Matemática para Ingeniería Electromecánica

☞ Unidad N° 2: Transformada de Laplace

Martín A. Alarcón

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

10 de abril de 2025

Índice

Motivación

- ☞ **Dar solución** a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de coeficientes constantes.
- ☞ **Modelar** sistemas utilizando el concepto de función de transferencia para modelos lineales invariantes en el tiempo (LTI).
- ☞ **Caracterizar** un sistema a través del modelo matemático LTI.

Herramienta matemática

Constituye el sustento matemático principal para el desarrollo de estrategias para el **análisis de señales** y **teoría de control clásico**.

Un poco de historia ···

(a) Oliver Heaviside (1850-1925)

(b) Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

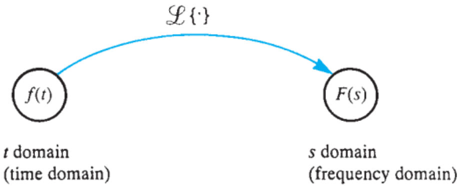
Transformada de Laplace

Definición

Definimos la Transformada de Laplace de una función $f(t)$ de variable real que está definida para $0 \leq t < \infty$ mediante la expresión:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left(f(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} F(s)\right), \tag{1}$$

siendo s una variable compleja y e^{-st} es el núcleo de la transformación.



Transformada de Laplace

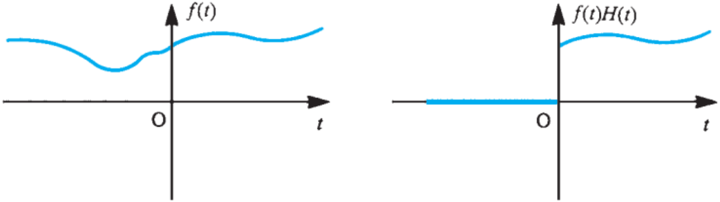
- El símbolo $\mathscr{L}\{\cdot\}$ denota el operador transformada de Laplace.
- Notar que el límite superior de la integral es ∞, por lo que, se tiene un ejemplo de una integral impropia:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

- El límite inferior de integración es cero, por lo tanto, el comportamiento de $f(t)$ para valores negativos de t es ignorado.

Transformada de Laplace

Una **función causal** $f(t)$, es cuando sus valores sólo están definidos para $t \geq 0$ o $f(t) = 0$ si $t < 0$.



Función escalón unitario de Heaviside:

$$H(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Transformada de Laplace

Definición (Transformada de Laplace Bilateral)

Definimos la Transformada de Laplace Bilateral de una función $f(t)$ mediante la expresión:

$$\mathscr{L}_B\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Corolario

Si $f(t)$ es una función causal, entonces se cumple que:

$$\mathscr{L}_B\left\{f(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Transformaciones de funciones elementales

Se utiliza la definición de Eq. (2) y se generan las **Tablas de Transformadas**.

Definición ($f(t) = c$, siendo c una constante)

$$\mathscr{L}\{c\} = \int_0^{\infty} e^{-st} c \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} c \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{e^{-st} c}{-s} \right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{e^{-sT} c}{-s} \right) + \frac{e^{-s\,0} c}{s} = 0 + \frac{c}{s} = \frac{c}{s}, \quad \text{si } s > 0 \, [\mathbb{R}e(s) > 0] \, .$$

Corolario

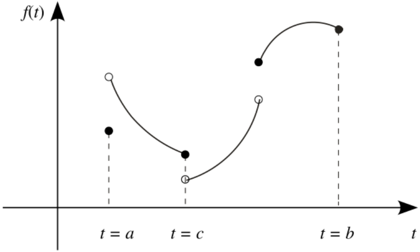
Para la función escalón unitario $H(t) = 1 \Rightarrow \mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ *para* $s > 0$.

Existencia de la Transformada de Laplace

Definición (Función continua por partes)

Se dice que una función $f(t)$ es continua por partes en el intervalo $a \leq t \leq b$ si $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de intervalos colineales de modo que:

- $f(t)$ sea continua en el interior de cada uno de estos intervalos.
- $f(t)$ tenga límite lateral finito cuando t tienda a cada punto extremo.



