Matemática para Ingeniería Electromecánica

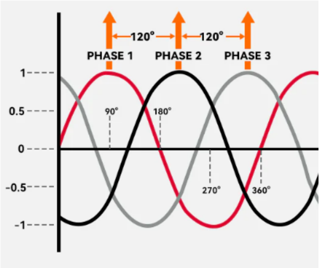
☞ Unidad N° 1: Funciones de variable compleja

Martín A. Alarcón

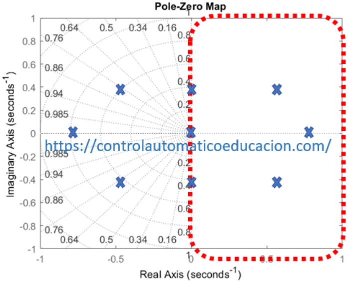
Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

26 de marzo de 2025

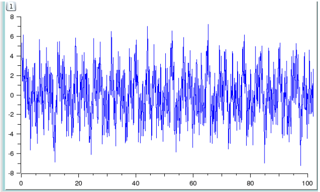
Índice



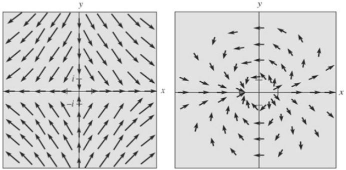
(a) Corriente alterna



(b) Estabilidad de sist. LTI



(c) Análisis de señales



(d) Movimiento de fluidos

Sistema de números complejos

Definición (Número complejo ($z \in \mathbb{C}$))

Se lo define como una expresión de la forma $z = a + ib$ (forma binómica), siendo a y b números reales ($a, b \in \mathbb{R}$) e i o también se lo puede indicar como j, la unidad imaginaria, con la propiedad de que $i^2 = -1$.

Definición

Dos números complejos ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$), siendo $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$, son iguales, si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Definición

El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ es: $z^* = \bar{z} = a - ib$.

Operaciones fundamentales con números complejos

- Suma: $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
- Resta: $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$
- Multiplicación: $(a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$
- División: $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{a+ib}{c+id}\dfrac{c-id}{c-id}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\,\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$, si $c\neq 0$ y $d\neq 0$
- Potencia: $z^n=z_1 z_2\cdots z_n$ donde $n\in\mathbb{N}$

Definición (Valor absoluto)

El valor absoluto o módulo de un número complejo está definido como: $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Fundamentos

Definición (Fundamentos axiomáticos)

Un número complejo también puede ser definido como una pareja ordenada (forma rectangular) de números reales $(a, b) = a + ib$ que cumplen ciertas definiciones operacionales que son equivalentes a las anteriores:

- ☞ Igualdad: $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.
- ☞ Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- ☞ Producto: $(a, b)\,(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ y $m\,(a, b) = (ma, mb)$

Corolario

Si $(a, b) = a + ib \Rightarrow i = (0, 1) \therefore i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0)$.

Fundamentos

Definición (Propiedades: Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$)

1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
5. $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
6. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
7. $z_1 + 0 = 0 + z_1$ y $1 z_1 = z_1 1 = z_1$, son los elementos neutros de $+$ y x
8. $\forall\ z_1 \neq 0\ \exists$ un único $z \in \mathbb{C}\ /\ z_1 + z = 0 \Rightarrow z$ se le llama opuesto: $z = -z_1$
9. $\forall\ z_1 \neq 0\ \exists$ un único $z \in \mathbb{C}\ /\ z_1 z = z z_1 = 1 \Rightarrow z$ se le llama inverso: $z = z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$

Representación gráfica

$$z = (a,b) = (x,y) = a + ib = x + iy \tag{1}$$

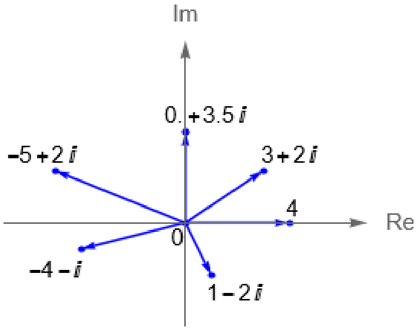


Figura: Plano complejo (z) o Diagrama de Argand.

