

Capítulo 4

Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace es la herramienta de preferencia en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se le atribuye a Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), a pesar de que se ha sugerido que esta transformación integral fue propuesta por Leonhard Euler (1707–1783) [24]. El uso difundido de la ahora llamada transformada de Laplace en ingeniería se debe al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925) quien utilizó un método similar para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Sus desarrollos carecían de rigor matemático, por lo que no fue sino hasta que sus métodos demostraron gran utilidad práctica que los matemáticos prestaron atención a sus métodos y buscaron justificación teórica, que fue encontrada en el trabajo de Laplace [8].

La transformada de Laplace puede interpretarse como una generalización de la transformada de Fourier, que permite manejar problemas no tratables con esta última. El paso clave ocurre con la observación de que muchas de las propiedades de la transformada de Fourier se conservan si en vez de utilizar una frecuencia puramente imaginaria $j\omega$, se utiliza una frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$, con $\sigma = \text{Re}\{s\}$ y $\omega = \text{Im}\{s\}$. Así, la frecuencia pasa de ser un valor en una recta, a un valor en el plano complejo s . Puede demostrarse que las funciones exponenciales complejas e^{st} siguen siendo funciones propias de un sistema LTI, hecho en el cual se basa toda la aplicación práctica de esta transformada.

Se distinguen dos versiones de la transformada de Laplace: bilateral y unilateral. La primera está directamente relacionada con la transformada de Fourier, y la segunda es la herramienta ampliamente utilizada en ingeniería, que se deriva de la transformada bilateral para señales causales. Aquí se revisarán ambas para brindar el panorama completo. En la literatura de ingeniería, la mayoría de las veces en que se habla de “transformada de Laplace” se hace implícitamente referencia a su versión *unilateral*.

4.1 Transformada bilateral de Laplace

En el capítulo anterior se definió la transformada de Fourier como

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

La transformada de Laplace se obtiene ampliando la recta de frecuencias complejas $j\omega$ al plano complejo $s = \sigma + j\omega$, donde σ es ahora un nuevo componente real de la frecuencia. Así, la transformada de Laplace se define como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (4.1)$$

De forma similar a la transformada de Fourier, se utiliza aquí la notación $\mathcal{L}\{\cdot\}$ para denotar al operador que transforma la señal en el tiempo, a su equivalente en el plano de frecuencia compleja s :

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

La relación entre el dominio temporal y de frecuencia compleja se denota como

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

o simplemente

$$x(t) \circ \bullet X(s)$$

si el contexto lo permite.

Nótese entonces que se cumple

$$\mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega} = X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

lo que quiere decir que la transformada de Laplace puede interpretarse como la transformada de Fourier de la función $x(t)$ multiplicada por una señal exponencial real $e^{-\sigma t}$ que será creciente o decreciente dependiendo del signo de σ . De hecho, este producto entre $x(t)$ y la función “de ponderación” $e^{-\sigma t}$ fue el punto de partida de Heaviside para su propuesta inicial: si $x(t)$ no tiene directamente transformada de Fourier, puede conseguirse indirectamente la tenga si se multiplica por una función monotónicamente decreciente (o creciente) conocida, como $e^{-\sigma t}$.

Ejemplo 4.1 Calcule la transformada de Laplace de la función $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \\ &= -\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1 - e^{-(a+s)\infty}}{a+s}\end{aligned}$$

Se debe evaluar la convergencia del término $e^{-(a+s)\infty}$. Descomponiendo el exponente en sus partes real e imaginaria y considerando $s = \sigma + j\omega$ se tiene

$$e^{-(a+s)\infty} = e^{-(\operatorname{Re}\{a\}+\sigma)\infty} e^{-j(\operatorname{Im}\{a\}+\omega)\infty}$$

donde el segundo factor no converge; sin embargo, puesto que su magnitud es uno, la convergencia del producto depende del primer factor: si $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0$, esta expresión converge a cero, si $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0$ diverge hacia infinito, y si $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma = 0$ entonces el producto simplemente no converge.

Esto quiere decir que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{a+s}, \quad \sigma > -\operatorname{Re}\{a\}$$

4.1

Este ejemplo pone en evidencia que la transformada de Laplace involucra no solo la expresión algebraica en el dominio s , sino además la región de convergencia en dicho plano, abreviada con ROC, por sus siglas en inglés (*Region of Convergence*). Obsérvese que el caso $\operatorname{Re}\{a\} < 0$ representa una región de convergencia que excluye al eje $j\omega$, y por tanto la función $x(t)$ no tiene transformada de Fourier. Este caso correspondería en el tiempo a una exponencial monótonicamente creciente, lo que viola las condiciones de Dirichlet de integrabilidad absoluta. El próximo ejemplo pone en evidencia la importancia de la región de convergencia.

Ejemplo 4.2 Calcule la transformada de Laplace de la función $x(t) = -e^{-at}u(-t)$.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-at}e^{-st} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^0 -e^{-(a+s)t} dt \\
 &= \frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \Big|_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{1 - e^{(a+s)\infty}}{a+s}
 \end{aligned}$$

Se debe evaluar la convergencia del término $e^{(a+s)\infty}$. Descomponiendo el exponente en sus partes real e imaginaria y considerando $s = \sigma + j\omega$ se tiene

$$e^{(a+s)\infty} = e^{(\operatorname{Re}\{a\}+\sigma)\infty} e^{j(\operatorname{Im}\{a\}+\omega)\infty}$$

y a pesar de que el segundo factor no converge, puesto que su magnitud es uno, la convergencia del producto depende del primer factor: si $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma < 0$, esta expresión converge a cero, si $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma > 0$ diverge hacia infinito, y si $\operatorname{Re}\{a\} + \sigma = 0$ entonces el producto simplemente no converge.

Esto quiere decir que

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{a+s}, \quad \sigma < -\operatorname{Re}\{a\}$$

4.2

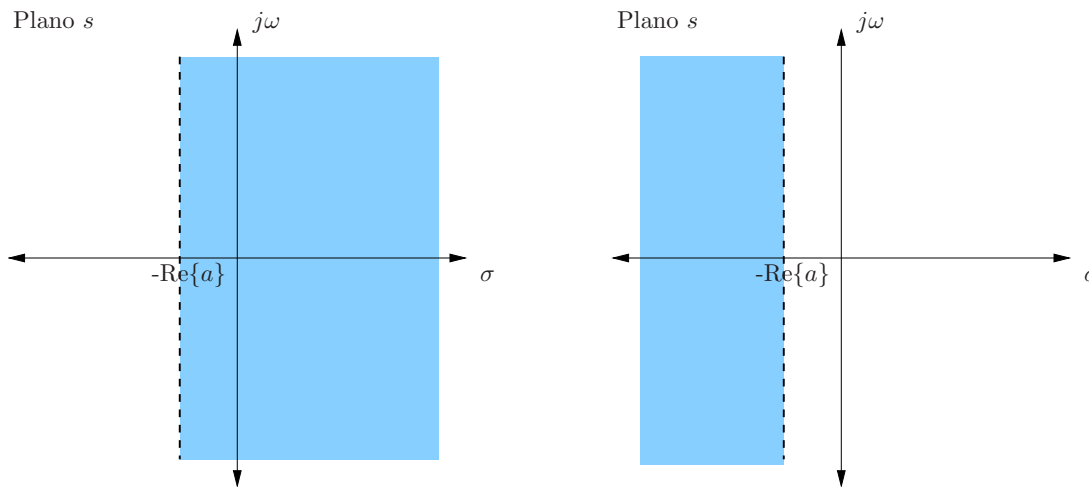


Figura 4.1: Regiones de convergencia para ejemplos 4.1 (izquierda) y 4.2 (derecha).

Los ejemplos anteriores muestran un hecho fundamental en el manejo de la transformada de Laplace: la misma expresión algebraica en el dominio s puede representar funciones diferentes en el dominio temporal, dependiendo de la región de convergencia utilizada. La figura 4.1 muestra las ROC de los dos ejemplos anteriores en el plano s .

Nótese que la región de convergencia puede interpretarse como el conjunto de puntos del plano $s = \sigma + j\omega$ para los cuales la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ existe.

Ejemplo 4.3 Encuentre la transformada de Laplace de la función

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{-t} \cos(at)u(t)$$

con a y b reales.

Solución: La función puede reescribirse utilizando la ecuación de Euler como

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[e^{-bt} + e^{-t} \left(\frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} \right) \right] u(t) \\ &= \left[e^{-bt} + \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} \right] u(t) \end{aligned}$$

y calculando la transformada de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-bt} + \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} \right] u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[e^{-bt} + \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} + \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} \right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(1-ja)t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(1+ja)t} e^{-st} dt \end{aligned}$$

que son tres transformaciones idénticas a las del ejemplo 4.1, por lo que

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{b+s}}_{\text{ROC: } \sigma > -b} + \underbrace{\frac{1}{2(1-ja)+s}}_{\text{ROC: } \sigma > -1} + \underbrace{\frac{1}{2(1+ja)+s}}_{\text{ROC: } \sigma > -1}$$

Puesto que los tres términos deben converger, se utiliza como región de convergencia total a la intersección de las tres ROC individuales, y por tanto la ROC de $x(t)$ es $\sigma > \max\{-1, -b\}$.

Finalmente

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{-t} \cos(at)u(t) \circ \bullet \frac{2s^2 + (3+b)s + 1 + a^2 + b}{(b+s)(1+a^2+2s+s^2)}$$

4.3

Los ejemplos anteriores son casos particulares donde la transformada de Laplace es una función racional, es decir, un cociente de polinomios $N(s)$ y $D(s)$ de variable compleja s

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

En estos casos en que $X(s)$ es racional, $x(t)$ es siempre una combinación lineal de exponenciales reales o complejas. Además, este tipo de funciones racionales aparecen, como se analizará posteriormente, cuando se describen sistemas especificados a través de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En las funciones racionales, los ceros corresponden a las raíces de $N(s)$ y los polos a las raíces de $D(s)$. Puesto que la ubicación de estas raíces, excepto por un factor de escala, son suficientes para especificar $X(s)$, se acostumbra utilizar un *diagrama de polos y ceros* para indicar la transformada de Laplace, donde con “×” se demarcan los polos, y con “o” los ceros, y se denota además la región de convergencia en uso. Así, el diagrama de polos y ceros para los ejemplos 4.1 y 4.3 se muestra en la figura 4.2.

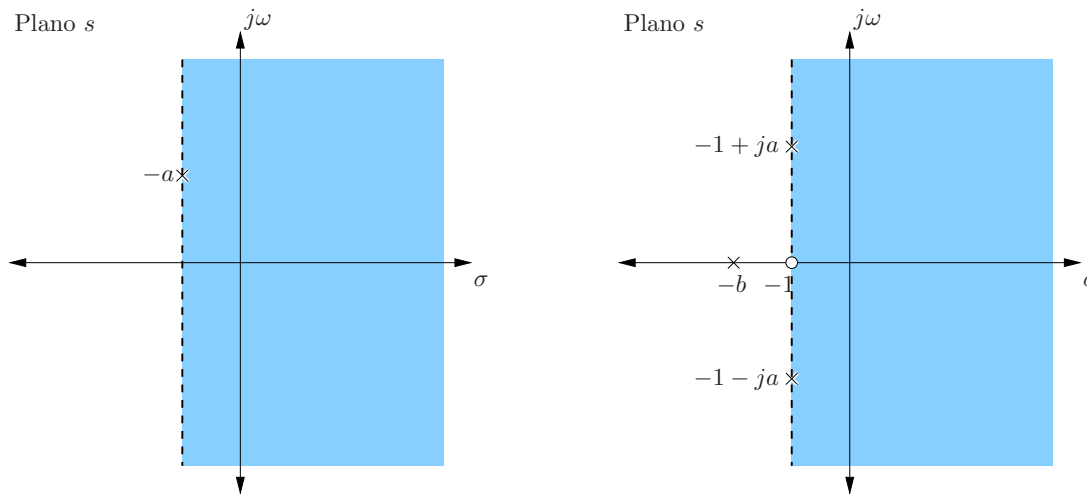


Figura 4.2: Regiones de convergencia para ejemplos 4.1 (izquierda) y 4.3 (derecha).

