INACAP
www.inacap.cl

AREA ELECTRICIDAD ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

GUÍA: UNIDAD 3, SUCESIONES

Área de EET

SUCESIONES

3.1 SUCESIONES

3.1.1 Definiciones

Definición 1: Una **sucesión numérica** es toda función

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathrm{IN} \rightarrow \mathrm{IR} \\ \quad i \rightarrow a_i \end{array}}$$

Una sucesión genérica se simboliza por a_1, a_2, a_3, ..., a_n , ... o más simplificadamente $\{a_n\}$. En la que el subíndice denota, con toda exactitud, el lugar que cada término ocupa en la misma. Los subíndices recorren los números naturales porque una sucesión tiene tantos elementos como números naturales hay; es decir, una sucesión tiene una cantidad infinita numerable de términos.

Así, a_5 es el quinto término de la sucesión.

Definición 2: El **término general** de una sucesión es una fórmula que permite conocer el valor de un determinado término si se conoce previamente el lugar que ocupa en la misma. Por costumbre, al término general de una sucesión se le denota por a_n y se hablará de término enésimo.

3.1.2 Operatoria con sucesiones

Operatoria con sucesiones :

Sean a_n y b_n dos sucesiones, entonces:

1) **Adición de sucesiones:**

$a_n + b_n = (a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), \ldots\ldots\ldots (a_n + b_n)$

2) **Sustracción de sucesiones:**

$a_n - b_n = (a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3), \ldots\ldots\ldots\ldots (a_n - b_n)$

3) **Multiplicación de sucesiones:**

$a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \cdot b_n$

4) **División de sucesiones:**

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n}, \quad b_n \neq 0$$

3.1.3 Clasificación de sucesiones

Sucesión monótonas y estrictas:

Sea $\{ a_n \}$: sucesión numérica, entonces:

1) $\{a_n\}$ es una sucesión **monótona creciente**, o es una sucesión no decreciente, si y sólo si: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\ n \in IN$

2) $\{a_n\}$ es una sucesión **estricta creciente**, si y sólo si: $a_n < a_{n+1} \quad \forall\ n \in IN$

3) $\{a_n\}$ es una sucesión **monótona decreciente**, o es una sucesión no creciente, si y sólo si: $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\ n \in IN$

4) $\{a_n\}$ es una sucesión **estricta decreciente**, si y sólo si:
$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\ n \in IN$

5) $\{a_n\}$ es una **sucesión oscilante**, si y sólo si no cumple alguna de las cuatro definiciones anteriores.

Sucesiones acotadas:

Sea $\{ a_n \}$: sucesión numérica, entonces:

1) $\{a_n\}$ es una sucesión **acotada superiormente** (en IR), si y sólo si: $\exists\, k \in IR$ tal que $a_n \leq k$, $\forall\, n \in IN$

2) $\{a_n\}$ es una sucesión **acotada inferiormente** (en IR), si y sólo si: $\exists\, k \in IR$ tal que $k \leq a_n$, $\forall\, n \in IN$

3) $\{a_n\}$ es una sucesión **acotada** (en IR), si y sólo si está acotada superior e inferiormente. Es decir, $\exists\, k \in IR^+$ tal que $|a_n| \leq k$, $\forall\, n \in IN$

3.1.4 Sucesión convergentes o divergentes.

Definición 1: Se denominan sucesiones convergentes las que tienden a un único número real.

Ejemplo 1: En la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\cdots$ cuyo término general es, $a_n = \frac{1}{n}$

al aumentar n (el número de orden), a_n está cada vez más próximo a cero:

$$a_5 = \frac{1}{5} \; ; \quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001 \; ; \quad a_{1000\,000} = \frac{1}{1000\,000} = 0{,}000001$$

Ejemplo 2: La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \to \infty$ es:

Con la ayuda de una calculadora se pueden calcular algunos términos de esta sucesión:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

:
:

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048138$$

:
:

$$a_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}7169239$$

:
:

$$a_{1.000.000} = \left(1 + \frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000} = 2{,}7182805$$

El límite de esta sucesión es el número irracional **e = 2,7182818...**

Definición 3: Una sucesión es **divergente** si los términos se aproximan cada vez más a infinito o a menos infinito ($-\infty$, $+\infty$).
Estas sucesiones se caracterizan por crecer en forma indefinida**.**

Ejemplo 3: En la sucesión $\{a_n\}$ cuyo término general es, $a_n = 2^n$

2,4,8,16,32,........................., 1.048.576,............. tiende cada vez hacia un valor mas grande.

