Matemática para Ingeniería Electromecánica

☞ Unidad N° 4: Serie y Transformada de Fourier

(ii) Transformada de Fourier

Martín A. Alarcón

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

18 de junio de 2025

Índice

Introducción

Definición

La **Transformada de Fourier** extiende las ideas del análisis de Fourier para tratar con funciones no periódicas. A partir de está teoría, se verá como la forma exponencial compleja de la representación en serie de Fourier de una función periódica surge como un caso especial de la Transformada de Fourier.

1. Transformada de Fourier (Continua).
2. Transforma Discreta de Fourier.
3. Transformada Rápida de Fourier (FFT).

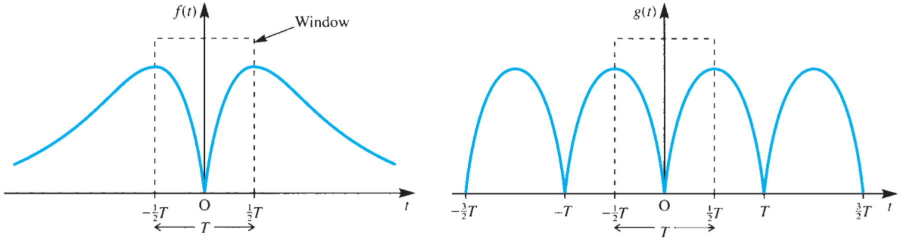
Introducción

Series de Fourier $\rightarrow$ representación en el domino de la frecuencia de funciones periódicas.

Transformada de Fourier $\rightarrow$ método para representar funciones no periódicas definidas en $(-\infty < t < \infty)$ en el domino de la frecuencia.

La integral de Fourier

Se emplea el método adoptado para obtener la expansión en serie de Fourier de funciones definidas sobre un intervalo finito de tiempo.



La integral de Fourier

Utilizando la forma compleja (exponencial) de la serie de Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{j\,n\,\omega_0\,t}, \qquad \text{siendo:} \tag{1}$$

$$G_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j\,n\,\omega_0\,t} \mathrm{d}t, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \qquad (\omega_0 = 2\pi/T)\,. \tag{2}$$

☞ La Ec. (2) transforma la función $g(t)$ en el dominio del tiempo en las componentes asociadas G_n con dominio en la frecuencia.
☞ La Ec. (1) se interpreta como la transformación de las componentes discretas G_n en el dominio de la frecuencia a su forma $g(t)$ en el dominio del tiempo.

La integral de Fourier

Al sustituir la Ec. (1) en (2) se tiene:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\,n\,\omega_0\,\tau} \mathrm{d}\tau \right] e^{j\,n\,\omega_0\,t}, \tag{3}$$

se tiene que: $\frac{2\pi n}{T} = n\,\omega_0 = \omega_n$ y como la diferencia en frecuencia de términos sucesivos es:

$$\frac{2\pi}{T}\left[(n+1) - n\right] = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega = \omega_0, \qquad \left(T = 2\pi/\Delta\omega\right),$$

por lo que:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\,\omega_n\,\tau} \mathrm{d}\tau \right] e^{j\,\omega_n\,t} \Delta\omega. \tag{4}$$

La integral de Fourier

Definiendo $G(j\omega)$ como:

$$G(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) e^{-j\,\omega\,\tau} \mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

se tiene que:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\,\omega_n\,t} G(j\omega_n) \Delta\omega. \tag{6}$$

Conforme $T \to \infty$, la ventana se hace más ancha de manera que $g(t) = f(t)$ en todos lados y $\Delta\omega \to 0$

La integral de Fourier

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} g(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\,\omega_n\,t}\, G(j\omega_n)\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\,\omega\,t}\, G(j\omega)\mathrm{d}\omega \qquad (7)$$

De las Ec. (5), (6) y (7) se tiene que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\, e^{j\,\omega\,t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\,\omega\,\tau}\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\omega \qquad (8)$$

☞ Esta última expresión se conoce como la **representación en integral de Fourier** de $f(t)$.