Además de los ceros y polos en la expresión algebraica de la transformada de Laplace, si esta es racional, y el orden del numerador es en un orden k menor que el denominador, se dice que hay un cero de orden k en infinito, puesto que si s tiende a infinito, entonces $X(s)$ tiende a cero. De forma similar, si el numerador es en un orden k mayor que el denominador, entonces se considera que hay un polo de orden k en el infinito, puesto que si s tiende a infinito, también lo hará $X(s)$. En otras palabras, para las funciones racionales puede considerarse que siempre hay el mismo número de polos y ceros, si se toman en cuenta aquellos en el infinito.

4.1.1 Regiones de convergencia

La región de convergencia contiene aquellos puntos del plano s para los que la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ existe, lo que implica que $x(t)e^{-\sigma t}$ debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Esto depende únicamente de la componente real σ de la frecuencia compleja s . Por esta razón, la ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano s .

Puesto que la integral de Laplace debe converger, la ROC no puede contener ningún polo, por indefinirse allí el valor de la expresión algebraica. Esto sugiere que los límites de las bandas verticales que conforman la ROC estarán determinados por las componentes reales de los polos.

Sea $x(t)$ una función de duración finita, es decir, con valores diferentes de cero dentro de un intervalo finito $[t_1, t_2]$, y fuera de allí siempre cero. Sea $x(t)$ además absolutamente integrable dentro de dicho intervalo:

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty. \quad (4.2)$$

Si $s = \sigma + j\omega$ está dentro de la ROC, eso quiere decir que $x(t)e^{-\sigma t}$ es también absolutamente integrable

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (4.3)$$

Con $\sigma = 0$ (4.3) se reduce a (4.2) por lo que $\sigma = 0$ se encuentra en la ROC. Si $\sigma > 0$ entonces el valor máximo de $e^{-\sigma t}$ se obtiene para $t = t_1$ y por tanto

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt \leq e^{-\sigma t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$$

por lo que todo $\sigma > 0$ se encuentra en la ROC.

De forma similar para $\sigma < 0$ se cumple que el mayor valor de $e^{-\sigma t}$ ocurre para $t = t_2$, por lo que

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt \leq e^{-\sigma t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$$

y así todo $\sigma < 0$ se encuentra en la ROC. De esta forma se ha demostrado que si $x(t)$ es finita y absolutamente integrable entonces todo el plano s constituye su ROC.

Ejemplo 4.4 Calcule la transformada de Laplace de la función finita

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución: Utilizando la definición de transformada de Laplace se obtiene

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

lo que aparenta tener un polo en $s = -a$. Esto sería sin embargo contradictorio con la propiedad anteriormente descrita. Sin embargo, si $s = -a$ el numerador también se hace cero, por lo que debe evaluarse la convergencia en este punto utilizando, por ejemplo, la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{\frac{d}{ds} (1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds} (s+a)} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT} = T$$

que al ser un valor finito concuerda con la propiedad de convergencia completa del plano s . 4.4

Una señal acotada por su izquierda, o también llamada una *señal derecha* es aquella para la que se cumple $x(t) = 0$ para $t < t_1$. Si la transformada de Laplace converge para algún valor $\sigma = \sigma_0$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

Puesto que la señal es derecha entonces lo anterior se puede reescribir como

$$\int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

y para todo $\sigma_1 > \sigma_0$

$$\int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1} \int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

es decir, para una señal derecha su ROC contendrá siempre el semiplano derecho de s a partir de un cierto valor σ_0 .

Un razonamiento similar se sigue para *señales izquierdas* o acotadas por la derecha, que convergerán para todo un semiplano izquierdo delimitado por la recta vertical que pasa por σ_0 .

Una *señal bilateral* es aquella de extensión infinita tanto a la izquierda, como a la derecha. Una señal de este tipo puede descomponerse como la suma de una señal izquierda y otra derecha, partiéndola en dos en algún punto finito. En este caso la ROC contendrá la intersección de las ROC individuales. Si dicha intersección es vacía, entonces la transformada de Laplace no existe. En caso contrario, como es la intersección de un semiplano izquierdo y otro derecho, la ROC corresponderá a una banda vertical.

La figura 4.3 muestra los cuatro casos anteriores en forma esquemática.

Ejemplo 4.5 Encuentre la transformada de Laplace de

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

con su respectiva región de convergencia, para $a \in \mathbb{R}$.

Solución: Esta ecuación puede reescribirse como la suma de una señal derecha y otra izquierda acotadas en el punto $t = 0$.

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{+at}u(-t)$$

De los ejemplos 4.1 y 4.2

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) &\circ\text{---}\bullet \frac{1}{s+a}, & \text{ROC: } \sigma > -a \\ e^{at}u(-t) &\circ\text{---}\bullet \frac{-1}{s-a}, & \text{ROC: } \sigma < a \end{aligned}$$

Nótese que si $a < 0$ entonces no hay una región de convergencia común a ambos términos y por tanto no existe la transformada de Laplace. Si $a > 0$ entonces

$$e^{-a|t|} \circ\text{---}\bullet \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = -\frac{2a}{s^2 - a^2}, \quad \text{ROC: } -a < \sigma < a$$

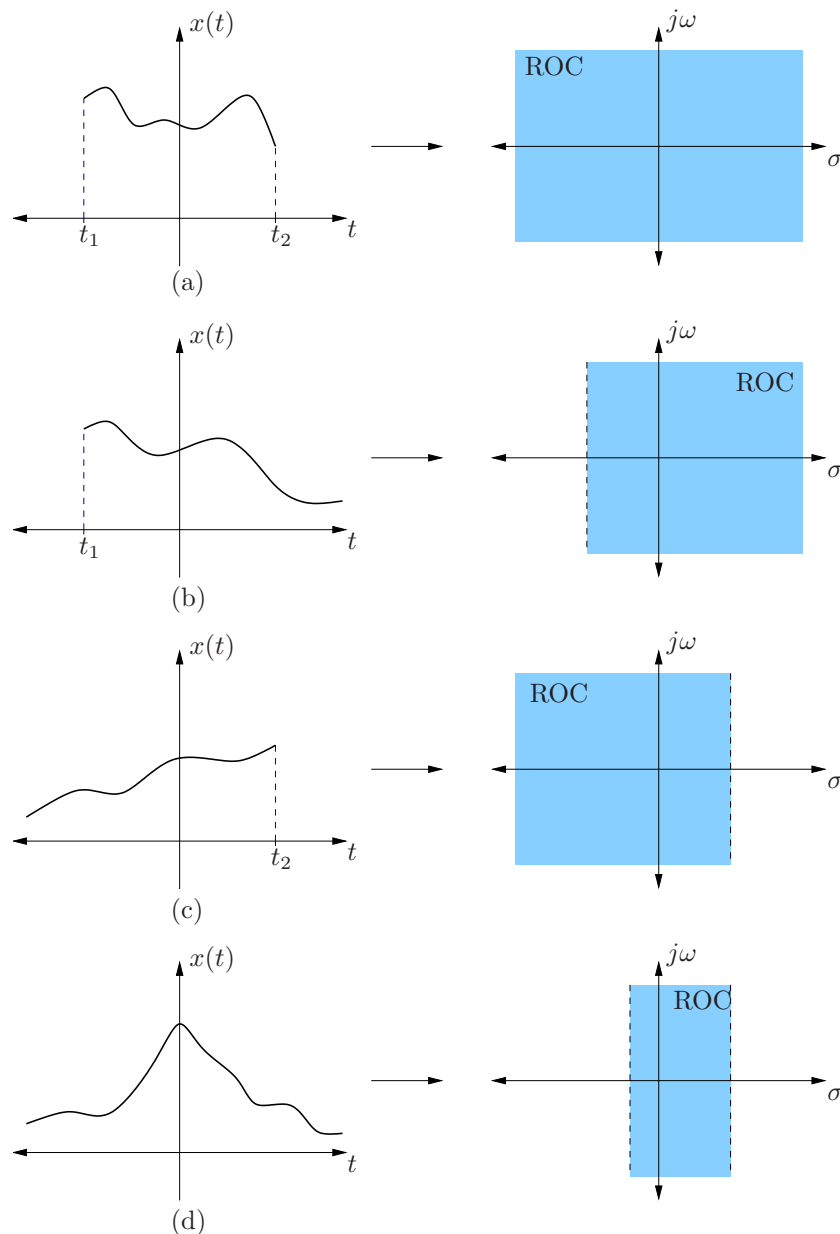


Figura 4.3: Regiones de convergencia correspondientes a señales (a) finita, (b) derecha, (c) izquierda y (d) bilateral.

4.5

Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces si $x(t)$ es una función derecha, su ROC será el semiplano derecho limitado a la izquierda por el polo de $X(s)$ con mayor componente real. Por otro lado, si $x(t)$ es izquierda, su ROC será el semiplano izquierdo limitado a la derecha por el polo de $X(s)$ con menor componente real. La figura 4.4 muestra las posibles regiones de convergencia de una función $X(s)$ con varios polos. Nóte que en el caso de la figura solo la ROC correspondiente a una función derecha permite la existencia de la transformada de Fourier, puesto que solo ella incluye al eje imaginario $j\omega$.

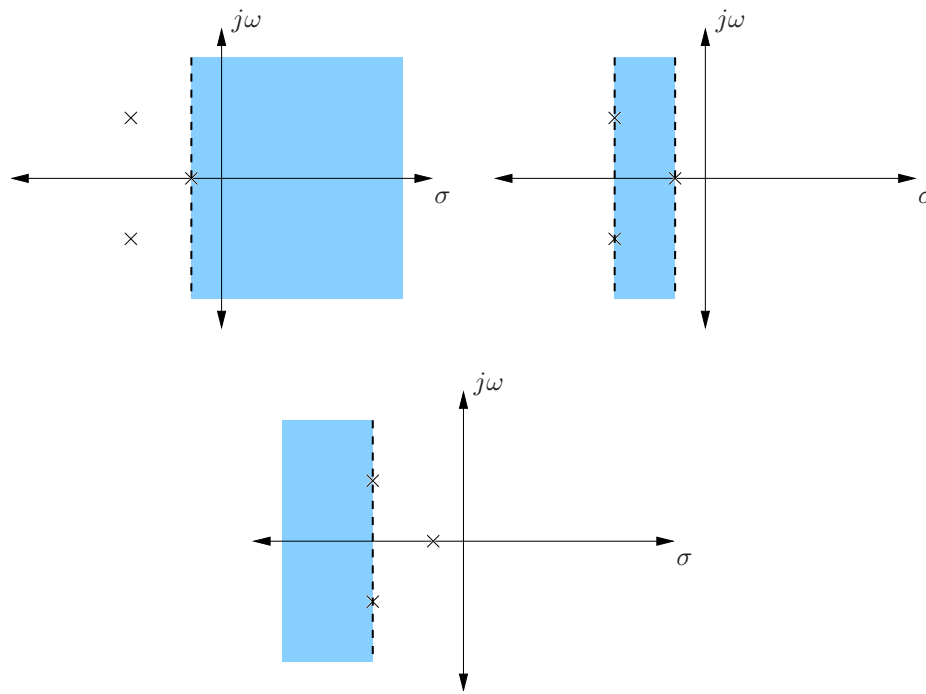


Figura 4.4: Regiones de convergencia limitados por polos de transformada de Laplace $X(s)$.

