Apéndice B

Transformada de Laplace

En este apéndice se presentan conceptos básicos de transformada y transformada inversa, presentando teoremas y propiedades más importantes del tema, junto con algunos ejemplos. También se muestra la resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante la técnica de la transforma de Laplace, que resulta de sumo interés en la teoría control lineal. Se sugiere profundizar el tema con textos clásicos de matemáticas para ingenierías como las obras de Kreysig [45], Kaplan [43], entre otros.

B.1. Introducción

La transformada de Laplace fue desarrollada por Pierre Simon Laplace[1], físico - astrónomo, considerado uno de los matemáticos más brillantes de todos los tiempos.

A manera de resumen se puede decir que la transformada de Laplace presenta las siguientes ventajas:

1. Puede reemplazar operaciones como la diferenciación o la integración con operaciones algebraicas en el plano complejo. Con el uso de la transformada de Laplace muchas funciones como las sinusoidales o exponenciales se pueden convertir en funciones algebraicas de una variable compleja s.
2. Permite resolver en forma rápida ecuaciones diferenciales lineales, obteniéndose las componentes del estado transitorio y estacionario simultáneamente. A diferencia de los métodos clásicos que dan una solución general con n constantes desconocidas, la técnica de la transformada de Laplace considera las condiciones iniciales al momento de pasar al campo transformado, de manera que la ardua tarea de tener que calcular las n constantes para un problema particular no se hace necesario.

[1] Pierre Simon Laplace (23/03/1749 - 05/03/1827)

3. Permite mediante técnicas gráficas en el plano complejo y teoremas básicos, predecir el comportamiento del sistema, tanto en regímenes transitorio como permanente o estacionario, sin tener que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición B.1.1 — Transformada de Laplace. Sea $f(t)$ una función de variable real tal que está definida para $0 \leq t < \infty$. Se define

1. una variable compleja $s\colon = \sigma + j\omega$ y,
2. el operador de Laplace $\mathcal{L}$, que indica que la cantidad que le sigue ha de ser transformada por la integral de Laplace $\int_0^\infty e^{-st}dt$.

Luego, la transformada de Laplace de $f(t)$ queda definida por,

$$F(s)\colon = \mathcal{L}\left[f(t)\right] := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ , \tag{B.1}$$

en todos los valores de s para los cuales la integral impropia converge.

Aquí, la función de variable compleja $F(s)$ es designada como la función de transferencia o transformada de Laplace de la función $f(t)$.

Recuerde además que, una integral impropia sobre un intervalo infinito se define como,

$$\int_a^\infty g(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(t)dt \ , \tag{B.2}$$

Si el límite (B.2) existe, decimos que la integral impropia converge de lo contrario diverge o no existe. Nótese que el integrando de la integral impropia (1) contiene el parámetro s además de la variable de integración t. En consecuencia, cuando la integral (B.1) converge, no lo hace a un número, sino a una función F de s.

Con el objeto de introducirnos al problema de la existencia o convergencia de la integral de Laplace, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo B.1 Sea $f(t) = 1$ para $t \geq 0$. Calcule la transformada de Laplace de dicha función.

De acuerdo con la Definición (B.1),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[1\right] = \int_0^\infty e^{-st}dt &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty} \ , \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}\right] \ ,
\end{aligned}$$

la última expresión resulta válida para todo $s > 0$, dado que para $s < 0$,

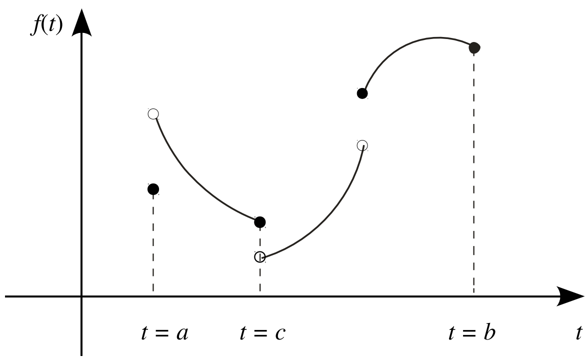

Figura B.1: Función continua por partes. Los puntos rellenos indican los valores de la función en los puntos de discontinuidad.

$\left(\frac{1}{s}\right) e^{-sb}$ no está acotado cuando $b \to \infty$ y para $s = 0$ el valor de $1/s \to \infty$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \text{para } s > 0 \ ,$$

quedando definida solo si $s > 0$. ■

Antes de introducir el teorema de la existencia de la transformada de Laplace introducimos las siguientes definiciones:

Definición B.1.2 — Función Continua por Partes. Se dice que una función $f(t)$ es continua por partes en el intervalo $a \leq t \leq b$ si $[a, b]$ puede subdividirse en un número finito de subintervalos colineales de modo que:

1. $f(t)$ sea continua en el interior de cada uno de esos subintervalos y
2. $f(t)$ tenga límite lateral finito cuando t tienda a cada punto extremo de cada uno de dichos subintervalos desde el interior.

En los puntos de discontinuidad una función continua por partes experimenta saltos finitos a la izquierda y derecha de dicho punto como lo muestra la Fig. B.1.

donde los límites laterales se computan como,

$$f(c^{+}) = \lim_{\epsilon \to 0} f(f + \epsilon) \ ,$$

$$f(c^{-}) = \lim_{\epsilon \to 0} f(f - \epsilon) \ ,$$

Ejemplo B.2 Encuentre la transformada de Laplace de la función escalón unitaria desplazada en $(t-a)$ esto es,

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t \geq a \end{cases} \quad .$$

La función escalón desplazada toma valores 0 y 1 según se indica en la figura,

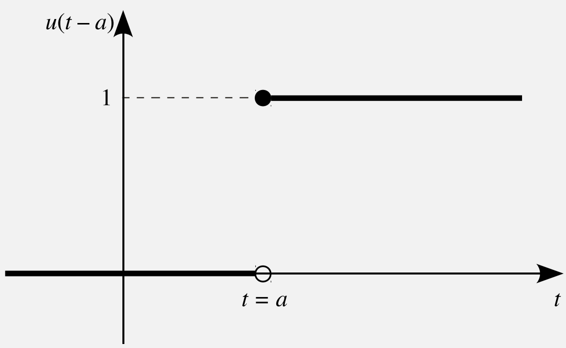

Figura B.2: Función escalón unitaria desplazada.

