

Matemática para Ingeniería Electromecánica

Unidad N° 2: Transformada de Laplace

Martín A. Alarcón

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

22 de abril de 2025

Motivación

- 👉 **Dar solución** a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de coeficientes constantes.
- 👉 **Modelar** sistemas utilizando el concepto de función de transferencia para modelos lineales invariantes en el tiempo (LTI).
- 👉 **Caracterizar** un sistema a través del modelo matemático LTI.

Herramienta matemática

Constituye el sustento matemático principal para el desarrollo de estrategias para el **análisis de señales** y **teoría de control clásico**.

Un poco de historia ...



(a) Oliver Heaviside (1850-1925)



(b) Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Transformada de Laplace

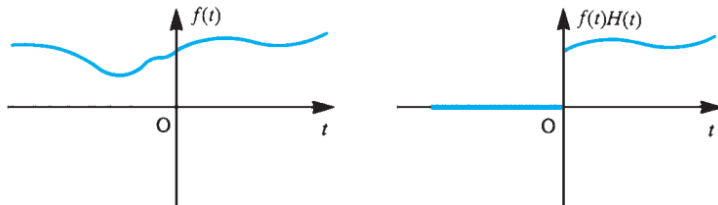
- El símbolo $\mathcal{L}\{\cdot\}$ denota el operador transformada de Laplace.
- Notar que el límite superior de la integral es ∞ , por lo que, se tiene un ejemplo de una integral impropia:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (2)$$

- El límite inferior de integración es cero, por lo tanto, el comportamiento de $f(t)$ para valores negativos de t es ignorado.

Transformada de Laplace

Una **función causal** $f(t)$, es cuando sus valores sólo están definidos para $t \geq 0$
o $f(t) = 0$ si $t < 0$.



Función escalón unitario de Heaviside:

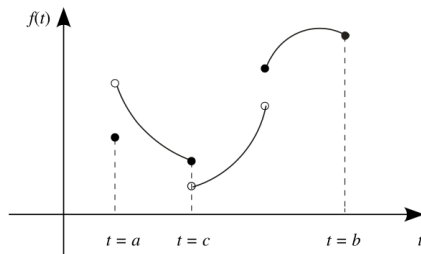
$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Existencia de la Transformada de Laplace

Definición (Función continua por partes)

Se dice que una función $f(t)$ es continua por partes en el intervalo $a \leq t \leq b$ si $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de intervalos colineales de modo que:

- $f(t)$ sea continua en el interior de cada uno de estos intervalos.
- $f(t)$ tenga límite lateral finito cuando t tienda a cada punto extremo.



Existencia de la Transformada de Laplace

Definición (Función de orden exponencial)

Una función $f(t)$ es de orden exponencial cuando $t \rightarrow \infty$ si existen constantes *reales* arbitrarias y positivas M y σ tales que

$$|f(t)| < Me^{\sigma t}. \quad (5)$$

Definición (Existencia de la Transformada de Laplace)

Si la función $f(t)$ es continua o seccionalmente continua en todo intervalo finito para $t \geq 0$ y de orden exponencial cuando $t \rightarrow \infty$, entonces existe la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Existencia de la Transformada de Laplace

Definición (Abscisa de convergencia)

Dada $f(t)$ arbitraria, existe una abscisa de convergencia absoluta σ_c tal que la transformada de Laplace de $f(t)$ es absolutamente convergente para $s > \sigma_c$ ($s \in \mathbb{R}$) y la convergencia absoluta falla cuando $s < \sigma_c$.

Corolario

Notar que si $\sigma_c = \infty$ entonces no hay convergencia absoluta, mientras que si $\sigma_c = -\infty$ la convergencia es para todo s .

Propiedades



Nos sirven para encontrar transformadas de funciones por medio de las transformaciones elementales (tablas de transformada) sin tener que calcularlas directamente usando su definición.

Propiedad de linealidad

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones que tienen transformadas de Laplace, y si a y b dos constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathcal{L} \{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L} \{f(t)\} + b\mathcal{L} \{g(t)\}$$

Propiedades

Primer teorema del desplazamiento (traslación del eje s)

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$ y existe para $s > a + \alpha$.

