Matemática para Ingeniería Electromecánica

☞ Unidad N° 4: Serie y Transformada de Fourier

(i) Serie de Fourier

Martín A. Alarcón

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

11 de junio de 2025

Índice

Introducción

Figura: Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Introducción

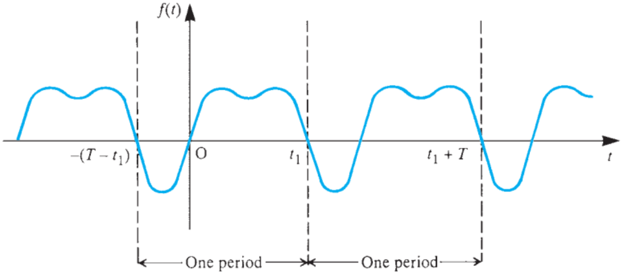
Una serie de potencia tiene la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n,$$

donde el conjunto base se compone de las funciones potencia: $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$.
Una **serie de Fourier** es una expansión de una función periódica $f(t)$ con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ en la que el conjunto base son las funciones seno, obteniéndose la representación:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\, w\, t + \phi_n)$$

Funciones periódicas



$$f(t) = f(t + mT)$$

- Frecuencia $= f = \dfrac{1}{T}$
- Frecuencia angular o circular $= \omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

Teorema de Fourier

Una función periódica puede expresarse como la suma de un número de funciones seno de diferentes amplitudes, fases y periodos.

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \cdots + A_n \sin(n\omega t + \phi_n) + \cdots$$

Como:

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) &\equiv A_n(\cos\phi_n \sin n\omega t + \sin\phi_n \cos n\omega t) \\ &\equiv b_n \sin n\omega t + a_n \cos n\omega t \end{aligned}$$

siendo $b_n = A_n \cos\phi_n$ y $a_n = A_n \sin\phi_n$, la expansión puede representarse:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \tag{2}$$

Teorema de Fourier

Corolario

Los coeficientes de Fourier a_n y b_n, suele referirse (en ingeniería eléctrica) como ***componentes en fase*** *y en* ***cuadratura de fase*** *de la n-ésima armónica. Esto viene por la notación fasorial* $e^{jn\omega t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t \Rightarrow$

$$A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}, \qquad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

Teorema de Fourier

Teorema (Forma trigonométrica de la serie de Fourier)

Una función periódica $f(t)$ de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ puede expresarse como una serie de Fourier, entonces esa serie está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,\omega\,t + b_n \sin n\,\omega\,t$$

donde los coeficientes son dados por las fórmulas de Euler:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos n\,\omega\,t\,\mathrm{dt} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin n\,\omega\,t\,\mathrm{dt} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

□

Funciones de periodo 2π

Corolario

Si el periodo T de una función periódica es 2π, entonces $\omega = 1$ y la serie es:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,t + b_n \sin n\,t$$

y los coeficientes son:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_d^{d+2\pi} f(t)\cos n\,t\,\mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_d^{d+2\pi} f(t)\sin n\,t\,\mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

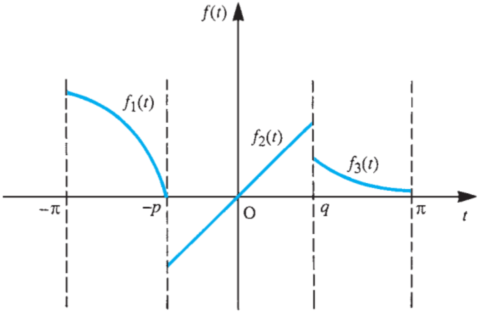
Funciones de periodo 2π

Ejemplo

Obtener la expansión en serie de Fourier para las siguientes funciones periódicas $f(t)$ con periodo 2π:

1. $f(t) = t,\ (0 < t < 2\pi)$
2. $f(t) = t^2 + t,\ (-\pi < t < \pi)$

Funciones de periodo 2π (definida por tramos)



