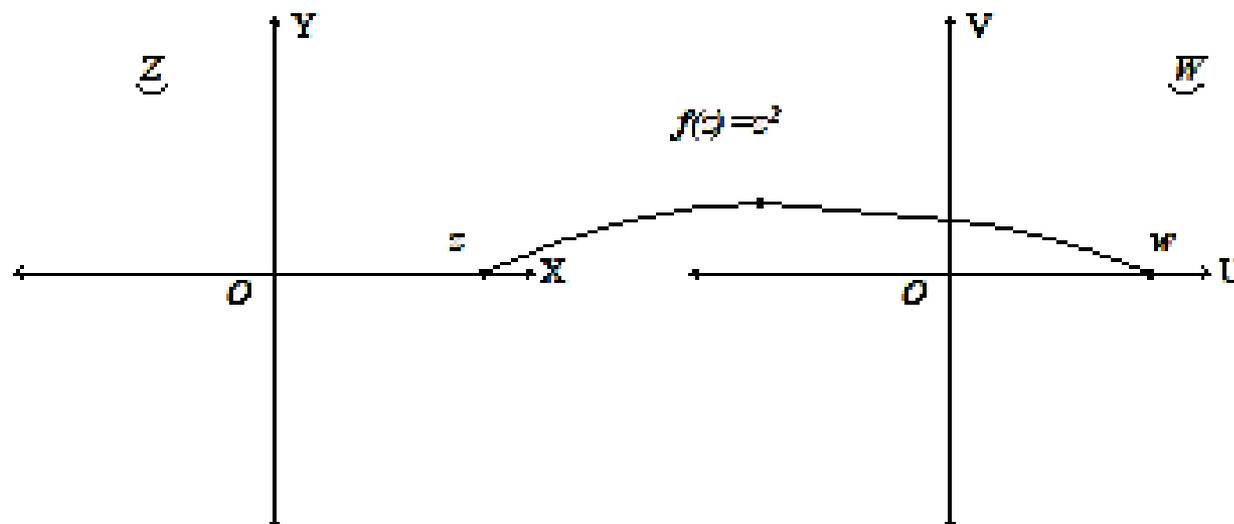


Fig. 1.2.4. Map of  $z \rightarrow w = z^2$

c) Casos particulares del anterior.

$c: \{z \in \mathbb{C} / y = 0, x > 0\}$  en polares  $c: \{z \in \mathbb{C} / z = \rho e^{j\theta}, \rho > 0, \theta = \arg(z) = 0\}$



dominio  $Z$

$$z = x + j\tilde{y}$$

Imagen  $W$

$$w = z^2 = R e^{j\phi}$$

$$w = \rho^2 e^{j2\theta}$$

$$c^* = \{w \in \mathbb{C} / \arg w = 0\}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$R = \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{si } x > 0$$

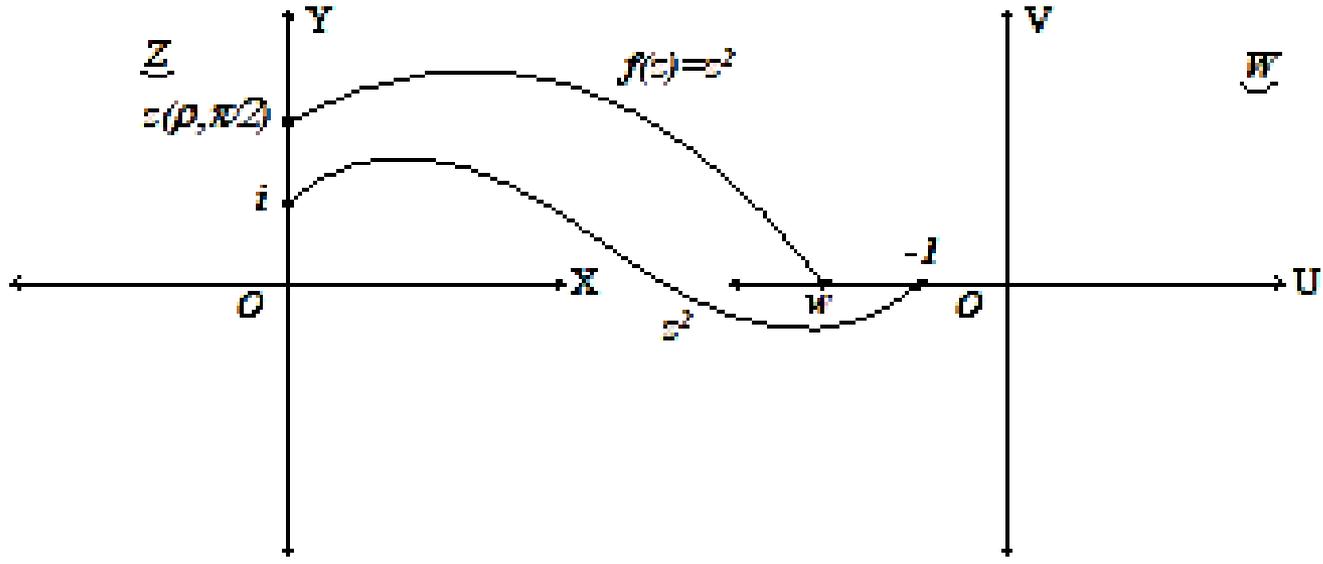
$$\boxed{\rho > 0}$$

$$\arg z = y / x$$

$$2\theta = \boxed{\phi \rightarrow 0}$$

La función  $w = f(z) = z^2$  transforma puntos del semieje positivo de la variable  $x$  en puntos del semieje positivo de la variable  $u$ .

$$c: \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{x = 0 \wedge y > 0} \right\}$$



Dominio  $Z$

$$z = x + yi = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho > 0, \quad \theta = \pi/2$$

Imagen  $W$

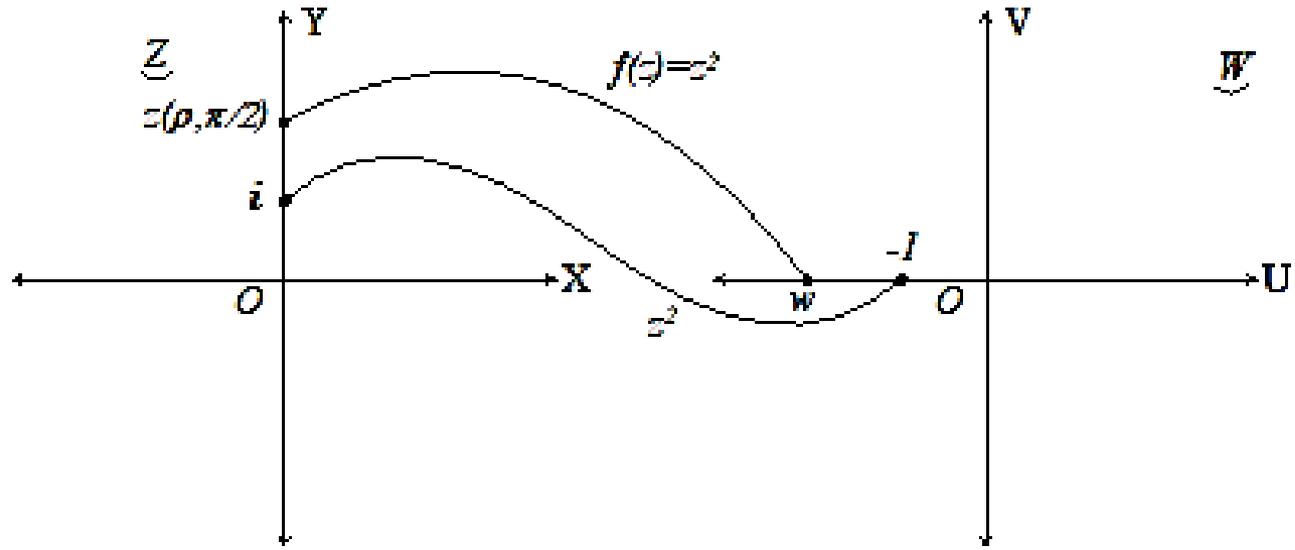
$$w = z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$$

$$R = \rho^2 > 0$$

$$\varphi = 2\theta = 2\pi/2 = \pi$$

$c^* = \{w \in \mathbb{C} / \arg w = \pi; \rho > 0\}$  La función  $w = f(z) = z^2$  transforma puntos del semieje positivo de la variable  $y$  en puntos del semieje negativo de la variable  $u$ .

$$c: \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{x = 0 \wedge y > 0} \right\}$$



Dominio Z

$$z: x + yi = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho > 0; \theta = \pi / 2$$

Imagen W

$$w: z^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$$

$$R = \rho^2 > 0$$

$$\varphi = 2\theta = 2\pi / 2 = \pi$$

$c^* = \{w \in \mathbb{C} / \arg w = \pi; \rho > 0\}$  La función  $w = f(z) = z^2$  transforma puntos del semieje positivo de la variable  $y$  en puntos del semieje negativo de la variable  $u$ .

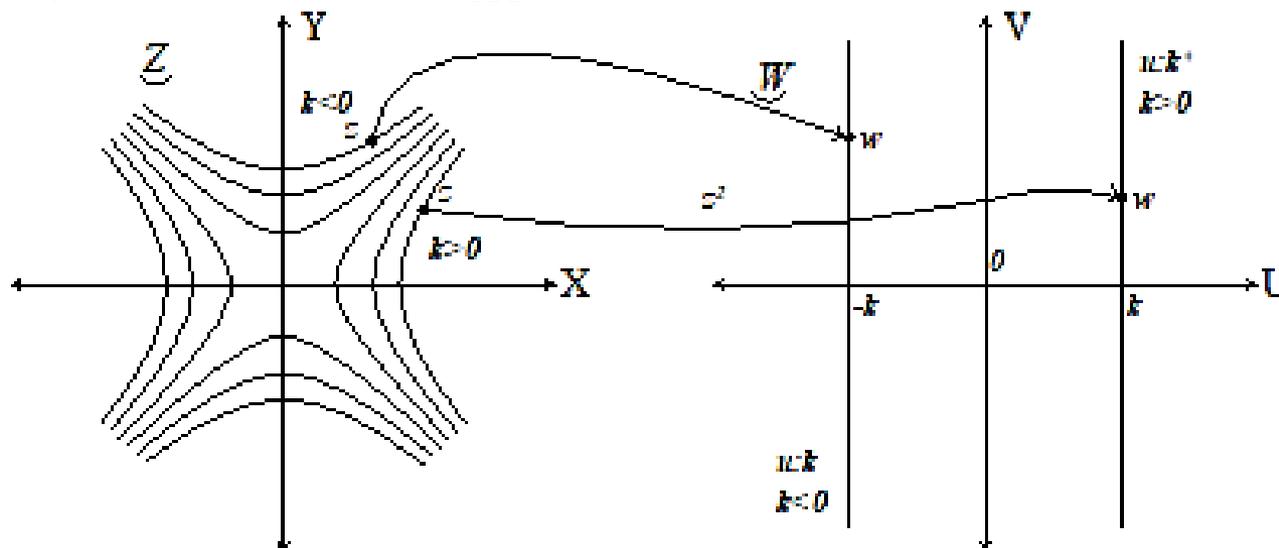
d) Hallar las imágenes según la misma función de las curvas de nivel de las componentes imaginarias de  $w:z^2$ .

$$\text{Dom}(z^2) = \mathbb{C}$$

$$c_1 = \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{z \in \text{curvas de nivel de } u(x, y)} \right\}$$

$$c_2 = \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{z \in \text{curvas de nivel de } v(x, y)} \right\}$$

d1) Curvas de nivel de  $u(x, y)$





Dominio  $Z$

$$z = x + yi$$

Imagen  $W$

$$w: z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

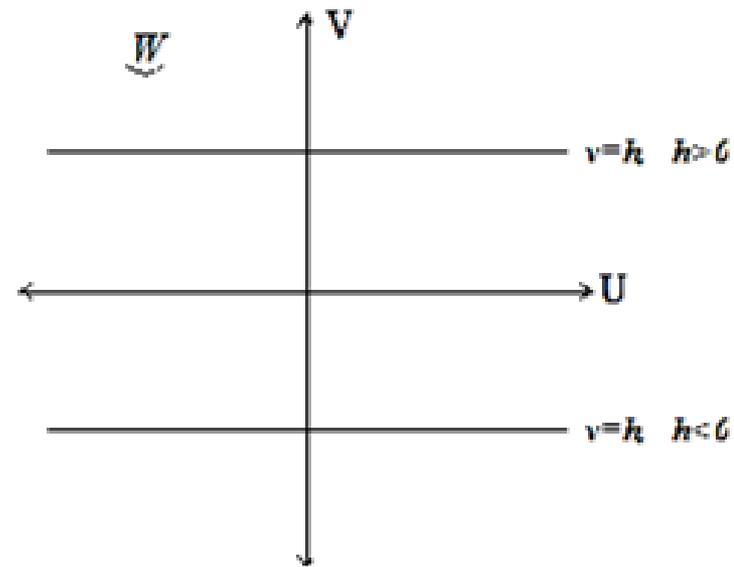
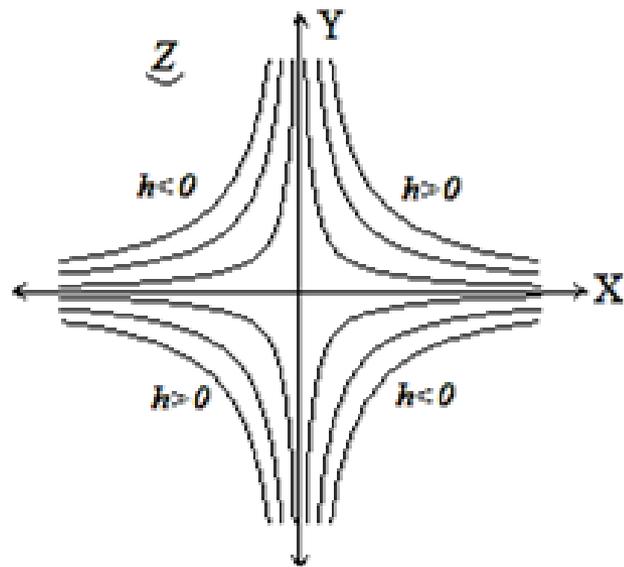
$$v(x, y) = 2xy$$