Nótese que en todo el análisis anterior se ha supuesto que $x(t)$ es de orden exponencial, es decir, que cuando $t \rightarrow \pm\infty$ existen número reales constantes σ , M , t_1 y t_2 tales que

$$|x(t)| < Me^{\sigma t}$$

para todo $t > t_1$ y $x(t)$ una señal derecha, o para $t < t_2$ y $x(t)$ una señal izquierda. En caso contrario, no existe la transformada de Laplace al no converger la integral de definición.

4.1.2 Propiedades de la transformada de Laplace

Por su estrecha relación con la transformada de Fourier, muchas de las propiedades de esta última se mantienen. Sin embargo, en la transformada de Laplace debe tenerse cuidado con las implicaciones para la región de convergencia. En el caso de funciones racionales, por ejemplo, si la modificación de la función altera la posición de los polos, la ROC se trasladará con ellos, en concordancia con los conceptos discutidos anteriormente.

Linealidad

Sean las funciones en el dominio del tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y sus respectivas transformadas de Laplace

$$\begin{aligned} x_1(t) &\circ\text{---}\bullet X_1(s), & \text{ROC: } R_1 \\ x_2(t) &\circ\text{---}\bullet X_2(s), & \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ \bullet \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s), \quad \text{ROC: } R_1 \cap R_2$$

donde la ROC indicada representa la menor región de convergencia posible, puesto que, como el problema 4.7 lo muestra, la ROC de la combinación lineal puede ser mayor que la de los términos por separado, puesto que algunos polos pueden desaparecer.

Esta propiedad puede demostrarse fácilmente utilizando la propiedad de linealidad de la integral, junto con la observación de que la transformada total converge solo en aquella región común a todos los términos, es decir, a su intersección.

Nótese que es posible, si no hay puntos comunes en las regiones de convergencia, que no exista la transformada de Laplace de una combinación lineal.

Desplazamiento en el tiempo y en el dominio s

Con un análisis análogo al caso de la transformada de Fourier se puede demostrar que si $x(t) \circ \bullet X(s)$ con ROC R entonces

$$x(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} X(s), \quad \text{ROC: } R$$

y

$$e^{s_0 t} x(t) \circ \bullet X(s - s_0), \quad \text{ROC: } \{s \mid s = r + s_0, r \in R\}$$

Es decir, la región de convergencia no es alterada cuando se desplaza la señal en el tiempo. Sin embargo, si se desplaza la señal en el dominio s entonces también lo hace su región de convergencia. Esto puede comprenderse considerando que en $X(s - s_0)$ los polos y ceros están desplazados en s_0 con respecto a los de $X(s)$, y por tanto también se desplaza su región de convergencia. Puesto que las ROC son bandas de longitud vertical infinita, este desplazamiento puede interpretarse como un corrimiento horizontal de la ROC determinada por $\text{Re}\{s_0\}$.

Un caso particular consiste en la modulación, es decir

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \circ \bullet X(s - j\omega_0)$$

que desplaza la transformada de Laplace en dirección vertical, trasladando todo polo y cero en a hacia $a + j\omega_0$. Nótese que la ROC en este caso queda inalterada.

Conjugación

Para $x(t) \circ \bullet X(s)$ con ROC R se cumple

$$x^*(t) \circ \bullet X^*(s^*), \quad \text{ROC: } R$$

y por lo tanto $X(s) = X^*(s^*)$ si $x(t)$ es real. Consecuencia directa de este hecho es que si p es un polo complejo con parte imaginaria diferente de cero, entonces p^* también lo es.

Escalamiento en el tiempo

Si $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ con ROC R entonces para $a \in \mathbb{R}$

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROC: } \left\{s \mid s = \frac{r}{a}, r \in R\right\}$$

es decir, al igual que con la serie de Fourier, una compresión en el tiempo equivale a una dilatación en el dominio s , donde sin embargo ahora la dilatación ocurre en el plano complejo. Nótese que los límites de la ROC cambian. Si para $x(t)$ estos límites eran r_1 y r_2 , entonces para $x(at)$ estos serán r_1/a y r_2/a .

Para el caso en particular $a = -1$ se tiene entonces

$$x(-t) \circ \bullet X(-s), \quad \text{ROC: } \{s \mid s = -r, r \in R\}$$

que equivale a una rotación de 180° del plano s como dominio de definición de $X(s)$, modificándose la posición de los polos y por tanto también la ROC.

Convolución

Si

$$\begin{aligned} x_1(t) \circ \bullet X_1(s), \quad \text{ROC: } R_1 \\ x_2(t) \circ \bullet X_2(s), \quad \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet X_1(s)X_2(s), \quad \text{ROC: } R_1 \cap R_2$$

donde la región de convergencia puede ser mayor a la indicada si en el producto los polos que determinan los límites de las ROC individuales se cancelan.

Diferenciación en el tiempo y en el dominio s

Si $x(t) \circ \bullet X(s)$ con ROC R entonces

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ \bullet sX(s), \quad \text{ROC: } R$$

donde si $X(s)$ tiene un polo de primer orden en $s = 0$ entonces la ROC puede ser mayor. Esta propiedad se puede aplicar recursivamente para llegar a

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \circ \bullet s^n X(s), \quad \text{ROC: } R$$

Además

$$-tx(t) \circ \bullet \frac{d}{ds}X(s), \quad \text{ROC: } R$$

Ejemplo 4.6 Encuentre la transformada de Laplace de

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

Solución: Puesto que

$$e^{-at}u(t) \circ \bullet \frac{1}{s+a}, \quad \text{ROC: } \sigma > -a$$

entonces

$$te^{-at}u(t) \circ \bullet -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{ROC: } \sigma > -a$$

4.6

Integración en el tiempo

Si $x(t) \circ \bullet X(s)$ con ROC R entonces

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} X(s), \quad \text{ROC: } R \cap \{s \mid \text{Re}\{s\} > 0\}$$

lo que puede deducirse del hecho que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = u(t) * x(t)$$

y puesto que $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$ con ROC $\sigma > 0$ entonces, con la propiedad de convolución se tiene

$$u(t) * x(t) \circ \bullet \frac{1}{s} X(s)$$

con una ROC igual a la intersección entre $\sigma > 0$ y la ROC de $X(s)$.

4.1.3 La transformada inversa de Laplace

Puesto que

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

con $s = \sigma + j\omega$ dentro de la ROC, entonces puede de forma equivalente utilizarse la transformada inversa de Fourier para encontrar a $x(t)$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad .$$

Multiplicando ambos lados por $e^{\sigma t}$ se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

Tabla 4.1: Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$\geq R$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$\geq R$
	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$

Las operaciones aritméticas utilizadas en la ROC se refieren a operaciones aplicadas a cada uno de los elementos de la región. Así por ejemplo $R + s_0$ denota en realidad $\{s \mid s = r + s_0, r \in R\}$. El símbolo “ \geq ” en la ROC implica que la región es *al menos* la indicada.

que corresponde a una integral en el plano complejo s con una trayectoria de integración vertical con componente real constante σ dentro de la ROC y con componente imaginaria ω que abarca desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = \infty$. Esto puede expresarse también, haciendo un cambio de variable en la ecuación anterior $s = \sigma + j\omega$, $ds = jd\omega$, como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (4.4)$$

A esta ecuación se le conoce como transformada inversa de Laplace, o también fórmula integral de Bromwich.

Método de inversión por integración

Para calcular la transformada inversa de Laplace a través de la integral de Bromwich se recurre a las herramientas tratadas en el capítulo 2.6. La figura 4.5 muestra el contorno de integración β denominado *contorno de Bromwich*, con el cual se realiza el cálculo directo de la transformada inversa de Laplace para una señal causal. Este se compone de un segmento vertical AB con componente real σ , situado dentro de la región de convergencia,

y de un arco Γ de un círculo de radio R centrado en el origen que pasa por $BCDEA$. Debe tenerse cuidado de que no existan polos en el infinito, que interfieran con el contorno de integración. La elección de una función derecha o izquierda se hace observando la forma de la región de convergencia, donde para señales anticausales se elige la reflexión del contorno mostrado en la figura 4.5. Una descripción detallada de los cuidados que debe tenerse y el procedimiento correcto para evitarlos se encuentra en [11].

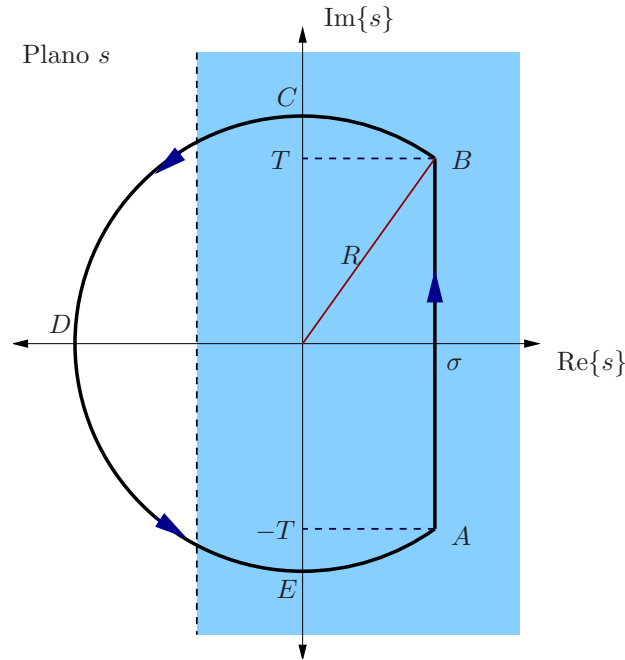


Figura 4.5: Contorno de Bromwich.

Para calcular la transformada inversa, considerando que $T = \sqrt{R^2 - \sigma^2}$, la integral (4.4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - jT}^{\sigma + jT} X(s) e^{st} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \left[\oint_{\beta} X(s) e^{st} ds - \int_{\Gamma} X(s) e^{st} ds \right] \end{aligned}$$

Como ya se mencionó anteriormente, la ROC no contiene polos de $X(s)$. Cuando R tiende a infinito, el contorno β encerrará a todos los polos finitos a la izquierda de la región de convergencia y esta integral cerrada se puede calcular con cualquiera de los métodos estudiados anteriormente, como el teorema del residuo o la fórmula integral de Cauchy. Nótese que si la integral sobre el contorno Γ tiende a cero para $R \rightarrow \infty$ entonces se cumple

$$x(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - jT}^{\sigma + jT} X(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\beta} X(s) e^{st} ds \quad (4.5)$$

Para determinar esto, se puede utilizar el Lema de Jordan (sección 2.7) si primero se aplica un mapeo lineal que traslade horizontalmente el plano s de modo tal que el segmento

de recta AB se sobreponga al nuevo eje imaginario. Considerando esto se obtiene que la integral sobre el contorno Γ tiende a cero para todas las funciones polinomiales $N(s)/D(s)$ donde el grado del polinomio $N(s)$ es menor que el de $D(s)$ (ver problema 4.11).

