UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA

INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA

Nivel: **4º** Diseño Curricular 2023 - ORDENANZA N°1851

Asignatura: **Mecánica de los Fluidos y Máquinas Fluidodinámicas**

Cátedra:

Prof. Asoc. Ord. Simple	Ing. Silvina Zamar
Prof. Adj. Int. Semi-exclusiva	Ing. Alejandro Folla

UNIDAD 4: TEORÍA DE MODELOS

TRABAJO PRÁCTICO N° 4:
SEMEJANZA Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Reconquista

TRABAJO PRÁCTICO 4 – SEMEJANZA Y ANÁLISIS DIMENSIONAL

1. Identificar los principios fundamentales y ecuaciones que rigen los siguientes 6 problemas resueltos para analizarlos.
2. Identificar las fuerzas que intervienen
3. Identificar el tipo de flujo
4. Proponer un problema nuevo de *Semejanza y Análisis Dimensional* y resolverlo y repetir ejercicios 1, 2 y 3.

Problema 1)
Si el número de Reynolds de un modelo y de sus prototipos es el mismo, halle una expresión para V_r T_r y a_r.

Solución:

$$\mathrm{Re} = \frac{L_m V_m}{\nu_m} = \frac{L_p V_p}{\nu_p}$$

$$V_r = \frac{V_p}{V_m} = \frac{L_m \nu_p}{L_p \nu_m} = \frac{\nu_r}{L_r}$$

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = \frac{L_r}{\nu_r / L_r} = \frac{L_r^{\,2}}{\nu_r}$$

$$a_r = \frac{L_r}{(T_r)^2} = \frac{L_r}{\left(\frac{L_r^{\,2}}{\nu_r}\right)^2} = \frac{\nu_r^{\,2}}{L_r^{\,3}}$$

Problema 2)
Un cuerpo sumergido debe moverse horizontalmente a través de aceite (γ = 52 lb/ft^3; μ = 0.0006 lb • s/ft^2) a una velocidad de 45 fps. Para estudiar las características de este movimiento, se realizan pruebas con un modelo ampliado del cuerpo en agua a 60 °F. La relación del modelo A es 8:1.
Determine a qué velocidad debe moverse por el agua este modelo aumentado para conseguir la semejanza dinámica. Si la fuerza de resistencia sobre el modelo es 0.80 lb, calcule la resistencia sobre el prototipo.

Solución:

$$\left(\frac{DV}{\nu}\right)_p = \left(\frac{DV}{\nu}\right)_m, \quad \text{donde} \quad \frac{D_m}{D_p} = \frac{8}{1}$$

$$\nu_m = 1{,}217 \times 10^{-5}\ \text{ft}^2/\text{s}$$

$$\nu_p = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}0006}{52/32{,}2} = 0{,}000372\ \text{ft}^2/\text{s}$$

$$\frac{D_p(45)}{0{,}000372} = \frac{(8D_p)V_m}{1{,}217 \times 10^{-5}}$$

$$V_m = 0{,}1843\ \text{fps}$$

$$Fr \propto \rho V^2 L^2; \quad \text{de donde} \quad \frac{Fr_p}{Fr_m} = \frac{\rho_p V_p^2 L_p^2}{\rho_m V_m^2 L_m^2}$$

$$\frac{Fr_p}{Fr_m} = \frac{(52/32{,}2)(45)^2 1}{1{,}94(0{,}1843)^2(8)^2} = 777$$

$$Fr_p = 777 Fr_m = 777(0{,}8) = 621\ \text{lb}$$

Problema 3)

Un modelo a escala 1:50 de un barco tiene una resistencia de ola de 0,02 N cuando opera en agua a 1.0 m/s. Halle la resistencia de ola correspondiente del prototipo. Calcular también la potencia requerida, en caballos, y la velocidad correspondiente para el prototipo.

Solución:

Las fuerzas de inercia y gravedad predominan; por tanto es aplicable el criterio de Froude.

$$\text{Fr}_p = \text{Fr}_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m$$

Puesto que el campo gravitacional de la Tierra actúa tanto sobre el modelo como sobre el prototipo, las g se cancelan mutuamente. Entonces,

$$\frac{V_p^2}{L_p} = \frac{V_m^2}{L_m}$$

$$\frac{V_p^2}{V_m^2}\frac{L_p}{L_m} = L_r = 50$$

Además,

$$\frac{Fr_p}{Fr_m} = \frac{\rho L_p^2 V_p^2}{\rho L_m^2 V_m^2} = L_r^2 L_r = L_r^3$$