Luego,

$$\mathcal{L}\left[u(t-a)\right] = \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt \ ,$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{t=a}^{\infty} \ ,$$

en consecuencia

$$\mathcal{L}\left[u(t-a)\right] = \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{con} \ \ s > 0 \text{y} \ \ a > 0 \ \ .$$

Definición B.1.3 — Función de Orden Exponencial. Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial cuando $t \to \infty$ si existen constantes reales arbitrarias y positivas M y α tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \ . \tag{B.3}$$

Teorema B.1.1 — Existencia de la Transformada de Laplace. Si la función $f(t)$ es continua o seccionalmente continua en todo intervalo finito para $t \geq 0$ y de orden exponencial cuando $t \to \infty$, entonces existe la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Demostración Siendo,

$$F(s) := \mathcal{L}\left[f(t)\right] := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ ,$$

y asumiendo sin pérdida de generalidad que $f(t)$ es continua para $t \geq 0$. Luego, por teoremas estándar sobre integrales impropias (*la convergencia absoluta implica convergencia*) es suficiente para nosotros probar que $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt$ existe para un $s > \alpha$. De manera que,

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt \ ,$$

como se asume que $f(t)$ es de orden exponencial,

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt \leq M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{M}{s-\alpha}\left[1 - \lim_{b\to\infty} e^{-(s-\alpha)b}\right] \ ,$$

biunívoca Note que,

1. si $s = \alpha$ la integral divide por cero,
2. si $s < \alpha$ luego, $-(s-\alpha)$ >0 y el $\lim_{b\to\infty} e^{-(s-\alpha)b} \to \infty$ y
3. si $s > \alpha$ el $\lim_{b\to\infty} e^{-(s-\alpha)b} \to 0$.

En consecuencia,

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt \leq \frac{M}{s-\alpha} \ \text{si} \ s > \alpha \ .$$

□

Definición B.1.4 — Absisa de Convergencia. Dada $f(t)$ arbitraria, existe una absisa de convergencia absoluta α_c tal que la transformada de Laplace de $f(t)$ es absolutamente convergente para $s > \alpha_c$ (con $s \in \mathbb{R}$) y la convergencia absoluta falla para $s < \alpha_c$.

Note que si $\alpha_c = \infty$ entonces no hay convergencia absoluta mientras que si $\alpha_c = -\infty$ la convergencia absoluta es para todo *s*.

Conclusión: La integral de Laplace converge únicamente si la parte real de s es mayor que la absisa de convergencia α_c elegida. Con el objeto de obtener conclusiones a cerca del comportamiento de la $f(t)$ desde el plano complejo, el valor de s debe ser elegido de manera que la integral converja. Por lo tanto, si las condiciones enunciadas se cumplen decimos no solo que existe la transformada de $f(t)$ sino que existe una relación *biunívoca* entre la función en el plano complejo y su correspondiente función en el dominio del tiempo. Esto quedará más claro con los teoremas de valor inicial y final que se enuncian en la próxima sección y con la introducción a la transformada inversa de Laplace presentada en la sección 6.

B.2. Teoremas Útiles

Teorema B.2.1 — Linealidad de la Transformada de Laplace. Si a y b son constantes reales, entonces

$$\mathcal{L}\left[af(t)+bg(t)\right]=a\mathcal{L}\left[f(t)\right]+b\mathcal{L}\left[g(t)\right] \quad . \tag{B.4}$$

para todo s tal que las transformadas de Laplace de las funciones f y g existan a la vez.

Demostración La demostración sigue la linealidad de las operaciones de límite y de la integración. Siendo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[af(t)+bg(t)\right] &= \int_0^\infty \left[af(t)+bg(t)\right]e^{-st}dt \quad . \\ &= \lim_{c\to\infty}\int_0^c \left[af(t)+bg(t)\right]e^{-st}dt \quad . \\ &= a\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(t)e^{-st}dt + b\lim_{c\to\infty}\int_0^c g(t)e^{-st}dt \quad . \\ &= a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[g(t)] \quad .\end{aligned}$$

□

Teorema B.2.2 — Traslación del eje s. Si $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ existe para $s>\alpha$, luego $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$ existe para $s>a+\alpha$, y

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a) \quad . \tag{B.5}$$

Teorema B.2.3 — Traslación sobre el eje t. Si $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ existe para $s>\alpha$, luego

$$\mathcal{L}\left[f(t-d)H(t-d)\right]=\left[e^{-ds}F(s)\right] \quad . \tag{B.6}$$

con $d>0$, para $s>d+\alpha$.

Esta última expresión establece que el desplazamiento en el tiempo en una magnitud d de la función $f(t)$ se corresponde en el plano complejo a multiplicar la función $F(s)$ por e^{-ds}. Una interpretación de $f(t-d)$ es que dado un cambio en el sistema, éste no se ve reflejado hasta d unidades de tiempo después. Por tal razón, d es conocido como retardo de tiempo o tiempo muerto. Este teorema es de sumo interés en ingeniería dado que un gran número de sistemas físicos presentan tiempos muertos.

Teorema B.2.4 — Teorema del valor final (TVF). Si $f(t)$ y $f'(t)$ son transformables por Laplace, si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ y si existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$ entonces,

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad . \tag{B.7}$$

Note que el teorema se enuncia pidiendo como condición que *exista* $\lim_{t\to\infty} f(t)$, si ésta no se cumple entonces el TVF no se aplica porque la integral de Laplace no converge.

El TVF establece que el comportamiento de la función $f(t)$ en el régimen permanente es igual a de la función $sF(s)$ en la vecindad de $s = 0$. De este modo, se puede obtener el valor alcanzado por la función $f(t)$ para $t \to \infty$ directamente desde campo transformado a partir del conocimiento de la función $sF(s)$.

Teorema B.2.5 — Teorema del valor inicial (TVI). Si $f(t)$ y $f'(t)$ son transformables por Laplace y si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ entonces,

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \quad . \tag{B.8}$$

Note que, i) el valor de la variable s arbitraria es elegido tal que $s \to \infty$ en consecuencia cualquier absisa de convergencia finita es menos que infinito. Entonces existe la transformada de Laplace de la función $f(t)$ para $s \to \infty$ siempre y cuando esta sea continua o seccionalmente continua y de orden exponencial para $t \geq 0$. ii) Esto último no necesariamente ocurre con el TVF donde $s \to 0$ y en consecuencia existen absisas de convergencia mayores a cero. iii) El TVI y el TVF permiten predecir el comportamiento de un sistema en el dominio del tiempo sin necesidad de aplicar la transformada inversa.

La Tabla B.1 resume los teoremas más importantes presentados en esta sección.

B.3. Propiedades de la Transformada de Laplace

■ **Propiedad B.1 — Transformada de la derivada.** Dada una $f(t)$ y $f'(t)$ continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para $t \geq 0$

Tabla B.1: Teoremas Fundamentales de la Transformada de Laplace.

Teorema	**Función**	**Transformada**
Definición de TL	$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-st}$
Linealidad de TL	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
Traslación en *s*	$[e^{-at}f(t)]$	$F(s+a)$
Traslación en *t*	$[f(t-d)H(t-d)]$	$\left[e^{-ds}F(s)\right]$
TVF	$\text{lím}_{t\to\infty} f(t)$	$\text{lím}_{s\to 0} sF(s)$
TVI	$\text{lím}_{t\to 0^+} f(t)$	$\text{lím}_{s\to\infty} sF(s)$

luego, $\mathcal{L}[f'(t)]$ existe para $s>\alpha$, y

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \ , \tag{B.9}$$

donde $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$.