Ejemplo 4.7 Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{ROC: } \sigma > -\text{Re}\{a\}$$

si $\text{Re}\{a\} > 0$.

Solución: Como la función es racional se cumplen los requisitos para que la integral en el arco del contorno de Bromwich desaparezca y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s+a} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\beta} \frac{1}{s+a} e^{st} ds$$

Puesto que σ debe estar en la ROC, y el contorno β encierra al único polo de $X(s)$ en $-a$, entonces, utilizando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{\beta} \frac{1}{s+a} e^{st} ds = 2\pi j e^{-at}$$

y finalmente, como el resultado anterior es válido solo para $t \geq 0$

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

4.7

Ejemplo 4.8 Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \text{ROC: } \sigma > -\text{Re}\{a\}$$

si $\text{Re}\{a\} > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Solución: Como la función es racional se cumplen los requisitos para que la integral en el arco del contorno de Bromwich desaparezca y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{(s+a)^n} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\beta} \frac{1}{(s+a)^n} e^{st} ds$$

Puesto que σ debe estar en la ROC, y el contorno β encierra al polo de n -ésimo orden de $X(s)$ en $-a$, entonces, utilizando la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{\beta} \frac{1}{(s+a)^n} e^{st} ds = \frac{2\pi j}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} e^{st} \right|_{s=-a}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}e^{st} &= te^{st} \\ \frac{d^2}{ds^2}e^{st} &= t^2e^{st} \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}e^{st} &= t^{n-1}e^{st}\end{aligned}$$

entonces, como el resultado es válido solo para $t \geq 0$

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}t^{(n-1)}e^{-at}u(t)$$

4.8

Ejemplo 4.9 Encuentre la transformada inversa de

$$X(s) = \frac{1}{s^n}$$

para $n \geq 1$

Solución: De los ejemplos anteriores con $a = 0$ y $n \geq 0$ se obtiene

$$\frac{1}{s} \bullet \circ u(t) \quad \frac{1}{s^n} \bullet \circ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}u(t)$$

4.9

Este método basado en la integral de Bromwich es poco utilizado en la práctica, puesto que hay muchas sutilezas matemáticas (no consideradas aquí) que pueden llevar al resultado erróneo. El lector puede comprobar este hecho transformado, por ejemplo, $e^{at}u(t - t_0)$ al dominio de Laplace y de regreso al dominio temporal. De hecho, siempre que la expresión algebraica de la transformada de Laplace tenga polos en infinito o un número de polos infinito, la integral de Bromwich debe evaluarse con métodos alternativos por no cumplirse las condiciones necesarias para asumir que la integral en el arco circular desaparece. Los métodos generalmente más utilizados involucran el uso de tablas realizadas para funciones elementales, y la descomposición de funciones $X(s)$ más complejas en términos de estas funciones elementales. Estos métodos se tratan a continuación.

Método de series

Si $X(s)$ se puede expresar en su ROC como una serie de potencias, por ejemplo

$$X(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s^3} + \dots$$

entonces, utilizando los resultados del ejemplo 4.9 y la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace se cumple que

$$x(t) = \left[c_1 + c_2t + \frac{c_3}{2!}t^2 + \frac{c_4}{3!}t^3 + \dots \right] u(t)$$

Descomposición en fracciones parciales

Cualquier función racional de la forma $X(s) = N(s)/D(s)$, con $N(s)$ y $D(s)$ polinomios tales que el orden de $D(s)$ es estrictamente mayor que el de $N(s)$ pueden descomponerse como una suma de términos más sencillos con un solo polo de orden n . Si $X(s)$ contiene únicamente m polos simples en a_i , entonces

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s - a_i}$$

Nótese que los numeradores de cada término son todos constantes, y que esto es válido solo si el orden de $N(s)$ es menor que el de $D(s)$, en cuyo caso a $X(s)$ se le denomina *función racional propia*. En caso contrario, $X(s)$ es una función racional impropia que puede expresarse como una suma de un polinomio más una función racional propia. Esta última descomposición se puede realizar por medio de una división polinomial adecuada.

Ejemplo 4.10 Descomponga la siguiente función racional impropia en una suma de un polinomio más una función racional propia.

$$X(s) = \frac{s^3 - 1}{s^2 - 1}$$

Solución: Utilizando división polinomial se obtiene

$$\begin{array}{r|l} s^3 & -1 \\ -(s^3 - s) & \\ \hline & s - 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} s^2 - 1 \\ s \end{array} \right.$$

con lo que resulta

$$X(s) = s + \frac{s - 1}{s^2 - 1} = s + \frac{1}{s + 1}$$

Si se desea obtener la transformada inversa de esta expresión, de la tabla 4.2 se tiene que

$$\begin{array}{l} s \bullet \circ \frac{d}{dt} \delta(t) \\ \frac{1}{s + 1} \bullet \circ e^{-t} u(t) \end{array}$$

donde se ha asumido que la señal debe ser causal. Con la propiedad de linealidad se tiene entonces

$$X(s) \bullet \circ x(t) = \frac{d}{dt} \delta(t) + e^{-t} u(t)$$

4.10

Si $X(s)$ contiene polos de n -ésimo orden en a_i , entonces en la descomposición en fracciones parciales aparecerán los términos

$$\frac{A_{i1}}{s - a_i} + \frac{A_{i2}}{(s - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{in}}{(s - a_i)^n}$$

Para encontrar el coeficiente A_k del polo simple a_k se procede con

$$\lim_{s \rightarrow a_k} (s - a_k) X(s) = \lim_{s \rightarrow a_k} \sum_{i=1}^m (s - a_k) \frac{A_i}{s - a_i} = \sum_{i=1}^m \lim_{s \rightarrow a_k} (s - a_k) \frac{A_i}{s - a_i}$$

donde, puesto que

$$\lim_{s \rightarrow a_k} \frac{s - a_k}{s - a_i} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq k \\ 1 & \text{para } i = k \end{cases}$$

entonces

$$A_k = \lim_{s \rightarrow a_k} (s - a_k) X(s) \quad (4.6)$$

El coeficiente A_{in} para el polo a_i orden $n > 1$ se obtiene de manera similar:

$$A_{in} = \lim_{s \rightarrow a_i} (s - a_i)^n X(s)$$

Los coeficientes A_{ik} con $1 \leq k < n$ se determinan a través de derivaciones sucesivas, con un razonamiento análogo al utilizado en la determinación de los residuos en la página 67. El lector puede comprobar que estos coeficientes estarán dados por

$$A_{ik} = \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{1}{(n - k)!} \frac{d^{(n-k)}}{ds^{(n-k)}} [(s - a_i)^n X(s)]$$

Puede demostrarse que si hay un par de polos complejos conjugados $a_i = a_k^*$, los coeficientes correspondientes también serán complejos conjugados, es decir $A_i = A_k^*$.

En los ejemplos 4.1, 4.2, 4.7 y 4.8 se mostró la correspondencia entre los dominios temporal y de Laplace para dichos términos simples, donde no debe perderse de vista la ROC de cada término. Utilizando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace puede entonces determinarse la señal en el tiempo correspondiente a $X(s)$. La tabla 4.2 muestra algunas funciones elementales frecuentemente encontradas. Se deja al lector como ejercicio su demostración.

Ejemplo 4.11 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

asumiendo primero que la señal correspondiente $x(t)$ es causal, y luego que es una señal izquierda, y que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Tabla 4.2: Transformadas Bilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma < -a$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$	todo s
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[\text{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[e^{-at} \cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$[e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$	s^n	todo s

Solución: Los polos a_1 y a_2 de $X(s)$ equivalen a las raíces del denominador:

$$a_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

$$a_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

que pueden ser dos valores reales diferentes, dos valores reales iguales, que equivaldría a un polo doble, o un par de polos complejos conjugados, dependiendo si el término

$$\Delta = \alpha^2 - \beta$$

es positivo, cero, o negativo, respectivamente.

En el caso que $\Delta = 0$ entonces $a_1 = a_2 = -\alpha$

$$X(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

y con el ejemplo 4.8 se tiene para la región de convergencia $\sigma > -\alpha$

$$x(t) = te^{-\alpha t}u(t) \quad .$$

Utilizando la tabla 4.2 se obtiene para la región de convergencia $\sigma < -\alpha$

$$x(t) = -te^{-\alpha t}u(-t)$$

En el caso que $\Delta \neq 0$ se cumple

$$X(s) = \frac{1}{(s-a_1)(s-a_2)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2}$$

Para encontrar A_i puede utilizarse (4.6) o simplemente se multiplica ambos lados de la ecuación anterior por $(s-a_1)(s-a_2)$ que resulta en

$$1 = (s-a_2)A_1 + (s-a_1)A_2$$

Con $s \rightarrow a_2$, y luego con $s \rightarrow a_1$ se obtiene

$$A_1 = \frac{1}{a_1 - a_2} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \quad A_2 = \frac{1}{a_2 - a_1} = -A_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}$$

por lo que finalmente

$$X(s) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{s-a_1} - \frac{1}{s-a_2} \right]$$

Si $\Delta > 0$ entonces ambos polos son reales y se cumple $a_1 > a_2$ por lo que para la ROC $\sigma > a_1$ se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} [e^{a_1 t} - e^{a_2 t}] u(t)$$

y para la ROC $\sigma < a_2$

$$x(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta}} [e^{a_1 t} - e^{a_2 t}] u(-t)$$

Si $\Delta < 0$ se cumple $a_1 = a_2^*$ y entonces para la ROC $\sigma > -\alpha$ se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2j\sqrt{|\Delta|}} e^{\operatorname{Re}\{a_1\}t} [e^{j\operatorname{Im}\{a_1\}t} - e^{-j\operatorname{Im}\{a_1\}t}] u(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{\operatorname{Re}\{a_1\}t} \operatorname{sen}(\operatorname{Im}\{a_1\}t) u(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\sqrt{|\Delta|}t) u(t) \end{aligned}$$

y para la ROC $\sigma < -\alpha$

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\sqrt{|\Delta|}t) u(-t)$$

La figura 4.6 muestra ejemplos para cada uno de los casos citados.

