APÉNDICE B

Método de desarrollo en fracciones simples

Antes de presentar la aproximación de MATLAB para el cálculo de desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia, se presenta la aproximación manual para calcular desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia.

Desarrollo en fracciones simples cuando *F*(*s*) sólo contiene polos distintos. Considérese $F(s)$ escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \qquad \text{para } m < n$$

donde $p_1, p_2, ..., p_n$ y $z_1, z_2, ..., z_m$ son cantidades reales o complejas, pero para cada p_i o z_j complejo se tendrá el complejo conjugado de p_i o z_j, respectivamente. Si $F(s)$ sólo involucra polos distintos, puede expandirse en una suma de fracciones simples del modo siguiente:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \tag{B-1}$$

donde a_k ($k = 1, 2, ..., n$) son constantes. El coeficiente a_k se denomina *residuo* del polo en $s = -p_k$. El valor de a_k se calcula multiplicando ambos miembros de la Ecuación (B-1) por $(s + p_k)$ y suponiendo que $s = -p_k$; esto conduce a

$$\begin{aligned}\left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k} &= \left[\frac{a_1}{s + p_1}(s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2}(s + p_k)\right.\\ &\qquad \left. + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k}(s + p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_k)\right]_{s=-p_k}\\ &= a_k\end{aligned}$$

Se observa que todos los términos expandidos se cancelan, con excepción de a_k. Por tanto, el residuo a_k se calcula a partir de

$$a_k = \left[(s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

Obsérvese que, como $f(t)$ es una función real del tiempo, si p_1 y p_2 son complejos conjugados, en tal caso los residuos a_1 y a_2 también son complejos conjugados. Sólo necesita evaluarse uno de los conjugados, a_1 o a_2, porque el otro se conoce automáticamente.

Como

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$ se obtiene así:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

EJEMPLO B-1 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

El desarrollo en fracciones simples de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

donde a_1 y a_2 se encuentran mediante

$$a_1 = \left[(s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{s+2} \right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right]_{s=-2} = \left[\frac{s+3}{s+1} \right]_{s=-2} = -1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} \right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2} \right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO B-2 Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$$

Aquí, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el polinomio del denominador, se debe dividir el numerador entre el denominador.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Observe que la transformada de Laplace de la función impulso $\delta(t)$ es 1 y que la transfomada de Laplace de $d\delta(t)/dt$ es s. El tercer término del lado derecho de esta última ecuación es $F(s)$ en el Ejemplo B-1. Por tanto, la transformada inversa de Laplace de $G(s)$ se obtiene como

$$g(t) = \frac{d}{dt}\,\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0-$$

EJEMPLO B-3 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Observe que el polinomio del denominador se puede factorizar como

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$$

Si la función $F(s)$ contiene un par de polos complejos conjugados, es conveniente no expandir $F(s)$ en las fracciones simples usuales, sino en la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

Observando que $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$ y utilizando las transformadas de Laplace de $e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ y $e^{-\alpha t}\cos\omega t$, reescritas por tanto,

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

la $F(s)$ dada se escribe como una suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} \\ &= 5\,\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2\,\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t + 2e^{-t}\cos 2t, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Desarrollo en fracciones simples cuando $F(s)$ contiene polos múltiples. En lugar de analizar el caso general, se utilizará un ejemplo para mostrar cómo obtener el desarrollo en fracciones simples de $F(s)$.

Considérese la siguiente $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

El desarrollo en fracciones simples de esta $F(s)$ contiene tres términos:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s + 1} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_3}{(s + 1)^3}$$

donde b_3, b_2 y b_1 se determinan del modo siguiente. Si se multiplican ambos miembros de esta última ecuación por $(s+1)^3$, se tiene que

$$(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3 \tag{B-2}$$

Por tanto, si se supone que $s = -1$, la Ecuación (B-2) da por resultado:

$$\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3$$

Asimismo, la diferenciación de ambos miembros de la Ecuación (B-2) con respecto a s da

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1(s+1) \tag{B-3}$$

Si se supone que $s = -1$ en la Ecuación (B-3), entonces,

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2$$

Diferenciando ambos miembros de la Ecuación (B-3) con respecto a s, resulta

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1$$

A partir del análisis precedente, se observa que los valores de b_3, b_2 y b_1 se encuentran sistemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
b_3 &= \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} \\
&= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left\{\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\
&= \left[\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1} \\
&= (2s+2)_{s=-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\
&= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1} \\
&= \frac{1}{2}(2) = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] \\ &= e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t} \\ &= (1+t^2)e^{-t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Comentarios. Para funciones complicadas con denominadores que contienen polinomios de orden superior, un desarrollo en fracciones simples puede llevar mucho tiempo. En tal caso, se recomienda el uso de MATLAB.

Desarrollo en fracciones simples con MATLAB. MATLAB tiene una orden para obtener el desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$ Considérese la función de transferencia $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

donde algunos a_i y b_j pueden ser cero. En MATLAB, los vectores fila num y den especifican los coeficientes del numerador y del denominador en la función de transferencia. Es decir,

```
num = [b0 b1 ... bn]
den = [1 a1 ... an]
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

encuentra los residuos (`r`), los polos (`p`) y los términos directos (`k`) de una desarrollo en fracciones simples del cociente de dos polinomios $B(s)$ y $A(s)$.

El desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s) \tag{B-4}$$

Comparando las Ecuaciones (B-1) y (B-4), se observa que $p(1) = -p_1$, $p(2) = -p_2$, ..., $p(n) = -p_n$; $r(1) = a_1$, $r(2) = a_2$, ..., $r(n) = a_n$. [$k(s)$ es un término directo.]

EJEMPLO B-4 Considere la siguiente función de transferencia:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para esta función,

```
num=[2 5 3 6]
den=[1 6 11 6]
```

La orden

```
[r,p,k]=residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
[r,p,k]=residue(num,den)
r=

   -6.0000
   -4.0000
    3.0000

p=

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000

k=
   2
```

(Observe que los residuos se devuelven en el vector columna r, las posiciones de los polos en el vector columna *p* y el término directo en el vector fila *k*). Esta es la representación en MATLAB del siguiente desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Observe que si $p(j) = p(j+1) = \cdots = p(j+m-1)$ [esto es, $p_j = p_{j+1} = \cdots = p_{j+m-1}$], el polo $p(j)$ es un polo de multiplicidad m. En este caso, el desarrollo incluye términos en la forma

$$\frac{r(j)}{s-p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s-p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j+m-1)}{[s-p(j)]^m}$$

Consúltense los detalles en el Ejemplo B-5.

EJEMPLO B-5 Obtenga el desarrollo $B(s)/A(s)$ siguiente en fracciones simples utilizando MATLAB.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para esta función, se tiene

```
num = [1 2 3]
den = [1 3 3 1]
```

La orden

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
num = [1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r,p,k] = residue(num,den)
r =

    1.0000
    0.0000
    2.0000

p =

   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000

k =

  []
```

Es la representación en MATLAB del desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{0}{(s + 1)^2} + \frac{2}{(s + 1)^3}$$

Observe que el término directo `k` es cero.