$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-p} f_1(t)\cos n\,t\,\mathrm{d}t + \int_{-p}^{q} f_2(t)\cos n\,t\,\mathrm{d}t + \int_{q}^{\pi} f_3(t)\cos n\,t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-p} f_1(t)\sin n\,t\,\mathrm{d}t + \int_{-p}^{q} f_2(t)\sin n\,t\,\mathrm{d}t + \int_{q}^{\pi} f_3(t)\sin n\,t\,\mathrm{d}t\right]$$

Funciones de periodo 2π

Ejemplo

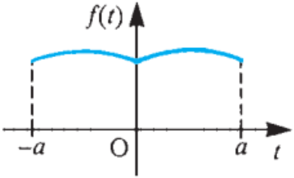
Obtener la expansión en serie de Fourier para la función periódica $f(t)$ con periodo 2π definida por:

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & (-\pi < t < 0) \\ t, & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

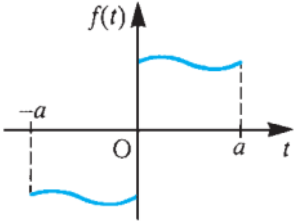
Además realizar la gráfica de la función para el rango $(-4\pi \leq t \leq 4\pi)$.

Funciones pares e impares

Si una función tiene alguna propiedad de simetría, nos permite saber que términos están ausentes en una expansión en serie de Fourier y como simplificar las expresiones para obtener los coeficientes restantes.



Función par: $f(t) = f(-t)$



Función impar: $f(t) = -f(-t)$

Funciones pares e impares

Definición (Serie de Fourier de una Función Par de periodo T)

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\,t\,\mathrm{d}t \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \text{y} \quad b_n = 0$$

La expansión en serie de Fourier es: $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,t$

Definición (Serie de Fourier de una Función Impar de periodo T)

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\,t\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad \text{y} \quad a_n = 0$$

La expansión en serie de Fourier es: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,t$

Funciones pares e impares

Ejemplo

Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida en $(-\pi < t < \pi)$:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & (-\pi < t < 0) \\ 1, & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

Encontrar su expansión en serie de Fourier.

Ejemplo

Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida como:

$$f(t) = t^2, \quad (-\pi < t < \pi)$$

Encontrar su expansión en serie de Fourier.

Funciones de periodo $T \neq 2\pi$

☞ Ahora se van a considerar funciones periódicas que tienen periodos diferentes a 2π.

Ejemplo

Una función $f(t)$ con periodo de 4 está definida en el rango de $(-2 < t < 2)$ por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & (-2 < t < 0) \\ 1, & (0 < t < 2) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para el rango de $(-6 \leq t \leq 6)$ y obtenga su expansión en series de Fourier.

Funciones de periodo $T \neq 2\pi$

Ejemplo

Una función $f(t)$ con periodo de 2 está definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 3\,t, & (0 < t < 1) \\ 3, & (1 < t < 2) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para el rango de $(-4 \leq t \leq 4)$ y obtenga su expansión en series de Fourier.

Convergencia de la serie de Fourier

Teorema (Condiciones (suficientes, no necesarias) de Dirichlet)

Si $f(t)$ es una función periódica acotada que en cualquier ***periodo*** *tiene:*

(i) un número finito de máximos y mínimos aislados, y

(ii) un número finito de puntos de discontinuidad finita,

entonces la expansión en series de Fourier de $f(t)$ converge a $f(t)$ (función original) en todos los punto donde $f(t)$ es continua y al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de $f(t)$ en los puntos donde $f(t)$ es discontinua (esto es, al promedio de la discontinuidad). $\square$