4.11

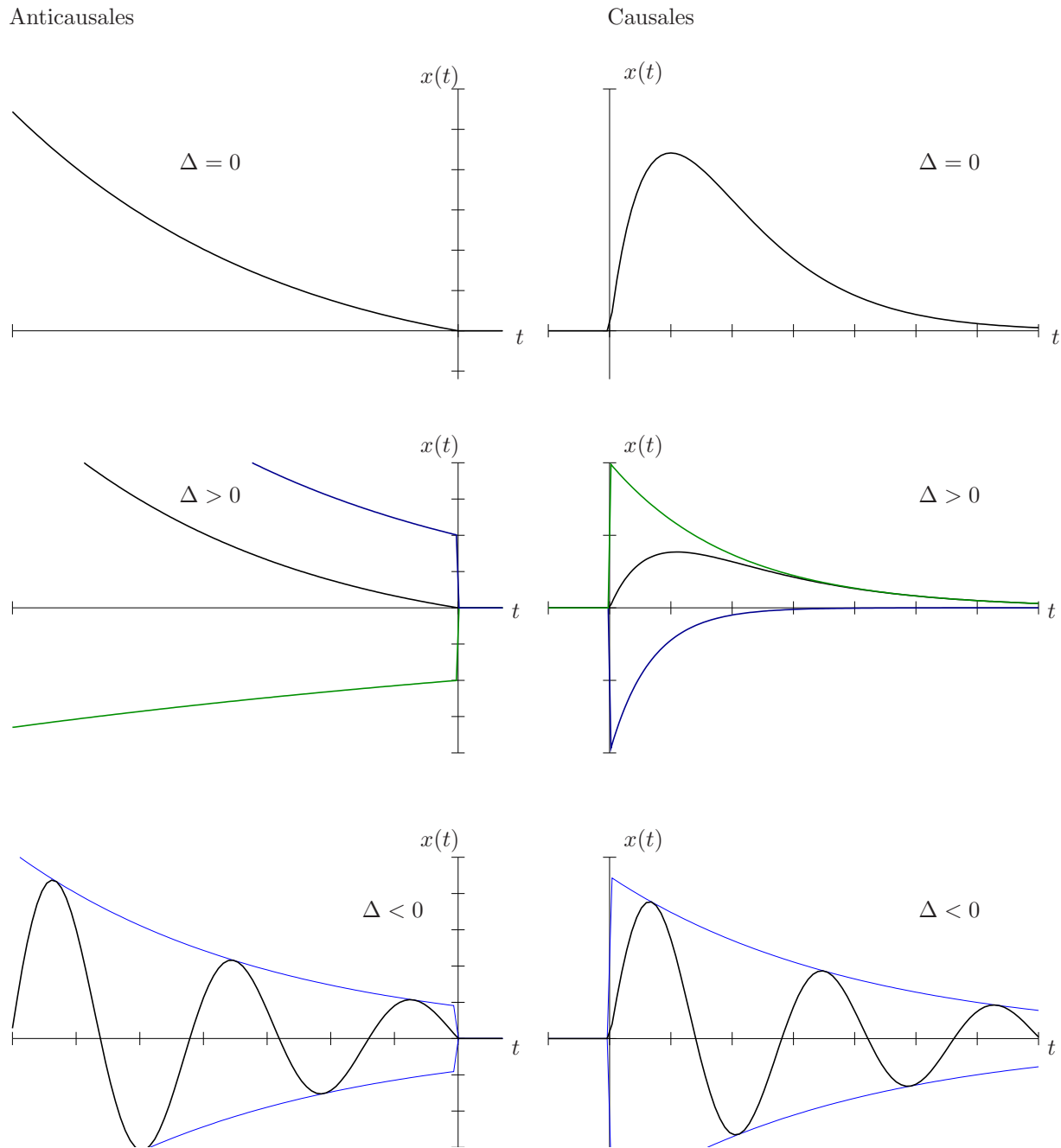


Figura 4.6: Ejemplos de funciones con transformada de Laplace de orden 2 para el ejemplo 4.11. Del lado izquierdo se presentan las señales anticausales. Del lado izquierdo se presentan las señales causales (con ROC un semiplano derecho). En cada caso se indica si el valor del término Δ es positivo, negativo o cero.

Ejemplo 4.12 Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{s(s+a)}{(s+2a)^2(s+a(1-j))(s+a(1+j))}$$

con $a \in \mathbb{R}$ una constante positiva, para todas las regiones de convergencia posibles.

Solución: Para encontrar las regiones de convergencia se parte del diagrama de polos y ceros indicado en la figura 4.7. Se nota claramente que con los polos indicados hay

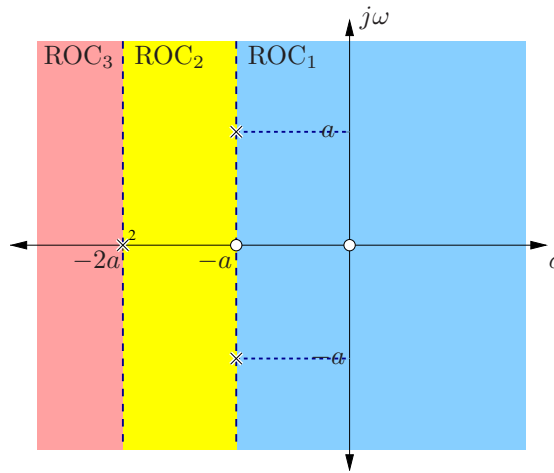


Figura 4.7: Diagrama de polos y ceros del ejercicio 4.12.

tres posibles regiones. Para la señal derecha, ROC_1 tiene $\sigma > -a$. La señal bilateral tiene como ROC_2 $-2a < \sigma < -a$. La señal izquierda tiene como ROC_3 $\sigma < -2a$. El superíndice sobre el polo en $-2a$ indica el orden del mismo.

El orden del numerador de $X(s)$ es uno, y el orden del denominador es cuatro, por lo tanto se cumple

$$X(s) = \frac{A_{11}}{s+2a} + \frac{A_{12}}{(s+2a)^2} + \frac{A_2}{s+(a-j)} + \frac{A_3}{s+(a+j)}$$

con

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{d}{ds} \frac{s(s+a)}{(s+(a-j))(s+(a+j))} = \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{d}{ds} \frac{s^2+sa}{s^2+2as+2a^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{a(s^2+4as+2a^2)}{(s^2+2as+2a^2)^2} = -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

$$A_{12} = \lim_{s \rightarrow -2a} \frac{s(s+a)}{(s+(a-j))(s+(a+j))} = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -(a+j)} = \frac{1}{4a}(1+j) = \frac{\sqrt{2}}{4a}e^{j\pi/4}$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -(a-j)} = \frac{1}{4a}(1-j) = \frac{\sqrt{2}}{4a}e^{-j\pi/4}$$

Para la ROC_1 , todos los términos corresponden a funciones derechas, por lo que, utilizando resultados de ejemplos anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[-\frac{1}{2a}e^{-2at} + te^{-2at} + \frac{1}{4a} \left(\sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-(a-ja)t} + \sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{-(a+ja)t} \right) \right] u(t) \\ &= \left[\left(t - \frac{1}{2a} \right) e^{-2at} + \frac{\sqrt{2}e^{-at}}{2a} \cos \left(at + \frac{\pi}{4} \right) \right] u(t) \end{aligned}$$

lo que se muestra en la figura 4.8.

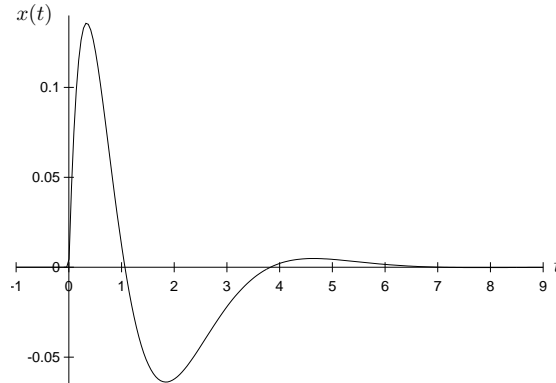


Figura 4.8: Función $x(t)$ para la ROC_1 del ejemplo 4.12, con $a = 1$.

Para la ROC_2 los polos complejos conjugados corresponden a una señal izquierda mientras que el polo real en $-2a$ corresponde a una señal derecha. Así

$$x(t) = \left[\left(t - \frac{1}{2a} \right) e^{-2at} \right] u(t) - \frac{\sqrt{2}e^{-at}}{2a} \cos \left(at + \frac{\pi}{4} \right) u(-t)$$

lo que se muestra en la figura 4.9.

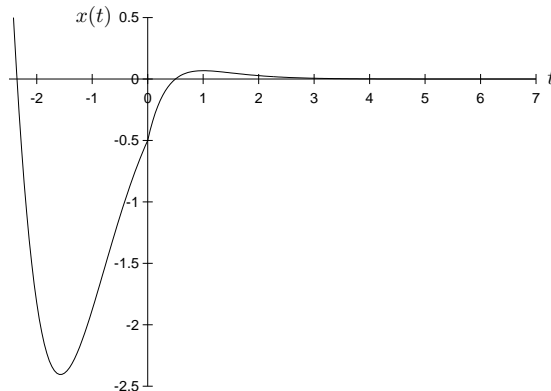


Figura 4.9: Función $x(t)$ para la ROC_2 del ejemplo 4.12, con $a = 1$.

Y finalmente para la ROC_3 todos los polos aportan a señales izquierdas y

$$x(t) = \left[\left(\frac{1}{2a} - t \right) e^{-2at} - \frac{\sqrt{2}e^{-at}}{2a} \cos \left(at + \frac{\pi}{4} \right) \right] u(-t)$$

lo que se muestra en la figura 4.10.

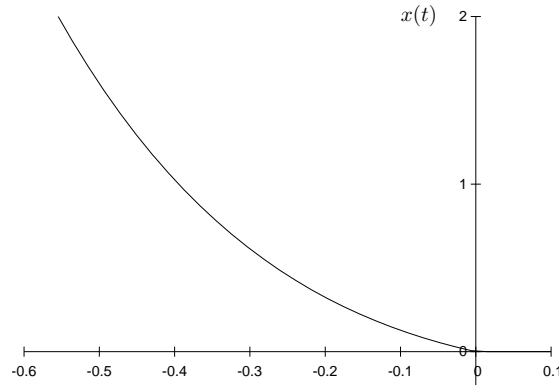


Figura 4.10: Función $x(t)$ para la ROC_3 del ejemplo 4.12, con $a = 1$.

4.12

4.1.4 Sistemas LTI y la transformada de Laplace

Tal y como se discutió en la sección 3.4, la reacción de un sistema a una señal de entrada se puede calcular a través de la convolución de dicha señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema. Debido a la propiedad de convolución de la transformada de Laplace, es posible simplificar el manejo de este operador utilizando la representación de las señales involucradas y la respuesta al impulso en el dominio de la frecuencia, tal y como se hizo con la transformada de Fourier:

$$\begin{array}{c}
 y(t) = h(t) * x(t) \\
 \circ \quad \circ \quad \circ \\
 | \quad | \quad | \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 Y(s) = H(s)X(s)
 \end{array}$$

Esta transformada tiene mayores posibilidades en el análisis de sistemas que la transformada de Fourier, puesto que con ella se pueden tratar casos “inestables” que no tienen representación en el dominio $j\omega$, es decir, todos aquellos casos en que la ROC de la transformada de Laplace no incluye al eje imaginario del plano $s = \sigma + j\omega$.

Recuérdese que a $H(j\omega)$ se le conoce como respuesta en frecuencia del sistema. A $H(s)$ se le denomina *función del sistema* o *función de transferencia* del sistema.

Causalidad

Si un sistema es causal entonces su respuesta al impulso $h(t)$ es cero para todo $t < 0$ y es por tanto una función derecha. Por esta razón la ROC de todo sistema causal será un

semiplano derecho. Debe notarse, sin embargo, que lo contrario no es cierto, es decir, que si la ROC de una función es un semiplano derecho entonces la función no es necesariamente causal, puesto que no toda función derecha es causal. Por ejemplo, $u(t + 1)$ es derecha pero como en el intervalo $[-1, 0]$ es diferente de cero entonces no es causal.

Para el caso particular de funciones racionales, al no tener $H(s)$ los términos exponenciales causantes del desfase en el tiempo, se puede afirmar que si su ROC es un semiplano derecho delimitado por el polo más a la derecha de $H(s)$, entonces $h(t)$ es causal.

Un sistema se denomina *anticausal* si su respuesta al impulso $h(t)$ es cero para todo $t > 0$, que por ser una función izquierda implica un semiplano izquierdo como ROC. De igual modo que para sistemas causales, solo si $H(s)$ es racional se puede inferir que si su ROC es un semiplano izquierdo entonces su respuesta al impulso es anticausal.