La integral de Fourier

Teorema (Las condiciones de Dirichlet para la integral de Fourier)

Si la función $f(t)$ es tal que:

(i) *es absolutamente integrable, de manera que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

(ii) *tiene como mucho un número finito de máximos y mínimos, y de discontinuidades en cualquier intervalo finito,*

entonces la representación en integral de Fourier de $f(t)$ dada por la Ec. (8) converge a $f(t)$ en todo punto donde es continua y al promedio de los límites derecho e izquierdo donde es discontinua.

Forma trigonométrica de la integral de Fourier

Considerando que:

$$e^{-j\omega(\tau-t)} = \cos\,\omega(\tau - t) - j\,\sin\,\omega(\tau - t),$$

reemplazando en la Ec. (8) y trabajando de forma algebraica, se llega a:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\,\omega(\tau - t)\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Forma trigonométrica de la integral de Fourier

Si $f(t)$ es una función par e impar $\rightarrow$ la Ec.(9) se puede indicar como:

(i) Para una función par:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega\tau \cos \omega t \, d\tau \, d\omega,$$

la cual se conoce como **integral de Fourier en cosenos**.

(i) Para una función impar:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \omega\tau \sin \omega t \, d\tau \, d\omega,$$

la cual se conoce como **integral de Fourier en senos**.

Representación de $f(t)$ por medio de la integral de Fourier

Ejemplo

Investigar qué tan bien representa la integral de Fourier a la función cuándo sólo se consideran las componentes en la parte baja del rango de frecuencias.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

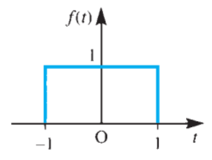
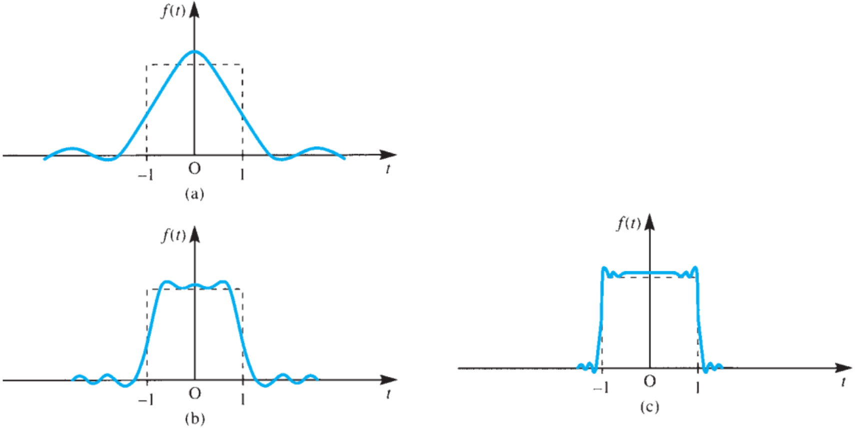


Figura: Pulso rectangular.

Representación de $f(t)$ por medio de la integral de Fourier



(a) $\omega_0 = 4$ (b) $\omega_0 = 8$ (c) $\omega_0 = 16$

El par de transformadas de Fourier

Definición

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{11}$$

$F(j\omega)$ se llama la **transformada de Fourier** de $f(t)$ y proporciona una representación en el dominio de la frecuencia para una función no periódica $f(t)$, siempre que exista la integral en la Ec.(10).

El **operador de Fourier** se denota como: $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$.

El par de transformadas de Fourier

Ejemplo

¿Tiene la función $f(t) = 1,\ (-\infty < t < \infty)$ una representación en transformada de Fourier.