---

$$c_1 \rightarrow x^2 - y^2 = k, \quad k \in \mathbb{R} \implies y = \pm \sqrt{x^2 - k} \quad w/u = k$$

$$c_2 \rightarrow 2xy = h, \quad h \in \mathbb{R} \implies y = \frac{h}{2x} \quad w/v(x, y) = h$$

d2) Curvas de nivel de  $v(x,y)$



para cada  $h$  una hipérbola distinta.  $c_2 \rightarrow 2xy = h, \quad h \in \mathbb{R} \quad y = \frac{h}{2x}$

$$\frac{w}{u} = k$$

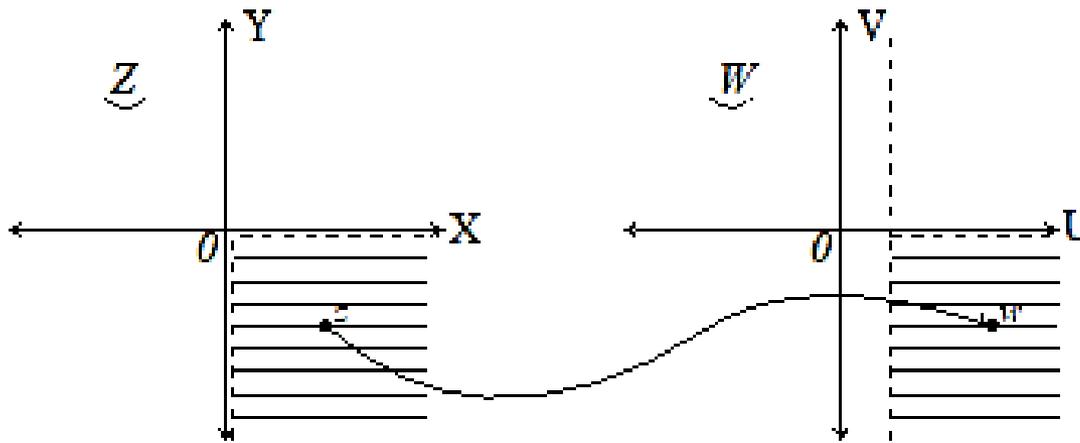
$$\frac{w}{v(x,y)} = h$$



Ejemplo N° 2:

Hallar la imagen del conjunto de puntos complejos según la función  $f(z) = w = 2z + 1$

$$C = \left\{ \frac{z \in \mathbb{C}}{x > 0 \wedge y < 0} \right\}$$



en  $z$ )

$$z = x + yi \quad x > 0, y < 0$$

en  $w$ )

$$w = 2z + 1 = 2(x + yi) + 1 = 2x + 2yi + 1$$

$$w = u(x, y) + v(x, y) = (2x + 1) + 2yi$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{u-1}{2} > 0 \quad u-1 > 0; \quad \boxed{u > 1} \\ v = 2y \Rightarrow \frac{v}{2} = y < 0 \quad \frac{v}{2} < 0; \quad \boxed{v < 0} \end{array} \right\} c^*$$

$$c^* = \left\{ \frac{w \in \mathbb{C}}{u > 1, v < 0} \right\}$$

### Ejemplo N° 3:

Imagen de  $z: f(z) = z - 3$

$$c = \left\{ z \in \mathbb{C} \left/ \begin{array}{l} x + y > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. \right\} \quad \begin{array}{l} y > -x \\ x > 0 \end{array}$$

$$z = x + yi$$

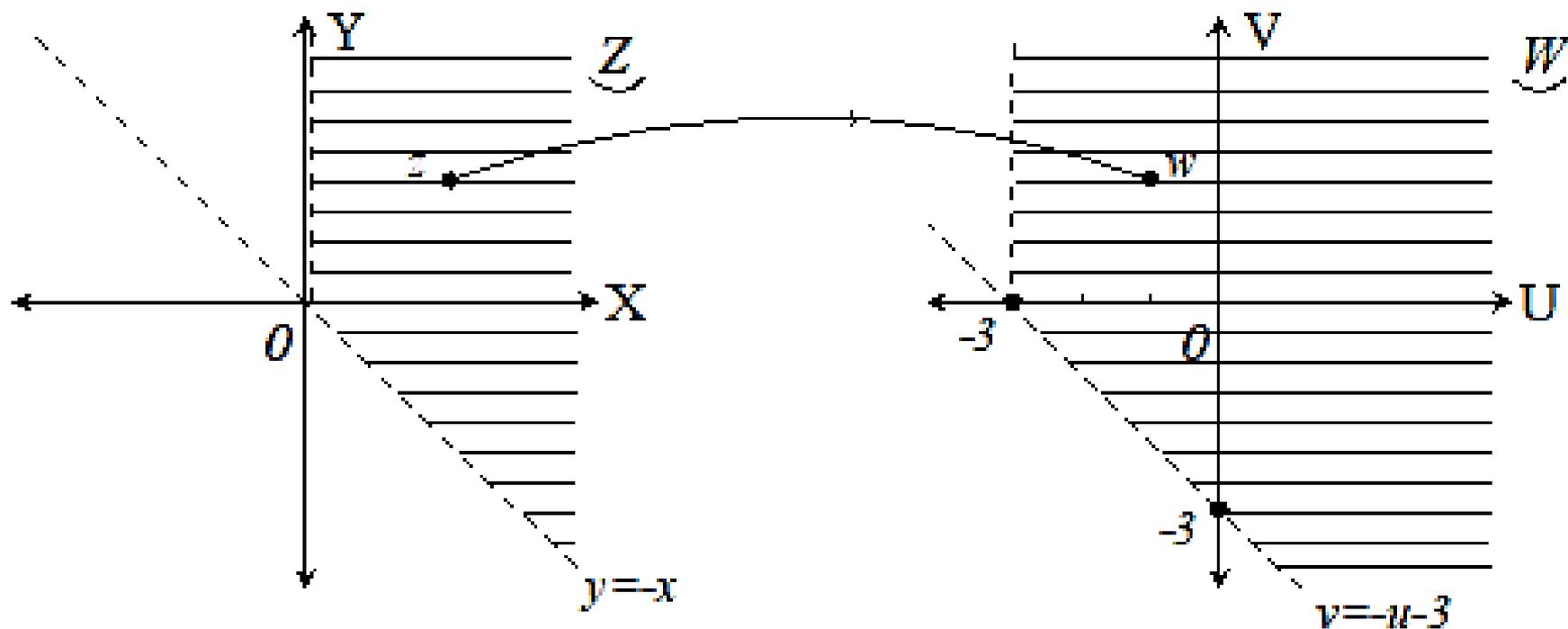
$$w = f(z) = z - 3 = x + yi - 3 = (x - 3) + yi$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = x - 3 \\ v(x, y) = y \end{array} \right\} \Rightarrow u + v = x + y - 3 \Rightarrow x + y = u + v + 3$$

Las condiciones en  $z$ :  $\left\{ \begin{array}{l} x + y > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\}$

Las condiciones en  $w$ :  $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{u + v + 3 > 0} \\ u + 3 > 0 \\ \boxed{u > -3} \end{array} \right\}$

$$c^* w \in \mathbb{C} \left[ \boxed{u + v + 3 > 0} \wedge \boxed{u + 3 > 0} \right]$$



Las condiciones en  $z$  :  $\begin{cases} x + y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Las condiciones en  $w$  :  $\begin{cases} u + v + 3 > 0 \\ u + 3 > 0 \\ u > -3 \end{cases}$

Sea  $S$  el disco unitario, es decir  $S = \overline{B}(0,1)$ . Determinemos la imagen de  $S$  bajo la transformación  $f(z) = z + 2 + i$ .

*Solución.* Notemos que para cada  $z \in S$  el valor de  $w = f(z)$  está dado por la suma de  $2 + i$  al valor de  $z$ . Considerando a  $z = x + iy$ , tenemos que:

$$w = f(z) = (x + 2) + i(y + 1),$$

por lo que la función  $f$  transforma los puntos  $(x, y)$  en los puntos  $(u, v)$ , donde  $u = x + 2$  y  $v = y + 1$ . Es claro que  $f$  simplemente traslada a cada elemento del disco unitario  $S$  dos unidades a la derecha y una unidad hacia arriba, figura 98, es decir:

$$f(S) = \{w \in \mathbb{C} : |w - (2 + i)| \leq 1\}$$

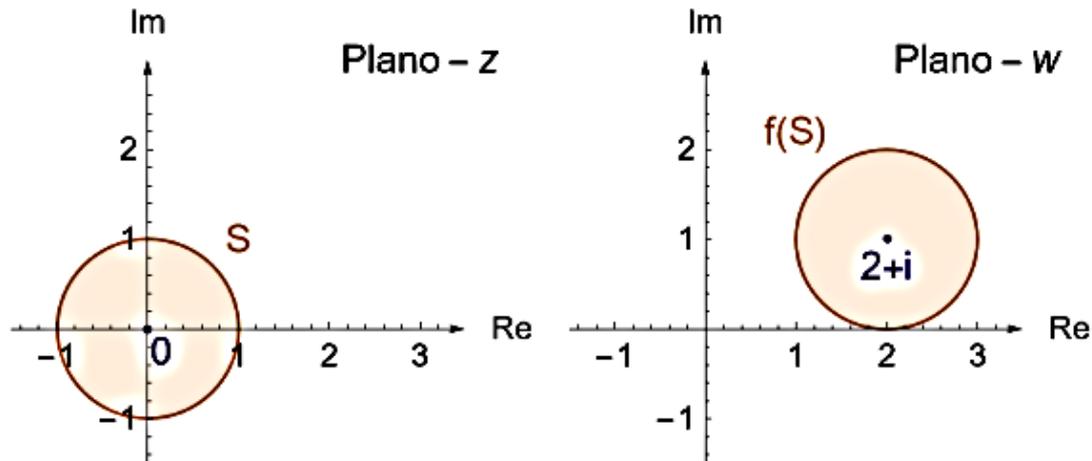


Figura 98: Gráfica del conjunto  $S$  en el plano  $zy$  y del conjunto  $f(S)$  en el plano  $w$

Sea  $S$  el cuadrado cerrado con centro en el punto  $z = 2$ , cuyos lados son paralelos a los ejes real e imaginario y tienen una longitud 2, figura 99.

a) ¿Cuál es la imagen de  $S$  bajo la transformación  $f(z) = 3z$ ?

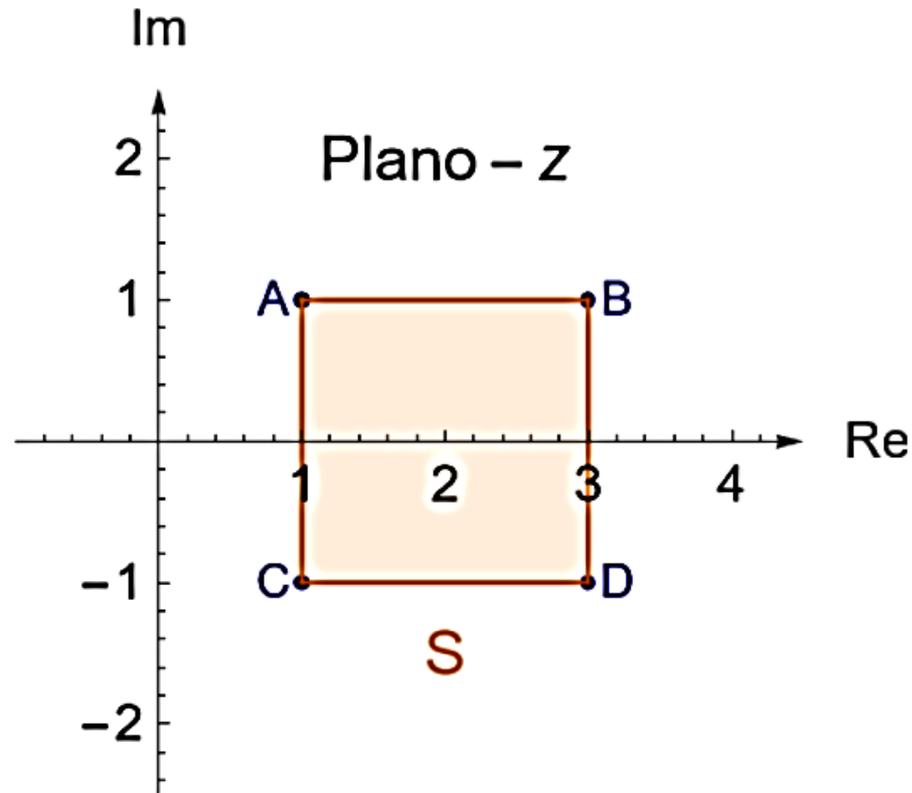


Figura 99: Gráfica del conjunto  $S$  en el plano  $z$

Tenemos que el centro del cuadrado  $S$  es  $z = 2$ , mientras que sus vértices son  $A = 1 + i$ ,  $B = 3 + i$ ,  $C = 1 - i$  y  $D = 3 - i$ , por lo que el centro y los vértices del nuevo cuadrado cerrado son:

$$\begin{aligned} f(2) &= 6, \\ f(A) &= 3 + 3i, \\ f(B) &= 9 + 3i, \\ f(C) &= 3 - 3i, \\ f(D) &= 9 - 3i. \end{aligned}$$

Entonces  $f(S)$  en el plano  $w$  es el cuadrado cerrado con centro en el punto  $w = 6$  cuyos lados son paralelos a los ejes real e imaginario y tienen longitud 6.

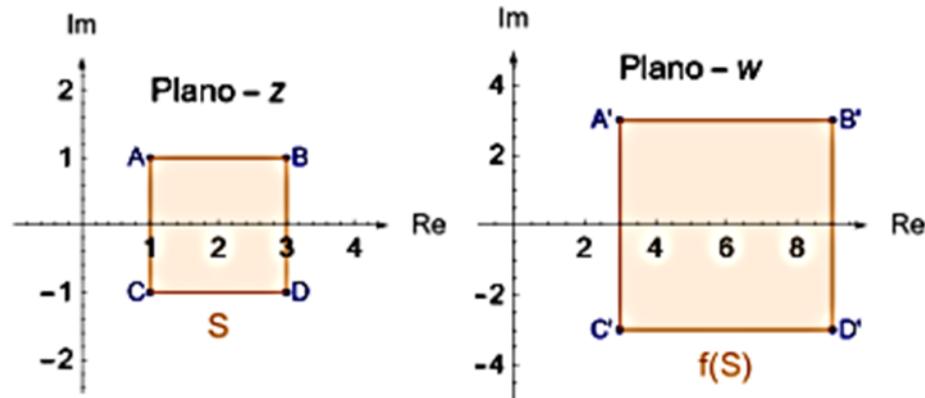


Figura 100: Gráfica del conjunto  $S$  en el plano  $z$  y del conjunto  $f(S)$  en el plano  $w$

b) ¿Cuál es la imagen de  $S$  bajo la transformación  $f(z) = 2iz$ ?