Representación gráfica

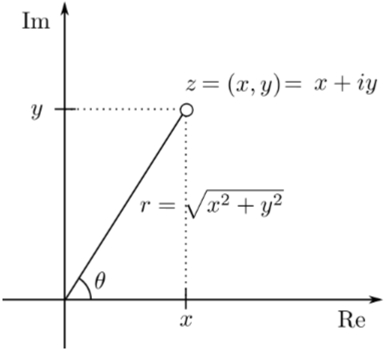
La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ está dada por:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2}$$

Definición (Propiedades)

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, si $z_2 \neq 0$
3. $|z|^2 = z\bar{z}$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
5. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ o $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Forma polar de un número complejo



De la Figura, se tiene: $z = (x, y) = x + iy \Rightarrow x = r\cos\theta,\ \ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde $r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el valor absoluto o módulo y θ es la amplitud o argumento $\Rightarrow z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, siendo r y θ las coordenadas polares (r, θ).

Teorema de De Moivre

Teorema (De Moivre)

Si $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right)$ *y* $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2\right) \Rightarrow$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left\{\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right\} \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right\} \tag{4}$$

Generalizando la Eq.(3) *se tiene:*

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\left\{\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right)\right\}$$

y si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, *se tiene la expresión del Teorema de De Moivre:*

$$z^n = \left\{r\left(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\right)\right\}^n = r^n\left(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta\right) \tag{5}$$

Formula de Euler

Definición (Formula de Euler)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \tag{6}$$

Entonces para un número complejo z se tiene que:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}\left(\cos y + i\,\text{sen}\,y\right)$$

Ejemplo (Formas polares)

1. Si se considera $z = r\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right)$ y la Formula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, un número complejo se pude expresar como: $z = re^{i\theta}$
2. En forma abreviada: (i) $r\,cis\,\theta$, (ii) $r\,arg\,\theta$ o (iii) $\boxed{r\angle\theta}$

Otras propiedades

Definición (Propiedades: $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$)

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$
3. $(e^z)^m = e^{mz}$
4. $z^{n+m} = z^n z^m$
5. $z^{n-m} = \dfrac{z^n}{z^m}$
6. $(z^n)^m = z^{nm}$

Algunas definiciones de conjuntos

Definición (Vecindades o Regiones)

Una región de radio δ de un punto z_0, es el conjunto de todos los puntos z tales que $|z - z_0| < \delta$, siendo δ cualquier número positivo.

Definición (Notaciones de conjuntos)

1. Unión: $S_1 \cup S_2$
2. Intersección: $S_1 \cap S_2$
3. Conjunto vacío: $\varnothing$. Ejemplo: la intersección de dos conjuntos sin elementos en común (disjuntos), resulta en el conjunto vació $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.
4. Complemento: Un conjunto que consiste de todos los elementos $\notin$ en S, se llama complemento de S y se representa por $\tilde{S}$.

Guía de ejercicios 1.1

1. Expresar en forma polar: (a) $-8i$, (b) -9, (c) $\sqrt{3}-i$, (d) $\sqrt{3}+i$, (e) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y (f) $-5+5i$
2. Expresar en forma rectangular: (a) $2\angle\frac{\pi}{4}$, (b) $8\angle-\frac{\pi}{2}$, (c) $4\angle\frac{\pi}{2}$ y (d) $5\angle\frac{\pi}{3}$
3. Reducir las expresiones a números complejos:
   (a) $3\left(\cos 60^o + i \operatorname{sen} 60^o\right) 4\left(\cos 30^o + i \operatorname{sen} 30^o\right) =$
   (b) $\dfrac{\left[8\left(\cos 120^o + i \operatorname{sen} 120^o\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos 60^o + i \operatorname{sen} 60^o\right)\right]^4} =$
4. Resuelva las operaciones indicadas:
   (a) $(1-2i)(3+2i)^2 =$
   (b) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i} =$
   (c) $\dfrac{(2+i)(1-2i)}{3-i} =$

Guía de ejercicios 1.1

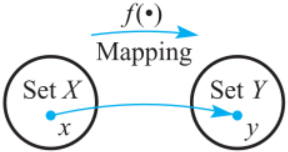
5. Hallar el valor de x e y:
   (a) $(1+2i)\,x + (3-5i)\,y = 1-3i$
   (b) $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$
6. Representar gráficamente las siguientes regiones:
   (a) $|z| < 1$
   (b) $|z+1-i| \leq 2$
   (c) $1 \leq |z+2i| \leq 2$
   (d) $|z+2-i| > 1$
   (e) $\dfrac{|z-3|}{|z+3|} = 2$
   (f) $\dfrac{|z+i|}{|z-i|} = 1$