Ejemplo

Encuentre la transformada de Fourier de la función exponencial:

$$f(t) = H(t)\, e^{-at} \ \ (a > 0)$$

Ejemplo

Calcular la transformada de Fourier del pulso rectangular:

$$f(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

El par de transformadas de Fourier (breve tabla)

$f(t)$	$\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$
$e^{-at}H(t) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$
$t\,e^{-at}H(t) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\begin{cases} A & (\lvert t\rvert \leqslant T) \\ 0 & (\lvert t\rvert > T) \end{cases}$	$2AT \operatorname{sinc} \omega T$
$e^{-a\lvert t\rvert} \quad (a > 0)$	$\dfrac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Espectro continuo de Fourier

Las transformadas de Fourier generalmente son funciones de valores complejos de la variable real de frecuencias ω. Si $\mathscr{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ entonces $F(j\omega)$ también se la conoce como espectro de frecuencias (complejas) de $f(t)$. Al escribir $F(j\omega)$ en su forma exponencial:

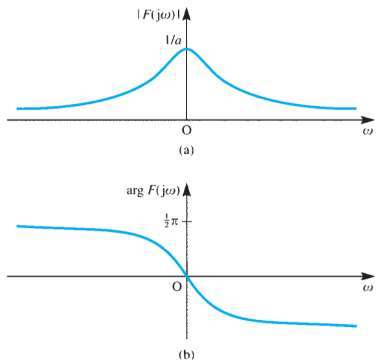
$$F(j\omega) = |F(j\omega)|\, e^{j\,\arg F(j\omega)}$$

donde las gráficas de $|F(j\omega)|$ y $\arg F(j\omega)$, las cuales son funciones de variable real ω, se llaman espectros de amplitud y fase respectivamente. Juntos representan el **retrato en el dominio de la frecuencia** de la señal $f(t)$.

Espectro continuo de Fourier

Ejemplo

Espectros de la función: $f(t) = e^{-at}H(t), \ (a > 0)$



Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedad de linealidad

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones cuyas transformadas de Fourier son $F(j\omega)$ y $G(j\omega)$ respectivamente, y si α y β son constantes $\Rightarrow$

$$\mathscr{F}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} + \beta\mathscr{F}\left\{g(t)\right\} = \alpha F(j\omega) + \beta G(j\omega)$$

Propiedad de derivación con respecto al tiempo

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t}\right\} = (j\omega)^n F(j\omega)$$

☞ Está propiedad puede utilizarse para obtener representaciones en el dominio de la frecuencia de ecuaciones diferenciales.

Propiedades de las transformadas de Fourier

Ejemplo

Las señales definidas en el tiempo $y(t)$ y $u(t)$ tienen transformadas de Fourier $Y(j\omega)$ y $U(j\omega)$ respectivamente, y si:

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 3\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 7y(t) = 3\frac{\partial u(t)}{\partial t} + 2u(t)$$

encuentre $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ para alguna función $G(j\omega)$.

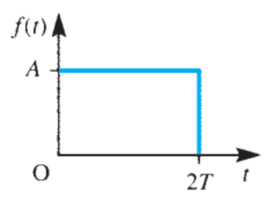
Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedad de desplazamiento con respecto al tiempo

$$\mathscr{F}\left\{f(t-\tau)\right\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$$

Ejemplo

Determinar la transformada de Fourier del pulso rectangular $f(t)$ que se muestra en la siguiente figura.



Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedad de desplazamiento con respecto a la frecuencia

$$\mathscr{F}\left\{e^{-j\omega_0 t}f(t)\right\} = F(j(\omega - \omega_0))$$

Propiedad de simetría

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(j\omega) \Rightarrow \mathscr{F}\left\{F(jt)\right\} = 2\pi f(-\omega)$$

Esta propiedad nos dice que si $\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}$ y $F(j\omega)$ forman un par de transformadas, entonces $\mathscr{F}\left\{F(jt)\right\}$ y $2\pi f(-\omega)$ también forman una par de transformadas. La suelen citar como propiedad de dualidad.

Relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace

☞ La transformada de **Fourier**:

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t. \tag{12}$$

☞ La transformada de **Laplace**:

$$\mathscr{L}_B\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(Bilateral)}. \tag{13}$$

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(Unilateral)}. \tag{14}$$

Referencias

- G. James, D. Burley, P. Dyke, D. Clements, N. Steele, and J. Wright.
  Advanced Modern Engineering Mathematics.
  Pearson Education, 2018.

- Glyn James and David Burley.
  Matemáticas avanzadas para ingeniería.
  Pearson Educación, 2002.