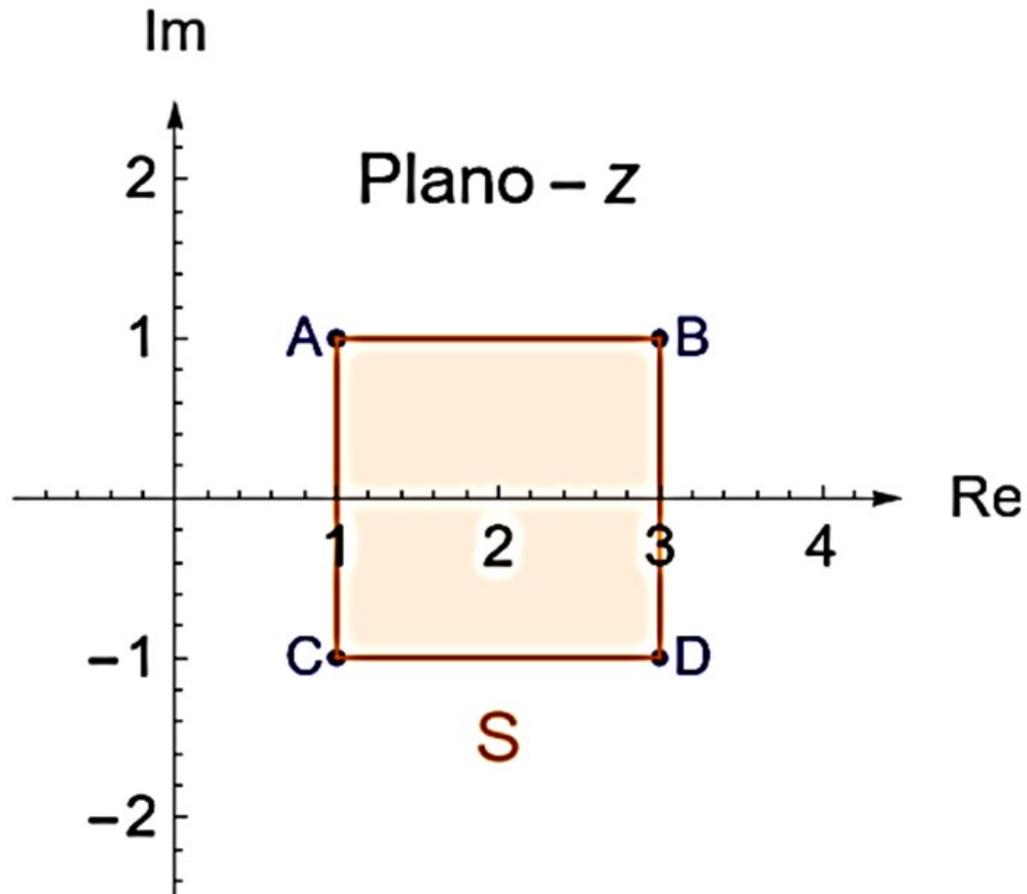


Figura 99: Gráfica del conjunto  $S$  en el plano  $z$

Tenemos que el centro del cuadrado  $S$  es  $z=2$ , mientras que sus vértices son  $A=1+i$ ,  $B=3+i$ ,  $C=1-i$  y  $D=3-i$ , por lo que el centro y los vértices del nuevo cuadrado cerrado son:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2) \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) = 4i, \\ f(A) &= 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -2 + 2i, \\ f(B) &= 2\sqrt{10} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{1}{3} \right) \right) = -2 + 6i, \\ f(C) &= 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 2 + 2i, \\ f(D) &= 2\sqrt{10} \operatorname{cis} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \left( \frac{-1}{3} \right) \right) = 2 + 6i. \end{aligned}$$

Entonces  $f(S)$  en el plano  $w$  es el cuadrado cerrado con centro en el punto  $w=4i$  cuyos lados son paralelos a los ejes real e imaginario y tienen longitud 4.

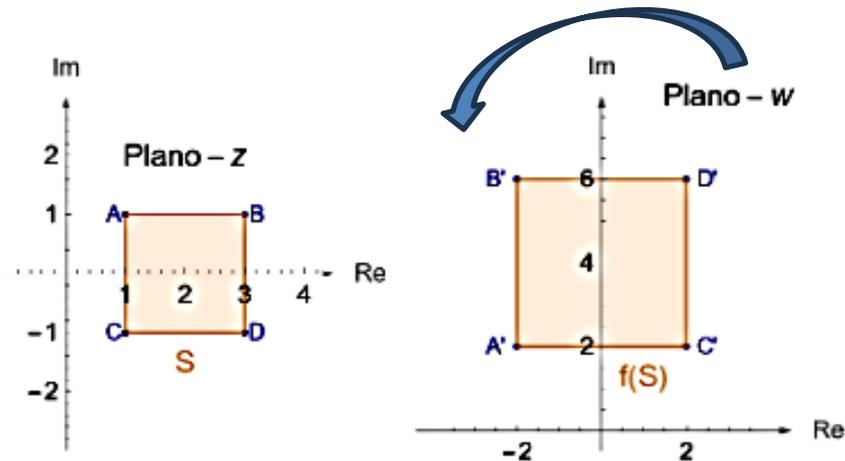
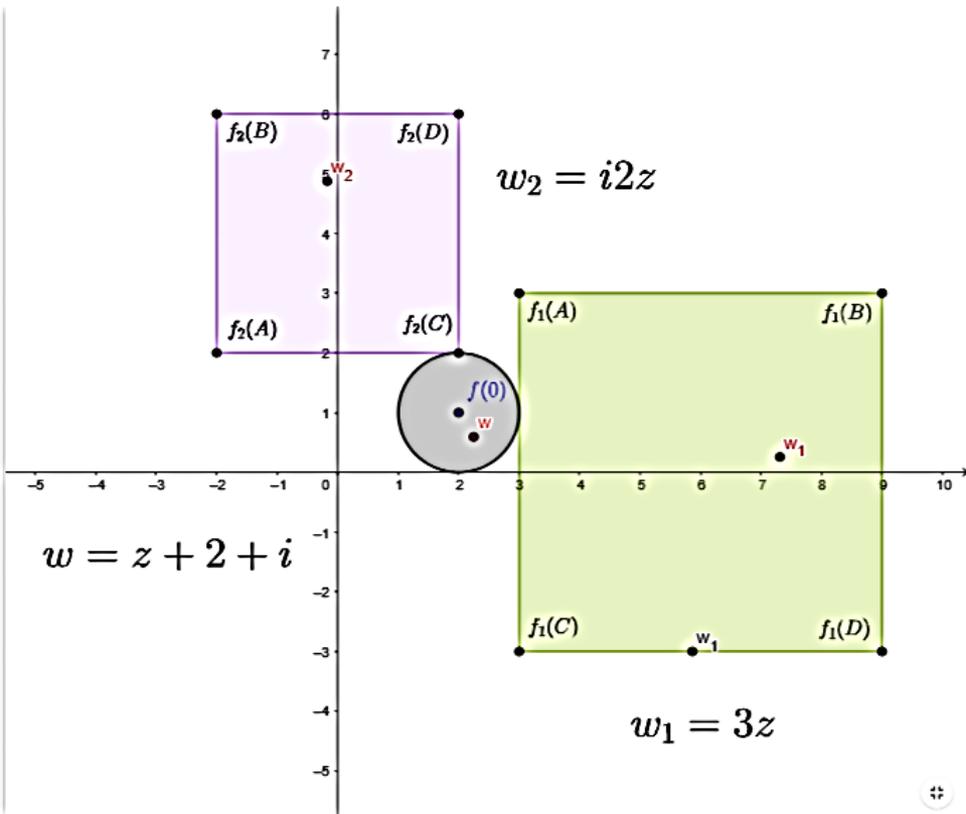
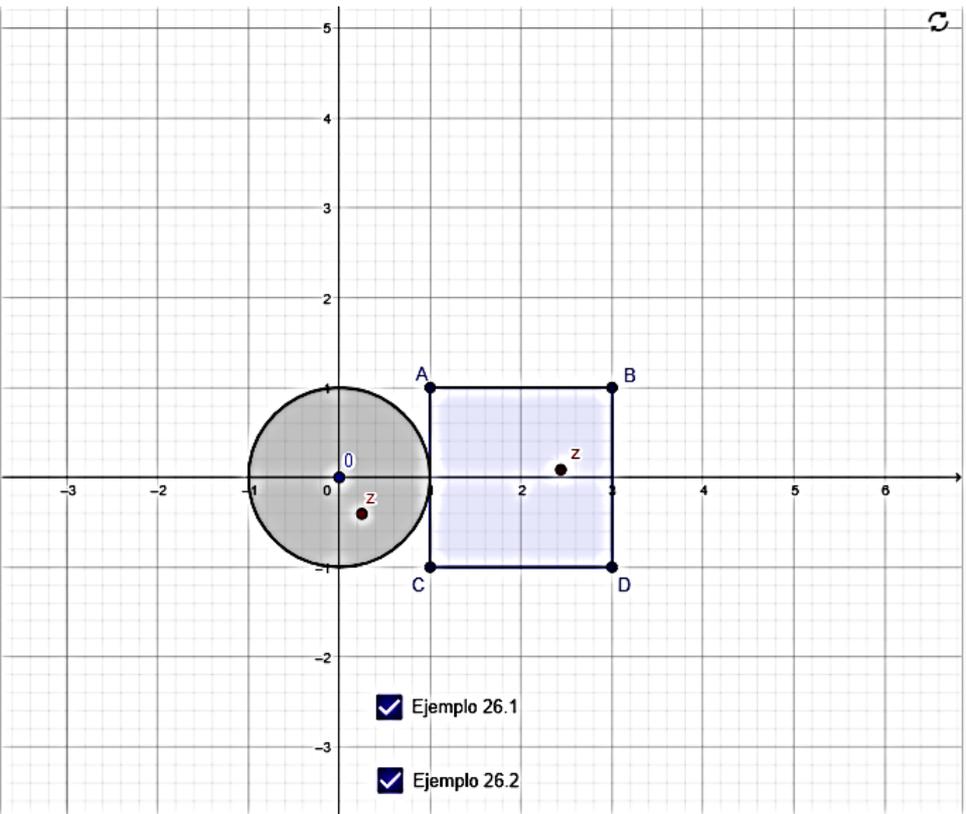


Figura 101: Gráfica del conjunto  $S$  en el plano  $z$  y del conjunto  $f(S)$  en el plano  $w$



Determinemos la imagen de los siguientes conjuntos bajo la transformación inversión,  $f(z) = \frac{1}{z}$ , con  $z \neq 0$ ,  $w = f(z) \neq 0$ .

$$a) S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = r^{-1} \text{cis}(\theta) = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \text{sen}(-\theta)].$$

Entonces, para cada  $z \neq 0$ , se tiene que el módulo de  $f(z)$  es el recíproco del módulo de  $z$ , mientras que el argumento de  $f(z)$  será el negativo del argumento de  $z$ .

a) Notemos que si  $z \in S$ , entonces  $z$  cae en el primer cuadrante dentro de la circunferencia unitaria, incluyendo a los ejes real e imaginario, pero sin considerar a  $z=0$ , figura 102, ya que:

- Si  $0 < |z| < 1$ , entonces  $z$  cae dentro del disco unitario perforado, es decir  $z \in B^*(0,1)$ .
- Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , entonces tenemos a los  $z$  en el primer cuadrante.

Por lo que bajo  $f$ , los  $z \in S$  serán mapeados, en el plano  $w$ , fuera del disco unitario y en el cuarto cuadrante, incluyendo a los ejes real e imaginario, pero a partir de los  $w$  tales que  $|w| > 1$ , ya que  $|f(z)| = \frac{1}{|z|} > 1$  y  $-\frac{\pi}{2} \leq -\theta \leq 0$ . Entonces:

$$f(S) = \left\{ w \in \mathbb{C} : 1 < |w|, -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0 \right\}.$$

$$f(S) = \left\{ w \in \mathbb{C} : 0 < |w| \leq \frac{1}{2}, -\pi \leq \arg w \leq 0 \right\}.$$

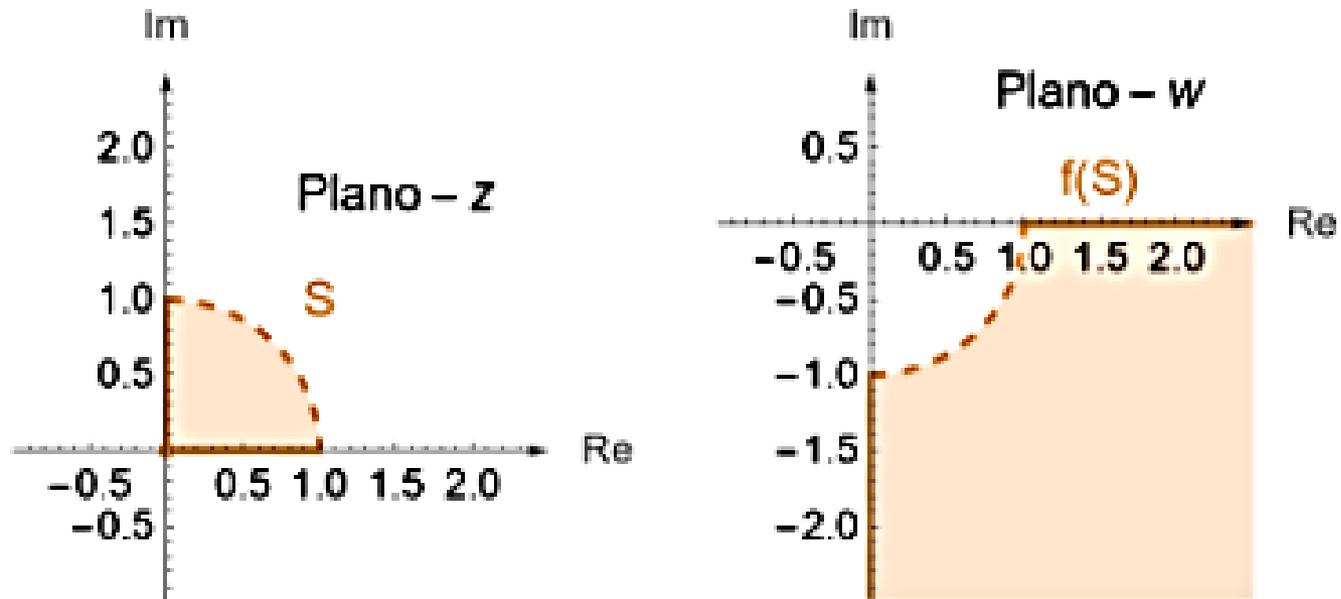


Figura 102: Gráfica del conjunto  $S$  en el plano  $z$  y del conjunto  $f(S)$  en el plano  $w$

- 2.15. Considere la transformación  $w = \ln z$ . Muestre que a) las circunferencias, en el plano  $z$ , con centro en el origen se llevan al plano  $w$  como rectas paralelas al eje  $v$ , b) las rectas o rayos del plano  $z$  que parten del origen se llevan al plano  $w$  como rectas paralelas al eje  $u$  y c) el plano  $z$  se lleva a una franja de amplitud  $2\pi$  en el plano  $w$ . Ilustre el resultado gráficamente.

### Solución

Se tiene  $w = u + iv = \ln z = \ln r + i\theta$  de manera que  $u = \ln r$  y  $v = \theta$ .

Como rama principal se elige  $w = \ln r + i\theta$ , donde  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

- a) Las circunferencias con centro en el origen y radio  $\alpha$  tienen como ecuación  $|z| = r = \alpha$ . Éstas se llevan a rectas en el plano  $w$  cuyas ecuaciones son  $u = \ln \alpha$ . En las figuras 2-17 y 2-18 se muestran las circunferencias y las rectas correspondientes a  $\alpha = 1/2, 1, 3/2, 2$ .