Demostración Asumamos sin pérdida de generalidad que $f(t)$ es continua para $t\geq 0$. Luego,

$$\mathcal{L} = [f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

mediante un cambio de variables ($u=e^{st}$ y $dv=f'(t)dt$) e integrando por partes ($uv-\int vdu$)

$$[f'(t)] = f(t)e^{-st}|_0^\infty$$
$$= 0 - f(t)|_{t=0} - (-s)\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Considerando la definición de la transformada de Laplace de $f(t)$, la última expresión resulta,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \ .$$

□

Corolario (Transformada de la derivada enésima). *Dada una $f(t)$ y sus $n-1$ derivadas continuas o seccionalmente continuas y todas de orden exponencial para los mismos valores de M y α según (B.3) y para $t\geq 0$ luego, $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ existe para $s>\alpha$ y*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f^1(0+) - \cdots - f^{n-1}(0+) \ , \quad \text{(B.10)}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ *y* $n \in \mathbb{R}^+$

Demostración Asumamos sin pérdida de generalidad que $f(t)$ es continua para $t \geq 0$. Luego,

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \ ,$$

mediante un cambio de variables ($u = e - st$ y $dv = f''(t)dt$) e integrando por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f''(t)\right] &= f'(t)e^{-st}|_0^\infty - \int_0^\infty f'(t)\left(-se^{-st}\right) dt \ , \\ &= 0 - f'(t)|_{t=0} - (-s) \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt \ , \\ &= -f'(0) + s\mathcal{L}[f(t)] \ , \end{aligned}$$

reemplazando (B.9) en la última expresión se tiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= -f'(0) + s[sF(s) - f(0)] \ , \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \ . \end{aligned}$$

Generalizando el procedimiento para derivadas sucesivas y aplicando una ley recursiva se demuestra que,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f^1(0^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+) \ .$$

□

■ **Propiedad B.2 — Transformada de la integral.** Dada una $f(t)$ y su integral continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para $t \geq T$ luego,

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\lambda) d\lambda = \frac{F(s)}{s} \ , \quad \text{(B.11)}$$

para $s > \alpha$ y donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Demostración Dado que $f(t)$ es continua o seccionalmente continua se puede afirmar que $\int_0^t f(\lambda)d\lambda = g(t)$. Luego por cálculo $g'(t) = f(t)$ y $g(0) = 0$ de modo que,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) \ .$$

Siendo $g(0) = 0$ y reemplazando la expresión de $g(t)$ en la última igualdad

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda)d\lambda\right] \ ,$$

en consecuencia,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda)d\lambda\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \ ,$$

y teniendo en cuenta que por definición $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ la demostración queda completa. □

■ **Propiedad B.3 — Multiplicación por t.** Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ luego,

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds} \ . \tag{B.12}$$

para $s > \alpha$.

Demostración Sea $F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ luego,

$$\frac{d}{ds}\left[F(s)\right] = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ ,$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[f(t)e^{-st}dt\right] = \int_0^\infty \left[-tf(t)\right]e^{-st}dt \ ,$$

de modo que por definición de la transformada de Laplace de una función,

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds} \ .$$

□

Corolario (Multiplicación por t^n). *Dada una $f(t)$ continua o seccionalmente continuas y de orden exponencial para $t \geq 0$ luego,*

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \ . \tag{B.13}$$

con $n \in \mathbb{R}^+$ y $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Demostración Sea $g(t) = tf(t)$ con $g(t)$ continua o seccionalmente continua y de orden exponencial y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$. Luego,

$$\frac{d}{ds}\left[G(s)\right] = \frac{d}{ds}\int_0^\infty G(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[g(t)e^{-st}dt\right] = \int_0^\infty \left[-tg(t)\right]e^{-st}dt \ .$$

Por otro lado,

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[tf(t)]$$

y teniendo en cuenta la Prop. B.3,

$$G(s) = -\frac{d}{ds}\left[F(s)\right] \ .$$

Luego,

$$\frac{d}{ds}\left[G(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}F(s)\right] = -\int_0^\infty \left[t^2 f(t)\right]e^{-st}dt \ .$$

Teniendo en cuenta la definición de transformada de Laplace,

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[F(s)\right] = (-1)^2\,\mathcal{L}[t2f(t)] \ .$$

Continuando con el mismo procedimiento y aplicando una ley recursiva se demuestra que,

$$\frac{d^n}{ds^n}\left[F(s)\right] = (-1)^n\,\mathcal{L}[t^n f(t)] \ .$$

□

La Tabla B.2 resume las propiedades más importantes tratadas en esta sección.

B.4. Transformada de Funciones de Uso Común

B.4.1. Función exponencial

Sea la función exponencial,

$$f(t)\begin{cases} 0 & \text{para } \ t<0 \\ Ae^{-\alpha t} & \text{para } \ t\geq 0 \end{cases} \ . \tag{B.14}$$

donde A y α constantes reales.

La transformada de Laplace de la función $f(t)$ puede obtenerse como sigue,

Tabla B.2: Propiedades más comunes de la Transformada de Laplace.

Propiedad	**Función**	**Transformada**
Cambio de Escala	$f(at)$	$\frac{1}{F(s/a)}$
Primera Derivada	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
Segunda Derivada	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
Enésima Derivada	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^+)-$
		$\cdots - f^{n-1}(0^+)$
Multiplicación por *t*	$[t^nf(t)]$	$(-1)^n\,\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
División por *t*	$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(s)ds$
Integral Indefinida	$\int f(t)$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0)$
Integral Definida	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
Integral de Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$ $= \int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda$	$F_1(s)F_2(s)$ $F_1(s)F_2(s)$

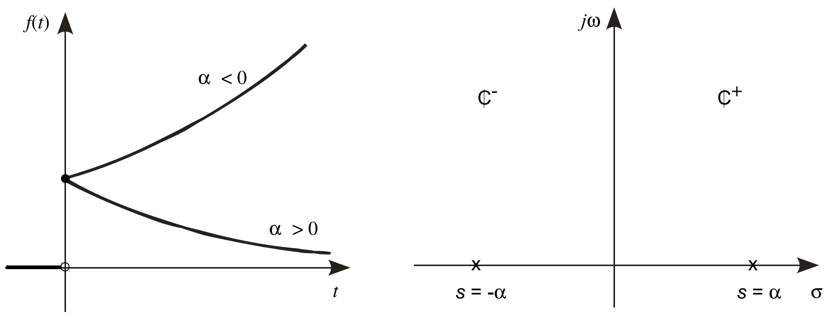

Figura B.3: a) Representación gráfica de la función $f(t)$ en el tiempo. b) Ubicación del polo de la función de transferencia $F(s)$ para $\alpha < 0$ y $\alpha > 0$.

$$\mathcal{L}\left[Ae^{-\alpha t}\right] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(\alpha+s)t}dt = \frac{A}{s+\alpha} \quad . \tag{B.15}$$

con $s > -\alpha$. La Fig. B.3a muestra en forma esquemática la respuesta en el tiempo de $f(t)$ para $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$. Como puede verse la transformada de esta función genera en el plano complejo un polo [2] en $s = -\alpha$ con $\alpha > 0$ en el semiplano $\mathbb{C}^-$ mientras que se obtiene un polo en $s = -\alpha$ con $\alpha < 0$ que pertenece al semiplano $\mathbb{C}^+$.