Existencia de la Transformada de Laplace

Definición (Función de orden exponencial)

Una función $f(t)$ es de orden exponencial cuando $t \to \infty$ si existen constantes *reales* arbitrarias y positivas M y σ tales que

$$|f(t)| < Me^{\sigma t}. \tag{5}$$

Definición (Existencia de la Transformada de Laplace)

Si la función $f(t)$ es continua o seccionalmente continua en todo intervalo finito para $t \geq 0$ y de orden exponencial cuando $t \to \infty$, entonces existe la transformada de Laplace $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Existencia de la Transformada de Laplace

Definición (Abscisa de convergencia)

Dada $f(t)$ arbitraria, existe una abscisa de convergencia absoluta σ_c tal que la transformada de Laplace de $f(t)$ es absolutamente convergente para $s > \sigma_c$ $(s \in \mathbb{R})$ y la convergencia absoluta falla cuando $s < \sigma_c$.

Corolario

Notar que si $\sigma_c = \infty$ entonces no hay convergencia absoluta, mientras que si $\sigma_c = -\infty$ la convergencia es para todo s.

Propiedades

☆☆☆

Nos sirven para encontrar transformadas de funciones por medio de las transformaciones elementales (tablas de transformada) sin tener que calcularlas directamente usado su definición.

Propiedad de linealidad

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones que tienen transformadas de Laplace, y si a y b dos constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathscr{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\}=a\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}+b\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}$$

Propiedades

Primer teorema del desplazamiento (traslación del eje s)

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$ y existe para $s > a + \alpha$.

Derivada de la transformada

Dada una $f(t)$ y $f'(t)$ continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para $t \geq 0$ luego, $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > \alpha$, y

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \quad \text{donde} \quad F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Corolario

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Propiedades

Multiplicación por t^n

Dada una $f(t)$ continua o seccionalmente continua y de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces:

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{\partial^n F(s)}{\partial s^n}, \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Cambio de escala

$$\mathscr{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{donde} \quad F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Propiedades

División po t

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u, \quad \text{donde} \quad F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}.$$

Segundo teorema del desplazamiento (traslación del eje t)

Si $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$\mathscr{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

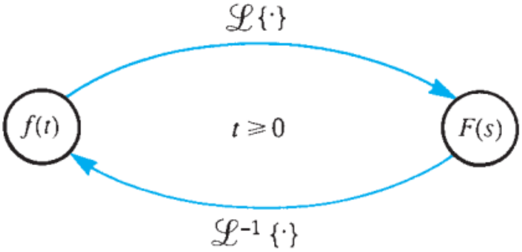
con $a > 0$, existe para $s > a + \alpha$.

Transformada inversa

Definición

El símbolo $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ denota una función causal $f(t)$ cuya transforma de Laplace es $F(s)$, por lo que:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$



Transformada inversa (algunas propiedades)

Propiedad de linealidad

Si $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = G(s)$, y si a y b dos constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{aF(s) + bG(s)\right\} = a\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} + b\mathscr{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$$

Primer teorema del desplazamiento

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at}f(t)$$

Cambio de escala

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{F(as)\right\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Transformada inversa de expresiones: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

¿Cómo determinar $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right\}$?

Método de desarrollo en fracciones simples

1. Cuando $F(s)$ sólo tiene polos distintos:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

2. Cuando $F(s)$ tiene polos múltiples $\Rightarrow$ Ejemplo:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{(s+1)^3}$$

Transformada inversa de expresiones: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

☞ Desarrollo en fracciones simples cuando $F(s)$ sólo tiene polos distintos:

Ejemplo

Encontrar:

1. $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}$$

2. $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right\}$$

Transformada inversa de expresiones: $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

☞ Desarrollo en fracciones simples cuando $F(s)$ tiene polos múltiples:

