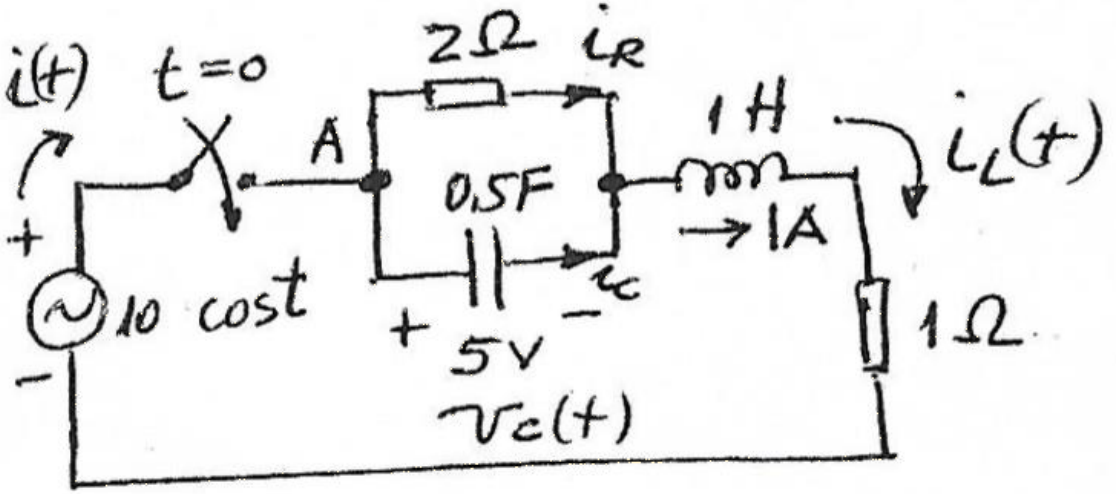
Respuesta completa a una Excitación Sinusoidal Segundo Orden

En el circuito de la figura se cierra la llave para $t=0$, momento en el cual $v_C = 5V$ (con la polaridad que se muestra) e $i_L = 1A$ (con el sentido que se muestra)



Se pide calcular:

a) La tensión $v_c(t)$ a bornes del condensador

b) la corriente $i(t)$ que suministra la fuente.

Cuando se cierra la llave, la ecuación de Kirchoff es:

$$\left[\ 10\cos t = v_C(t) + i_L \times 1 + 1\,\frac{di_L}{dt}\ \right] (1)$$

En el nodo A se cumple $i(t) = i_R(t) + i_C(t)$

$$i(t) = \frac{v_C(t)}{2} + 0{,}5\,\frac{dv_C}{dt} = i_L(t)$$

{ La corriente que sale de la fuente es la misma que la del inductor

que llevamos a (1) para obtener:

$$10\cos t = v_C + \frac{v_C}{2} + 0{,}5\,\frac{dv_C}{dt} + \left(0{,}5\,\frac{dv_C}{dt} + 0{,}5\,\frac{d^2v_C}{dt^2}\right)$$

$$\left[\ 10\cos t = 1{,}5\,v_C + \frac{dv_C}{dt} + 0{,}5\,\frac{d^2v_C}{dt^2}\ \right] (2)$$

La respuesta natural la obtenemos de la ecuación homogenea

$$0{,}5\frac{d^2v_c}{dt^2}+\frac{dv_c}{dt}+1{,}5v_c=0$$

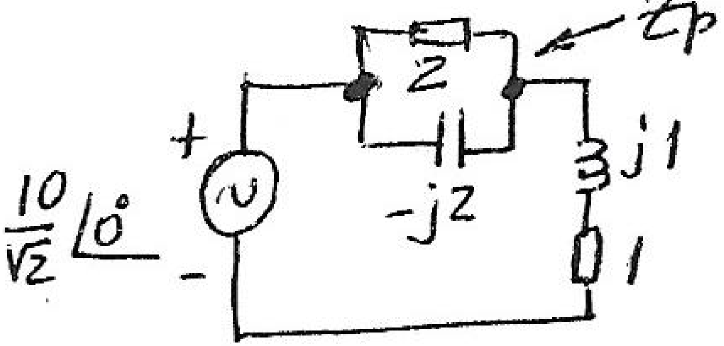
cuya ecuación característica es $\left[0{,}5s^2+s+1{,}5=0\right]$ (3)

cuyas raíces son:

$$s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{2}\qquad\begin{cases}\alpha=1\\ \omega=\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\left[\ v_{cn}(t)=Ae^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t+\theta)\ \right]\ (4)$$

Para obtener la RESPUESTA FORZADA, hay que trabajar nuevamente con los FASORES.



$$j\omega L = j1 \times 1 = j1$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1 \times \frac{1}{2}} = -j2$$