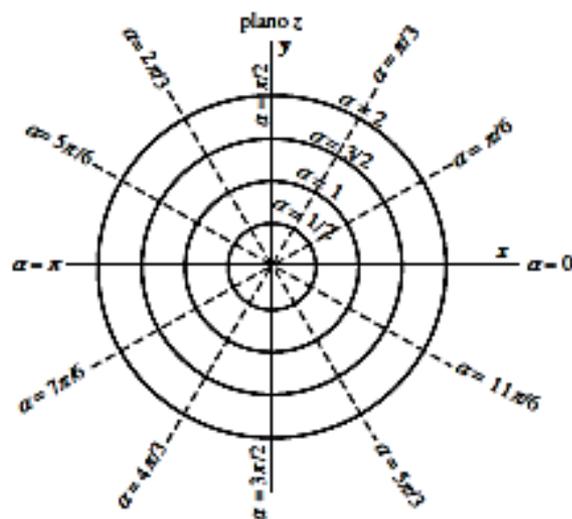


Figura 2-17

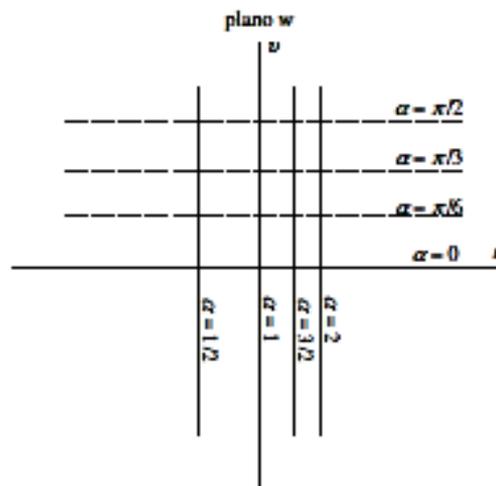


Figura 2-18

- b) Las rectas o rayos que en el plano  $z$  salen del origen (punteados en la figura 2-17) tienen como ecuación  $\theta = \alpha$ . Estas rectas se llevan al plano  $w$  como rectas (punteadas en la figura 2-18) cuyas ecuaciones son  $v = \alpha$ ; se muestran las rectas correspondientes a  $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3$  y  $\pi/2$ .

c) Correspondiente a cada punto  $P$  del plano  $z$  definido por  $z \neq 0$  y con coordenadas polares  $(r, \theta)$ , donde  $0 \leq \theta < 2\pi, r > 0$  [como en la figura 2-19], existe un punto  $P'$  en la franja de amplitud  $2\pi$  que se indica con líneas punteadas en la figura 2-20. De manera que el plano  $z$  se lleva a esta banda. El punto  $z = 0$  se lleva a un punto de esta banda, al que a veces se le llama *punto al infinito*.

Si  $\theta$  es tal que  $2\pi \leq \theta < 4\pi$ , el plano  $z$  se lleva a la franja  $2\pi \leq v < 4\pi$  de la figura 2-20. De manera similar se obtienen las demás franjas que se muestran en la figura 2-20.

Se sigue que, dado un punto  $z \neq 0$  en el plano  $z$ , existe una cantidad infinita de puntos imagen en el plano  $w$  que corresponden a ese punto.

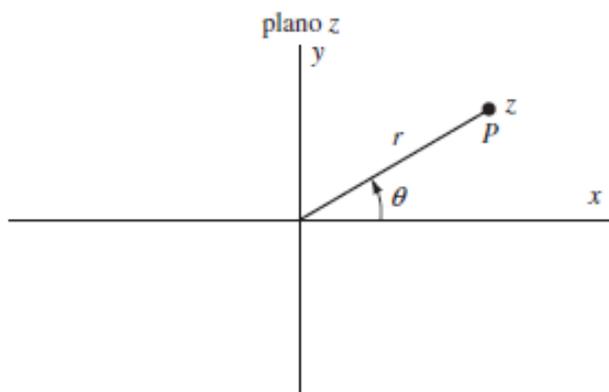


Figura 2-19

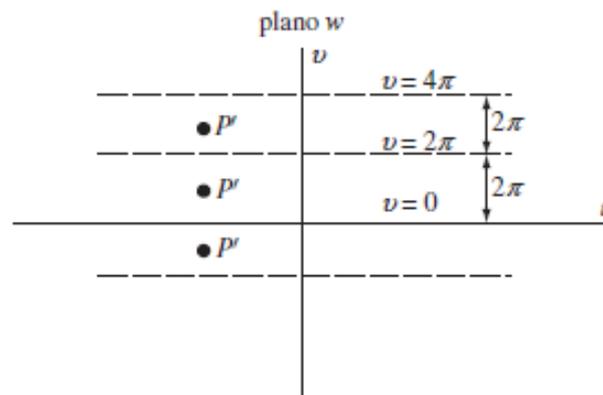


Figura 2-20

Hay que observar que si se hubiera tomado  $\theta$  en otro intervalo de modo que  $-\pi \leq \theta < \pi, \pi \leq \theta < 3\pi$ , etcétera, las franjas de la figura 2-20 se habrían desplazado verticalmente una distancia  $\pi$ .

## Representación gráfica de funciones complejas

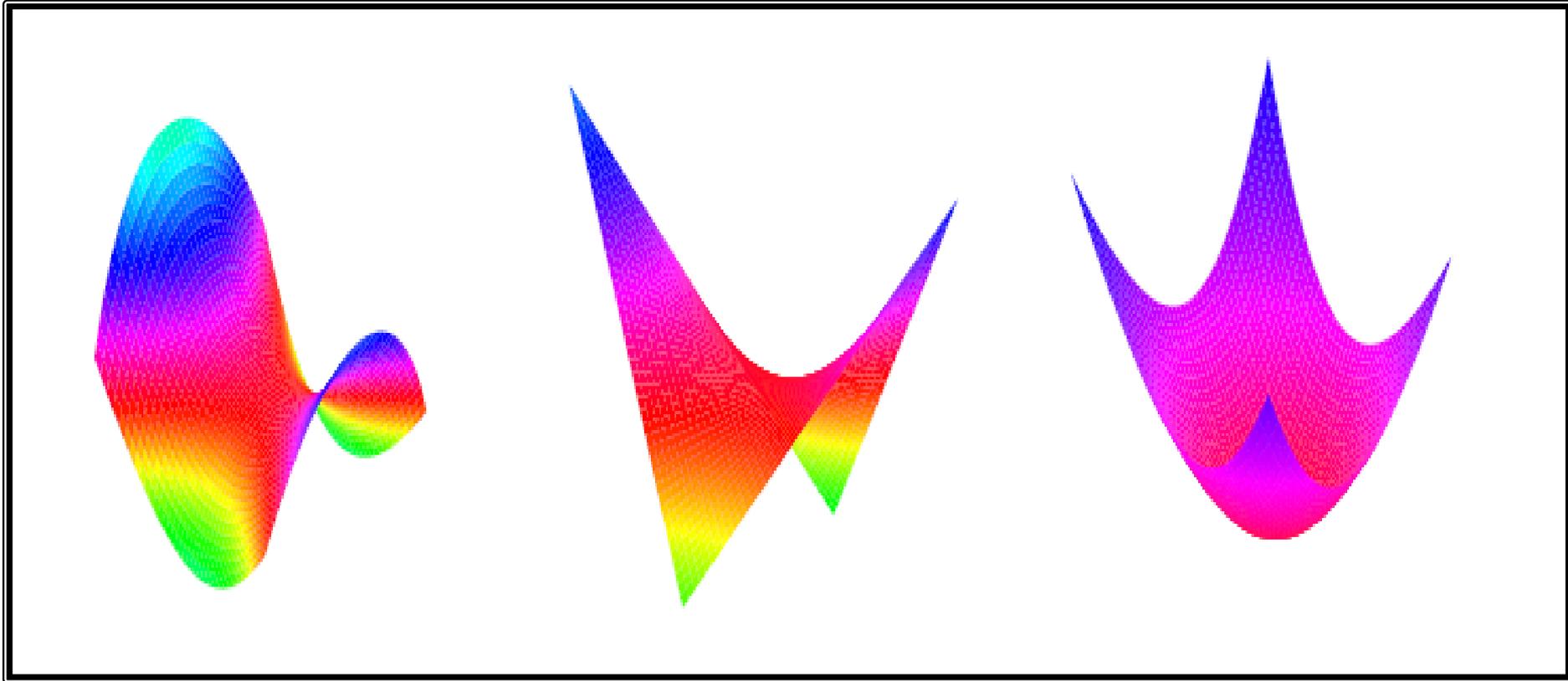
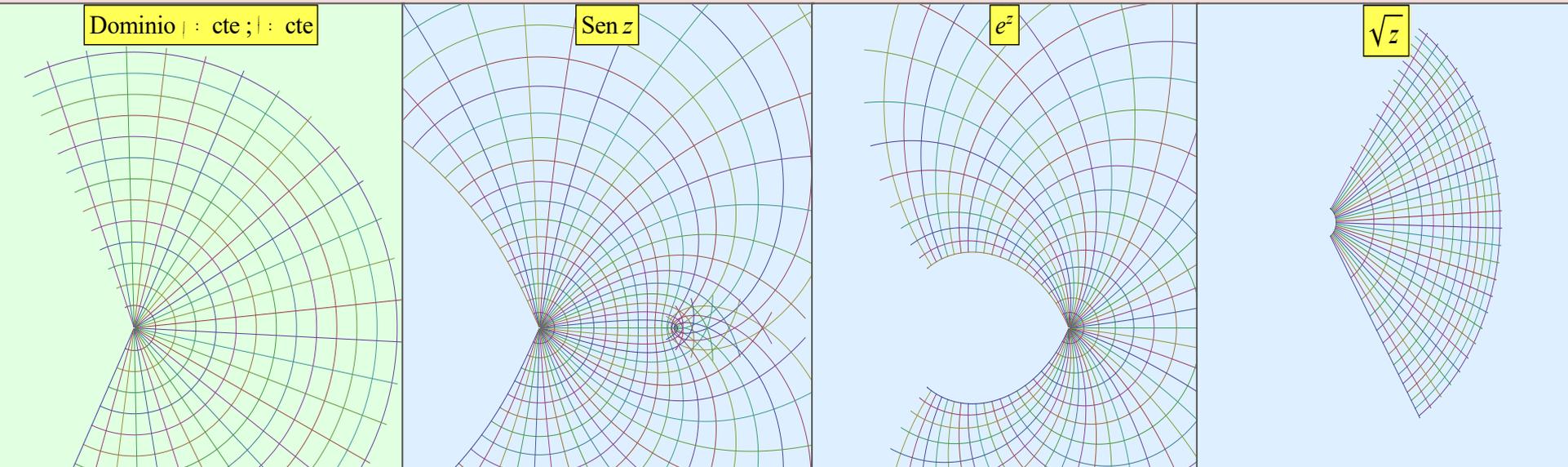


Figura 1: La primera es un gráfica de la Componente Real de  $f(z)$ :  $u(x,y)$ , la segunda es la gráfica de la Componente Imaginaria de  $f(z)$ :  $v(x,y)$  y la tercera la gráfica del Módulo de  $f(z)$ , de la función  $f(z) = (z+0.2)^2$ .

# Representación gráfica de funciones complejas



**Dominio**

$$\rho = \text{cte}$$

$$\theta = \text{cte}$$

**Figura 3:** Mapeos del plano complejo mediante funciones sencillas. Forma polar.

## Transformaciones conformes

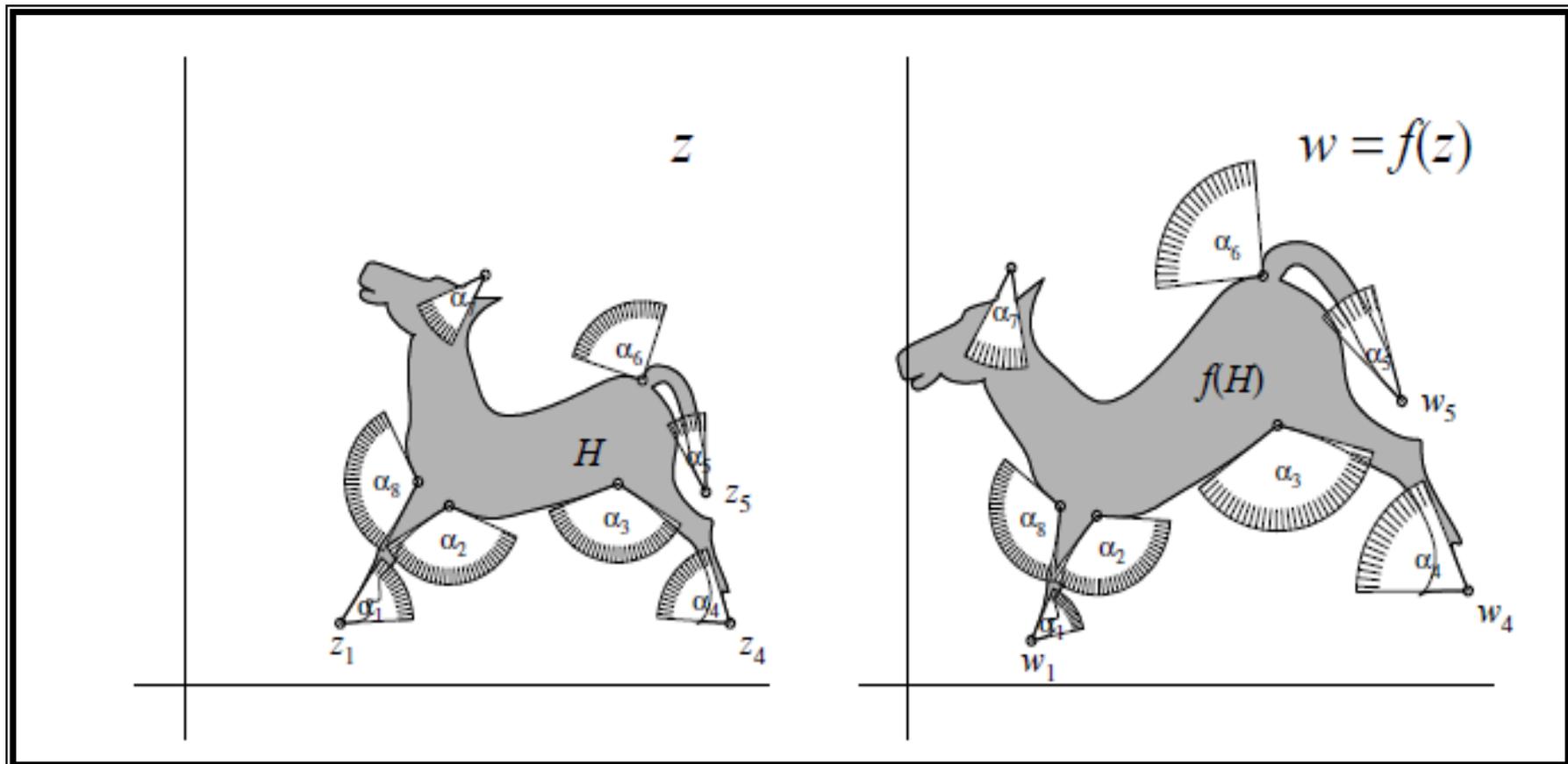


Figura 24: Gráfico de una transformación conforme, que preserva los ángulos.