Más adelante veremos como la estabilidad de los sistemas lineales está asociada a la ubicación de los polos en $\mathbb{C}^-$ y $\mathbb{C}^+$.

Recordando el teorema de la existencia de la transformada de Laplace, pedimos que la parte real de s sea mayor que la absisa de convergencia α_c. Para este caso en particular note que, i) el TVI y el TVF se cumplen para $\alpha > 0$ mientras que ii) el TVF no se cumple para $\alpha < 0$.

B.4.2. Función escalón

Sea la función escalón [3] de amplitud A,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ A & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad . \tag{B.16}$$

donde $A \in \mathbb{R}$, constante y distinta de cero. Suponiendo como caso particular y sin pérdida de generalidad que $A > 0$ luego, dicha función tiene la representación gráfica de la Fig. B.4.

[2]En teoría de control lineal se designa como polos a las raíces del denominador de la función de transferencia.

[3]En la bibliografía se suele encontrar a la función escalón de altura A escrita como $f(t) = AH(t)$, donde $H(t)$ es la función escalón unitaria, la que toma como valores extremos 0 y 1. La función $H(t)$ es también conocida como función de Heaviside.

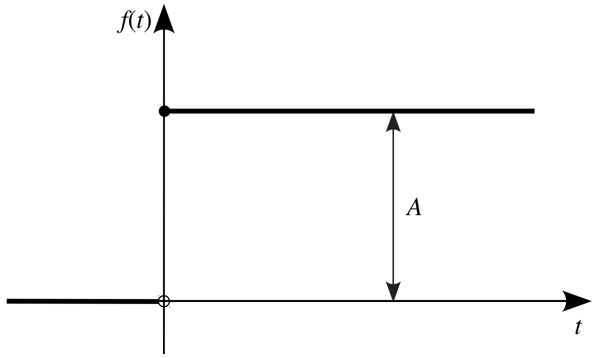

Figura B.4: Representación gráfica de la función escalón de amplitud *A*.

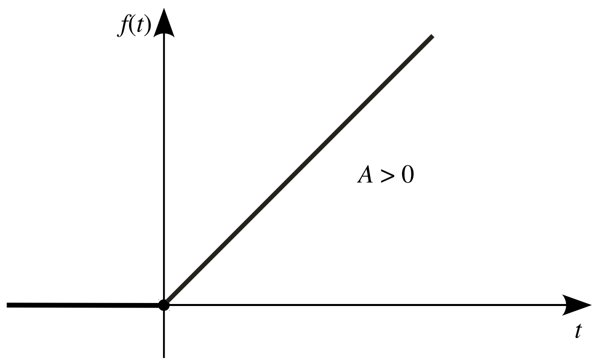

Figura B.5: Representación gráfica de la función rampa con pendiente *A*.

La transformada de Laplace de la función $f(t)$ puede obtenerse como sigue,

$$\mathcal{L}\left[Ae^{-\alpha t}\right] = \int_0^\infty Ae^{-st}dt = \frac{A}{s} \tag{B.17}$$

donde dicha transformada existe para todo $s > 0$ y $s \in \mathbb{R}$.

B.4.3. Función rampa

Sea la función rampa con pendiente *A*,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ At & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \tag{B.18}$$

donde $A \in \mathbb{R}$, constante y distinta de cero. Además, sin pérdida de generalidad para este ejemplo se asume $A > 0$ como se indica en la Fig. B.5.

Luego, mediante un cambio de variables ($u = At$ y $dv = e^{-st}dt$) e integrando por partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[At\right] &= \int_0^\infty Ate^{-st}dt = At\frac{e^{-st}}{-s}|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{Ae^{-st}}{-s}dt \\ &= \frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{A}{s^2}\end{aligned}$$

con $s > 0$.

Similarmente al caso anterior la transformada existe si $s > 0$ y $s \in \mathbb{R}$.

B.4.4. Función sinusoidal

Sea la función sinusoidal,

$$f(t)\begin{cases}0 & \text{para } \ t < 0 \\ A\sin(\omega t) & \text{para } \ t \geq 0\end{cases} \quad . \tag{B.19}$$

donde A y ω constantes reales y sin pérdida de generalidad mayores a cero. Siendo $\sin(\omega t) = \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)/2j$ luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[A\sin(\omega t)\right] &= \frac{A}{2j}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt \\ &= \frac{A}{2j}\frac{1}{(s-j\omega)} - \frac{A}{2j}\frac{1}{(s+j\omega)} = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

B.4.5. Función pulso

Sea la función pulso (Fig B.6),

$$f(t)\begin{cases}0 & \text{para } \ t < 0 \ \text{ y } \ t > t_0 \\ A/t_0 & \qquad \text{para } \ 0 \leq t \leq \infty\end{cases} \quad . \tag{B.20}$$

con A y t_0 constantes reales.

La función pulso se puede considerar como una función construida con otras dos funciones escalón de acuerdo con la Fig. B.7.

$$f(t) = \frac{A}{t_0}H(t) - \frac{A}{t_0}H(t-t_0) \ . \tag{B.21}$$

Luego, la transformada de Laplace de $f(t)$ se calcula como sigue,

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}H(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}H(t-t_0)\right] \quad .$$

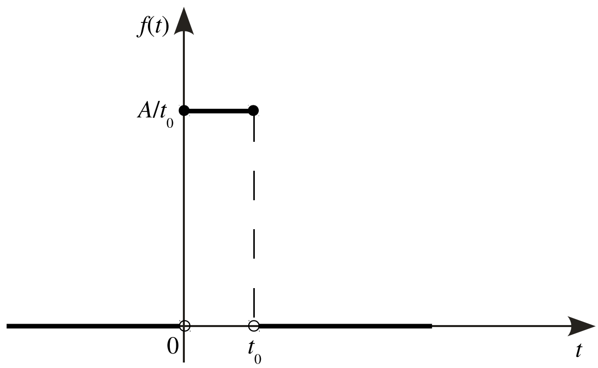

Figura B.6: Representación gráfica de un pulso de amplitud A/t_0.

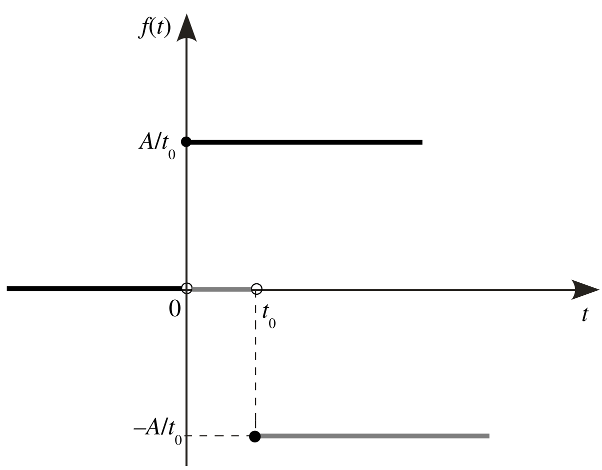

Figura B.7: Funciones escalón unitaria $H(t)$ y escalón unitaria desplazada $H(t-t_0)$. Donde, la suma algebraica de ambas funciones escalón dan como resultado la función pulso representada en la Fig. B.6.