Estabilidad

En la sección 3.4.4 se estableció que un sistema estable BIBO tiene una respuesta al impulso absolutamente integrable, y por lo tanto tiene transformada de Fourier. Esto implica entonces a su vez que si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema estable, entonces $H(s)$ debe incluir en su ROC al eje imaginario $j\omega$ del plano s .

Ejemplo 4.13 Sea

$$H(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)(s - 1)}$$

la función de transferencia de un sistema estable. Determine su respuesta al impulso.

Solución: La figura 4.11 muestra el diagrama de polos y ceros de $X(s)$ junto con las tres posibles regiones de convergencia. Puesto que de las tres ROC mostradas solo la banda de convergencia al centro contiene al eje $j\omega$, se deriva que la respuesta al impulso es una función bilateral.

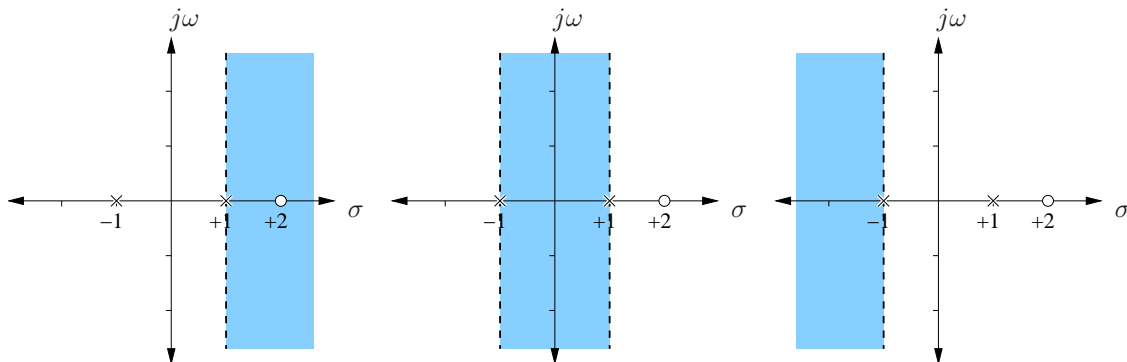


Figura 4.11: Diagrama de polos y ceros y posibles regiones de convergencia en el ejemplo 4.13.

Descomponiendo a $H(s)$ en fracciones parciales se obtiene

$$H(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{s + 1} - \frac{1}{s - 1} \right]$$

y de este modo

$$h(t) = \frac{3}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^t u(-t)$$

lo que se muestra en la figura 4.12.

4.13

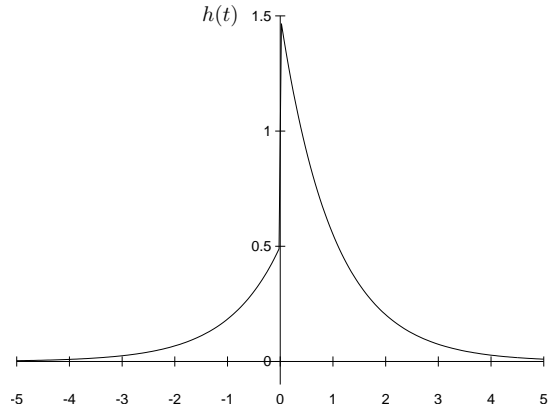


Figura 4.12: Gráfica de la respuesta al impulso $h(t)$ en el ejemplo 4.13.

En el ejemplo 4.13 la ROC correspondiente al semiplano derecho corresponde a una respuesta causal, pero inestable, al no incluir al eje $j\omega$. El semiplano izquierdo corresponde a una señal anticausal, también inestable. De lo anterior se deduce que, para que un sistema causal, con función de transferencia racional, sea estable, entonces todos sus polos deben estar localizados al lado izquierdo del eje imaginario.

Ejemplo 4.14 Evalúe la estabilidad del sistema causal de segundo orden con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solución: En el ejemplo 4.11 se analizaron las posibles transformaciones causales y anticausales de una función igual a $H(s)$. Para la estabilidad del sistema causal se deben considerar tres casos: un polo de orden dos, dos polos reales, o un par de polos complejos conjugados.

Si el discriminante $\Delta = \alpha^2 - \beta$ es cero se tiene un polo de orden dos en $-\alpha$. Este polo se encuentra del lado izquierdo del eje $j\omega$ solo si $\alpha > 0$.

Si $\Delta > 0$ los polos son reales, y el polo más a la derecha se encuentra en

$$a_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

Este polo se encuentra a la izquierda del eje imaginario solo si $\alpha > 0$ y

$$\begin{aligned} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} &< 0 \\ \sqrt{\alpha^2 - \beta} &< \alpha \\ \alpha^2 - \beta &< \alpha^2 \\ \beta &> 0 \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$ entonces la componente real del polo es $-\alpha$, que se encontrará del lado izquierdo del eje imaginario solo si $\alpha > 0$. Estos tres casos se resumen gráficamente en la figura 4.13.

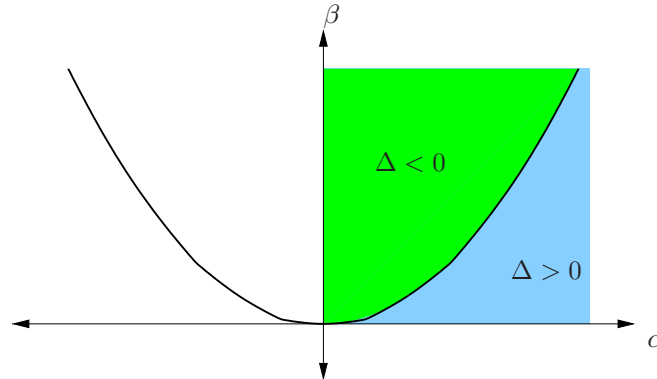


Figura 4.13: Valores de α y β que dan origen a un sistema de segundo orden causal y estable. Solo valores en las regiones sombreadas conducen a la estabilidad.

4.14

4.1.5 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

El comportamiento de muchos sistemas físicos, entre ellos los circuitos lineales (es decir, circuitos RLC, con amplificadores operacionales lineales) puede describirse a través de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

y con la propiedad de linealidad

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

Utilizando ahora la propiedad de diferenciación

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

$$Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k$$

Puesto que la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

entonces se cumple

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

que es una función racional con un numerador igual a un polinomio de grado M , cuyos coeficientes son iguales a aquellos que multiplican las derivadas de la función de entrada, y con un denominador igual a un polinomio de grado N con coeficientes iguales a los de las derivadas de la función de salida. Los ceros de $H(s)$ son entonces las raíces de $\sum_{k=0}^M b_k s^k$ y están determinados entonces por los coeficientes de las derivadas de la entrada únicamente. Los polos de $H(s)$ equivalen a las raíces de $\sum_{k=0}^N a_k s^k$ y están determinados por los coeficientes de las derivadas de la salida. Note que esta deducción es válida también utilizando la transformada de Fourier, y se sustituye simplemente s por $j\omega$.

Ejemplo 4.15 La figura 4.14 muestra un circuito RLC interpretado como sistema con tensión eléctrica de entrada $x(t)$ y tensión eléctrica de salida $y(t)$. Determine la función

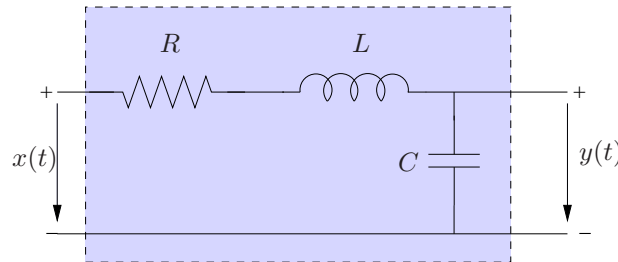


Figura 4.14: Circuito RLC.

de transferencia del sistema, y evalúe la estabilidad del mismo.

Solución: En un condensador y en una bobina se cumple para sus tensiones $u(t)$ y sus corrientes $i(t)$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u(t) \quad u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

Para el circuito de la figura 4.14 en particular, la tensión en el condensador es $y(t)$ y por tanto

$$i(t) = C \frac{d}{dt} y(t)$$

Además, se cumple que

$$\begin{aligned} x(t) &= Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + y(t) \\ &= RC \frac{d}{dt} y(t) + LC \frac{d^2}{dt^2} y(t) + y(t) \end{aligned}$$

y expresando esto en el dominio de Laplace

$$\begin{aligned} X(s) &= sRC Y(s) + s^2 LC Y(s) + Y(s) \\ &= Y(s) [LCs^2 + RCs + 1] \end{aligned}$$

por lo que para la función de transferencia se cumple

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \\ &= \frac{1}{LC} \left[\frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right] = \frac{1}{LC} \left[\frac{1}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \right] \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{R}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}$$

y puesto que R , L , y C son siempre reales positivos se puede decir que el término dentro de la raíz es siempre menor que uno, por lo que la parte real de los polos es siempre menor que cero. Puesto que, como sistema real, el circuito es causal, entonces se puede deducir que el sistema es estable al estar incluido en la ROC de $H(s)$ el eje imaginario $j\omega$.

La respuesta al impulso se puede calcular a partir de $H(s)$, pero su forma dependerá del signo del discriminante de la ecuación cuadrática anterior, tal y como se mostró en el ejemplo 4.11.

4.15

4.2 Transformada unilateral de Laplace

Sistemas reales que modifican señales $x(t)$ definidas en el tiempo son siempre causales. Estos sistemas pueden modificar señales solamente a partir del instante en que estas “ocurran”, pero es imposible reaccionar a ellas antes de que la señal aparezca, o adelantarlas en el tiempo. Estas limitantes conducen a que en ingeniería se utilice una modificación de la transformada de Laplace que ignora lo que ocurre antes del instante de tiempo $t = 0$. Así, se define la transformada unilateral de Laplace como

$$\mathcal{L}_u \{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L} \{x(t)u(t)\}$$

es decir, la transformada unilateral de Laplace es idéntica a la transformada bilateral de la función $x(t)u(t)$, o en otras palabras, si $x(t)$ es causal sus transformadas unilateral y bilateral son idénticas. Ambas transformadas difieren si $x(t) \neq 0$ para $t < 0$. Puesto $x(t)u(t)$ es una señal derecha, su ROC es siempre un semiplano derecho.

Cuando ocurren singularidades en el instante $t(0)$, entonces se acostumbra especificar si estas se deben considerar, en cuyo caso se integra desde cero por la izquierda, lo que se indica con 0^- , o si se desea ignorar dicha singularidad se integra desde 0^+ . Usualmente si no hay indicación explícita respecto a la inclusión o no del cero se asume 0^- . Esto es de fundamental importancia por ejemplo para el cálculo de la transformada del delta Dirac $\delta(t)$.

Tabla 4.3: Transformadas Unilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s
1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sigma > -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\sigma > -a$
$\delta(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	todo s
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\sigma > -a$
$\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$	s^n	todo s

La tabla 4.3 muestra las transformadas unilaterales de algunas funciones elementales. Nótese que estas funciones equivalen a las funciones causales de la tabla 4.2 de la página 216, solo que ahora no es necesario multiplicarlas por $u(t)$ al estar esto implícito en el índice inferior de integración de la transformada.