3.2 SUMATORIAS

3.2.1 Concepto.

Definición 1: Si f(i) con i $\in$ **Z** ; m, m+1, m + 2,......p: números enteros consecutivos, entonces:

$$\sum_{i=m}^{i=p} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + ...+ f(p)$$

es la suma o sumatoria de los f(i) desde i = m a i = p

$\sum$: letra griega sigma mayúscula.

$\sum_{i=m}^{i=p}$: símbolo de la sumatoria.

f(i) : argumento de la sumatoria, donde i toma valores consecutivos de **Z** .

Los i de $\sum_{i=m}^{i=p}$ son los índices de las sumatorias, indican que i debe ser reemplazado en el argumento f(i) de la sumatoria sucesivamente por los números enteros consecutivos: m, m+1, ..., p, y los números reales obtenidos deben ir sumandose. También se usan otras letras minúsculas para los índices de la sumatoria: j, k, l, m,....que incluso a veces no se anotan cuando no hay peligro de confusión.

Ejemplo 1: $\sum_{i=3}^{i=7}(2i+1) = \sum_{i=3}^{7}(2i+1) = \sum_{3}^{7}(2i+1)$

$$=(2\cdot3+1)+(2\cdot4+1)+(2\cdot5+1)+(2\cdot6+1)+(2\cdot7+1) = 55$$

Ejemplo 2: $\sum_{-4}^{-1}\frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{1+(-4)^2} + \frac{1}{1+(-3)^2} + \frac{1}{1+(-2)^2} + \frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{73}{85}$

3.2.2 Operaciones elementales

Teoremas:

Sean m, q, p, s $\in$ Z ; m < p < q, entonces:

1) $\sum_{i=m}^{q} k\, f(i) = k \sum_{i=m}^{q} f(i) \qquad k \in \Box$

2) $\sum \left(f(i) + g(i) - h(i) \right) = \sum f(i) + \sum g(i) - \sum h(i)$

3) $\sum_{i=m}^{q} k = (q - m + 1) \cdot k$

4) $\sum_{m}^{m} f(i) = f(m)$

5) $\sum_{i=m}^{m} k = k$

6) $\sum_{i=m}^{q} f(i) = \sum_{i=m}^{p} f(i) + \sum_{i=p+1}^{q} f(i)$

7) $\sum_{i=m}^{i=q} f(i) = \sum_{i=m-s}^{i=q-s} f(i+s)$

8) $\sum_{i=m}^{i=q} f(i) = \sum_{i=m+s}^{i=q+s} f(i-s)$

9) $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1} \right) = a_n - a_0$ Propiedad telescópica

3.2.3 Sumatoria de una sucesión:

A veces es posible encontrar una formula o expresión general para la sumatoria de los términos de una sucesión.

- **Sumatoria de los n primeros números naturales**

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2$$

$$\sum_{1}^{n} (1+i)^2 = \sum_{1}^{n} \left(1 + 2i + i^2\right)$$

$$\sum_{2}^{n+1} i^2 = \sum_{1}^{n} 1 + \sum_{1}^{n} 2i + \sum_{1}^{n} i^2$$

$$\sum_{2}^{n+1} i^2 - \sum_{1}^{n} i^2 = n + 2\sum_{1}^{n} i$$

$$2\sum_{1}^{n} i = \sum_{2}^{n+1} i^2 - \sum_{1}^{n} i^2 - n$$

$$2\sum_{1}^{n} i = \sum_{2}^{n} i^2 + (n+1)^2 - \sum_{2}^{n} i^2 - 1 - n$$

$$2\sum_{1}^{n} i = n^2 + n$$

$$\sum_{1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.3 PROGRESIONES

Las progresiones constituyen el ejemplo más sencillo del concepto de sucesión. Desde los albores de la historia de las matemáticas se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética comercial.