Función de variable compleja

Definición (Función en su forma general)

El concepto de función involucra dos conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ y una ley o regla que asocia a cada elemento del primer conjunto uno del segundo, indicada como una función f que **mapea** el conjunto $\mathbb{X}$ al $\mathbb{Y}$.

$$y = f(x), \; x \in \mathbb{X} \wedge y \in \mathbb{Y}$$

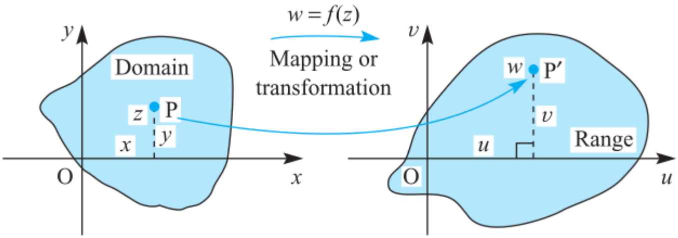


Funciones de variable compleja

Definición (Función compleja)

Si las variable independiente z es compleja: $z = x + iy$, entonces la función $f(z)$ también es compleja, por lo que, esta $f(z)$ es llamada **función compleja**:

$w = f(z)$, $z \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$, siendo la variable dependiente: $w = u + iv \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{C}$.

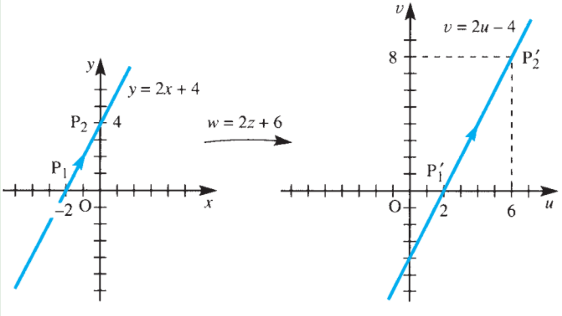


(a) z plane (b) w plane

Funciones de variable compleja

Ejemplo

Encontrar la imagen en el plano w de la recta $y = 2x+4$ en el plano z $(z = x + iy)$, bajo el mapeo o función compleja: $w = f(z) = 2z + 6$



(a) z plane (b) w plane

Mapeos lineales

Hay diferentes tipos de mapeos, como ser:

1. Lineal
2. Inversión
3. Bilineales
4. Mapeo $w = z^2$

Definición (Mapeos lineales)

La función general compleja que define al mapeo tiene la forma:

$$w = \alpha z + \beta \tag{7}$$

siendo w y z variables complejas y α y β constantes complejas.

Mapeo Lineal (cuando $\alpha = 0 + i0$ o $\alpha = 0$)

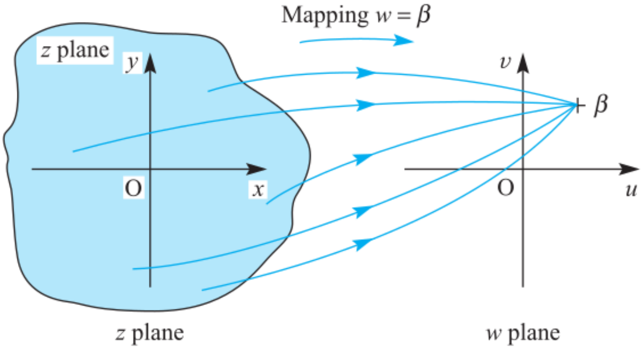
Definición

Para cuando $\alpha = 0 \Rightarrow$ la ecuación (7) se transforma en $w = \beta$, lo que implica $\forall$ valor de z siempre el mapeo va ser β.

Definición (Mapeo inverso)

Si es posible regresar a un <u>único</u> punto del plano $z \Rightarrow$ se dice que el mapeo es inverso. Por lo tanto, para que exista un mapeo inverso $z = g(w)$, el punto en el plano w debe estar en el conjunto imagen del mapeo original $w = f(z)$.

Mapeo Lineal (cuando $\alpha = 0 + i0$ o $\alpha = 0$)



El punto β es un punto fijo del mapeo.