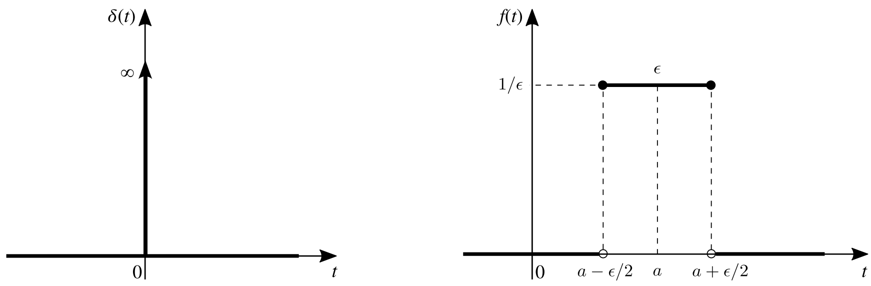

Figura B.8: Representación gráfica de la función delta de Dirac.

$$= \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0} = \frac{A}{t_0 s}\left(1 - e^{-st_0}\right) \quad . \tag{B.22}$$

donde para computar la transformada de Laplace del escalón unitario desplazado $(H(t - t_0))$ se aplicó el teorema de traslación en t.

B.4.6. Delta de Dirac

Primeramente se introduce una definición de la delta de Dirac[4] antes de proceder al cálculo de su transformada.

Definición B.4.1 — Delta de Dirac. La función delta de Dirac está definida como,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad . \tag{B.23}$$

de tal modo que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

La Fig. B.8(a) representa en forma gráfica a la delta de Dirac.

Luego, en primer lugar para el cálculo de la transformada de Laplace de la función Delta de Dirac se va a considerar la función pulso desplazada en $t = a$ de la Fig. B.8(b) donde se considera que $\epsilon \to 0$. Luego, de la definición de la transformada de Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] &= \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon s}\left(e^{-as+\epsilon s/2} - e^{-as-\epsilon s/2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{B.24}$$

Ahora, considerando la diferencia de exponenciales de la ecuación anterior,

$$e^{-as+\epsilon s/2} - e^{-as-\epsilon s/2} = e^{-as}\left(e^{\epsilon s/2} - e^{-\epsilon s/2}\right).$$

[4] Estrictamente, la Delta de Dirac es un función generalizada

Luego, desarrollando en serie de Taylor las exponenciales dentro del paréntesis de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} e^{\epsilon s/2} - e^{-\epsilon s/2} =& 1 + \frac{\epsilon s}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots \\ & - 1 - \frac{(-\epsilon s)}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{-\epsilon s}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{-\epsilon s}{2}\right)^3 - \dots \\ =& \epsilon s + \frac{2}{3!}\left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión (B.24) de la integral de Laplace de la delta de Dirac ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-as}}{\epsilon s}\left[\epsilon s + \frac{2}{3!}\left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-as}}{\cancel{\epsilon s}}\cancel{\epsilon s} + \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-as}}{\cancel{\epsilon s}} \underbrace{\left[\frac{2}{3!}\left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^{\cancel{3}2} + \dots\right]}_{\to 0} \qquad \text{(B.25)} \\ &= e^{-as} \quad . \end{aligned}$$

Por último, a partir de la ecuación anterior y particularmente para $a = 0$ la transformada de Laplace de la delta de Dirac resulta,

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1 \quad . \qquad \text{(B.26)}$$

La Tabla B.3 muestra la Transformada de Laplace de funciones más conocidas existiendo en la bibliografía clásica del tema tablas más completas que la aquí presentada (Spiegel [83], Kreyszig [45], entre muchos otros).

Comandos de Octave relacionados al tema

A continuación se presentan comandos de Octave para computar la transformada y transformada inversa de Laplace.

Comando	
laplace(f)	Computa la transformada de Laplace de la función `f`
ilaplace(Gs)	Computa transformada inversa de Laplace de la función `Gs`

Tabla B.3: Propiedades más comunes de la Transformada de Laplace.

Func. $f(t)$	Transf. $F(s)$	Restric. en s		Func. $f(t)$	Transf. $F(s)$	Restric. en s
$\delta(t)$	1			$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$		$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$s>-a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$		$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$			$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$s>-a$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$		$e^{-at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2-b^2}$	$s>\|a\|$
$t^n,\ n\in\mathbb{N}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$		$e^{-at}\cosh(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-b^2}$	$s>\|a\|$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$		$t\sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s>0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$		$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s>0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$	$s>\|b\|$				
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$	$s>\|b\|$				
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$s>a$				
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$s>-a$				
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$				

Ejemplo B.3 Determine la transforamada de Laplace de la función $f(t) = be^{-at}cos(3t)$ mediante tablas y comandos de Octave.

Aplicando transforamada de Laplace a la función $f(t)$ y teniendo en cuenta la Tabla B.3

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[be^{-at}cos(3t)] \\
&= b\mathcal{L}[e^{-at}cos(3t)] = \frac{b(s+a)}{(s+a)^2+3^2} \\
&= \frac{b(s+a)}{(s+a)^2+9}
\end{aligned}
$$

Los comandos de Octave para este ejemplo se indican a continuación.

Algoritmo B.1: Código de Octave del Ejem. B.3.

```
clear all , clc
pkg load symbolic

% defino variables simbolicas
syms a b t

```

```
% Defino la funcion temporal
f=b*exp(-a*t)*cos(3*t)

% Computo la transformada de Laplace
laplace(f)
```

En la ventana de comandos de Octave se presenta la siguiente respuesta:

```
OctSymPy: Communication established.  SymPy v1.1.1.

f = (sym)

   -a.t
b.e    .cos(3.t)

ans = (sym)

b.(a + s)
------------
       2
(a + s)  + 9
```

B.5. Funciones Generalizadas

A partir de los '50 los matemáticos han desarrollado varias teorías rigurosas con objetos llamados funciones generalizadas (o distribuciones). Una de ellas es la conocida función delta de Dirac.

Las funciones generalizadas pueden sumarse, restarse y multiplicarse por constantes. También es posible, bajo condiciones adecuadas, multiplicar una función ordinaria por una función generalizada. Así,

$$\delta(t)f(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \ .$$

$$\delta(t-c)f(t) = f(t)\delta(t-c) = fc0)\delta(t-c) \ .$$

siempre que $f(t)$ sea continua en $t = 0$ y en $t = c$ respectivamente.

También, si $a < 0 < b$,

$$\int_a^b g(t)\delta(t)dt = \int_a^b g(0)\delta(t)dt = g(0)\int_a^b \delta(t)dt = g(0) \ .$$

y en general, sea $a < c < b$ luego,

$$\int_a^b g(t)\delta(t-c)dt = g(c) \quad . \tag{B.27}$$

Ejemplo B.4 Calcular la $\mathcal{L}[\delta(t-c)]$ y la $\mathcal{L}[\delta(t)]$.