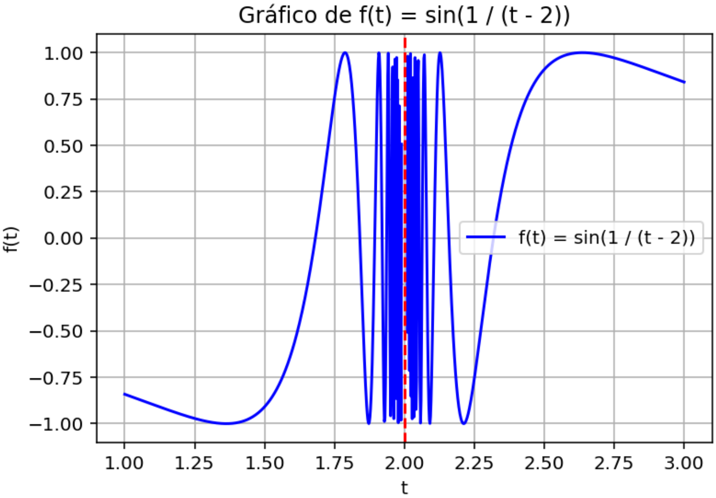
Convergencia de la serie de Fourier

Ejemplo

Dar las razones por las cuales las siguientes funciones $f(t)$ no satisfacen las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(0 < t < 2\pi)$:

1. $f(t) = \dfrac{1}{3-t}$
2. $f(t) = \sin\left(\dfrac{1}{t-2}\right)$

Convergencia de la serie de Fourier



Razón de convergencia de la serie de Fourier

Razón de convergencia $\rightarrow$ cuantos términos se necesitan de la serie

(i) Si $f(t)$ es sólo continua a pedazos, entonces los coeficientes en su representación en serie de Fourier decrecen conforme a $\frac{1}{n}$.

(ii) Si $f(t)$ es continua en todos lados pero tiene primeras derivadas discontinuas, entonces los coeficientes en su representación en serie decrecen conforme a $\frac{1}{n^2}$.

(iii) Si $f(t)$ y todas sus derivadas hasta r-ésimo orden son continuas pero las (r+1)-ésima derivada es discontinua, entonces los coeficientes de su representación en serie decrecen a razón de $\frac{1}{n^{r+2}}$.

Conclusión

Más suave es la función, más rápido converge su representación en serie.

Razón de convergencia de la serie de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} -1, & (-\pi < t < 0) \\ 1, & (0 < t < \pi) \end{cases} \Rightarrow f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

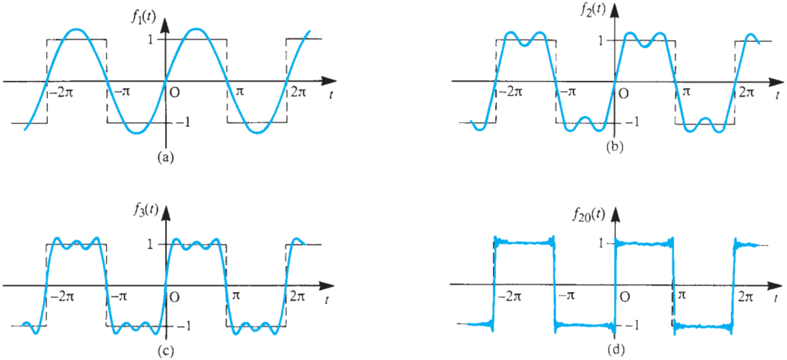


Figura: (a) N=1, (b) N=2, (c) N=3 y (d) N=20

Funciones definidas sobre un intervalo finito

Funciones no periódicas

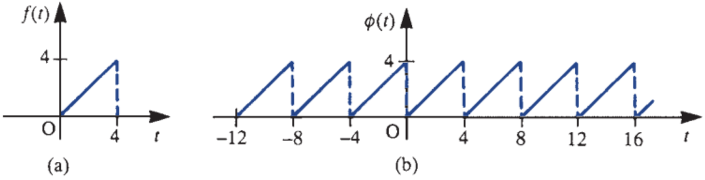
Se pueden obtener una expansión en series de Fourier que represente a una función no periódica $f(t)$ que esté definida sólo sobre un intervalo de tiempo finito $0 \leq t \leq \tau$. (Está estrategia que se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera).