Derivada de la transformada

Dada una $f(t)$ y $f'(t)$ continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para $t \geq 0$ luego, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > \alpha$, y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Corolario

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Propiedades

Multiplicación por t^n

Dada una $f(t)$ continua o seccionalmente continua y de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{\partial^n F(s)}{\partial s^n}, \quad \text{con } n \in \mathbb{R}^+ \text{ y } F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\}.$$

Cambio de escala

$$\mathcal{L} \{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\}.$$

Propiedades

División por t

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(u) du, \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\}.$$

Segundo teorema del desplazamiento (traslación del eje t)

Si $\mathcal{L} \{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$\mathcal{L} \{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

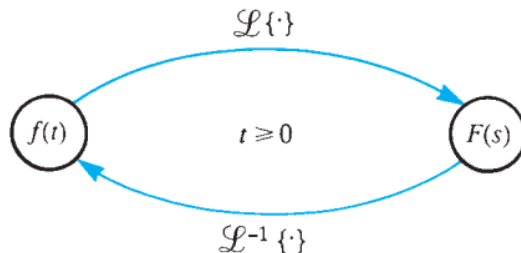
con $a > 0$, existe para $s > a + \alpha$.

Transformada inversa

Definición

El símbolo $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ denota una función causal $f(t)$ cuya transformada de Laplace es $F(s)$, por lo que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$



Transformada inversa (algunas propiedades)

Propiedad de linealidad

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, y si a y b dos constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Primer teorema del desplazamiento

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at}f(t)$$

Cambio de escala

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Transformada inversa de expresiones: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

¿Cómo determinar $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s} \right\}$?

Método de desarrollo en fracciones simples

1. Cuando $F(s)$ sólo tiene polos distintos:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

2. Cuando $F(s)$ tiene polos múltiples $\Rightarrow$ Ejemplo:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{(s+1)^3}$$

Transformada inversa de expresiones: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

☞ Desarrollo en fracciones simples cuando $F(s)$ sólo tiene polos distintos:

Ejemplo

Encontrar:

1.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+3)(s-2)} \right\}$$

2.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s} \right\}$$

Transformada inversa de expresiones: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

☞ Desarrollo en fracciones simples cuando $F(s)$ tiene polos múltiples:

Ejemplo

Encontrar:

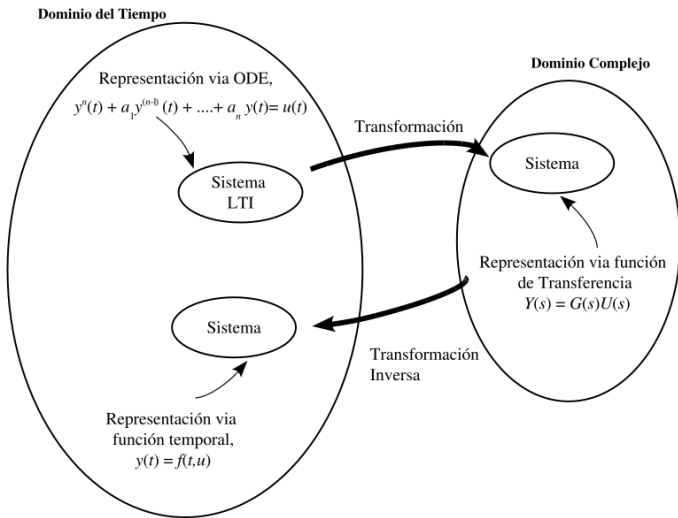
1.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} \right\}$$

2.

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{s^5 - 2s^4 + s^3} \right\}$$

Solución de ecuaciones diferenciales



Transformada de derivadas

👉 RECORDEMOS !!