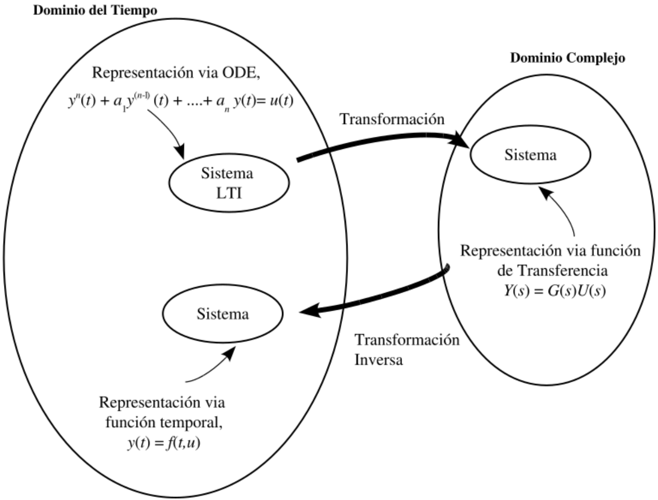
Ejemplo

Encontrar:

1. $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}\right\}$$

2. $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^5-2s^4+s^3}\right\}$$

Solución de ecuaciones diferenciales



Transformada de integrales

Ejemplo

La corriente i en un circuito eléctrico en serie que consiste de una resistencia R, una inductancia L y una capacitancia C, y sujeto a un voltaje aplicado E está dad por:

$$L\frac{\partial i}{\partial t} + iR + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = E$$

Transformada de una integral

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Solución de ecuaciones diferenciales

☞ Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes

Forma general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$a\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + b\frac{\partial x}{\partial t} + cx = u(t) \quad t \geq 0, \tag{6}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

☞ Sistema lineal invariante en el tiempo (LTI)

Solución de ecuaciones diferenciales

Aplicando la transformada de Laplace a cada término:

$$a\,\mathscr{L}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + b\,\mathscr{L}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + c\,\mathscr{L}\left\{x\right\} = \mathscr{L}\left\{u(t)\right\},$$

utilizando las propiedades de la transformada:

$$a\left[s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)\right] + b\left[s X(s) - x(0)\right] + c X(s) = U(s),$$

así que:

$$X(s) = \frac{U(s) + (as+b)\,x_0 + a v_0}{as^2 + bs + c} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\overbrace{G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(as+b)\,x_0 + a v_0}{as^2 + bs + c}}^{\text{Función de transferencia}}\right]$$

Solución de ecuaciones diferenciales

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 5\frac{\partial x}{\partial t} + 6x = 2e^{-t} \quad t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 6\frac{\partial x}{\partial t} + 9x = \sin t \quad t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejemplo

Resolver para $t \geq 0$ las ecuaciones diferenciales simultáneas de primer orden:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + 5x + 3y = e^{-t}$$
$$2\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + x + y = 3$$

sujetas a las condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $y(0) = 1$

title

contenidos...

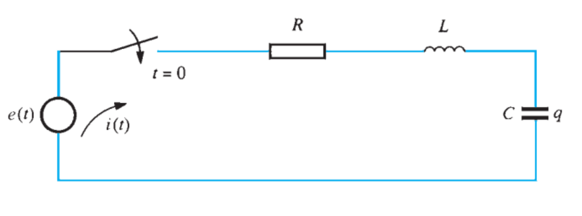
title

contenidos...

Circuitos eléctricos

Ejemplo

El circuito RLC está formado por un resistor R, un capacitor C y un inductor L conectados en serie a una fuente de voltaje $e(t)$. Antes de cerrar el interruptor en $t = 0$, tanto la carga en el capacitor como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor y la corriente resultante $i(t)$ en el tiempo t, sabiendo que $R = 160\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 10^{-4}\,F$ y $e(t) = 20\,V$



Referencias

M.R. Spiegel.
Transformada de Laplace.
McGraw Hill. Serie Schaum, 1991.

G. James, D. Burley, P. Dyke, D. Clements, N. Steele, and J. Wright.
Advanced Modern Engineering Mathematics.
Pearson Education, 2018.

Glyn James and David Burley.
Matemáticas avanzadas para ingeniería.
Pearson Educación, 2002.