☞ Se pueden formulan extensiones periódicas de $f(t)$, válidas sólo en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$ como:

1. Series de recorrido o rango completo.
2. Series del seno y del coseno de medio recorrido.

Funciones definidas sobre un intervalo finito

1. Series de recorrido completo: $f(t)$ definida en un intervalo $0 \leq t \leq \tau \Rightarrow$ para obtener un representación en serie de Fourier, se define la extensión periódica $\phi(t) = f(t),\ (0 < t < \tau) \Rightarrow \phi(t+\tau) = \phi(t)$.



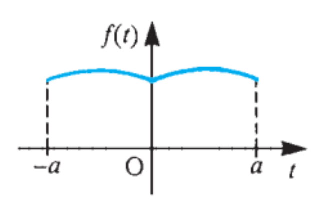
Ejemplo (Series de recorrido completo → términos de coseno y seno)

Encontrar la expansión en serie de Fourier de recorrido completo para $f(t) = t$ válida en el intervalo finito $(0 < t < 4)$.

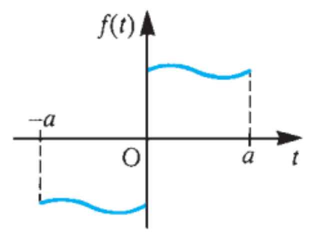
Funciones definidas sobre un intervalo finito

1. Series del seno y del coseno de medio recorrido: se formulan extensiones periódicas que son funciones pares o impares, por lo que, la serie de Fourier resultante sólo va a contener términos con cosenos o senos respectivamente.

Recordatorio



Función par: $f(t) = f(-t)$



Función impar: $f(t) = -f(-t)$

Funciones definidas sobre un intervalo finito

Definición (Extensión periódica par)

Para la función $f(t)$ definida sólo en $0 \leq t \leq \tau$, su extensión periódica par es:

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & (0 < t < \tau) \\ f(-t), & (-\tau < t < 0) \end{cases} \Rightarrow F(t + 2\tau) = f(t)$$

y la representación en serie de Fourier:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{\tau}, \quad \text{siendo}$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cos\frac{n\pi t}{\tau}\mathrm{d}t \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Funciones definidas sobre un intervalo finito

Definición (Extensión periódica impar)

Para la función $f(t)$ definida sólo en $0 \leq t \leq \tau$, su extensión periódica par es:

$$G(t) = \begin{cases} f(t), & (0 < t < \tau) \\ -f(-t), & (-\tau < t < 0) \end{cases} \Rightarrow G(t + 2\tau) = f(t)$$

y la representación en serie de Fourier:

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{\tau}, \qquad \text{siendo}$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin \frac{n\pi t}{\tau} \mathrm{d}t \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

Funciones definidas sobre un intervalo finito

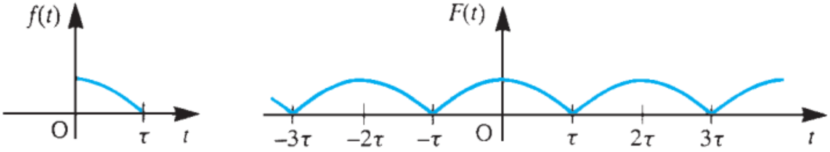


Figura: Extensión periódica par.

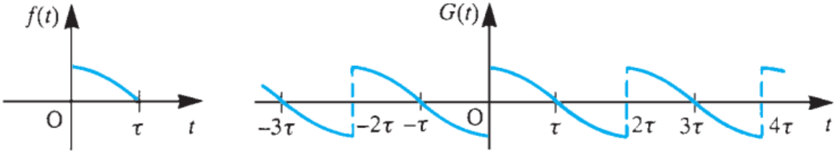


Figura: Extensión periódica impar.

Funciones definidas sobre un intervalo finito

Ejemplo

Para la función $f(t) = t$ válida en el intervalo finito $(0 < t < 4)$, se pide:

a) Una expansión en serie de medio recorrido en cosenos,

b) Una expansión en serie de medio recorrido en senos.