Derivada de la transformada

Dada una $f(t)$ y $f'(t)$ continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para $t \geq 0$ luego, $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}$ existe para $s > \alpha$, y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Corolario

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Transformada de integrales

Transformada de una integral

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t i(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

Ejemplo

La corriente i en un circuito eléctrico en serie que consiste de una resistencia R , una inductancia L y una capacitancia C , y sujeto a un voltaje aplicado E está dada por:

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + iR + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E$$

Solución de ecuaciones diferenciales

👉 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes

Forma general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$a \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + b \frac{\partial x}{\partial t} + cx = u(t) \quad t \geq 0, \quad (6)$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

👉 Sistema lineal invariante en el tiempo (LTI)

Solución de ecuaciones diferenciales

Aplicando la transformada de Laplace a cada término:

$$a \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) + b \mathcal{L} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) + c \mathcal{L} \{x\} = \mathcal{L} \{u(t)\},$$

utilizando las propiedades de la transformada:

$$a [s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b [sX(s) - x(0)] + cX(s) = U(s),$$

así que:

$$X(s) = \frac{U(s) + (as + b)x_0 + av_0}{as^2 + bs + c} \rightsquigarrow \left[\overbrace{G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{as + b}{as^2 + bs + c}}^{\text{Función de transferencia}} \right]$$

Solución de ecuaciones diferenciales

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial x}{\partial t} + 6x = 2e^{-t} \quad t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 6 \frac{\partial x}{\partial t} + 9x = \sin t \quad t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejemplo

Resolver para $t \geq 0$ las ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden:

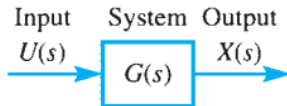
$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + 5x + 3y &= e^{-t} \\ 2\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + x + y &= 3\end{aligned}$$

sujetas a las condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $y(0) = 1$

Definiciones

Un sistema lineal invariante en el tiempo caracterizado por la ecuación:

$$a_n \frac{\partial^n x}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} x}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_0 x = b_m \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \cdots + b_0 u$$



$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} \quad (n \geq m)$$

Definiciones

Definición (Ecuación característica)

La ecuación $Q(s) = 0$ es llamada la **ecuación característica** del sistema, su orden determina el **orden del sistema** y sus raíces son los **polos** de la función de transferencia. A si mismo, las raíces de $P(s) = 0$ representan los **ceros** de la función.

Corolario

Una función de transferencia caracteriza la dinámica del sistema, pero no proporciona información en relación a la estructura física real del sistema, de hecho sistemas que son físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia.

Ejemplo

La respuesta $x(t)$ de un sistema a una función de fuerza $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial:

$$9\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 12\frac{\partial x}{\partial t} + 13x = 2\frac{\partial u}{\partial t} + 3u,$$

- Determine su función de transferencia
- Proporcione la ecuación característica del sistema y el orden del mismo.
- Determine los polos y los ceros de la función de transferencia e ilústrellos en el plano complejo.

Respuesta al impulso

La respuesta de un sistema a una entrada está determinada por:

$$X(s) = G(s)U(s),$$

si la entrada $u(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$ entonces la respuesta es:

$$X(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}\{\delta(t)\} = G(s)$$

Definición (Respuesta al impulso: $h(t)$)

La respuesta al impulso de un sistema LTI es la respuesta a $\delta(t)$ en el tiempo $t = 0$ con todas las condiciones iniciales iguales a cero, por lo que $\mathcal{L}\{h(t)\} = G(s)$.

Teoremas del valor inicial y del valor final

Definición (Teorema del valor inicial)

Si a $f(t)$ y $f'(t)$ se les puede aplicar la transformada de Laplace y si $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ existe, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Definición (Teorema del valor final)

Si a $f(t)$ y $f'(t)$ se les puede aplicar la transformada de Laplace y si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Estabilidad

Estabilidad ...