El estudio de las progresiones aritméticas es paralelo al de las geométricas por cuanto las propiedades de estas últimas emanan de las primeras sin más que convertir las sumas en productos, diferencias en cocientes, y el producto por un número natural en una potencia de exponente natural.

El origen de las progresiones, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. No obstante, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático concreto.

Es conocido el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, propuesto por los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las progresiones geométricas.

En el libro IX de *Los Elementos* de Euclides aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica. Bhaskara, matemático hindú del siglo XII, plantea en su más conocida obra, el *Lilavati* , diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

3.3.1 Progresiones Aritméticas

Definición 1: Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada elemento se obtiene sumando al anterior un número fijo llamado diferencia, que se representa por la letra d .Así, si $\{a_n\}$ es una progresión aritmética, se verifica que:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$$

Definición 2: Término general de una progresión aritmética esta dado por

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\, d}$$

La fórmula del término general de una progresión aritmética $\{a_n\}$ se encuentra sin más que observar que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2\, d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

....

Nótese que en todos los casos el término correspondiente es la suma de dos cantidades:

- La primera es siempre a_1
- La segunda es el producto $(n - 1)\, d$

Esto es: $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$

Propiedades:

1) Si la diferencia de una progresión aritmética es positiva, la progresión es creciente; es decir cada término es mayor que el anterior.

2) Si la diferencia de una progresión aritmética es cero, la progresión es constante, es decir, tiene todos sus términos iguales.

3) Si la diferencia de una progresión aritmética es negativa, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que el anterior.

Términos equidistantes de una progresión aritmética

El interés de las progresiones aritméticas no acaba en el cálculo del término general. Estudiando más detalladamente algunos modelos de progresiones aritméticas, se pueden deducir propiedades de enorme interés:

En cada uno de estos tres modelos se han elegido al azar dos parejas distintas de términos, de forma que la suma de los subíndices es igual en ambos casos. Sumando el valor de los términos en cada una de las dos parejas, se observa que los resultados coinciden.

Esto conduce a la pregunta de si, elegidas cualesquiera dos parejas de términos cuyas sumas de subíndices coincidan, también coincidirán las sumas de sus términos correspondientes.

Dicho en lenguaje matemático, cabe preguntarse si será cierto que el hecho de ser $r + s = u + v$, se desprende la igualdad $a_r + a_s = a_u + a_v$.

La respuesta es afirmativa, y este resultado se conoce con el nombre de propiedad de los **términos equidistantes** de una progresión aritmética.

Propiedad 1:

Si a_n es una progresión aritmética de diferencia d y $r + s = u + v$, entonces $a_r + a_s = a_u + a_v$.

Definición 3: Interpolación de medios aritméticos

Interpolar (de inter , entre y polos) n números entre otros dos conocidos a y b; consiste en construir una progresión aritmética $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, b$.

Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reciben el nombre de medios aritméticos.

Para resolver este problema basta con conocer la diferencia que ha de tener la progresión, la cual se deduce sin más que tener en cuenta dos cosas:

1) La sucesión tiene $n + 2$ términos
2) El primer término es a y el término a_{n+2} es b.

Aplicando la fórmula del término general de una progresión aritmética, se tiene que:

$$\boxed{b = a + [(n + 2) - 1] \cdot d}$$

Una vez conocido el valor de la diferencia,

a_1 se obtiene como la suma de a y d ;

a_2 es la suma de a_1 y d , y así sucesivamente.

Las series numéricas:

Definición 4: Se denomina serie a la suma de los términos consecutivos de una sucesión.

La serie se denomina finita o infinita, según se considere un numero finito o infinito de términos de la sucesión, respectivamente.

Serie aritmética finita:

Definición 5: La serie aritmética finita corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética (P.A.).

Calculo de la suma de los n primeros términos de la P.A.

Sea $\mathbf{S_n}$ la suma de los n primeros términos de la P.A.