Dibuje las gráficas de $f(t)$ y de las funciones periódicas representadas por las dos series obtenidas para $-20 < t < 20$.

Funciones definidas sobre un intervalo finito

Ejemplo

Para la función $f(t) = t$ válida en el intervalo finito $(0 < t < 4)$, se pide:

a) Una expansión en serie de medio recorrido en cosenos,

b) Una expansión en serie de medio recorrido en senos.

Dibuje las gráficas de $f(t)$ y de las funciones periódicas representadas por las dos series obtenidas para $-20 < t < 20$.

Corolario

Las tres representaciones en serie de Fourier son representativas de la función $f(t) = t$ sólo dentro del intervalo definido en $(0 < t < 4)$. Fuera de este intervalo las tres series convergen a funciones diferentes $\phi(t)$, $F(t)$ y $G(t)$.

Forma compleja de la serie de Fourier

Definición

La forma **compleja o exponencial** de la expansión en serie de Fourier para una función periódica $f(t)$ de periodo T es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\,n\,\omega\,t}, \qquad \text{siendo}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-j\,n\,\omega\,t}\mathrm{d}t \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

donde:

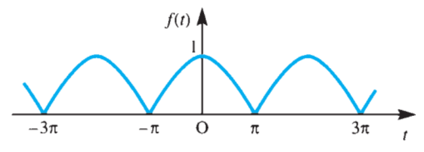
$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Ejemplo

Encuentre la forma compleja de la expansión en serie de Fourier para la función periódica $f(t)$ definida por:

$$f(t) = \cos \frac{1}{2} t, \; (-\pi < t < \pi), \; f(t + 2\pi) = f(t)$$



$$\sin n\,\omega\,t = \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}\right) \quad \Big| \quad \cos n\,\omega\,t = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}\right)$$

Espectro de frecuencia discreta

La expansión en serie de Fourier de una función periódica $f(t)$, puede interpretarse con una descomposición en sus **componentes armónicas o de frecuencia**. Si $f(t)$ tiene periodo $T \Rightarrow$ las frecuencias de las componentes armónicas son:

$$\omega_n = \frac{n\,2\,\pi}{T} = n\,\omega_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3}$$

siendo ω_0 la frecuencia de $f(t)$.

Una serie de Fourier puede ser interpretada como el **espectro de frecuencias** de la función periódica $f(t)$ y proporciona una representación alternativa de la función en su forma de onda en el dominio del tiempo.

Espectro de frecuencia discreta

La expansión en serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right),$$

o también como:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T} + \phi_n\right),$$

siendo:

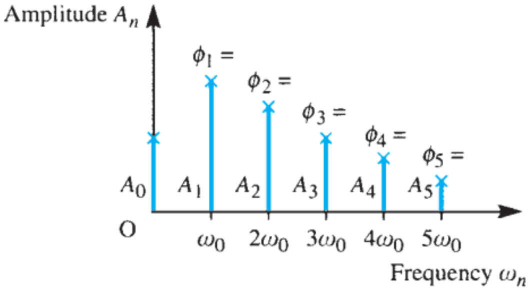
$$A_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad A_n = \sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}, \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

- ☞ **Espectro de amplitud:** Gráfica de la amplitud vs. frecuencia angular.
- ☞ **Espectro de fase:** Gráfica de la fase vs. frecuencia angular.

Espectro de frecuencia discreta

Espectros de frecuencia discretas

Para una función periódica $f(t)$ las componentes de armónicas sólo aparecen en frecuencias discretas ω_n determinadas por la Ecuación (3), por eso se conocen como espectros de frecuencia discretas o de línea.