A entradas acotadas se producen salidas acotadas.

$$X(s) = G(s)U(s) \quad \wedge \quad G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (8)$$

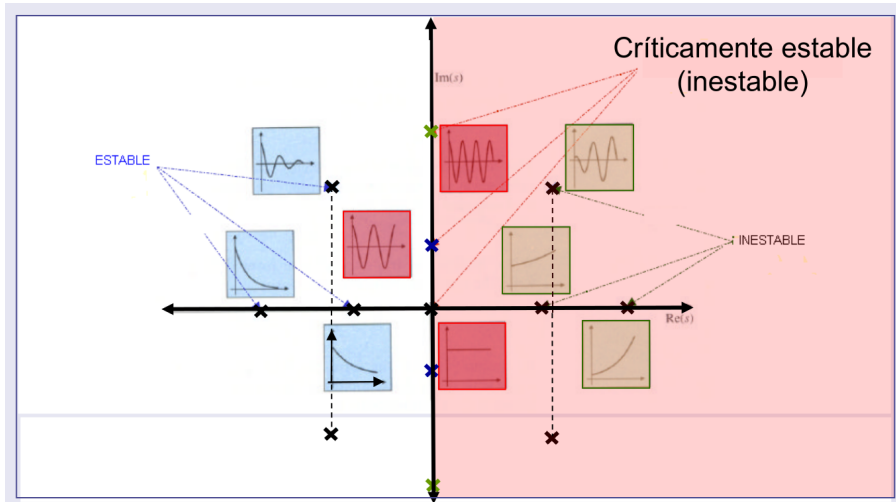
👉 Está relacionada a los polos de la función de transferencia:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (9)$$

Definición

Un sistema lineal causal invariante en el tiempo físicamente realizable con función de transferencia $G(s)$ es estable siempre que todos los polos de $G(s)$ estén en la mitad izquierda del plano s . (Es decir si $s = x + iy \Rightarrow x < 0$)

Estabilidad



Sistema SISO (Single-input–single-output)

Un sistema SISO caracterizado por la ecuación diferencial lineal de orden n :

$$a_n \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\partial y}{\partial t} + a_0 y(t) = u(t), \quad (10)$$

se introducen n variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ definidas como:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{x}_1(t)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t) = \frac{\partial y^{n-2}}{\partial t^{n-2}} = \dot{x}_{n-2}(t)$$

$$x_n(t) = \frac{\partial y^{n-1}}{\partial t^{n-1}} = \dot{x}_{n-1}(t)$$

Sistema SISO (Single-input–single-output)

Donde sustituyendo en la Eq.(10) se tiene:

$$a_n \dot{x}_n + a_{n-1} x_n + a_{n-2} x_{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = u(t)$$

y despejando $\dot{x}_n$

$$\dot{x}_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1} - \dots - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \frac{a_0}{a_n} x_1 + \frac{1}{a_n} u$$

Sistema SISO (Single-input–single-output)

Entonces la Eq. (10) puede ser representada por un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u$$

Sistema SISO (Single-input–single-output)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \frac{-a_2}{a_n} & \dots & \frac{-a_{n-2}}{a_n} & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definiciones

Definición (Modelo en espacio de estados para sistemas SISO)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u$$

Definición (Modelo en espacio de estados para sistemas MIMO)

MIMO: Multi-input–multi-output.

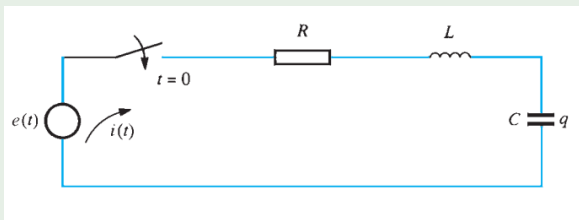
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

Circuitos eléctricos

Ejemplo

El circuito RLC está formado por un resistor R , un capacitor C y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $e(t)$. Antes de cerrar el interruptor en $t = 0$, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente resultante $i(t)$ en el tiempo t , sabiendo que $R = 160 \Omega$, $L = 1 H$, $C = 10^{-4} F$ y $e(t) = 20 V$



Referencias

-  M.R. Spiegel.
Transformada de Laplace.
McGraw Hill. Serie Schaum, 1991.
-  G. James, D. Burley, P. Dyke, D. Clements, N. Steele, and J. Wright.
Advanced Modern Engineering Mathematics.
Pearson Education, 2018.
-  Glyn James and David Burley.
Matemáticas avanzadas para ingeniería.
Pearson Educación, 2002.