Mapeo Lineal (cuando $\beta = 0$ o $\alpha \neq 0$)

Definición

Para esta configuración, la ecuación (7) se convierte en:

$$w = \alpha z$$

siendo el origen el único punto fijo finito del mapeo. También para este caso existe un mapeo inverso, el cual nos permite regresar del plano w al z:

$$z = g(w) = \frac{1}{\alpha} w$$

Mapeo Lineal (cuando $\beta = 0$ o $\alpha \neq 0$)

Ejemplo

Para obtener las características de este mapeo se propone un ejemplo donde $\alpha = 1 + i$, por lo que:

$$w = (1 + i)\, z \tag{8}$$

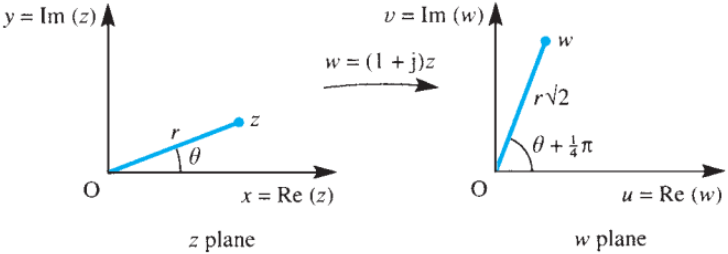
☞ Se debe analizar que le sucede a un punto general z_0 en el plano z.
Se escribe α en forma polar, por lo que:

$$\alpha = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$\Rightarrow$ si se considera: $z = r\, e^{i\theta}$ se tiene de la Eq. (8) que: $w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, r\, e^{i\theta} \Rightarrow$

$$w = r\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)} \tag{9}$$

Mapeo Lineal (cuando $\beta = 0$ o $\alpha \neq 0$)



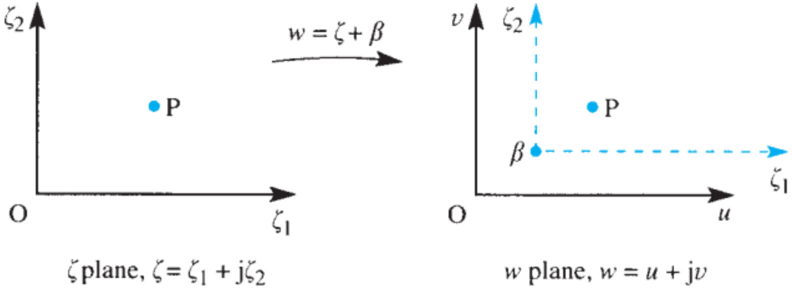
Conclusión

Este mapeo $w = \alpha z$ mapea el origen del plano z al origen del w (punto fijo), pero realiza una expansión por $|\alpha|$ y una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de $\angle\theta$; y rectas en el plano z se transforma en rectas en w.

Mapeo Lineal: $w = \alpha z + \beta$ (cuando $\beta \neq 0$ o $\alpha \neq 0$)

Se lo puede escribir como: $w - \beta = \zeta = \alpha z \Rightarrow$

- $\zeta = \alpha z$, realiza una expansión y rotación, pero del plano z al ζ.
- $w = \zeta + \beta$, realiza una traslación, del plano ζ al w.



Mapeo Lineal: $w = \alpha z + \beta$ (cuando $\beta \neq 0$ o $\alpha \neq 0$)

Definición (Mapeo lineal general)

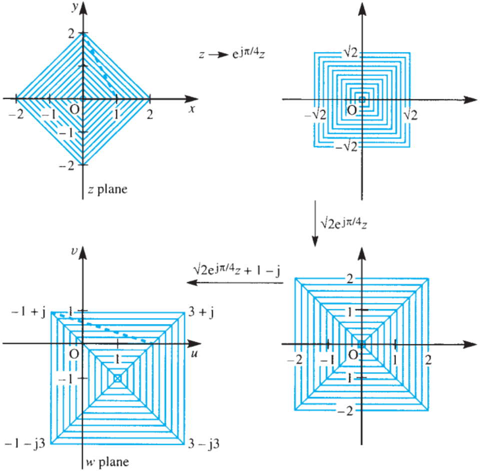
El mapeo lineal general de la forma: $w = \alpha z + \beta$, puede considerarse como una combinación de mapeos sucesivos:

1. Rotación
2. Expansión (ampliación o magnificación)
3. Traslación

$$z \xrightarrow[\text{rotation}]{} e^{j\theta} z \xrightarrow[\text{magnification}]{} |\alpha| e^{j\theta} z \xrightarrow[\text{translation}]{} |\alpha| e^{j\theta} z + \beta = \alpha z + \beta = w$$

Mapeo Lineal: $w = \alpha z + \beta$ (cuando $\beta \neq 0$ o $\alpha \neq 0$)

Ejemplo: Mapeo: $w = (1+i)\,z + 1 - i$, examinar que le pasa a: $\frac{1}{2}y + x = 1$



Mapeo lineal

Ejemplo

El mapeo $w = \alpha z + \beta$ (α y β números complejos constantes) mapea el punto $z = 1 + i$ en el punto $w = i$, y el punto $z = 1 - i$ en el $w = -1$. Se pide:

a) Determine el valor de α y β.

b) Encuentre la región en el plano w correspondientes al semiplano derecho $\mathbb{R}e(z) \geq 0$ en el plano z.

c) Encuentre la región en el plano w correspondientes al interior del circulo unitario $|z| < 1$ en el plano z.

d) Encuentre los puntos fijos del mapeo.

Guía de ejercicios 1.2

1. La función $w = iz + 4 - 3i$ es una combinación de traslación y rotación. Encuentre la imagen de la línea $6x + y = 22$ en el plano w bajo este mapeo.
2. Demuestre que el mapeo $w = (1 - i)\,z$, mapea la región $y > 1$ del plano z en la región $u + v > 2$ del plano w. Ilustrar las regiones con un diagrama.
3. Encuentre las imágenes de las siguientes curvas bajo el mapeo: $w = \left(i + \sqrt{3}\right) z + i\sqrt{3} - 1$
   a) $y = 0$
   b) $x = 0$
   c) $x^2 + y^2 = 1$
   d) $x^2 + y^2 + 2y = 1$

Derivación compleja

La derivada de una función real de una variable x en $x = x_0$ está dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \tag{10}$$

La derivada de una función de la variable compleja z en el punto z_0 será:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \tag{11}$$

Definición (Función analítica)

Si una función $f(z)$ tiene su derivada que existe para todos los puntos de una región R del plano z, entonces se llama **analítica** (regular o holomorfa) en R.

Derivación compleja

Definición (Ecuaciones de Cauchy–Riemann)

Si $z = x + iy$ y $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, y $f(z)$ es **analítica** en alguna región R del plano complejo $z \Rightarrow$ las siguientes dos expresiones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

conocidas como las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, se cumplen en todo R.

Si $z = r\,e^{i\theta}$ esta en su forma polar $\Rightarrow f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Derivación compleja

Conclusión

Para demostrar las Ecuaciones de Cauchy–Riemann, se utiliza la definición de la Eq. (11), donde z puede tender a z_0 a lo largo de cualquier camino dentro de R. Examinando la Eq. (12), se puede elegir caminos paralelos a la dirección x e y, ya que estos conducirán a derivadas parciales con respecto a x e y. Por lo tanto:

- Si se elige: $z - z_0 = \Delta x \Rightarrow f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$
- Y ahora: $z - z_0 = i\Delta y \Rightarrow f'(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

☞ Las Ecuaciones de Cauchy–Riemann son una condición necesaria para que la función $f(z)$ sea analítica en una región específica.

Derivación compleja

Ejemplo

1. Verificar que la función $f(z) = z^2$ satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann y determine su derivada.
2. Verificar que la función exponencial $f(z) = e^{\alpha z}$, siendo α una constante, satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann y demuestre que $f'(z) = \alpha e^{\alpha z}$

Derivación compleja

Definición (Reglas de derivación)

Se puede demostrar siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores, que la gran mayoría de las reglas de $f(x)$, se mantiene para el caso de $f(z)$ en los puntos donde esta función es **analítica**. Por ejemplo:

1. $\dfrac{\partial}{\partial z} z^n = n z^{n-1}, \; \forall \; z$
2. $\dfrac{\partial}{\partial z} \ln z = \dfrac{1}{z}, \; \forall \; z$, excepto el eje real negativo, donde $\ln z$ no es analítica
3. $\dfrac{\partial}{\partial z} [f(z) + g(z)] = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z} + \dfrac{\partial g(z)}{\partial z}$