Tenemos un divisor de tensión entre dos impedancias $\bar{Z}_p$ y $\bar{Z}_s$.

$$\bar{Z}_p = \frac{2(-j2)}{2-j2} = \frac{-j4}{2\sqrt{2}\,\angle -45^\circ} = \frac{4\,\angle -90^\circ\ \angle 45^\circ}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\angle -45^\circ$$

[Paralelo de R=2 y el capacitor

$$\bar{Z}_s = 1 + j1 = \sqrt{2}\,\angle +45^\circ$$

[Serie de 1 y el inductor]

$$V_c = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ}{(Z_p + Z_s)} Z_p = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\angle -45^\circ \, \frac{10}{\cancel{\sqrt{2}}}\angle 0^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ + \sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{10\angle -45^\circ}{2}$$

$$V_c = 5\angle -45^\circ \quad \therefore \left[v_{cf}(t) = 5\sqrt{2}\cos(t - 45^\circ) \right] (5)$$

Entonces la respuesta COMPLETA será:

$$\left[v_c(t) = 5\sqrt{2}\cos(t - 45^\circ) + A e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t + \theta) \right] (6)$$

$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 5\,V \therefore$ Evaluando (6) para $t = 0$

$$5 = 5\sqrt{2}\cos(-45^\circ) + A \operatorname{sen}\theta$$

$$5 = 5 + A \operatorname{sen}\theta \quad \therefore \quad A \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \therefore \left[\theta = 0 \right] (7)$$

De la ecuación (✱) obtenida para el nodo A

$$\left[i_L(t) = \frac{v_c}{2} + 0{,}5\,\frac{dv_c}{dt} \right]$$ y sabiendo que la condición inicial en el inductor es $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 1A$

$$\left[\, 1 = \frac{1}{2}\, v_c(0^+) + 0{,}5\, \frac{dv_c}{dt}\bigg|_{t=0} \right] \quad (8)$$

Esto requiere obtener la derivada de (6) y evaluarlo para t=0

7

la dv_c/dt es la siguiente:

$$\frac{dv_c}{dt} = -5\sqrt{2}\,\text{sen}(t-45^\circ) + \left[A e^{-t}\cos(\sqrt{2}t+\theta)\sqrt{2} - \text{sen}(\sqrt{2}t+\theta) A e^{-t}\right]$$

Como sabemos que $\theta = 0$ [ver (7)], evaluamos para $t=0$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = -5\sqrt{2}\,\text{sen}(-45°) + \left[A\cos 0°\sqrt{2} - \text{sen}\,0°\,A\right] =$$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = +5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + A\sqrt{2} - 0° = 5 + A\sqrt{2}$$ que llevamos a (8)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ i_L(0^+)}}{1} = \frac{1}{2} \times \underset{\substack{\uparrow \\ v_c(0^+)}}{5} + 0{,}5\underbrace{\left(5 + A\sqrt{2}\right)}_{\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0}} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{A}{2}\sqrt{2}$$

$$1 = 5 + \frac{A}{2}\sqrt{2} \quad \therefore \left[A = -4\sqrt{2}\right]$$ que llevamos a (6)

$$\left[\, v_c(t) = 5\sqrt{2}\cos(t - 45°) - e^{-t}4\sqrt{2}(\text{sen}\sqrt{2}\,t) \,\right] \quad (9)$$