# ***VIDEO***

C:\CARPETAS\Matemática  
Superior\Complejos\Videos

# Iteración de funciones complejas

1era. Iteración  $f^{(1)}(z) = f(z)$   $f^{(1)}(z) = z^2 + c$

2da. Iteración  $f^{(2)}(z) = f(f(z))$   $f^{(2)}(z) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c$

3era. Iteración  $f^{(3)}(z) = f(f(f(z)))$   $f^{(3)}(z) = (z^4 + 2cz^2 + c^2 + c)^2 + c =$   
 $= c + c^2 + 2c^3 + c^4 + 4c^2z^2 + 4c^3z^2 + 2c^2z^4 + 6c^2z^4 + 4c^2z^6 + z^8$

... ..

n-ésima iteración  $f^{(n)}(z) = c + \dots + (z^2)^n$

Los grados del polinomio se duplican con cada paso de la iteración, como así también se duplica el número de ceros de  $f(z)$

## Conjuntos de Julia

Transformación del plano complejo  $\mathbb{C}$   $f_c(z) = z^2 + c$

$c$  es un número complejo fijado de antemano.

Un algoritmo para obtener el conjunto de Julia de  $f_c(z) = z^2 + c$  es el siguiente:

Para todo complejo  $z$  se construye por la siguiente sucesión:

$$z_0 ; \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que  $z$  pertenece al Conjunto de Julia de parámetro  $c$ , denotado por  $J_c$ ; de lo contrario,  $z$  queda excluido de éste.

Si  $c = 0$  las iteraciones de un punto inicial  $z_0$  dependen del módulo de  $z_0$ .

- Si el  $|z_0| < 1$ , las iteraciones de  $f$  aplicadas a este punto tienden a 0.
- Si el  $|z_0| > 1$ , las iteraciones de  $f$  aplicadas a este punto tienden a infinito.
- Si el  $|z_0| = 1$ , las iteraciones de  $f$  se mantienen en la circunferencia de radio 1.

# Conjuntos de Julia

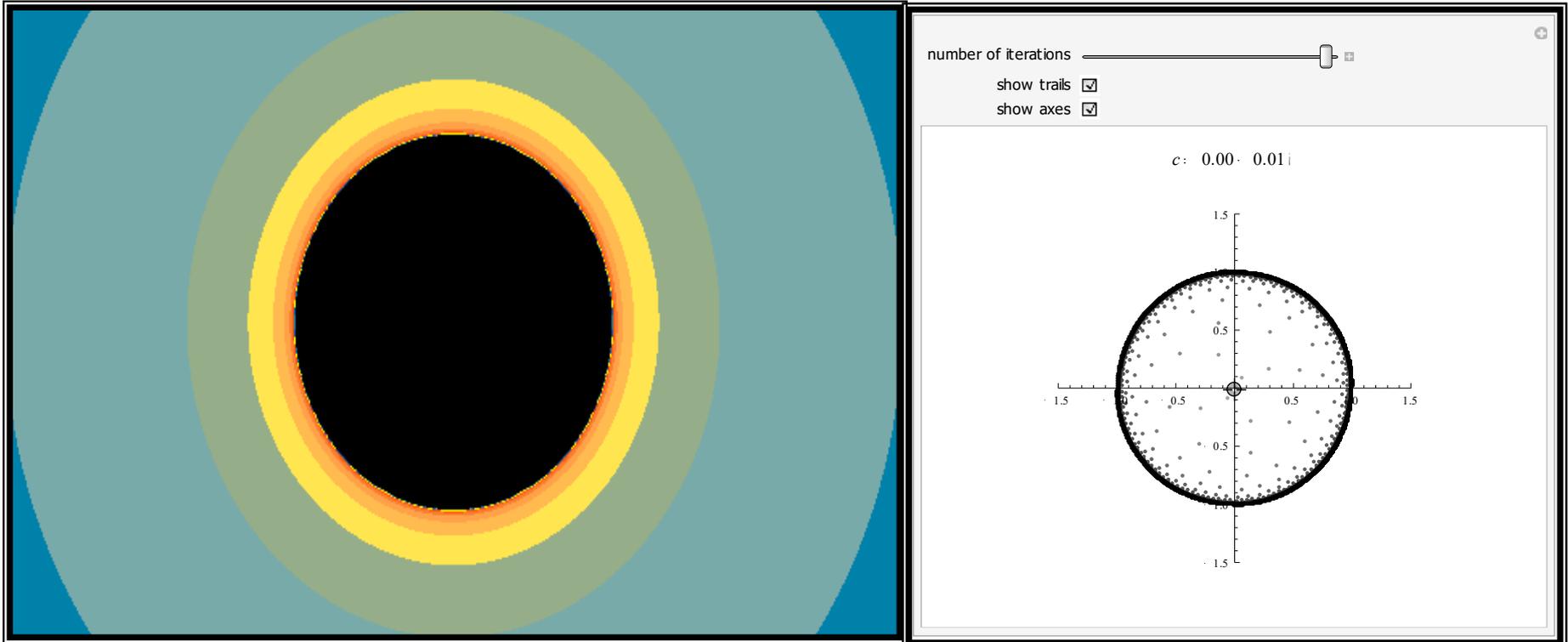


Figura 50: Conjunto de Julia  $J_0$ . Si representamos los puntos que tienden a 0 en negro y los puntos que se van a infinito de diferentes colores según la "velocidad" con que se van a infinito, obtenemos una representación global de las iteraciones de  $f$ . A la frontera de los puntos que se van a infinito se le llama Conjunto de Julia asociado a  $c : J(fc)$ . Si  $c = 0$  el Conjunto de Julia es la circunferencia unidad.

## **Conjuntos de Julia**

El conjunto de Julia tiene ciertas propiedades:

- Es no vacío.
- Es un conjunto invariante hacia adelante y hacia atrás.
- Es acotado y cerrado.
- Tiene interior vacío y no tiene puntos aislados (se dice perfecto).
- El sistema restringido a la circunferencia unidad es sensible a las condiciones iniciales, es decir a los valores de  $c$ .

## Conjuntos de Julia

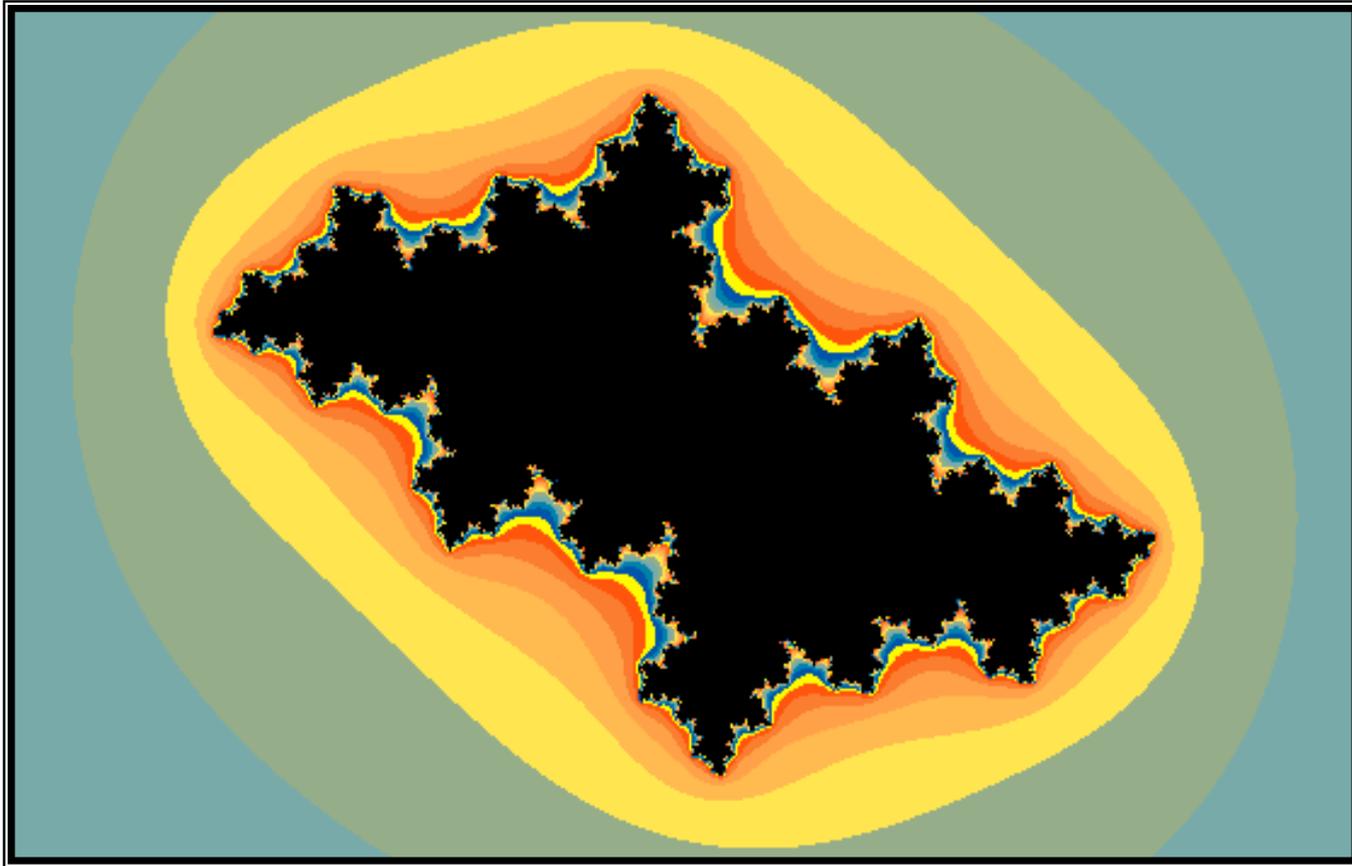


Figura 51: Conjunto de Julia  $J(-0.5+0.5i)$

Si  $c = -0.5 + 0.5i$  el conjunto de Julia (la frontera del conjunto de puntos que se van a infinito) sigue siendo una curva cerrada simple, aunque ahora es una curva fractal.

## Conjuntos de Julia

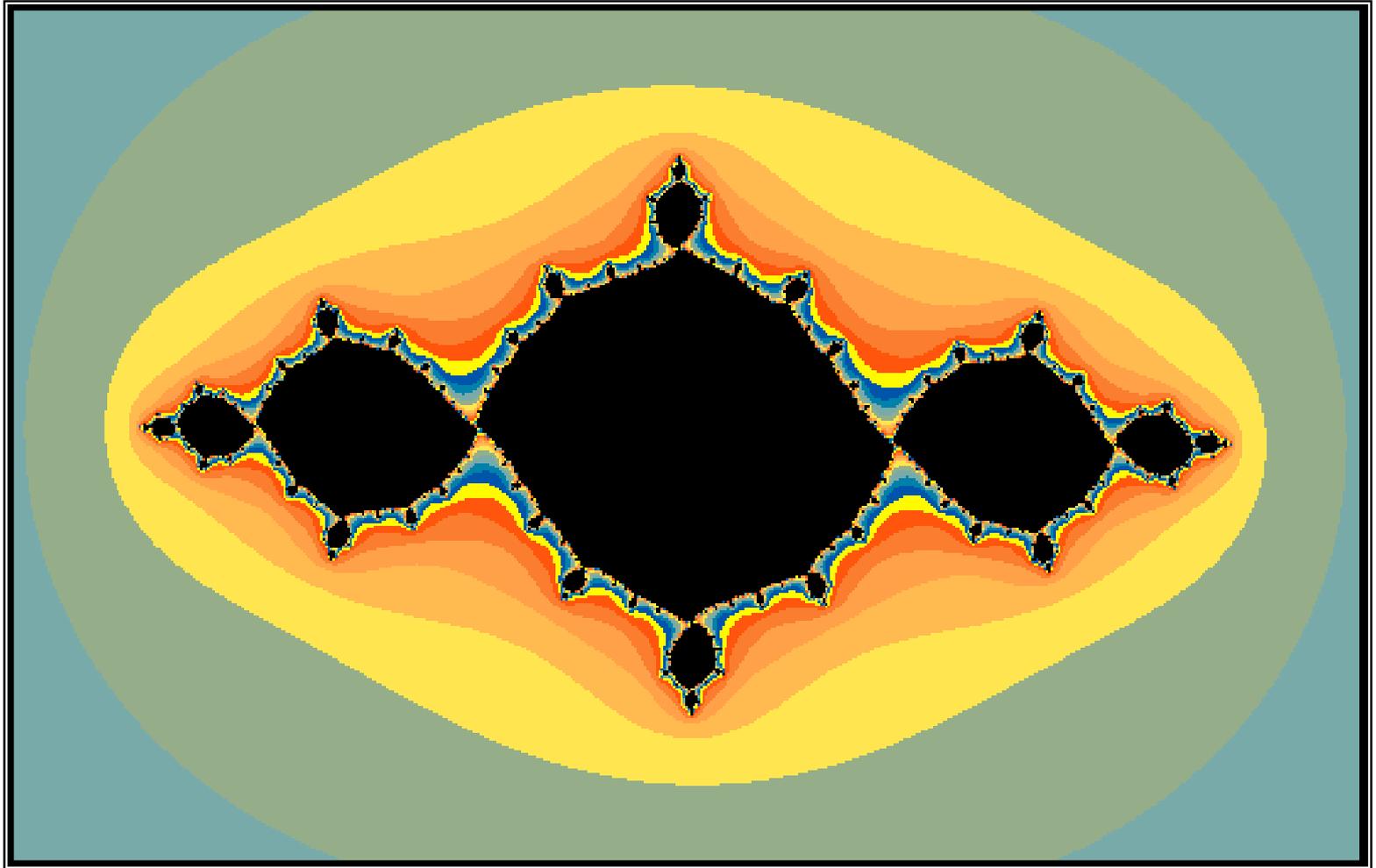


Figura 52: Si  $c = -1.1 + 0.1 i$  se obtiene un conjunto de Julia que sigue siendo una curva pero que ya no es simple, esto es, tiene autointersecciones