Derivación compleja

Definición (Reglas de derivación)

4. $$\frac{\partial}{\partial z}\left[f(z)\,g(z)\right]=f(z)\frac{\partial g(z)}{\partial z}+\frac{\partial f(z)}{\partial z}g(z)$$
5. $$\frac{\partial}{\partial z}f\left(g(z)\right)=\frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial z}$$
6. $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{g(z)\,f'(z)-f(z)\,g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}$$

Funciones conjugadas y armónicas

Definición (Función conjugada)

Una par de funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de variables reales que satisfacen las Ecuaciones de Cauchy–Riemann, se dice que son funciones conjugadas.

Definición (Función armónica)

Una función $u(x, y)$ que satisface la Ecuación de Laplace en dos dimensiones es armónica; por lo que, $u(x, y)$ es una función armónica si cumple que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Corolario

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica $\Rightarrow$ u y v son armónicas conjugadas.

Guía de ejercicios 1.3

1. Determine las constantes a y b para que:

$$w = x^2 + ay^2 - 2xy + i\left(bx^2 - y^2 + 2xy\right)$$

sea analítica. Para estos valores de a y b, encuentre la derivada de w y exprese ambos, w y su $\frac{\partial w}{\partial z}$ como funciones de $z = x + iy$.

2. Encuentre una función $v(x, y)$ tal que, dadas $u = 2x(1 - y)$ y $f(z) = u + iv$, esta última sea analítica en z.
3. Encuentre las partes real e imaginaria de la función compleja $w = z^3$, y verifique las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Series complejas

- Una función real $f(x)$ se puede expresar como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r + \cdots \tag{13}$$

- Extendiendo al caso de las funciones complejas $f(z)$ se tiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_r z^r + \cdots \tag{14}$$

Series complejas

Definición (Series de potencias)

Una serie que tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_r(z-z_0)^r + \cdots \tag{15}$$

donde los coeficientes a_r pueden ser reales o complejos y z_0 es un punto fijo en el plano complejo, se llama **series de potencia** alrededor o centrada en z_0.

Series complejas

Una característica importante de las series de potencia es analizar su **convergencia** (concepto que luego vamos a emplear para analizar la estabilidad de sistemas lineales), donde a diferencia de las series reales, en este caso se debe utilizar el módulo de $|a_n|$.

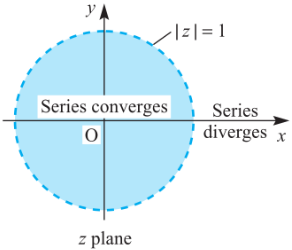
Definición (Serie geométrica)

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tiene una suma de N términos:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z} \tag{16}$$

y converge si $|z| < 1$ al límite $\dfrac{1}{1-z}$ cuando $N \to \infty$. Si $|z| \geq 1$ la serie diverge.

Series complejas (Interpretación geométrica)



Corolario

En general existe un circulo centrado en el origen de radio R tal que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \begin{cases} \text{Converge si } |z| < R \\ \text{Diverge si } |z| > R \end{cases} \tag{17}$$

Series de Taylor

Si $f(z)$ es una función compleja analítica en una región (C) del plano $z \Rightarrow$ las derivadas superiores de $f(z)$ existen. Si z_0 y $z_0 + h$ son dos puntos en el interior de $C \Rightarrow$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf^{(1)}(z_0) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(z_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \cdots \tag{18}$$

siendo $f^{(k)}(z_0)$ la k-ésima derivada de $f(z)$ evaluada en z_0.

Series de Taylor

Normalmente $z = z_0 + h$ es adoptado de tal manera que: $h = z - z_0$, por lo que la expansión de la serie queda:

$$
\begin{aligned}
f(z) =& f(z_0) + (z - z_0)\, f^{(1)}(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f^{(2)}(z_0) + \cdots \\
&+ \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)
\end{aligned}
$$

Esta serie de potencias es conocida como **Desarrollo en Serie de Taylor** de la función $f(z)$ alrededor de z_0. La región de convergencia (ROC) de esta serie es: $|z - z_0| < R$.