Entonces obtenemos,

$$\boxed{Fr_p = L_r^3 Fr_m = (50)^3(0{,}02) = 2.500\ \text{N} = 562\ \text{lb}}$$

$$\boxed{V_p = \sqrt{L_r} \times V_m = \sqrt{50} \times 1 = 7{,}07\ \text{m/s} = 23{,}2\ \text{fps}}$$

$$\boxed{\text{CV}_p = \frac{Fr_p V_p}{550} = \frac{562 \times 23{,}2}{550} = 23{,}7}$$

Problema 4)

Deduzca una expresión para el caudal q que fluye por el vertedero que se muestra en la figura, por pie del vertedero, perpendicular al plano del dibujo. Suponga que la capa de agua es relativamente gruesa, por lo que los efectos de tensión superficial se pueden despreciar. Suponga también que los efectos de la gravedad son muchos más importantes que el efecto de la viscosidad de forma que el último se puede despreciar.

Solución:

Con estas hipótesis las variables que afectan a q serían la altura H, la aceleración de la gravedad g, y la altura del vertedero P. Por lo tanto,

$$q = f(H, g, P)$$

$$f_1(q, H, g, P) = 0$$

En este caso hay n = 4 variables y m = 2 dimensiones. Se pueden hallar fácilmente dos variables que no se puedan formar en un grupo adimensional; por tanto k = m = 2, y hay n - k = 2 grupos pi y

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

Utilizando *q* y *H* como las variables primarias,

$$\Pi_1 = q^{a_1} H^{b_1} g$$

$$\Pi_2 = q^{a_2} H^{b_2} P$$

Entonces para el primer grupo pi,

$$L^0 T^0 = \left(\frac{L^3}{TL}\right)^{a_1} L^{b_1} \left(\frac{L}{T^2}\right)$$

Potencias de L: $0 = 2a_1 - b_1 + 1$
Potencias de T: $0 = - a_1 - 2$
Entonces $a_1 = - 2;$ $b_1 = 3$
Por último,

$$\Pi_1 = q^{-2} H^3 g = \frac{gH^3}{q^2}$$

Para el segundo grupo pi,

$$L^0 T^0 = \left(\frac{L^3}{TL}\right)^{a_2} L^{b_2} L$$

Potencias de L: $0 = 2a_2 - b_2 + 1$
Potencias de T: $0 = - a_2$
Entonces $a_2 = 0;$ $b_2 = - 1$
Por último,

$$\Pi_2 = q^0 H^{-1} P = \frac{P}{H}$$

Por último la relación entre los pi se puede escribir

$$\Pi_1^{-1/2} = \phi_1(\Pi_2^{-1})$$

$$\frac{q}{\sqrt{g}H^{3/2}} = \phi_1\left(\frac{H}{P}\right)$$

$$\boxed{q = \phi_1\left(\frac{H}{P}\right)\sqrt{g}H^{3/2}}$$

El caudal va a ser proporcional a la raíz cuadrática de la gravedad y a $H^{3/2}$. Además de ser proporcional a alguna función de (H/P) que se podría obtener en forma experimental.

Problema 5)

Por una tubería de 1,5 in de diámetro fluye aire a 68 °F y 60 psi absolutos. ¿Cuál será el flujo de peso de este aire que proporcionará semejanza dinámica al agua a 60 °F que por una tubería de 3 in de diámetro fluye a 200 galones por minuto?

Solución:

Datos:

$D_p = 1.5\,\text{in}$	$D_m = 3.0\,\text{in}$
$t_p = 68°\,\text{F} = 20°\,\text{C}$	$t_m = 60°\,\text{F} = 15.5°\,\text{C}$
$p_p = 60\,\text{psi}$	$Q_m = 200\,\text{galones/min}$

Solución:

Predominan las fuerzas de inercia y de viscosidad. Número de Reynolds igual para el modelo y el prototipo.

$$\text{Re} = \frac{D_m V_m}{\nu_m} = \frac{D_p V_p}{\nu_p}$$

$$V_p = V_m \frac{D_m \nu_p}{D_p \nu_m}$$

Primero se obtiene la velocidad del modelo;

$$Q_m = 200\frac{\text{gal}}{\text{min}} \cdot 3.7854\frac{\text{lt}}{\text{gal}} \cdot \frac{\text{m}^3}{1000\,\text{lt}} \cdot \frac{\text{min}}{60\,\text{seg}} = 12.618 \cdot 10^{-3}\frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$$

$$S_m = \frac{\pi(3 \cdot 0.0254)^2}{4} = 4.56 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$V_m = \frac{S_m}{Q_m} = \frac{12.818 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{seg}}}{4.56 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2} = 2.767\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

La viscosidad del agua a 15°C y 1 atm, por tabla, es:

$$\nu - 6\frac{m^2}{seg}_{\ m}$$

La viscosidad del aire a 20°C y 1 atm, por tabla, es:

$$\nu - 6\frac{m^2}{seg}_{\ aire}$$

La viscosidad absoluta en los gases no cambia con el cambio de la presión, pero como la densidad aumenta proporcionalmente con el aumento de presión la viscosidad cinemática varía inversamente proporcional a la presión absoluta.