## Conjuntos de Julia

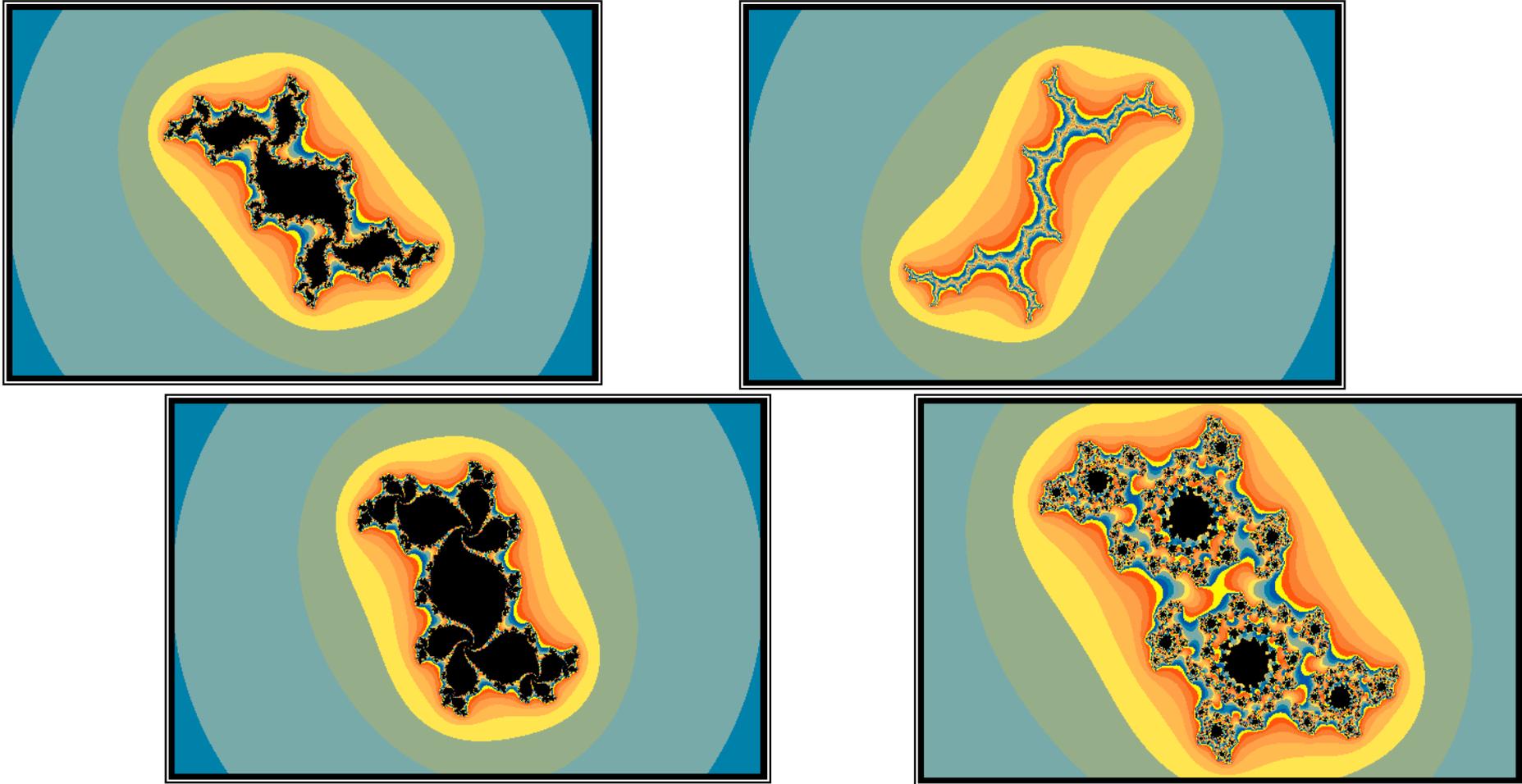


Figura 53: Conjuntos de Julia para  $c = -0.2+0.75i$ ,  $c = 0.25+0.52i$ ,  $c = 0 + i$   
y  $c = 0 + 0.66i$ . La complejidad de las autointersecciones aumenta.

## *Conjuntos de Julia*



Figura 54: Conjunto de Julia en tres dimensiones

# Conjuntos de Julia

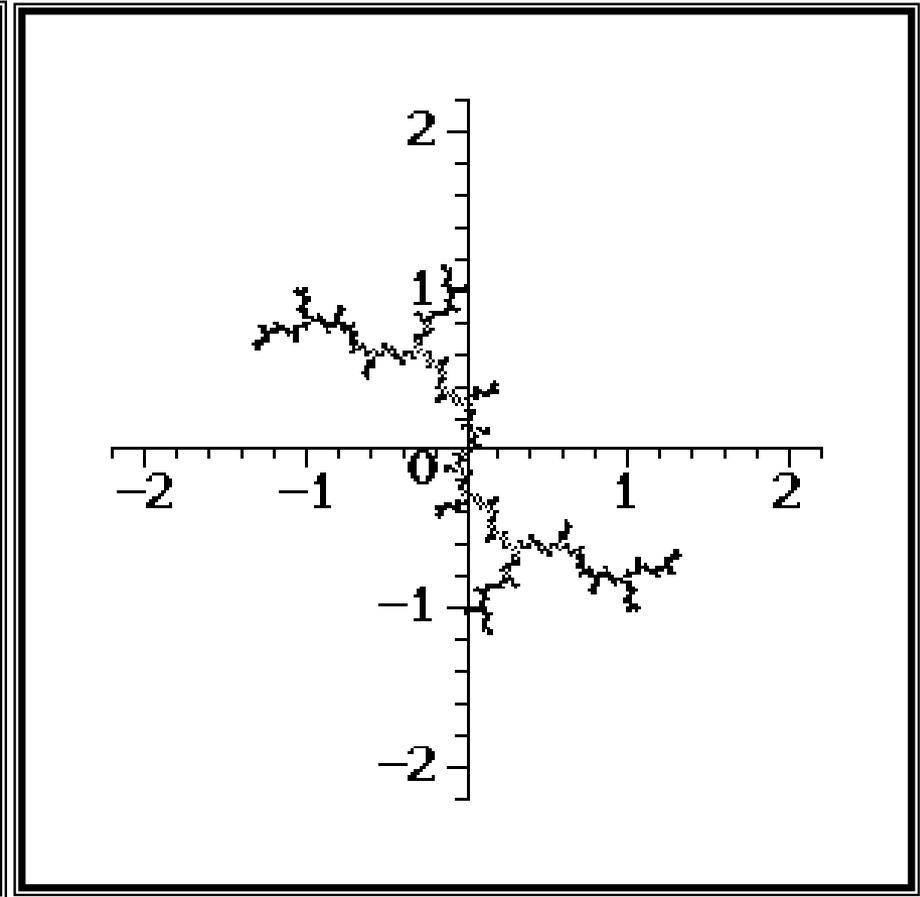
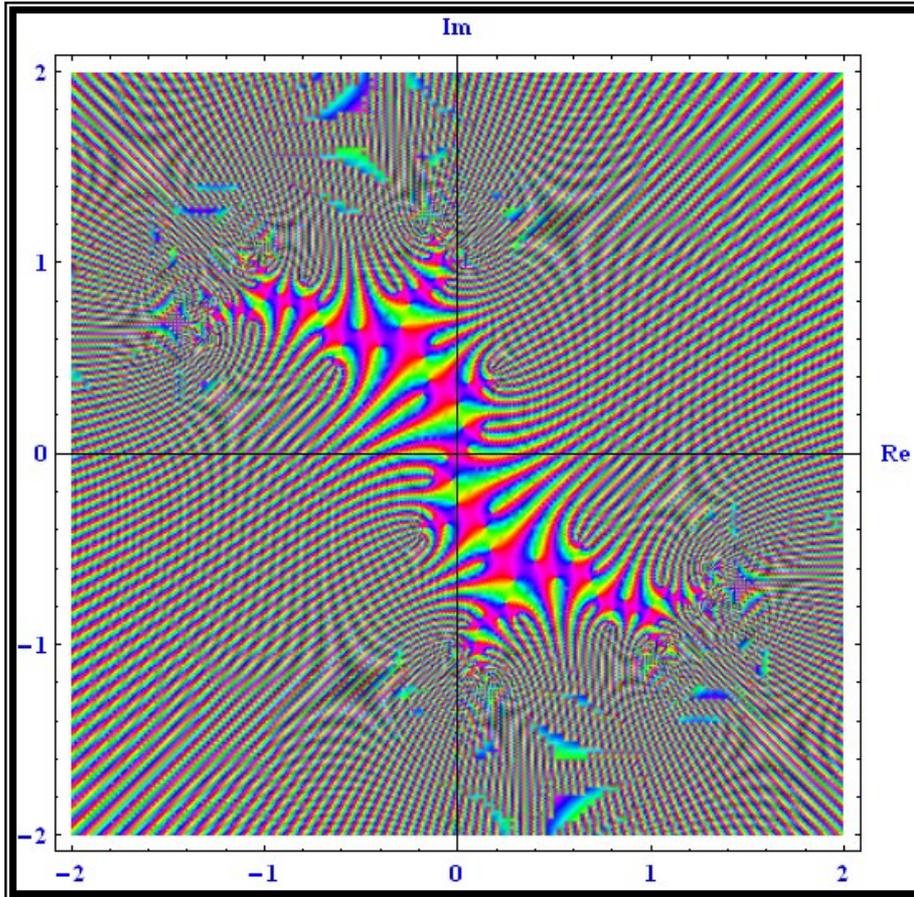


Figura 55: Conjuntos de Julia para  $c = 0 + i$ . Dendrita fractal. Imagen obtenida con Mathematica.

# **Conjuntos de Mandelbrot**

El conjunto de Mandelbrot  $M$  se define como el conjunto de parámetros  $c \in \mathbb{C}$  para los que el conjunto de Julia asociado a  $f_c$  es conexo.

Se parte de la iteración  $f_c(z) = z^2 + c$ , con  $c = 0$ , obteniéndose la sucesión de puntos del plano complejo  $\{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots, \}$

Pueden ocurrir dos sucesos:

- La gráfica de los términos de la sucesión diverge hacia infinito.
- La gráfica de los términos de la sucesión permanecen en un círculo.

En este segundo caso los puntos forman el gráfico del Conjunto de Mandelbrot, que es un fractal .

# Conjuntos de Mandelbrot

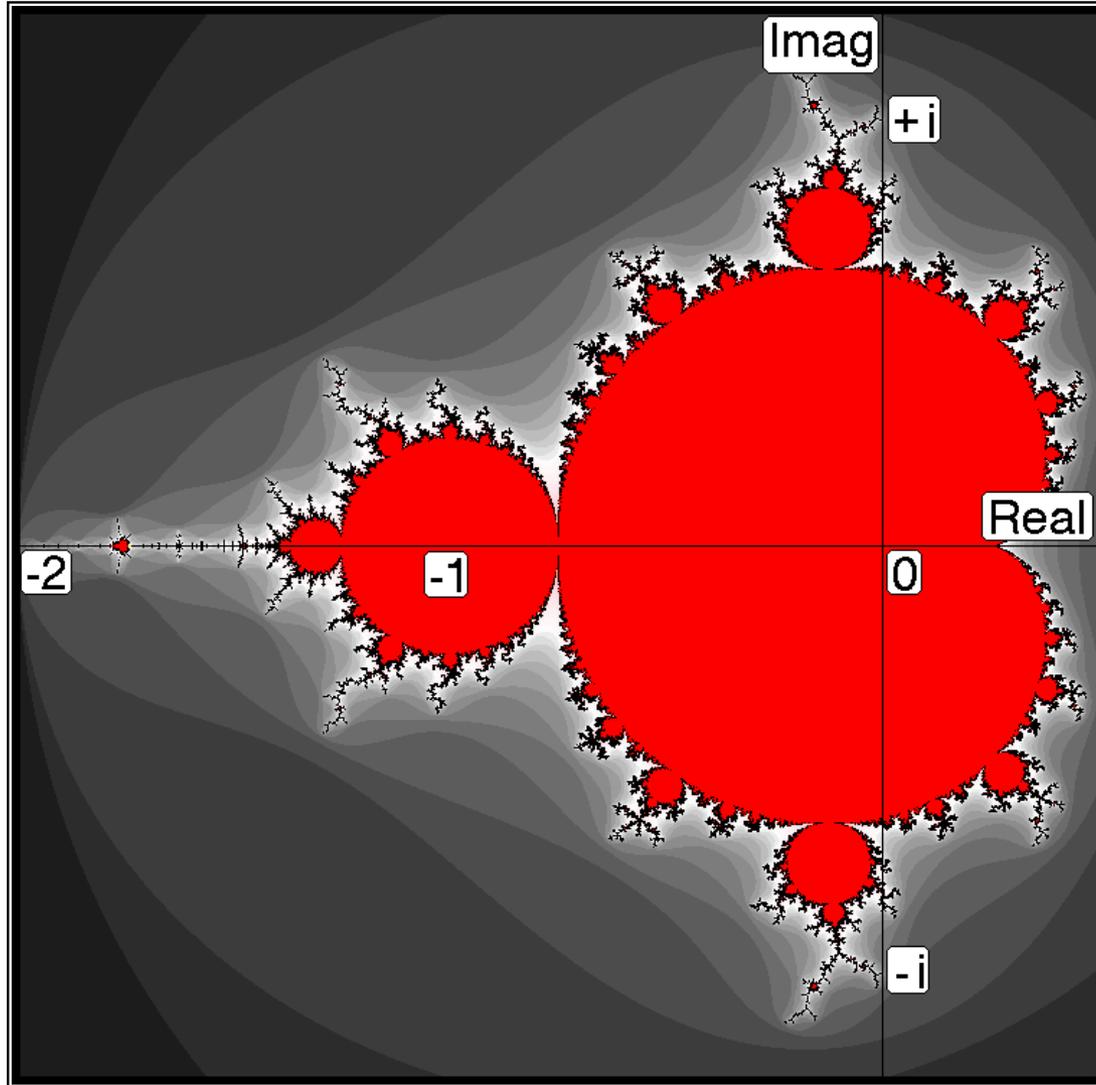


Figura 56: Conjunto de Mandelbrot.

# Conjuntos de Mandelbrot

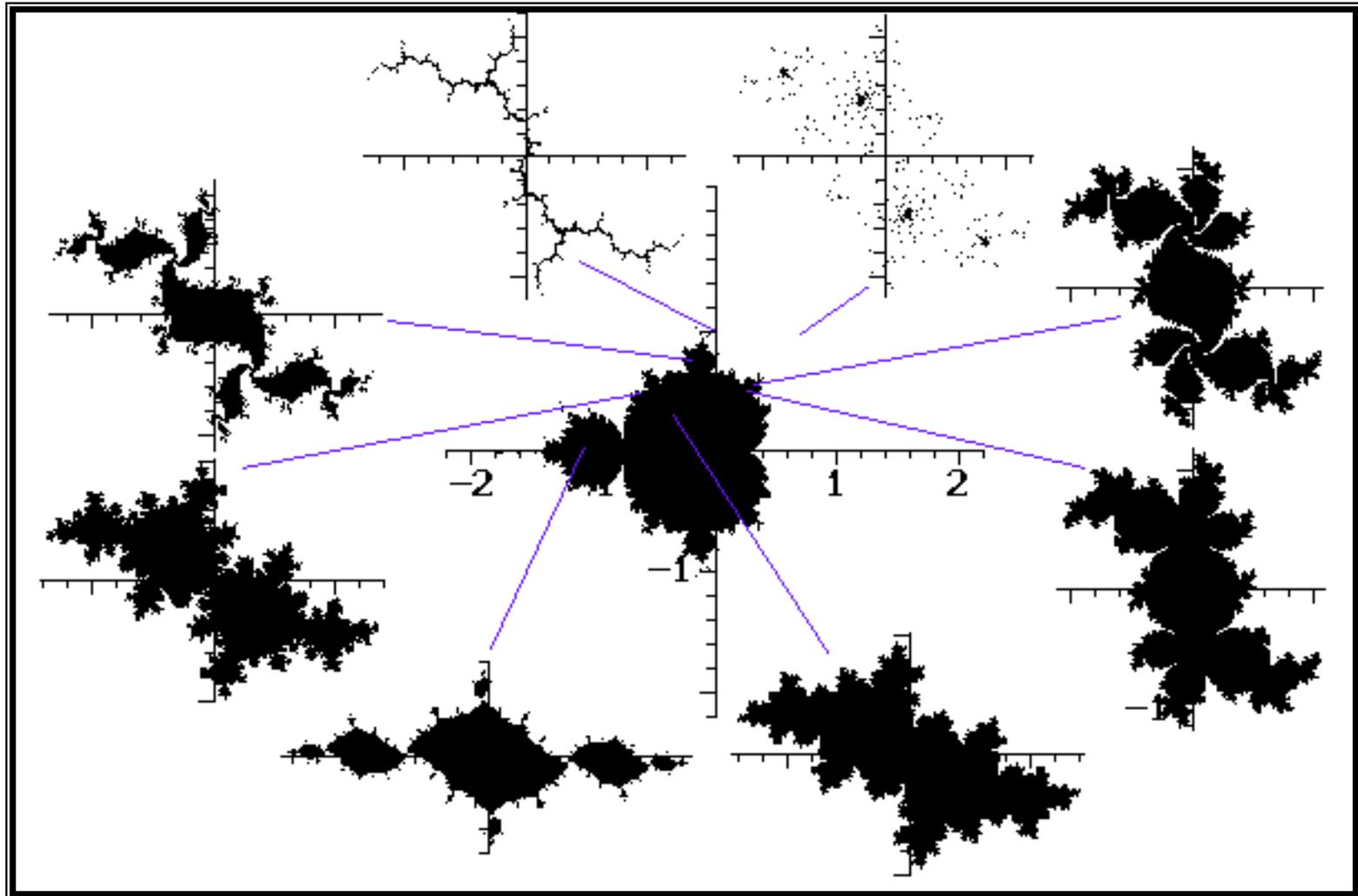


Figura 57: Conjuntos de Julia en el conjunto de Mandelbrot.