Por definición de transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \int_0^\infty \delta(t-c)e^{-st}dt \quad .$$

considerando la Ec. (B.27) se puede escribir,

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \delta(t-c)e^{-st}dt = e^{-sc} \quad .$$

Así, para el caso particular donde $c = 0$,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{\epsilon\to 0^-} \int_\epsilon^\infty \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1 \quad .$$

■

B.6. Transforada Inversa de Laplace

En la práctica resulta de importancia recuperar $f(t)$ a partir de su transformada de Laplace $F(s)$. Para ello, introducimos el siguiente teorema:

Teorema B.6.1 — Unicidad de la Transformada Inversa de Laplace. Supóngase que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la hipótesis del teorema 1.1, de modo que sus transformadas $F(s)$ y $G(s)$ existen. Si $F(s) = G(s)$ para toda $s > c$ (para alguna c), entonces $f(t) = g(t)$ siempre que f y g sean continuas.

Este resultado es válido para funciones continuas por tramos si cada punto de salto le asignamos como valor de la función el promedio de los límites izquierdo y derecho.

De acuerdo con el Teo. B.6.1, podemos hablar de transformada inversa de una función $F(s)$ y la única $f(t)$ tal que $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. En consecuencia escribimos,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad . \tag{B.28}$$

B.7. Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Considere la ecuación diferencial ordinaria (ODE) de un problema lineal invariante en el tiempo (LTI) genérica

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y^{(1)}(t)+a_ny(t) = b_0u^{(m)}(t)+b_1u^{(m-1)}(t)+ \cdots \quad + b_{m-1}u^{(1)}(t) + b_mu(t) \ , \tag{B.29}$$

con $a_n \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ y por simplicidad asuma condiciones iniciales nulas. Luego, aplicando transformada de Laplace y reordenando se obtiene una función de transferencia,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \ , \tag{B.30}$$

o bien,

$$Y(s) = G(s)U(s) \ . \tag{B.31}$$

La función $G(s)$ es designada función de transferencia del sistema y es igual a la salida $Y(s)$ para cuando se tiene como entrada una función delta de Dirac.

Finalmente, la $y(t)$ es encontrada como la transformada inversa de la expresión (B.31) para una dada $U(s)$. Esto es,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)U(s)\right] \ . \tag{B.32}$$

El esquema de resolución de una ODE lineal de grado *n* puede ser resumido como se muestra en la Fig.B.9.

En cuanto a la transformada inversa, después del tratamiento algebraico de la ecuación en *s*, usualmente aparecen funciones que pueden expresarse como un cociente de polinomios, y que no siempre están en tablas. En ese caso, para poder encontrar la $y(t)$, se utiliza el método de descomposición en fracciones parciales, que permite obtener una expresión de $Y(s)$ como una suma de funciones simples basadas en las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia original. Así, la solución de la ecuación diferencial estará compuesta por la combinación lineal de las transformadas inversas de funciones simples que se encuentran en las tablas elementales de TL.

En síntesis, la técnica para encontrar $y(t)$ consiste en los pasos que se detallan en el siguiente procedimiento:

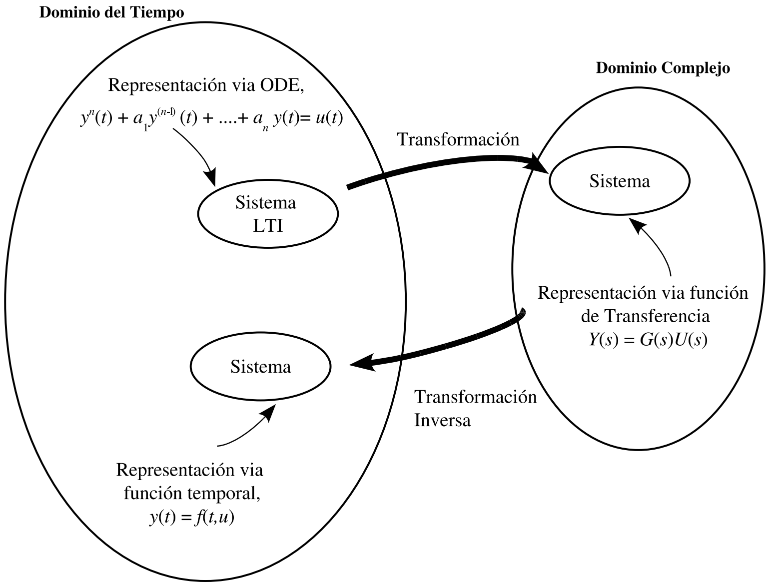

Figura B.9: Representación esquemática de la metodología de resolución de una ODE lineal de grado n.

Procedimiento B.7.1

Paso 1. Dada una ODE y sus condiciones iniciales aplique la transformada de Laplace a dicha ecuación.
Paso 2. Aplique el método de descomposición en fracciones parciales (ver Apéndice A) similarmente al aplicado en cálculo elemental.
Paso 3. Determine transformada inversa de Laplace a cada uno de los términos basándose en las tablas adjuntas en este apéndice o las existentes en libros de matemáticas para ingenierías.

Ejemplo B.5 Sea, $y'(t) + \lambda y(t) = u(t)$ con $y(0) = 0$ y $u(t) = H(t)$. a) Obtenga la $y(t)$. b) ¿Cómo es la evolución en el tiempo de $y(t)$ para $t \geq 0$?.

Aplicando transformada de Laplace a la ODE se tiene,

$$\mathcal{L}[y'(t)] + \lambda\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[H(t)] \ .$$

Teniendo en cuenta, i) la Propiedad 1 $\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$ y ii) $\mathcal{L}[H(t)] = 1/s$ luego, reemplazando se llega a,

$$sY(s) - y(0) + \lambda Y(s) = \frac{1}{s} \quad .$$

Siendo $y(0) = 0$ y reordenando se tiene,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+\lambda)} \quad .$$

Aplicando las técnicas de expansión en fracciones parciales (ver apéndice A),

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda}$$

donde,

$$A = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

y

$$B = \lim_{s\to -\lambda} (s+\lambda)Y(s) = \lim_{s\to -\lambda} \frac{1}{s} = -\frac{1}{\lambda} \quad .$$

Reemplazando en la expresión de $Y(s)$ se tiene,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+\lambda)} = \frac{1/\lambda}{s} - \frac{1/\lambda}{s+\lambda} \quad .$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/\lambda}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/\lambda}{s+\lambda}\right] \quad .$$

y según tabla de transformada,

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \quad .$$

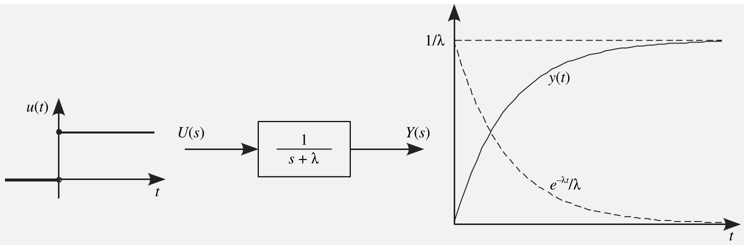

Figura B.10: Diagrama de bloques del sistema y las respuestas en el tiempo de la función de entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$.

