Matemática para ingeniería electromecánica

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

Guía práctica N°3. Unidad N°4: Serie y Transformada de Fourier

Docente: Martín A. Alarcón

1. Ejercicio 1

Para cada una de las siguientes funciones periódicas con periodo 2π, dibuje la gráfica de la función para el rango $(-4\pi \leq t \leq 4\pi)$ y obtenga su expansión en series de Fourier.

a) $f(t) = \begin{cases} -\pi, & (-\pi < t < 0) \\ t, & (0 < t < \pi) \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} t+\pi, & (-\pi < t < 0) \\ 0, & (0 < t < \pi) \end{cases}$

c) $f(t) = 1 - \dfrac{t}{\pi}, \; (0 \leq t \leq 2\pi)$

d) $f(t) = \cos\dfrac{1}{2}t, \; (-\pi < t < \pi)$

e) $f(t) = \begin{cases} 0, & \left(-\pi \leq t \leq -\frac{1}{2}\pi\right) \\ 2\cos t, & \left(-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi\right) \\ 0, & \left(\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi\right) \end{cases}$

f) $f(t) = \begin{cases} -t+e^t, & (-\pi \leq t < 0) \\ t+e^t, & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$

g) $f(t) = \begin{cases} 0, & (-\pi \leq t \leq 0) \\ 2t-\pi, & (0 < t \leq \pi) \end{cases}$

2. Ejercicio 2

En la Figura 1 se muestra la carga $q(t)$ sobre las placas de un capacitor en el tiempo t. Exprese $q(t)$ como una expansión en serie de Fourier.

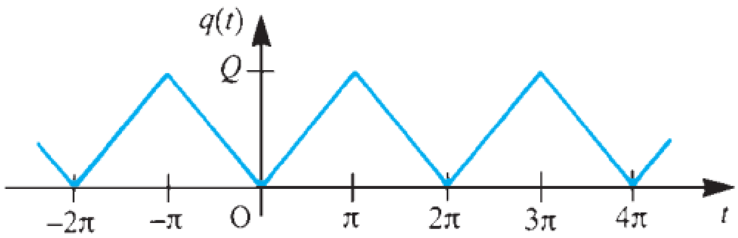

Figura 1: Carga de un capacitor.

3. Ejercicio 3

La respuesta recortada de un rectificador de media onda es la función periódica $f(t)$ de periodo 2π definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin t, \ (0 \leq t \leq \pi) \\ 0, \ (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Exprese $f(t)$ como una expansión en serie de Fourier.

4. Ejercicio 4

Encontrar la expansión en serie de Fourier para la función periódica $f(t+2l) = f(t)$:

$$f(t) = t, \ (-l < t < l)$$

5. Ejercicio 5

Una función periódica de periodo 10 está definida en $-5 < t < 5$ por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ (-5 < t < 0) \\ 3, \ (0 < t < 5) \end{cases}$$

Determine su expansión en serie de Fourier e ilustre para el periodo $-12 < t < 12$.

6. Ejercicio 6

Al pasar un voltaje senoidal $A\sin\omega t$ a través de un rectificador de media onda produce una señal como la que se indica en la Figura 2. Determine la expansión en serie de Fourier para la onda rectificada

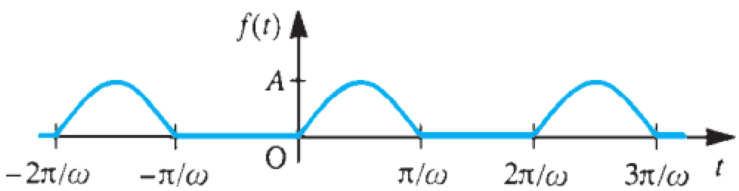

Figura 2: Señal rectificada.

7. Ejercicio 7

Determine la expansión en serie de Fourier de medio recorrido en cosenos de la función $f(t) = 2t - 1$, válida para $0 < t < 1$. Dibuje las gráficas de $f(t)$ y de la función periódica representada por la expansión en serie para $-2 < t < 2$.

8. Ejercicio 8

Una función está definida por: $f(t) = \pi t - t^2$, $(0 \leq t \leq \pi)$, y está representada por una serie de Fourier de medio recorrido en senos o por una de cosenos. Encentre ambas series y dibuje las gráficas de las funciones representadas por ellas para $-2\pi < t < 2\pi$.

9. Ejercicio 9

Pruebe que la forma compleja de la expansión en serie de Fourier de la función periódica:

$$f(t) = t^2,\ (-\pi < t < \pi)\,,\ f(t+2\pi) = f(t), \quad \text{es: } f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2}(-1)^n e^{jnt}$$

10. Ejercicio 10

Calcule la transformada de Fourier del pulso exponencial bilateral ($a > 0$) dado por:

$$f(t) = \begin{cases} e^{at},\ (t \leq 0) \\ e^{-at},\ (t > 0) \end{cases}$$

11. Ejercicio 11

Un pulso triangular está definido por:

$$f(t) = \begin{cases} (A/T)t + A,\ (-T \leq t \leq 0) \\ (-A/T)t + A,\ (0 < t \leq T) \end{cases}$$

Dibuje $f(t)$ y determine su transformada de Fourier.

12. Ejercicio 12

Demuestre que la transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} \sin at,\ |t| \leq \pi/a \\ 0,\ |t| > \pi/a \end{cases}, \quad \text{es: } \frac{j\,2\,a\sin(\pi\omega/a)}{\omega^2 - a^2}$$

13. Ejercicio 13

Calcule la transformada de Fourier de:

$$f(t) = e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,H(t)$$

14. Ejercicio 14

Pruebe que las transformadas de Fourier en seno y coseno de:

$$f(t) = \begin{cases} 0,\ (t < 0) \\ 1,\ (0 \leq t \leq a) \\ 0,\ (t > a) \end{cases}, \quad \text{son: } \frac{1 - \cos xa}{x}, \quad \frac{\sin xa}{x}$$

respectivamente.

15. Ejercicio 15

Si $y(t)$ y $u(t)$ son señales que tienen transformadas de Fourier $Y(j\omega)$ y $U(j\omega)$ respectivamente, y:

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 3\frac{\partial y(t)}{\partial t} + y(t) = u(t)$$

probar que $Y(j\omega) = H(j\omega)\,U(j\omega)$ para alguna función $H(j\omega)$.

16. Ejercicio 16

Utilice la propiedad del desplazamiento con respecto al tiempo para calcular la transformada de Fourier del pulso doble definido por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & (1 \leq |t| \leq 2) \\ 0, & (\text{en otro caso}) \end{cases}$$

17. Ejercicio 17

Calcule la transformada de Fourier de la función coseno en una ventana:

$$f(t) = \cos \omega_0 t \left[H\left(t + \frac{1}{2}T\right) - H\left(t - \frac{1}{2}T\right) \right]$$

18. Ejercicio 18

Calcule la transformada de Fourier de la función seno en una ventana:

$$f(t) = \sin 2t \left[H(t+1) - H(t-1) \right]$$