Espectro de frecuencia discreta

☞ Es más práctico trabajar con la forma compleja de la serie de Fourier.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\,n\,\omega\,t},$$

siendo los coeficientes c_n en general números complejos pudiendo expresar se de la forma:

$$c_n = |c_n|\, e^{j\phi_n},\ |c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

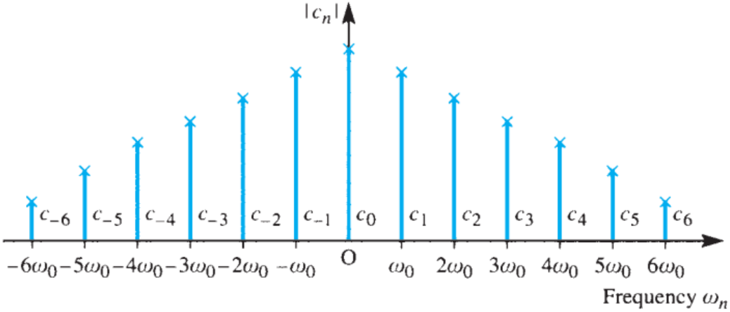
☞ Espectro de amplitud: $|c_n|$ vs. ω_n

☞ Espectro de fase: ϕ_n vs. ω_n

Espectro de frecuencia discreta

Corolario

Como $|c_{-n}| = |c_n^*| = |c_n|$ *el espectro de amplitud será simétrico con respecto al eje vertical.*



Espectro de frecuencia discreta

Ejemplo

Dibuje los espectros de amplitud y fase de la función periódica:

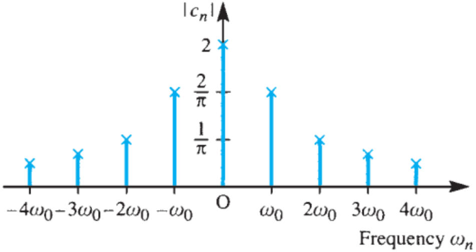
$$f(t) = \frac{2t}{T}, \ (0 < t < 2T)$$

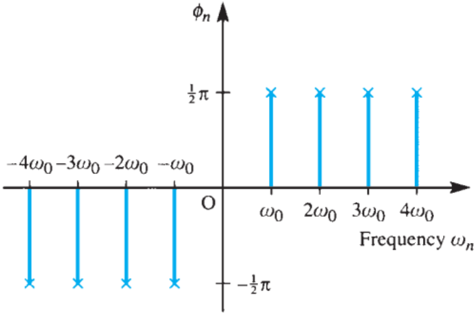
Obteniendo la forma compleja de la serie de Fourier se llega a:

$$c_0 = 2, \ c_n = \frac{j2}{n\pi}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \quad \left(a_n = 0, \ b_n = -\frac{4}{n\pi} \right)$$

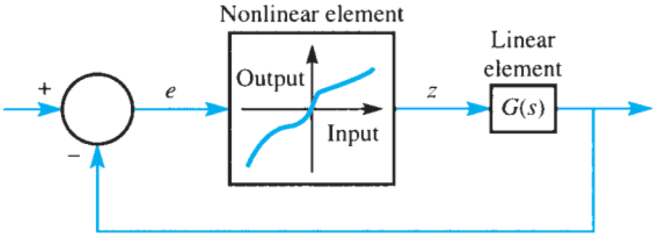
Espectro de frecuencia discreta

$$|c_n| = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & (n = 1, 2, \cdots) \\ -\frac{2}{n\pi}, & (n = -1, -2, \cdots) \end{cases} \quad \phi_n = \arg c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & (n = 1, 2, \cdots) \\ -\frac{1}{2}\pi, & (n = -1, -2, \cdots) \end{cases}$$





Aplicaciones: Funciones descriptivas



Definición

El método consiste en reemplazar la no linealidad por una ganancia N equivalente y después usar las técnicas desarrolladas para los sistemas lineales.

Referencias

- G. James, D. Burley, P. Dyke, D. Clements, N. Steele, and J. Wright.
  Advanced Modern Engineering Mathematics.
  Pearson Education, 2018.
- Glyn James and David Burley.
  Matemáticas avanzadas para ingeniería.
  Pearson Educación, 2002.