4.2.1 Propiedades

Las propiedades de la transformada unilateral de Laplace se resumen en la tabla 4.4. Algunas de ellas son idénticas a sus contrapartes en la transformada bilateral, pero otras difieren considerablemente. Todas aquellas propiedades que conducen a una región de convergencia igual a un semiplano izquierdo del plano s no tienen equivalencia en la transformada unilateral, puesto que ésta última permite únicamente semiplanos derechos

en su ROC. Es por ello que propiedades como inversión, o escalado en el tiempo con magnitudes negativas no tienen equivalente en la transformada unilateral.

Tabla 4.4: Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t) = x(t)u(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t) = x_1(t)u(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t) = x_2(t)u(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau} X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Escalamiento en el tiempo	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} x\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$\geq R$
Diferenciación múltiple	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} x^{(i-1)}(0^-)$	
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
Integración	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$
Teorema de valor inicial	$x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	
Teorema de valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	

Las operaciones aritméticas utilizadas en la ROC se refieren a operaciones aplicadas a cada uno de los elementos de la región. Así por ejemplo $R + s_0$ denota en realidad $\{s \mid s = r + s_0, r \in R\}$. El símbolo “ \geq ” en la ROC implica que la región es *al menos* la indicada.

Linealidad

Sean las funciones en el dominio del tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y sus respectivas transformadas unilaterales de Laplace

$$\begin{aligned} x_1(t) \circ \bullet X_1(s), \quad \text{ROC: } R_1 \\ x_2(t) \circ \bullet X_2(s), \quad \text{ROC: } R_2 \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ \bullet \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s), \quad \text{ROC: } R_1 \cap R_2$$

Esto se puede demostrar utilizando la propiedad de linealidad del operador de integración.

Desplazamiento temporal y en el dominio s

El desplazamiento temporal de una señal $x(t)$ puede tener implicaciones en la causalidad de $x(t)$ y por tanto debe tratarse con cuidado cuando se manejan desplazamientos con la transformada unilateral de Laplace.

Si $x(t)$ es causal, es decir $x(t) = x(t)u(t)$, entonces un atraso en el tiempo de $x(t)$ puede expresarse utilizando la propiedad

$$x(t - \tau) \circ \bullet e^{-s\tau} X(s)$$

donde τ debe ser mayor que cero. Esto se demuestra del mismo modo que para la transformada bilateral y la transformada de Fourier.

Si $x(t)$ no es causal, el retraso en el tiempo hace que aparezca un nuevo segmento de $x(t)$ en el intervalo $[0, \tau]$, no considerado en la transformación unilateral de $x(t)$. En este caso se debe agregar la transformada para ese nuevo término finito:

$$x(t - \tau) \circ \bullet e^{-s\tau} X(s) + \mathcal{L}_u \{x(t - \tau)u(\tau - t)u(t)\}$$

donde $u(\tau - t)u(t)$ es una ventana rectangular que recorta el segmento no considerado de $x(t)$.

Un adelanto en el tiempo puede causar que parte de $x(t)$ sea desplazado antes del instante $t = 0$, lo que no sería considerado por la transformada unilateral. Utilizando la definición:

$$\mathcal{L}_u \{x(t + \tau)\} = \int_0^{\infty} x(t + \tau)e^{-st} dt$$

y con $\xi = t + \tau$, $d\xi = dt$

$$\begin{aligned} &= \int_{\tau}^{\infty} x(\xi)e^{-s(\xi-\tau)} d\xi = e^{s\tau} \int_{\tau}^{\infty} x(\xi)e^{-s\xi} d\xi \\ &= e^{s\tau} \left[\int_0^{\infty} x(\xi)e^{-s\xi} d\xi - \int_0^{\tau} x(\xi)e^{-s\xi} d\xi \right] \\ &= e^{s\tau} [X(s) - \mathcal{L}_u \{x(t)u(t)u(\tau - t)\}] \end{aligned}$$

lo que indica que debe eliminarse la componente correspondiente al segmento desplazado antes de $t = 0$.

Un desplazamiento en el dominio s tiene un efecto idéntico al caso de la transformada bilateral, puesto que no causa ninguna alteración en la causalidad de la señal $x(t)$:

$$e^{s_0 t} x(t) \circ \bullet X(s - s_0)$$

donde la región de convergencia se desplaza en s_0 .

Ejemplo 4.16 Calcule la transformada unilateral de Laplace de una función periódica $x(t)$.

Solución: Asíumase que

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{para } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es una función finita causal igual al primer periodo T de la función $x(t)$. Se cumple entonces que

$$x(t)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(t - nT)$$

y la transformada unilateral de Laplace es, utilizando la propiedad de desplazamiento y de linealidad

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u \{x(t)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_u \{\hat{x}(t - nT)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \mathcal{L}_u \{\hat{x}(t)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \hat{X}(s) = \hat{X}(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \end{aligned}$$

Utilizando el resultado del problema 2.63 con $z = e^{-sT}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-snT} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sNT}}{1 - e^{-sT}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \end{aligned}$$

para $\text{Re}\{s\} = \sigma > 0$, con lo que finalmente se obtiene

$$\mathcal{L}_u \{x(t)\} = \frac{\hat{X}(s)}{1 - e^{-sT}}$$

4.16

Conjugación

Al igual que con la transformada bilateral se cumple

$$x^*(t) \circ \bullet X^*(s^*)$$

y por tanto para funciones $x(t)$ reales se cumple que si p es un polo complejo con parte imaginaria diferente de cero, entonces p^* también lo es. Obsérvese que la relación $X(s) = X^*(s^*)$ para funciones reales indica que si se hace un corte paralelo al eje $j\omega$ de la superficie correspondiente a $|X(s)|$, entonces la función en ese corte presenta simetría par. Por otro lado, la fase tiene un comportamiento impar en los cortes paralelos al eje $j\omega$.

Escalamiento en el tiempo

A diferencia de la transformada bilateral, donde el escalamiento temporal puede realizarse con cualquier valor real, positivo o negativo, en la transformada unilateral solo tiene sentido utilizar valores positivos, puesto que un escalamiento por un valor negativo implica una inversión temporal, que convierte señales derechas en señales izquierdas, las cuales no tienen representación válida si se ignora todo instante $t < 0$. Para todo $a > 0$ se cumple entonces

$$x(at) \circ \bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Si $X(s)$ es una función racional, entonces el escalado en el tiempo produce que los polos cambien su componente real, desplazando también la región de convergencia, tal y como sucede con la transformada bilateral.

Convolución

La diferencia fundamental de la propiedad de convolución en el caso de la transformada unilateral es la restricción de que las dos funciones involucradas en la operación deben ser causales, es decir

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet X_1(s)X_2(s)$$

siempre y cuando $x_1(t) = x_2(t) = 0$, para todo t menor que cero. De no ser así, en el dominio s aparecen nuevos términos producidos por los segmentos de las señales que ocurren antes de $t = 0$.

Diferenciación

Una de las propiedades más poderosas de la transformada unilateral de Laplace es la diferenciación, que permite incorporar condiciones iniciales en la solución de ecuaciones diferenciales. Si $x(t)$ tiene como transformada unilateral $X(s)$, y $x(t)$ es continua en $x(0)$ y su derivada es de orden exponencial entonces

$$\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) e^{-st} dt$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} &= x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= sX(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

Para la segunda derivada se cumple

$$\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} x(t) e^{-st} dt$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned}
 &= e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt \\
 &= - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} + s \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} \\
 &= s^2 X(s) - sx(0^-) - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-}
 \end{aligned}$$

y para ordenes superiores esto se generaliza en

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_u \left\{ \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right\} &= s^n X(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} x^{(1)}(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-) \\
 &= s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} x^{(i-1)}(0^-)
 \end{aligned}$$

donde

$$x^{(n)}(0^-) = \frac{d^n}{dt^n} x(t) \Big|_{t=0^-}$$

Integración

Puesto que el uso de la transformada unilateral se restringe al manejo de funciones causales, la propiedad de integración difiere al caso de la transformada bilateral, en la cual se debía considerar que $x(t)$ podría ser diferente de cero para $t < 0$. En el actual caso, si $x(t)$ es causal, entonces se cumple

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \circ \bullet X(s)U(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

donde debe notarse que la integración se realiza ahora a partir de 0^- .

Teoremas de valor inicial y valor final

Sea $x(t)$ una función causal, es decir, $x(t) = x(t)u(t)$, y sin valores singulares en el origen, como el impulso o su derivada. El teorema del valor inicial establece que

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

Para demostrarlo se parte del hecho que

$$\mathcal{L}_u \left\{ \frac{d}{dt} x(t) \right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = sX(s) - x(0^-)$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0^-)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt
 \end{aligned}$$

Si $x(t)$ es discontinua en 0 entonces en la vecindad de 0 esta función puede aproximarse por $[x(0^+) - x(0^-)]u(t)$ y su derivada será $[x(0^+) - x(0^-)]\delta(t)$. Por ello, para el primer término se cumple

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} [x(0^+) - x(0^-)] \delta(t) dt = x(0^+) - x(0^-)$$

Por otro lado, como la transformada unilateral de $dx(t)/dt$ existe, entonces debe ser de orden exponencial y en la ROC

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = 0$$

con lo que finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0^-)] &= x(0^+) - x(0^-) \\ \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) &= x(0^+) \end{aligned}$$

Ahora, si $x(t)$ es continua en 0 entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{0^+} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = 0$$

y puesto que $x(0^+) = x(0^-)$ se tiene también

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(0^-)] &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) &= x(0^+) \end{aligned}$$

El problema 4.29 presenta otra alternativa para demostrar este teorema.

El teorema del valor final indica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

lo que se puede demostrar también a través de la propiedad de diferenciación:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(0^-)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} x(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t) dt = x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^-) \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

4.2.2 Ecuaciones diferenciales

Los principios utilizados en la solución de ecuaciones diferenciales con la transformada bilateral de Laplace pueden ser aplicados con la versión unilateral. Puesto que el equivalente en el dominio s de las derivadas contiene términos de $x(t)$ y sus derivadas evaluados en $t = 0$, esto permite ahora incorporar condiciones iniciales en la solución.

Ejemplo 4.17 Encuentre la respuesta de un sistema LTI caracterizado por la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}y(t) + \beta y(t) = x(t)$$

bajo las condiciones iniciales

$$y(0^-) = \eta \quad \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} = \gamma$$

a la entrada $x(t) = \zeta u(t)$.

Solución: Aplicando la transformada unilateral de Laplace a ambos lados se obtiene:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} + 2\alpha [sY(s) - y(0^-)] + \beta Y(s) = X(s)$$

y reagrupando

$$Y(s) [s^2 + 2\alpha s + \beta] = X(s) + sy(0^-) + \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} + 2\alpha y(0^-)$$

de donde se obtiene

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2\alpha s + \beta} + \frac{(s + 2\alpha)y(0^-) + \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-}}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

Aquí se observa claramente que la salida tiene dos componentes: la primera depende de la entrada $X(s)$ y se conoce como respuesta forzada; la segunda está determinada por las condiciones iniciales y se conoce como respuesta natural del sistema. Si el sistema está en reposo, es decir, todas sus condiciones iniciales son cero, entonces solo presentará respuesta forzada ante la entrada. Por otro lado, si no se aplica ninguna entrada, entonces el sistema reaccionará dependiendo de las condiciones iniciales.

Para los valores iniciales dados y la entrada indicada

$$x(t) = \zeta u(t) \quad \bullet \quad X(s) = \frac{\zeta}{s}$$

se obtiene

$$Y(s) = \frac{\zeta}{s(s^2 + 2\alpha s + \beta)} + \frac{(s + 2\alpha)\eta + \gamma}{s^2 + 2\alpha s + \beta}$$

El término cuadrático fue analizado en los ejemplos 4.11 y 4.14. Aquí deben considerarse los tres casos aplicables a un sistema causal.