# Fractales

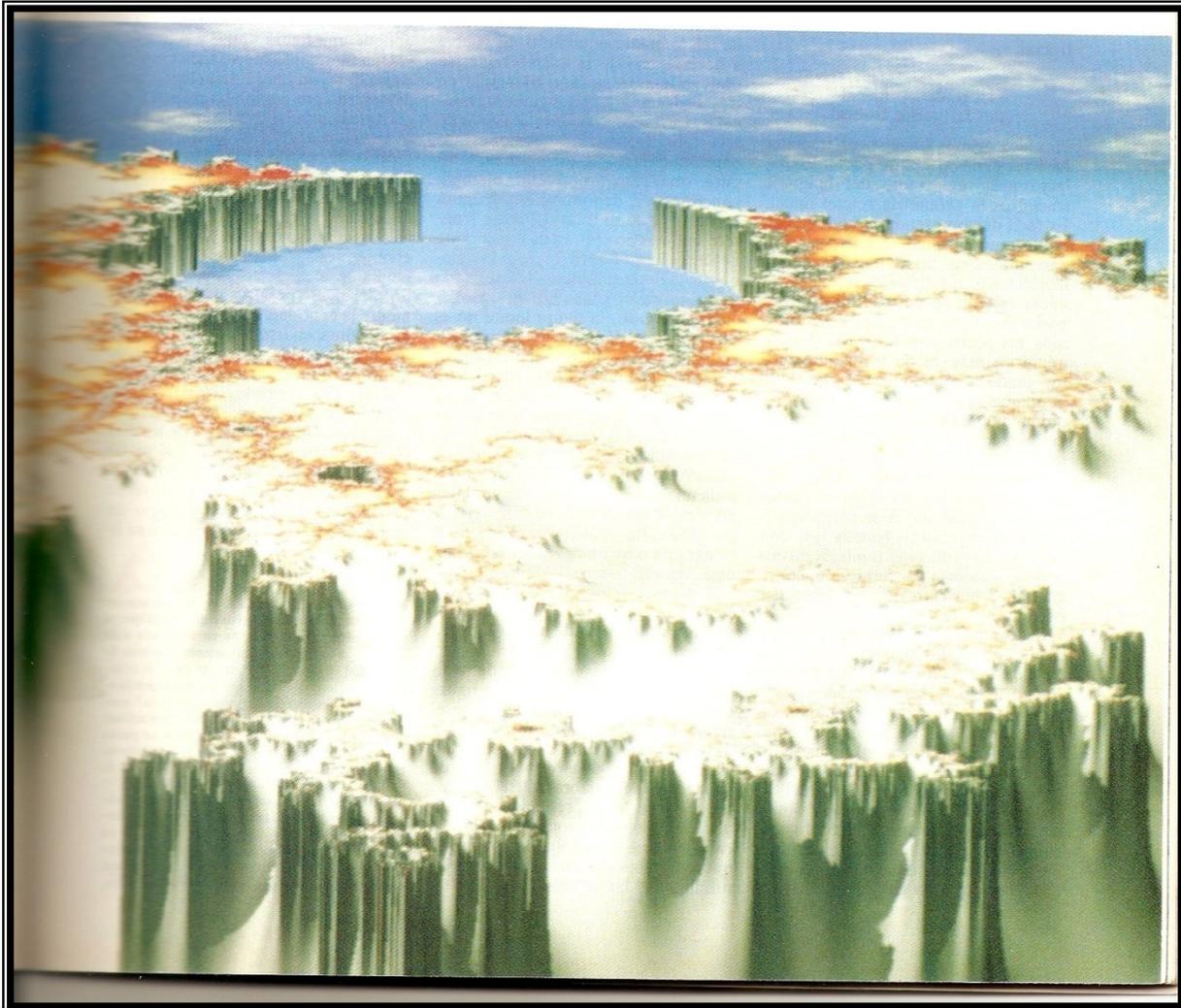


Figura 58: Fractal tridimensional correspondiente al potencial eléctrico que rodearía a un Conjunto de Mandelbrot dotado de carga eléctrica

# **Fractales**

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Posee detalle a cualquier escala de observación.
- Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística).
- Su dimensión de Hausdorff-Besicovich es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo.



Figura 53: Copo de Nieve de Koch

# Fractales

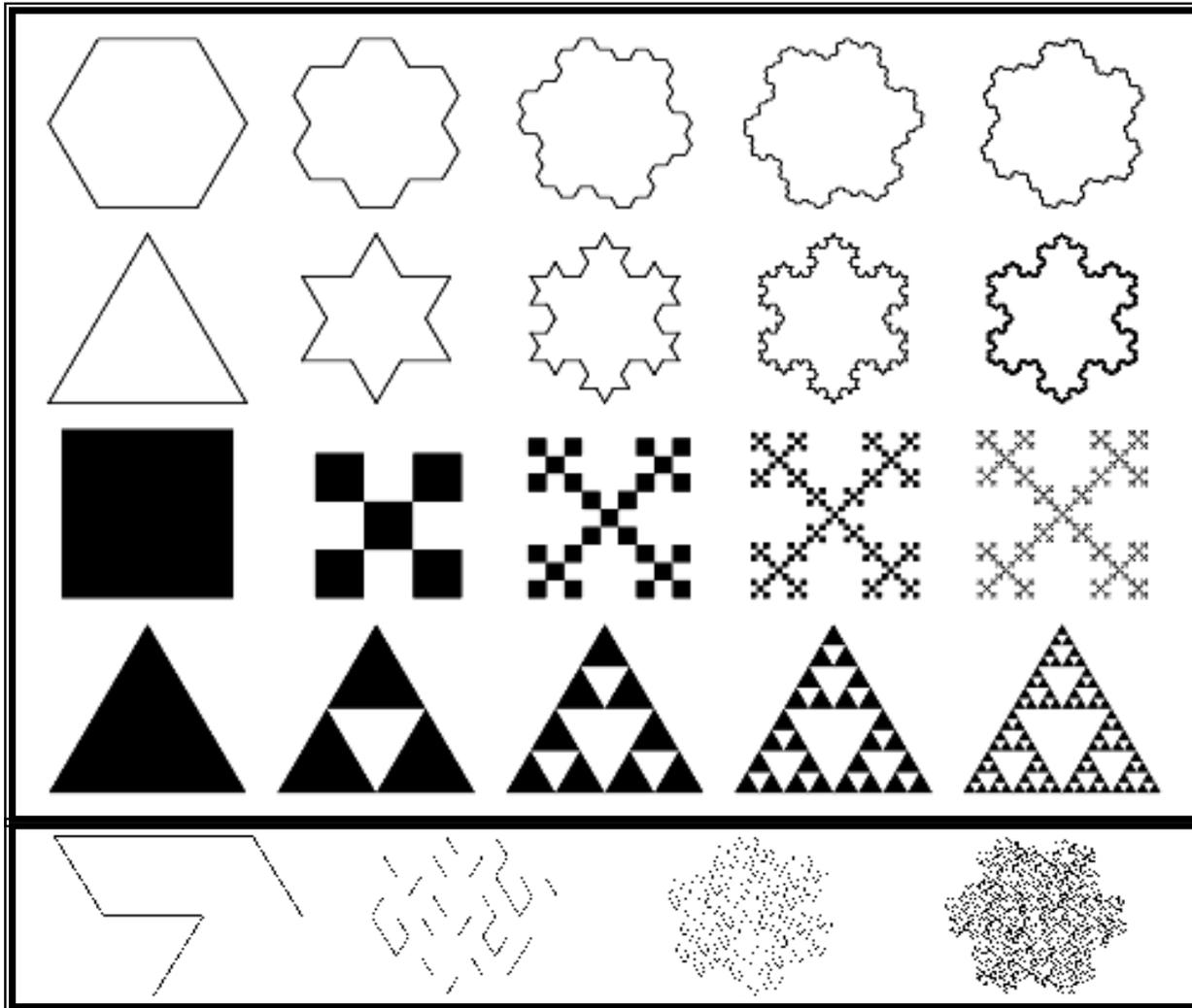
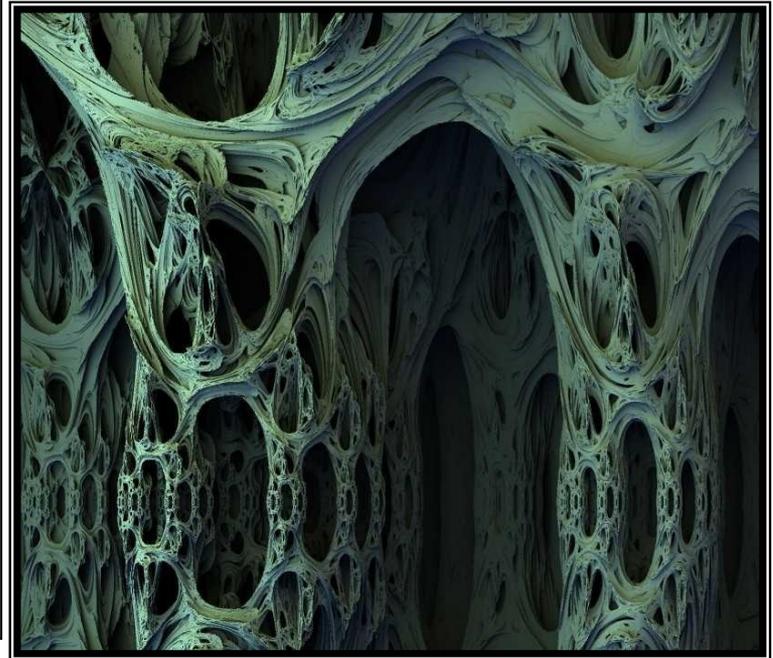
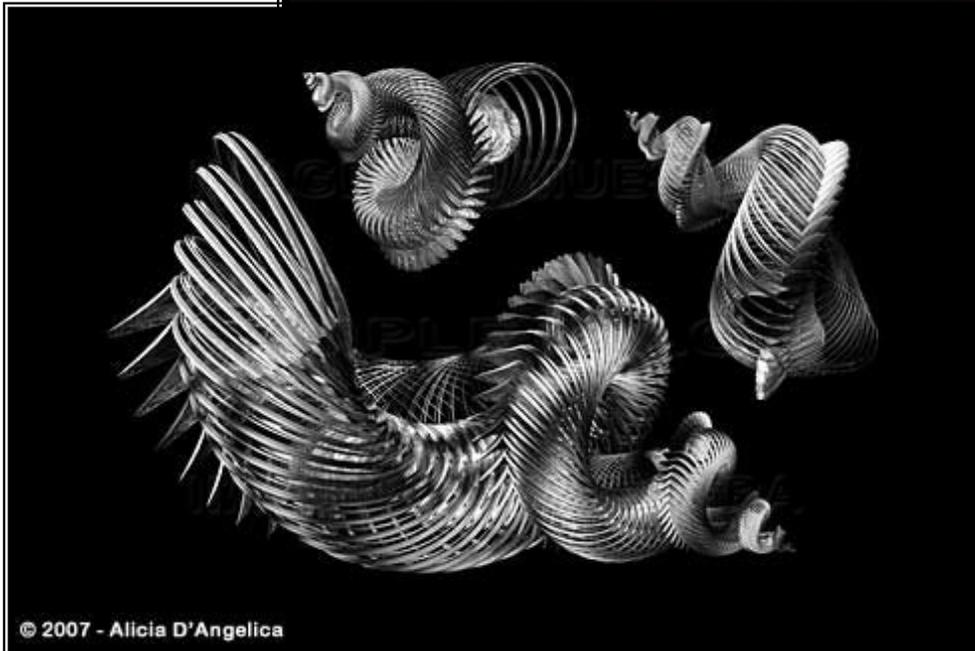
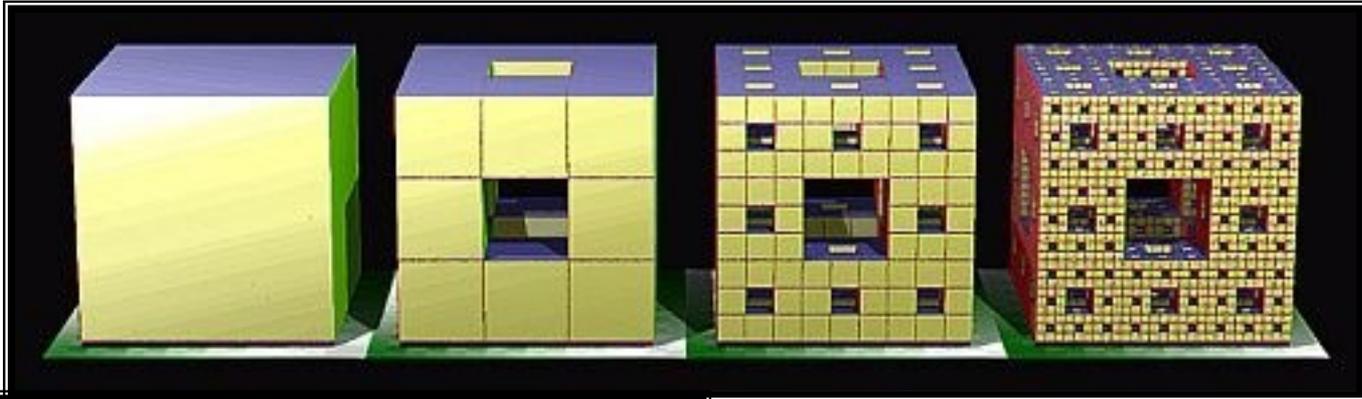


Figura 59: Fractales diversos.