Integral de línea

Consideremos la integral definida $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, de la función de variable compleja z, siendo z_1 y z_2 un par de números complejos. Por lo tanto, es claro que una integral definida de una función compleja $f(z)$ es una **Integral de Línea**.

Definición (Integral de Línea)

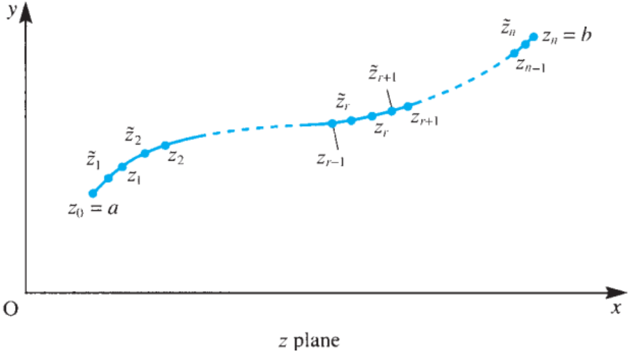
Una integral de línea en el plano (x, y) de las variables reales x e y es:

$$\int_C [P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] \tag{20}$$

donde C denota la trayectoria de integración entre los puntos A y B del plano. Para el caso cuando $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la integral es independiente de la trayectoria C que une a los puntos.

Integral de contorno → Integrales de línea en el plano z

Sea $f(z)$ una función compleja continua en todos los puntos de una curva simple C en el plano z, de longitud finita y que une a dos puntos a y b.



$$S_n = f(\tilde{z}_1)(z_1 - z_0) + f(\tilde{z}_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\tilde{z}_n)(z_n - z_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_n)\Delta z_k$$

Integral de contorno

Definición (Integral de Contorno)

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\Delta z_k \tag{21}$$

Si tomamos $z = x + iy$ y expresamos a $f(z)$ como: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces se puede demostrar a partir de la Eq. (21) que:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C [u(x,y) + iv(x,y)]\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)\,,$$

o bien:

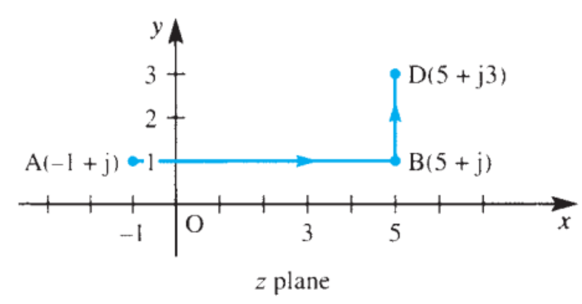
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i\int_C [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y] \tag{23a}$$

donde las integrales de la Eq. (23a) son ambas integrales de línea reales.

Integral de contorno

Ejemplo

Evalué la integral de contorno $\int_C z^2\,\mathrm{d}z$ a lo largo de la trayectoria C de $-1+i$ a $5+i3$, formada por dos segmentos de recta como se muestra en la figura.



Algunas propiedades

1. Linealidad:

$$\int_C [af_1(z) + bf_2(z)]\, \mathrm{d}z = a \int_C f_1(z)\, \mathrm{d}z + b \int_C f_2(z)\, \mathrm{d}z$$

2. Aditiva respecto de la trayectoria de integración:

$$\int_C f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\, \mathrm{d}z$$

donde se verifica que: $C = C_1 + C_2$

3. Cambio de orientación de la trayectoria de integración:

$$\int_C f(z)\, \mathrm{d}z = -\int_{-C} f(z)\, \mathrm{d}z$$

Teorema de Cauchy

Teorema

Si $f(z)$ es una función analítica con derivada $f'(z)$ continua en todos los puntos dentro y en una curva cerrada simple $C \Rightarrow$

$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{24}$$

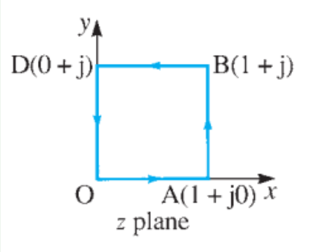
El símbolo $\oint$ denota la integración alrededor de una curva cerrada. Por convención, esta integral se evalúa recorriendo C en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj), es decir:

$$\ointctrclockwise f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Teorema de Cauchy

Ejemplo

Demostrar que $\int_C (z+1)\,\mathrm{d}z = 0$, siendo C la frontera del cuadrado con vértices en $z=0$, $z=1$, $z=1+i$ y $z=i$.