Si $\Delta = 0$ entonces

$$Y(s) = \eta \frac{s^2 + 2\alpha s + \frac{\gamma}{\eta}s + \frac{\zeta}{\eta}}{s(s + \alpha)^2} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \alpha} + \frac{A_3}{(s + \alpha)^2}$$

con

$$A_1 = \frac{\zeta}{\alpha^2} \quad A_2 = \eta - \frac{\zeta}{\alpha^2} \quad A_3 = \gamma + \alpha\eta - \frac{\zeta}{\alpha}$$

con lo que

$$y(t) = A_1 u(t) + A_2 e^{-\alpha t} u(t) + A_3 t e^{-\alpha t} u(t)$$

Si $\Delta > 0$ entonces a_1 y a_2 son reales y

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - a_1} + \frac{A_3}{s - a_2}$$

por lo que

$$y(t) = A_1 u(t) + A_2 e^{a_1 t} u(t) + A_3 e^{a_2 t} u(t)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\zeta}{\beta} \\ A_2 &= \frac{a_1^2 \eta - 2a_1 \alpha \eta - a_1 \gamma + \zeta}{a_1(a_1 - a_2)} \\ A_3 &= \frac{-a_2^2 \eta + 2a_2 \alpha \eta + a_2 \gamma - \zeta}{a_2(a_1 - a_2)} \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$ entonces $a_2 = a_1^*$ y $A_3 = A_2^*$ con lo que

$$y(t) = A_1 u(t) + 2|A_2| e^{-\alpha t} \cos\left(\sqrt{|\Delta|}t + \angle A_2\right) u(t)$$

4.17

4.3 Problemas

Los siguientes ejercicios están basados en [8, 14], algunos con leves modificaciones, otros nuevos para profundizar en los conceptos introducidos en este capítulo.

Problema 4.1. Encuentre la transformada de Laplace de

1. $x(t) = \cos(at)u(t)$
2. $x(t) = \operatorname{sen}(at)u(t)$
3. $x(t) = \operatorname{sa}(at)$
4. $x(t) = \operatorname{sa}(at)u(t)$

Problema 4.2. Encuentre las regiones de convergencia de las transformadas de Laplace de las siguientes funciones

1. $e^{-3t}u(t)$
2. $e^{-3t}u(-t+3)u(t+3)$
3. $e^{-3|t|}$
4. $e^{-3t}u(-t)$
5. e^{-3t}
6. $e^{-3|t|}u(-t)$

Problema 4.3. Dada la señal

$$x(t) = e^{-3t}u(t-1)$$

Encuentre su transformada de Laplace $X(s)$ y su región de convergencia.

Si

$$g(t) = Ae^{-3t}u(-t-t_0)$$

entonces encuentre los valores de A y t_0 para los cuales la expresión algebraica de $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = X(s)$. Indique la región de convergencia de $G(s)$

Problema 4.4. Dada la señal

$$x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-\beta t}u(t)$$

encuentre su transformada de Laplace y los valores de $\beta \in \mathbb{C}$ necesarios para que la región de convergencia de $X(s)$ sea $\sigma > -1$.

Problema 4.5. Encuentre los polos y región de convergencia de la transformada de Laplace de la función

$$x(t) = e^t \operatorname{sen}(2t)u(-t)$$

Problema 4.6. Grafique las funciones

1. $e^{\alpha t}u(t)$ para $\alpha > 0$
2. $e^{\alpha t}u(t)$ para $\alpha < 0$

3. $e^{-\alpha t}u(t)$ para $\alpha > 0$
4. $e^{-\alpha t}u(t)$ para $\alpha < 0$
5. $e^{\alpha t}u(-t)$ para $\alpha > 0$
6. $e^{\alpha t}u(-t)$ para $\alpha < 0$
7. $e^{-\alpha t}u(-t)$ para $\alpha > 0$
8. $e^{-\alpha t}u(-t)$ para $\alpha < 0$

Problema 4.7. Encuentre la transformada de Laplace de la función $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ si

$$x_1(t) \circ \bullet X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1$$

$$x_2(t) \circ \bullet X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{ROC: } \sigma > -1$$

Problema 4.8. Encuentre la transformada de Laplace de $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x_1(t) = e^{at}u(t)$$

$$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$$

si $a \in \mathbb{R}$.

Problema 4.9. Utilizando la propiedad de desplazamiento en el dominio s encuentre la transformada de Laplace de $x(t) \cos(\omega_0 t)$ si $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$.

Problema 4.10. Utilizando las demostraciones de las propiedades de la transformada de Fourier como referencia, demuestre todas las propiedades de la transformada de Laplace.

Problema 4.11. Demuestre que si Γ representa el arco circular en el contorno de Bromwich (figura 4.5), entonces, si se cumple sobre dicho contorno

$$|X(s)| < \frac{\kappa}{R^n}$$

con las constantes $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$, y $n \in \mathbb{N}^+$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} X(s) e^{st} ds = 0$$

Problema 4.12. Demuestre que en la descomposición en fracciones parciales de un polo de orden $n > 1$ los coeficientes A_{ik} están dados por

$$A_{ik} = \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{(n-k)}}{ds^{(n-k)}} [(s-a_i)^n X(s)]$$

Problema 4.13. Demuestre que si $X(s)$ es una función racional propia, entonces si tiene un par de polos complejos conjugados $a_i = a_k^*$, entonces los coeficientes correspondientes también son complejos conjugados, es decir $A_i = A_k^*$.

Problema 4.14. Demuestre que un par de polos simples complejos conjugados con la expresión algebraica de Transformada de Laplace:

$$X(s) = \frac{A}{s - p_1} + \frac{A^*}{s - p_1^*}$$

corresponde a las expresiones en el tiempo continuo dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= 2|A|e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \angle A) \\ &= 2 \operatorname{Re}\{A\}e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) - 2 \operatorname{Im}\{A\}e^{\sigma_1 t} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \end{aligned}$$

donde $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$, y se ha asumido que la región de convergencia es el semiplano derecho $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$.

Problema 4.15. En el ejemplo 4.11 se trataron diferentes posibilidades de transformadas inversas para un término de orden cuadrático sin ceros finitos. Indique cuál región de convergencia no ha sido considerada y determine la función en el tiempo equivalente.

Problema 4.16. Demuestre que en un sistema LTI la función $x(t) = e^{s_0 t}$ es también una función propia, con $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$. (Ayuda: utilice para ello la equivalencia de la transformada de Laplace como transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$)

Problema 4.17. Encuentre el número y ubicación de ceros y polos, finitos e infinitos, de las siguientes expresiones algebraicas de transformadas de Laplace.

$$1. \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \qquad 2. \frac{s+1}{s^2-1} \qquad 3. \frac{s^3-1}{s^2+s+1}$$

Problema 4.18. Se sabe que una señal $x(t)$ es absolutamente integrable, y su transformada de Laplace tiene un polo en $s = 2$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, y las razones para ello.

1. $x(t)$ es de duración finita
2. $x(t)$ puede ser izquierda
3. $x(t)$ puede ser derecha
4. $x(t)$ puede ser bilateral

Problema 4.19. Cuántas señales pueden tener una transformada de Laplace con expresión algebraica

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

Problema 4.20. Si $x(t)$ es una función cuya transformada de Laplace es racional con exactamente dos polos en $s = -1$ y $s = -3$. Se sabe que para otra función $g(t) = e^{2t}x(t)$ existe su transformada de Fourier $G(j\omega)$. Indique si $x(t)$ es izquierda, derecha o bilateral.

Problema 4.21. Calcule la transformada inversa de Laplace tanto con la integral de Bromwich como por medio de descomposición en fracciones parciales de

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2 + 7s + 12}, \quad \text{ROC: } \sigma > -3$$

Problema 4.22. Para una señal $x(t)$ se conoce que

1. $x(t) = 0$ para todo $t < 0$
2. $x(k/10) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^+$
3. $x(k/20) = e^{-15}$

Indique cuáles enunciados son congruentes con la información proporcionada para $x(t)$, si $X(s)$ es su transformada de Laplace y se sabe que $X(s)$ es racional:

1. $X(s)$ tiene un solo polo finito.
2. $X(s)$ tiene solo un par de polos finito.
3. $X(s)$ tiene más de dos polos finitos

Problema 4.23. Para una señal

$$g(t) = x(t) + \alpha x(-t)$$

con $x(t) = \beta e^{-t}u(t)$, se sabe que su transformada de Laplace es

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1}, \quad -1 < \sigma < 1$$

Determine entonces los valores válidos de las constantes α y β .

Problema 4.24. Se conocen los siguientes datos de la señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

1. $x(t)$ es real y par
2. $X(s)$ tiene cuatro polos y ningún cero en el plano finito de s .
3. $X(s)$ tiene un polo en $s = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 1$

Encuentre entonces la expresión para $X(s)$ y su ROC.

Problema 4.25. Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de dos señales

derechas $x(t)$ y $y(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -2y(t) + \delta(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 2x(t)\end{aligned}$$

Encuentre $X(s)$ y $Y(s)$ junto con sus regiones de convergencia. Encuentre entonces las soluciones en el dominio del tiempo $x(t)$ y $y(t)$.

Problema 4.26. Un sistema LTI causal tiene respuesta al impulso $h(t)$. Encuentre esta respuesta si el sistema de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1 + \alpha)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \alpha(\alpha + 1)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2y(t) = x(t)$$

Determine además para qué valores de α el sistema es estable.

Si

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(t)$$

indique cuántos polos tiene su transformada de Laplace $G(s)$.

Problema 4.27. Analice la existencia de la transformada de Laplace bilateral de las funciones $x(t) = 1$, $x(t) = \text{sen}(\omega t)$ y $x(t) = \text{cos}(\omega t)$.

Problema 4.28. Sea

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{-2at+1}u(t+1)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

1. Determine las transformadas bilateral y unilateral de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.
2. Calcule la transformada bilateral inversa del producto $\mathcal{L}_b\{x_1(t)\}\mathcal{L}_b\{x_2(t)\}$ para encontrar $g(t) = x_1(t) * x_2(t)$
3. Calcule la transformada unilateral inversa del producto $\mathcal{L}_u\{x_1(t)\}\mathcal{L}_u\{x_2(t)\}$ y compare con el resultado obtenido para $g(t)$.

Problema 4.29. Demuestre el teorema del valor inicial

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

para $x(t) = x(t)u(t)$ (es decir, $x(t)$ causal).

Para ello exprese primero $x(t)$ como serie de Taylor centrada en $t = 0^+$. Luego, determine la transformada de Laplace para cada término

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=0^+} = \frac{t^n}{n!} u(t)$$

Demuestre entonces que

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=0^+} \frac{1}{s^{n+1}}$$

a partir de lo cual se puede demostrar el teorema.

Problema 4.30. Encuentre la transformada unilateral de Laplace para

1. $x(t) = e^{-2t}u(t+1)$
2. $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$
3. $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$

Problema 4.31. Resuelva utilizando la transformada unilateral de Laplace la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 8\cos(t)$$

si $x(t) = dx(t)/dt = 0$ en $t = 0$.

Problema 4.32. Resuelva utilizando la transformada unilateral de Laplace la ecuación diferencial

$$5\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 6$$

si $x(t) = 1$ y $dx(t)/dt = 1$ en $t = 0$.