Note que si se aplica los teoremas de valor inicial y final resulta,

$$\begin{aligned}\textbf{TVI:} \qquad y(0^+) &= \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 0 \\ &= \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}(s+\lambda)} = 0\end{aligned}$$

(ambas ecuaciones verifican el mismo resultado).

$$\begin{aligned}\textbf{TVF:} \qquad y(\infty) &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = \frac{1}{\lambda} \\ &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{\cancel{s}(s+\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

(ambas ecuaciones verifican el mismo resultado).

Los resultados alcanzados por los teoremas verifican las condiciones iniciales y finales presentadas en la Fig. B.10. ■

Ejemplo B.6 Considere la función de transferencia del Ejem. A.2. Obtenga la transformada inversa de Laplace en forma analítica y verifique su resultado con comandos de Octave.

Teniendo en cuenta la expansión en fracciones pariales hecha en el Ejem. A.2 y aplicando transformada inversa de Laplace considerando al mismo tiempo con la Tabla B.3,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^2}\right]$$
$$= 3e^{-t} - 3e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

A continuación se muestran los comandos de Octave para este ejemplo.

Algoritmo B.2: Código de Octave del Ejem. B.6.

```
clear all, clc
pkg load symbolic

% defino variables simbolicas
syms s

Gs=(s+4)/((s+1)*(s+2)^2)

ilaplace(Gs)
```

La ventan de comandos de Octave informa lo siguiente:

```
OctSymPy: Communication established.  SymPy v1.1.1.
Gs = (sym)

     s + 4
---------------
              2
(s + 1).(s + 2)

ans = (sym)

           t       -2.t
(-2.t + 3.e  - 3).e
```

Coincidiendo los resultados con el cómputo analítico. ■

B.8. Penesemos

1. ¿Es correcta la siguiente expansión en fracciones parciales? ☐ **Si** ☐ **No**

$$\frac{K_r(s+z)}{(s+a)(s+b)+K_r} = \frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+b)}$$

con z, a, b, A y B constantes reales.

2. ¿La transformada de Laplace de las siguiente función es correcta? ☐ **Si** ☐ **No**

$$\mathscr{L}[ke^{-\theta t}\operatorname{sen}(\omega t)] = \frac{k}{(s+\theta)}\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$$

3. Un sistema cuya función de transferencia es $G(s) = \frac{10}{(s^2+4s+5)}$ es exitado con una entrada de forma $u(t) = e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$. El valor final alcanzado por la salida en estado estacionario es:
   ☐ 1. ☐ infinito.
   ☐ 20/25. ☐ ninguna es correcta.
   ☐ 25/20.
   Nota. La transformada de Laplace de $\mathscr{L}\left[e^{-bt}\operatorname{sen}(at)\right] = \frac{a}{(s+b)^2+a^2}$.
4. La transforamda inversa de Laplace de $\mathscr{L}^{-1}[sY(s)] = y\prime(t) + y(0^+)$ con $y(0^+) \neq 0$. ☐ **Si** ☐ **No**

B.9. Problemas

Transformada de Laplace

Problema B.1 Defina la Transformada de Laplace de una función $f(t)$ cualquiera. ¿Qué debe cumplirse para que la Transformada de Laplace exista?
Problema B.2 Demostrar que: $\mathscr{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
Problema B.3 Determine la Transformada de Laplace de las siguientes funciones mediante el uso de la definición de la integral de Laplace:
(a) Escalón: $f(t) = kH(t)$
(b) Rampa: $f(t) = ktH(t)$
Luego, obtenga la transformada de Laplace de las dos funciones anteriores multiplicadas por e^{-at}, mediante el primer teorema del corrimiento.
Problema B.4 (a) Determine la transformada de Laplace de la función pulso representada en la Fig. B.6 mediante el uso de tablas de transformadas.
(b) En base al anterior resultado determine la transformada de Laplace de la delta de Dirac.
(c) Luego, estudie a través del primer teorema del corrimiento, el efecto de multiplicar la función delta por e^{-at}.
Problema B.5 Mediante el uso de tablas de transformada de Laplace, encuentre la transformada de las siguientes funciones:
(a) $f(t) = 2te^{-2t} + 6$
(b) $f(t) = \frac{1}{4}(e^{-3t} - te^{-5t})$
(c) $f(t) = (1 + te^{-t})^3$
Problema B.6 Verifique los teoremas del valor inicial y final con las siguientes funciones.
(a) $f_1(t) = e^{-3t}$

(b) $f_2(t) = 1 - e^{-t}$

Para el cálculo de la Transformada de Laplace utilice las tablas y verifique el resultado aplicando la definición matemática.

Problema B.7 Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones mediante el uso de los teoremas de desplazamiento:

1. $f_1(t) = \begin{cases} e^{-(t-2)} & \forall\, t > 2 \\ 0 & \forall\, t \leq 2 \end{cases}$
2. $f_2(t) = e^{-2t}\cos(t)$

Problema B.8 (a) Calcule la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{-2t}\,\mathrm{sen}(4t)$.

(b) Grafique dicha función en el dominio del tiempo.

(c) Verifique los teoremas del valor inicial y final.

Problema B.9 Dada la función $f(t)$ definida para $t \geq 0$,

$$f(t) = 4e^{-5t} + 6t^3 - 3t\,\mathrm{sen}(4t) + 2\cos(2t).$$

(a) Encontrar la transformada de Laplace de dicha función.

(b) Graficar cualitativamente cada uno de los sumandos en el dominio del tiempo.

(c) Aplicar los teoremas del valor inicial y final. Extraiga conclusiones.

Problema B.10 Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones mediante el uso del teorema del desplazamiento:

(a) $f(t) = \begin{cases} 5t & \forall & 0 < t \leq 1 \\ 5 & \forall & 1 < t \leq 2 \\ 0 & \forall & t > 2 \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \forall & 0 < t \leq 1 \\ t+1 & \forall & 1 < t \leq 3 \\ 4 & \forall & 3 < t \leq 4 \\ 0 & \forall & t > 4 \end{cases}$

Problema B.11 La Fig. B.11 muestra el perfil de temperatura que debe seguir un reactor batch durante los procesos de arranque, operación y parada del mismo.

Determine la transformada de Laplace de la función de temperatura de referencia para el reactor.

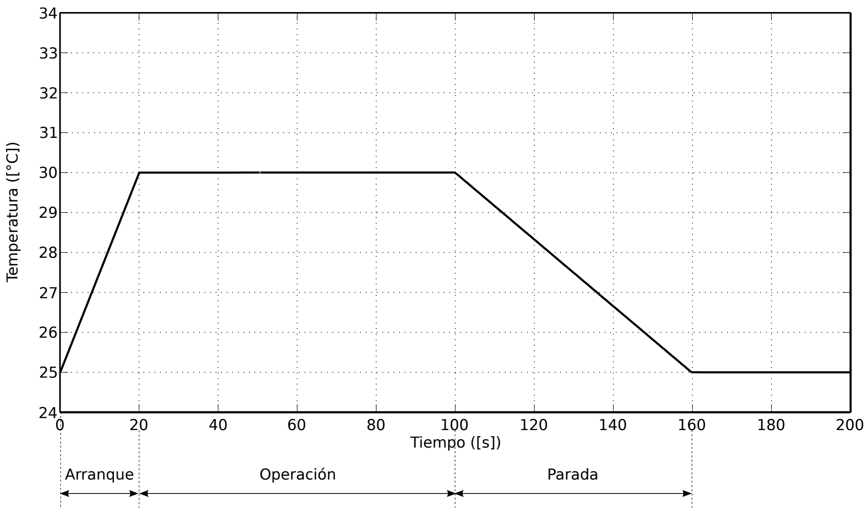

Figura B.11: Perfil de temperatura del reactor químico (para más detalles ver [2]).