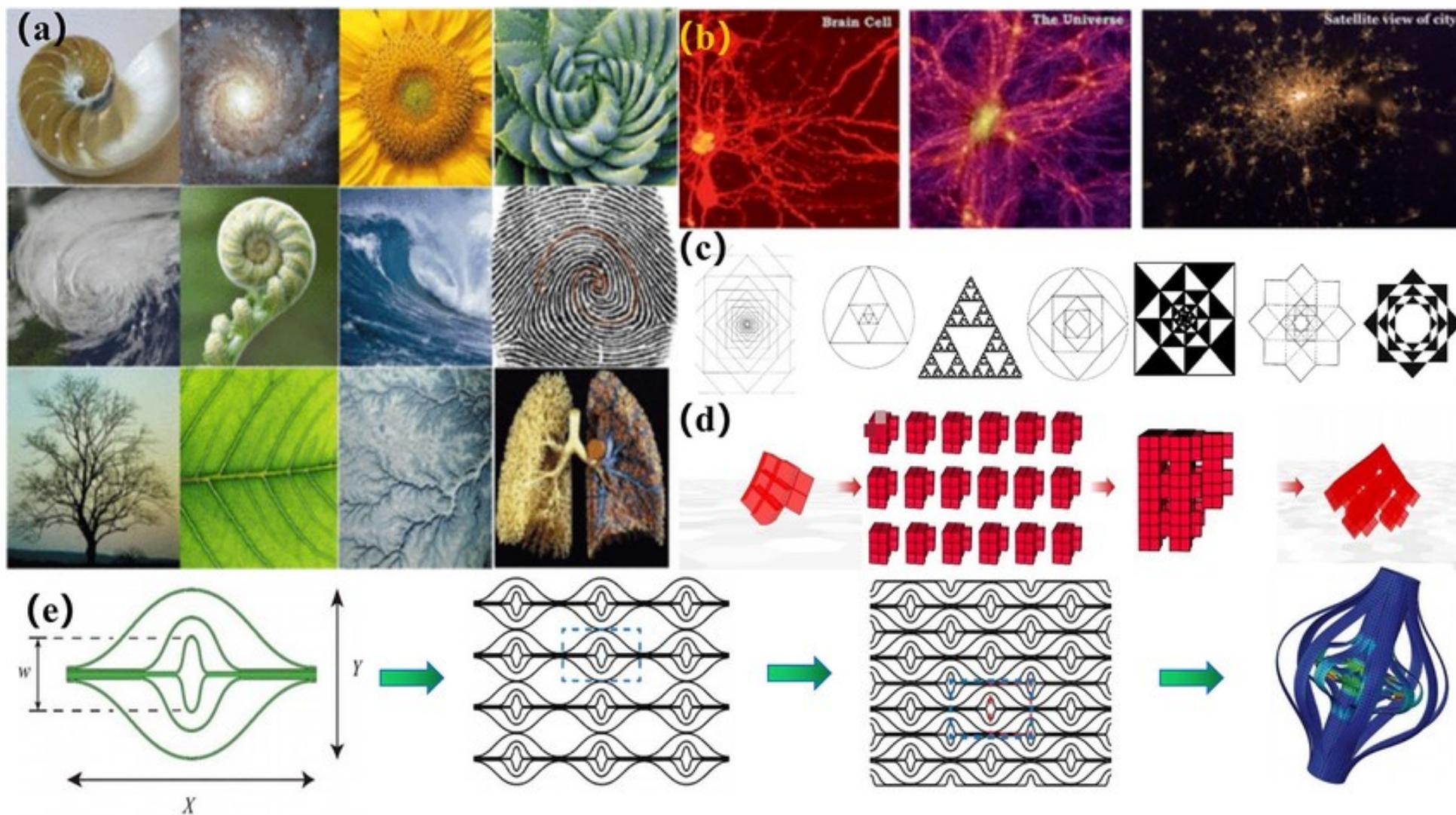
# Fractales



# FRACTALS IN NATURE

- River networks
- Fault lines
- Mountain ranges
- Craters
- Lightning bolts
- Coastlines
- Mountain Goat horns
- Trees
- Algae
- Geometrical optics
- Animal coloration patterns
- Romanesco broccoli
- Pineapple
- Heart rates
- Heart sounds
- EarthquakeS
- Snowflakes
- Psychological subjective perception
- Crystals
- Blood vessels and pulmonary vessels
- Ocean waves
- DNA
- Soil pores
- Rings of Saturn
- Proteins





# Fractales

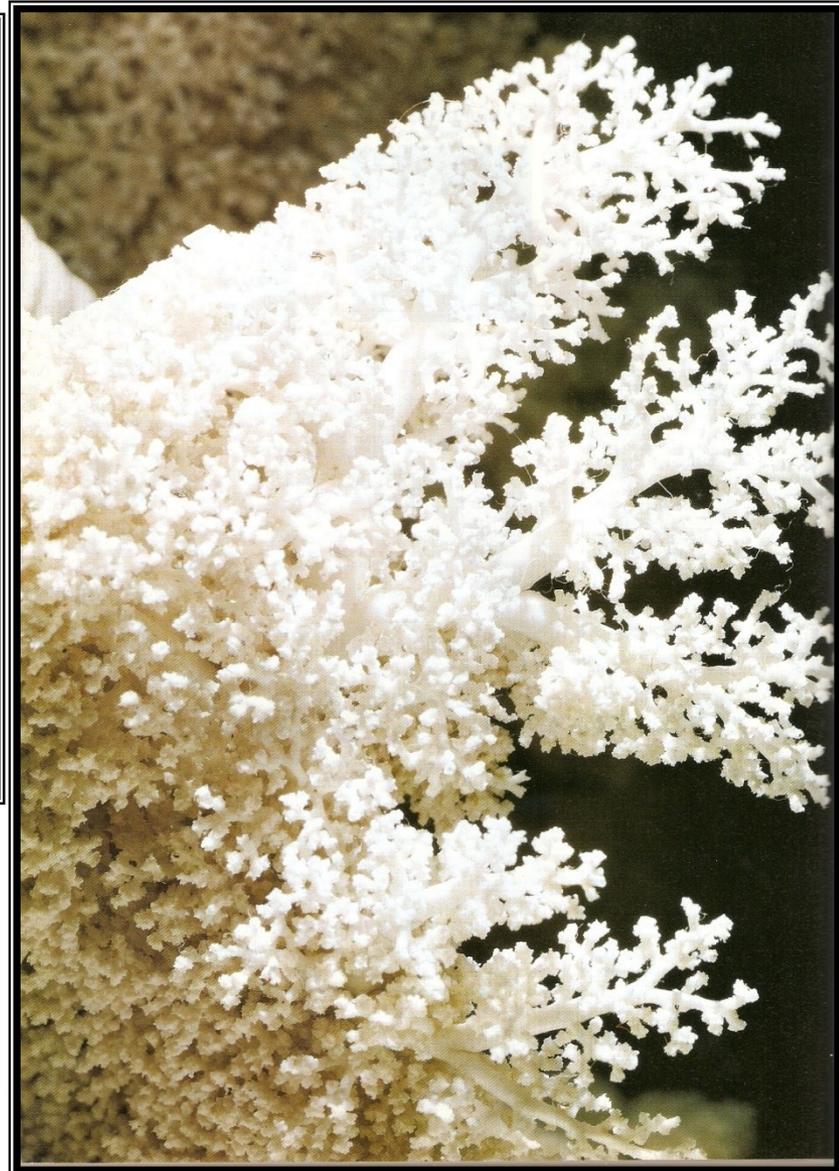
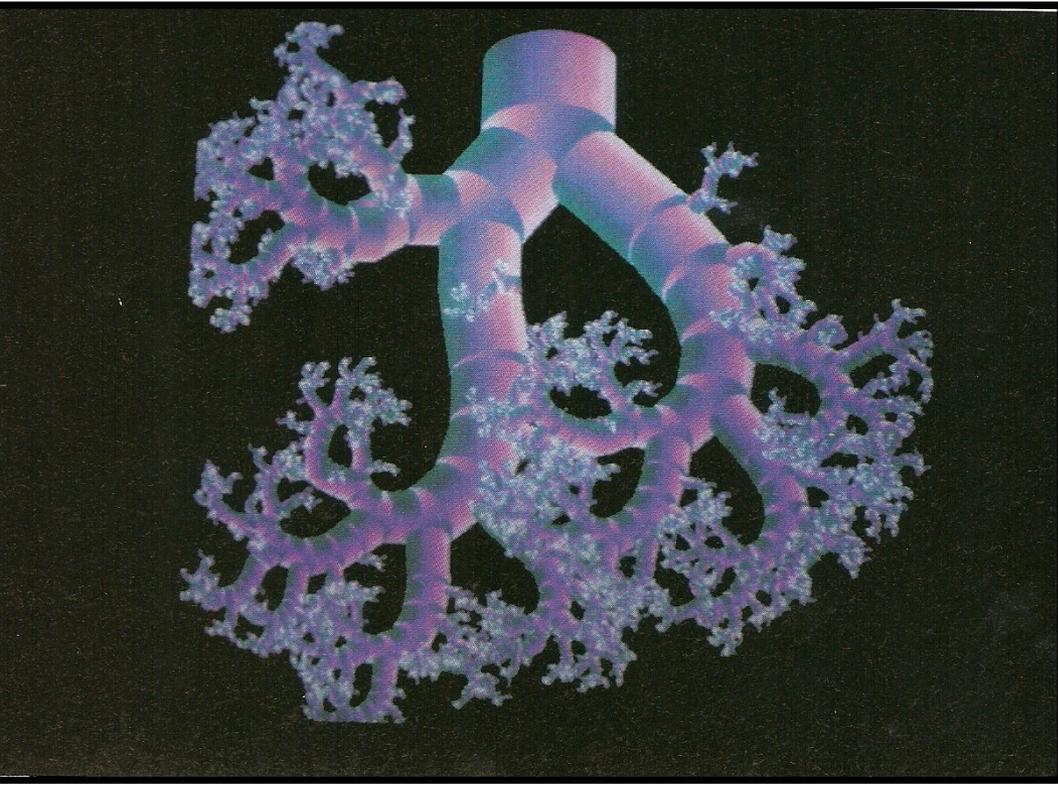


Figura 61: Fractal artificial y natural. Bronquios y bronquiolos pulmonares.

# Fractales

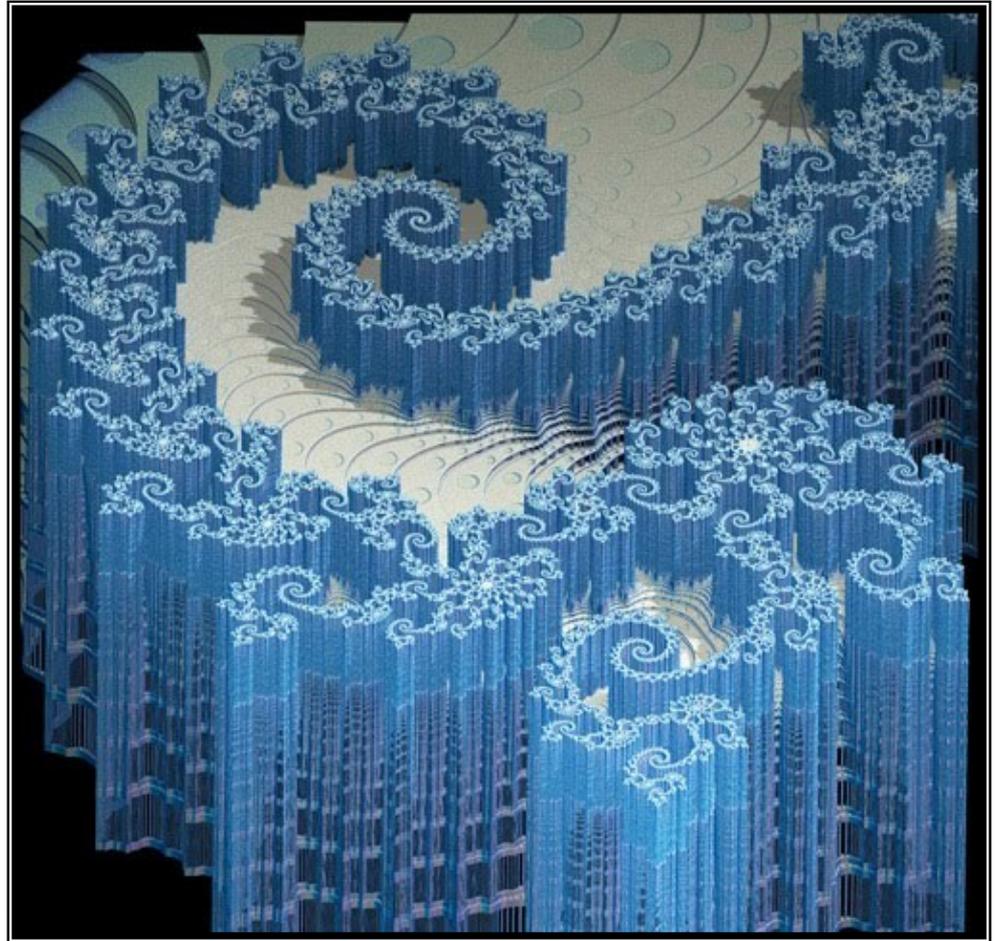
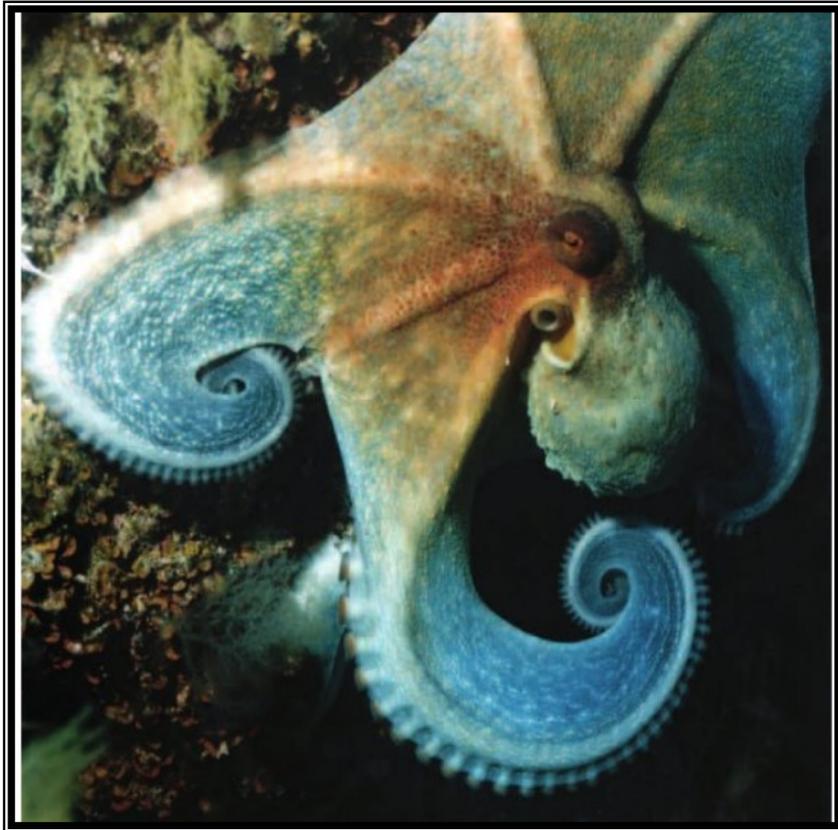


Figura 62: Fractales naturales y artificiales.