Entonces la viscosidad del prototipo es;

$$\nu_p = \nu_{aire} \frac{1\,atm \cdot 14.22\,^{psi}/_{atm}}{60\,psi} = 3.5787 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{seg}$$

Entonces; $$V_p = V_m \frac{D_m \nu_p}{D_p \nu_m} = 2.767\,\frac{m}{seg}\,\frac{3.0\,in \cdot 3.5787 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{seg}}{1.5\,in \cdot 1.142 \cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{seg}} = 17.342\,\frac{m}{seg}$$

El caudal en volumen es;

$$Q_p = V_p \cdot S_p = 17.342\,\frac{m}{seg} \cdot \frac{\pi(3 \cdot 0.0254\,m)^2}{4} = 0.01977\,\frac{m^3}{seg}$$

Por ultimo, el flujo de aire en peso es;

$$Q_p' = Q_p \cdot \gamma_p = 0.01977\,\frac{m^3}{seg} \cdot 1.2033\,\frac{kg}{m^3} = 0.0238\,\frac{kg}{seg}$$

$$\boxed{\Rightarrow Q_p' = 1.427\,\frac{kg}{min}}$$

Problema 6)

Un chorro de agua vertical que sale hacia arriba desde una tobera a una velocidad de 44 fps ascenderá hasta una altura de aproximadamente 30 ft en la tierra. Calcular la velocidad del chorro para conseguir que un chorro de agua en la Luna (donde la gravedad es 7m/seg^2), ascienda a una altura de 120 ft. Desprecie la resistencia de la atmósfera.

Solución:

Se tienen en cuenta fuerzas de inercia y de gravedad por lo tanto para una semejanza dinámica deben ser iguales los números de Froude.

$$Fr = \frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g_p L_p}}$$

$$V_p = V_m \sqrt{\frac{g_p L_p}{g_m L_m}} = 44\,fps \sqrt{\frac{7 \cdot 120}{9.81 \cdot 30}} = 74.34\,fps$$

$$\boxed{V_p = 74.34\ fps}$$

Problema 7)

Una compañía de aviación está investigando el flujo alrededor de un modelo de un avión supersónico en un túnel de viento de densidad variable a 400 m/s. El aire, a 40 °C, tiene una presión de 150 kN/m^2 abs. ¿A qué velocidad deberían realizarse pruebas sobre el modelo para que se mantenga la semejanza dinámica si se aumenta la temperatura del aire a 75 °C y la presión a 200 kN/m2 abs? Resuelva el problema de dos maneras: a) utilizando y b) no utilizando los pesos específicos y densidades.

Datos:

$$V_1 = 400 m/seg$$
$$t_1 = 40ºC$$
$$t_1' = 313ºK$$

$p_1 = 150 \frac{kN}{m^2}$ $\quad$ $V_2 = ?$

$$t_2 = 75°C$$
$$t_2' = 348°K$$
$$p_2 = 200 \frac{kN}{m^2}$$

Solución:

Al estar involucradas predominantemente fuerzas de inercia y fuerzas elásticas, se puede decir que para que los dos modelos tengan semejanza dinámica tienen que tener igual número de Mach.

$$Ma = \frac{V_1}{\sqrt{\frac{E_V}{\rho_1}}} = \frac{V_2}{\sqrt{\frac{E_V}{\rho_2}}}$$

$$V_2 = V_1 \frac{\sqrt{\frac{E_V}{\rho_2}}}{\sqrt{\frac{E_V}{\rho_1}}} = V_1 \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho_2}}}{\sqrt{\frac{1}{\rho_1}}} \Rightarrow V_2 = V_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

De la ecuación de los gases

$$R = \frac{p \cdot V}{T \cdot m} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1 \cdot m_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2 \cdot m_2}$$
$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1 \cdot V_2}{V_1 \cdot m_2} = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2}$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{150 \cdot 348}{200 \cdot 313} = 0.834$$
$$V_2 = 400 m/seg \sqrt{0.834} = 365.3 m/seg$$
$$V_2 = 365.3 \frac{m}{seg}$$