Transformada inversa de Laplace

Problema B.12 Estudie a través del segundo teorema del corrimiento que ocurre en el dominio del tiempo si la transformada de Laplace de las funciones delta, escalón y rampa se las multiplica por e^{-as}.

Problema B.13 Existe una correspondencia entre la ubicación de las raíces de denominador de una función de transferencia $G(s)$ en el plano complejo y la respuesta temporal correspondiente a la transformada inversa de dicha función. Relacione y esquematice ambas para los casos en que $G(s)$ tiene:

(a) una raíz real negativa,
(b) una raíz real positiva,
(c) una raíz simple en $s = 0$,
(d) dos raíces múltiples en en $s = 0$,
(e) un par de raíces complejas conjugadas con; 1) parte real positiva, 2) parte real negativa y 3) parte real nula.

Problema B.14 Encontrar las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$
(b) $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$
(c) $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$
(d) $G(s) = \frac{(2s+3)}{(s+1)^2(s+4)^2}$

(e) $G(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$

Problema B.15 Obtenga la transformada inversa de la siguiente expresión:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 9\,s + 19}{(s+1)\,(s+2)\,(s+4)}$$

Problema B.16 Encontrar la transformada inversa de las funciones $G_1(s) = 1/(s^3 - 27)$ y $G_2(s) = s/(s^3 - 27)$. Luego, haciendo uso de algún teorema calcule la transformada inversa de G_2 a partir de G_1.

Resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes

Problema B.17 Resuelva el Ejem. B.5 considerando $u(t)$ igual a una función rampa con pendiente k.

Problema B.18 Sea, $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t)$ con $y(0) = y'(0) = 0$ y $u(t) = H(t)$.

(a) Obtenga la $y(t)$.
(b) ¿ Cómo es la evolución en el tiempo de $y(t)$ para $t \geq 0$?
(c) Resuelva usando códigos de Octave y Maxima.

Problema B.19 Considere el sistema masa-resorte de la Fig. B.12

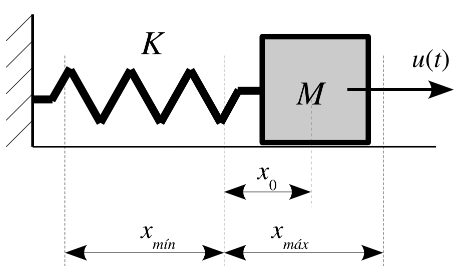

Figura B.12: Sistema masa-resorte.

que puede ser modelado aceptablemente bien por la ecuación diferencial,

$$Mx''(t) + Bx'(t) + kx(t) = u(t)$$

teniendo como condición inicial, $x_0 = x(0) = x'(0) = 0$ y, $M = 1$[Kg], $B = 0{,}1$, $k = 1$, y $u(t) = H(t)$.

(a) Mediante el uso de la transformada de Laplace resuelva la ecuación diferencial.
(b) Basándose en la función de transferencia, aplique los teoremas de valor inicial y final, asumiendo una entrada escalón de amplitud unitaria.

(c) Prediga mediante un gráfico a mano alzada la respuesta dinámica del sistema frente a la entrada $u(t)$ propuesta en el inciso (b).
(d) Verifique la respuesta dinámica predicha mediante una simulación con Octave.

Problema B.20 Resuelva las ecuaciones diferenciales definidas para $t \geq 0$ que se detallan a continuación mediante transformación de Laplace.

(a) $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^{-t}u(t)$, sujeto a $y'(0) = y(0) = 0$ y $u(t)$ es un escalón unitario en $t = 0$.
(b) $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = e^{-t}$, sujeto a $y'(0) = y(0) = 0$.
(c) $y'' + y' - 2\,y = 2\,t$; sujeta a las condiciones iniciales $y'(t) = y(t) = 0$.
(d) $y''+4\,y'+3\,y \;=\; t\,e^{-t}$ donde $y := y(t)$ y sujeta a las condiciones iniciales $y'(0) = y(0) = 1$.

Problema B.21 Para la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + y' + 4\,y \;=\; 3\,u' + 2\,u$$

sujeta a las condiciones iniciales $y'(0) = y(0) = 0$, donde $y := y(t)$ y $u := u(t) = e^{-3t}$ para $t \geq 0$:

(a) Resuélvala utilizando transformada de Laplace.
(b) Basándose en la expresión de $y(t)$ analice el comportamiento de cada uno de los términos y su aporte al régimen transitorio y al estacionario.

Problema B.22 Resuelva la siguiente ecuación diferencial mediante la transformación de Laplace:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t)$$

donde $u(t) = \begin{cases} 5t & \forall \quad 0 < t \leq 1 \\ 5 & \forall \quad 1 < t \leq 2 \\ 0 & \forall \quad t > 2 \end{cases}$ y las condiciones iniciales son $y'(0) = y(0) = 0$.

Problema B.23 Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando Transformada de Laplace:

$$y'' + 2\,y' + 5\,y \;=\; u$$

sujeta a las condiciones iniciales $y'(t) = y(t) = 0$, y $u(t)$ de acuerdo con la Fig. B.13.

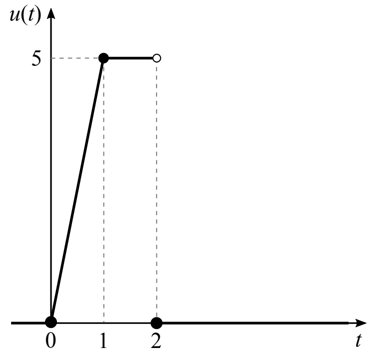

Figura B.13: Función fuerza $u(t)$

Problema B.24 (a) Encuentre la transformada de Laplace de $y''(t) + 2\zeta\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = u(t)$ con $y(0) = a$ e $y'(0) = b$, siendo a, b, ζ y ω_n constantes reales y $u(t) = H(t)$.

(b) Considere $\zeta = 1$, $\omega_n = 1$, $a = 0$ y $b = 0$ y resuelva la ecuación diferencial.

(c) Considere $\zeta = 0{,}5$, $\omega_n = 1$, $a = 0$ y $b = 0$ y resuelva la ecuación diferencial.

Problema B.25 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales mediante la transformación de Laplace:

$$x'(t) = 2x - 3y,$$

$$y'(t) = y - 2x,$$

con $x(0) = 8$ e $y(0) = 3$.