Singularidades (Polos) y Ceros

Con frecuencia se va a necesitar evaluar integrales de funciones complejas que tienen la siguiente forma:

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} \wedge f_2(z) = \frac{z}{(z-3)^2(z+2)}$$

donde se tiene valores para z donde la función no es analítica.

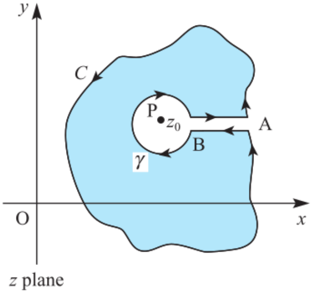
Definición

☞ **Polo**: valores de z para los cuales $f(z) \to \infty$.

☞ **Cero**: valores de z para los cuales $f(z) = 0$.

Integral de contorno

Para resolver el problema de las singularidades, se **deforma el contorno**.



$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \oint_{BA} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \oint_{BA} = -\oint_{AB} \wedge \oint_\gamma = -\oint_\gamma$$

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \tag{25}$$

Integral de contorno

Ejemplo

1. Evaluar la integral $\oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ alrededor de: (i) cualquier contorno que contenga al origen, y (ii) cualquier contorno que no contenga al origen.
2. Evalué la integral:

$$\oint_C \frac{1}{z-2-i}\,\mathrm{d}z$$

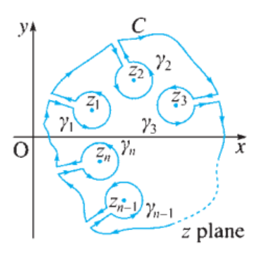
alrededor de cualquier contorno que contenga el punto $z = 2 + i$.

Integral de contorno

Corolario

Si la función $f(z)$ tiene un número finito de singularidades dentro de un contorno cerrado C, se puede reformular la Eq. (25) introduciendo n círculos $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ para rodear cada una de las singularidades. Por lo que se tiene:

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{26}$$



Teorema (formula) de Cauchy para integrales

Definición

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple C. Si $z_0 \in C \Rightarrow$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o} \, \mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{27}$$

Si se deriva n veces con respecto a z bajo el signo de la integral $\Rightarrow$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_o)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \tag{28}$$

Teorema (formula) de Cauchy para integrales

Ejemplo

Evaluar la integral de contorno:

$$\oint_C \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}\,\mathrm{d}z$$

donde C es un contorno que incluye las tres singularidades, es decir: $z=1$, $z=-2$ y $z=-i$.

Guía de ejercicios 1.4

1. Evalúe $\int_C (z^2 + 3z)\,\mathrm{d}z$ a lo largo de los siguientes contornos C del plano complejo z:
   a) La recta que une 2 con $i2$,
   b) La recta que une 2 con $2 + i2$ y después con $i2$,
   c) El círculo $|z| = 2$ para 2 con $i2$ en la dirección contraria a las agujas del reloj.
2. Evalúe la integral de contorno

$$\oint_C \frac{1}{z-4}\,\mathrm{d}z$$

siendo C cualquier curva cerrada simple y $z = 4$ está:
   a) Fuera de C,
   b) Dentro de C.

Guía de ejercicios 1.4

3. Con al ayuda del teorema (formula) de Cauchy para integrales, evalúe la siguiente integral de contorno:

$$\oint_C \frac{5z}{(z+1)(z-2)(z+i4)}\,\mathrm{d}z$$

siendo C: (a) el círculo $|z| = 3$, y (b) el círculo $|z| = 5$.

4. Con al ayuda del teorema (formula) de Cauchy para integrales, evalúe la siguiente integral de contorno:

$$\oint_C \frac{2z}{(2z-1)(z+2)}\,\mathrm{d}z$$

siendo C: (a) el círculo $|z| = 1$, y (b) el círculo $|z| = 3$.

Referencias

- Murray R Spiegel et al.
  Variable compleja.
  McGraw-Hill, 1991.
- G. James, D. Burley, P. Dyke, D. Clements, N. Steele, and J. Wright.
  Advanced Modern Engineering Mathematics.
  Pearson Education, 2018.
- Glyn James and David Burley.
  Matemáticas avanzadas para ingeniería.
  Pearson Educación, 2002.