In[2]:=

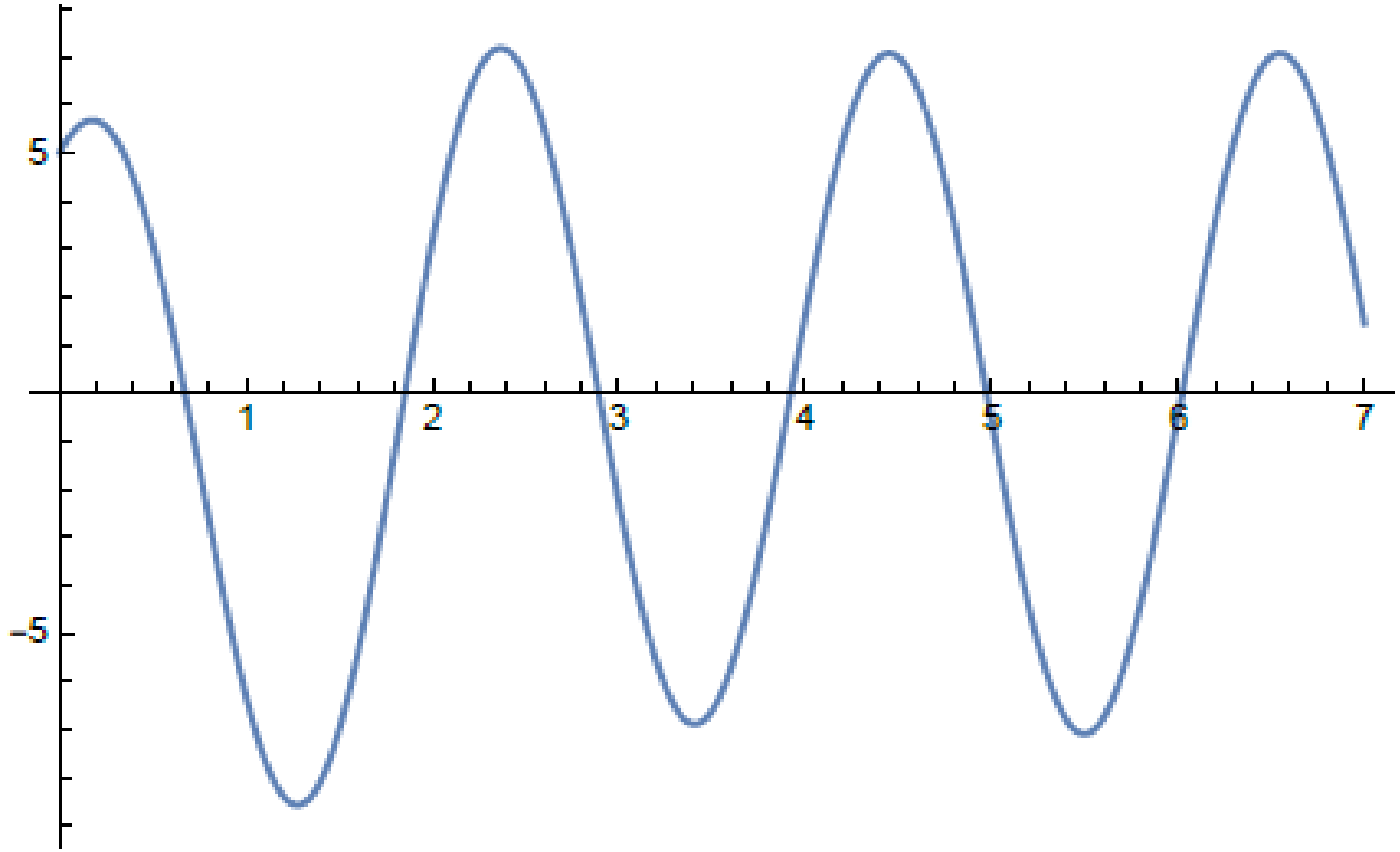
```
v1[t_] = 5 √2 Cos[3 t - Pi/4] - 4 √2 E^-t Sin[√2 t];
```

coseno seno

```
Plot[v1[t], {t, 0, 7}]
```

representación gráfica

Out[3]=



que es la solución buscada para el inciso (a)

Para obtener la solución al inciso (b), se usará la (9) ya que

$$i_L(t) = \frac{1}{2} v_c(t) + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} \quad \text{y la derivada de la (9)}$$

(11) Recordemos que $i_L(t)$ = corriente que sale de FUENTE

$$(10) \quad \frac{dv_c}{dt} = -5\sqrt{2}\,\text{sen}(t-45°) - \left[4\sqrt{2}\,e^{-t}\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - 4\sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{2}t\,e^{-t}\right]$$

Llevando (9) y (10) a (11)

$$i_L(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos(t-45°) - \cancel{\frac{4}{2}\sqrt{2}\,e^{-t}\,\text{sen}\sqrt{2}t} + \left[-\frac{5\sqrt{2}}{2}\,\text{sen}(t-45) - \frac{4\times 2}{2}e^{-t}\cos\sqrt{2}t + \cancel{\frac{4}{2}\sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{2}t\,e^{-t}}\right]$$

(12)

Recordemos que $\cos(t-45) = \cos t \cos 45^\circ + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 45^\circ$

$$\left[\cos(t-45^\circ) = \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{sen} t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$y\left[\operatorname{sen}(t-45^\circ) = \operatorname{sen} t \cos 45^\circ - \cos t \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \therefore$$

$$i_L(t) = \frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{2}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(\cos t + \cancel{\operatorname{sen} t}) - \frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}(\cancel{\operatorname{sen} t} - \cos t) - 4e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t$$

$$\left[\, i_L(t) = 5\cos t - 4e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t \,\right] \quad (13)$$

In[4]:= `i2[t_] = 5 Cos[t] - 4 E^-t Cos[Sqrt[2] t]; Plot[i2[t], {t, 0, 7}]`

$$i2[t\_] = 5\,\mathrm{Cos}[t] - 4\,E^{-t}\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{2}\;t\right];\ \mathrm{Plot}[i2[t],\ \{t,\ 0,\ 7\}]$$

coseno coseno representación gráfica

Out[4]=