Entonces:

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + ...+ [a_1 + (n-2) d] + [a_1 + (n-1) d]$

Escribimos esta misma suma en orden inverso:

$S_n = [a_1 + (n-1) d] + [a_1 + (n-2) d] +......................+(a_1 + d) + a_1$

sumando miembro a miembro y termino a termino las igualdades anteriores:

$$2S_n = \underbrace{[2a_1 + (n-1) d] + [2a_1 + (n-1) d] +...........+ [2a_1 + (n-1) d]}_{n \text{ veces}}$$

$2S_n = n [2a_1 + (n-1) d]$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\,d\right]}$$

De donde, se deduce también una expresión equivalente,

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\,d}_{a_n}\right]$$

luego $\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]}$ Suma de los n primeros términos de una P.A.

Ejemplo 1: La sucesión de los números naturales: 1, 2, 3, 4,............ es una progresión aritmética con $u_1 = 1$, $d = 1$.

$$1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = S_n$$

3.3.2 Progresiones Geométricas

Definición 1: Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada elemento se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo llamado razón, y que se representará por la letra *r* .

Así, si $\{a_n\}$ es una progresión geométrica, se verifica que:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot r}$$

Definición 2: Término general de una progresión geométrica esta dado por :

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

La fórmula del término general de una progresión geométrica $\{a_n\}$ se encuentra sin más que observar que:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot r = (a_1 \cdot r^3) \cdot r = a_1 \cdot r^4$$

....

Nótese que, en todos los casos, el término correspondiente es el producto de dos cantidades:

- La primera es siempre a_1
- La segunda es una potencia de base r y exponente un cierto número, que se obtiene restando una unidad al subíndice

Esto es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Propiedad 2:

1) Si la razón de una progresión geométrica es mayor que uno, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que el anterior.

2) Si la razón de una progresión geométrica está comprendida entre cero y uno, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que el anterior.

2) Si la razón de una progresión geométrica es igual a uno, la progresión es constante, es decir, tiene todos los términos iguales.

4) Si la razón de una progresión geométrica es menor que cero, la progresión es alterna, es decir, sus términos son alternativamente positivos y negativos.

Nótese la similitud que hasta el momento se da entre las progresiones aritméticas y las geométricas. Se seguirán comprobando todas las propiedades, sin más que cambiar sumas por productos.

Términos equidistantes de una progresión geométrica

La analogía observada hasta ahora conduce a la pregunta de si, elegidas cualesquiera dos parejas de términos cuyas sumas de subíndices coincidan, también coincidirán los productos de sus términos correspondientes.

Dicho en lenguaje matemático, cabe preguntarse si será cierto que del hecho de ser $t + s = u + v$, se desprende la igualdad $a_t \cdot a_s = a_u \cdot a_v$.

La respuesta es afirmativa, y este resultado se conoce con el nombre de propiedad de los términos equidistantes de una progresión geométrica.

Propiedad 3:

Si en una progresión geométrica $t + s = u + v$, entonces

$$a_t \cdot a_s = a_u \cdot a_v$$

Definición 3: **Interpolación de medios geométricos**
Interpolar n medios geométricos entre otros dos conocidos a y b, consiste en construir una progresión geométrica

$a, a_1, a_2, ..., a_n, b$.

Para resolver este problema basta con conocer la razón que ha de tener la progresión, la cual se deduce sin más que tener en cuenta dos cosas:

1) La sucesión tiene $n + 2$ términos.
2) El primer término es a y el $n + 2$ es b.

Aplicando la fórmula del término general de una progresión geométrica se tiene que:

$b = a \cdot r^{n+2-1}$, de donde

Una vez conocido el valor de la razón,
a_1 se obtiene como el producto de r por a;
a_2 es el producto de a_1 por r , y así sucesivamente.

Serie geométrica finita:

Definición 4: La serie geometrica finita corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geometrica (P.G.).

Calculo de la suma de los n primeros términos de la P.G.

Sea $\mathbf{S_n}$ la suma de los n primeros términos de la P.G.
Entonces:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + ...+ a_1 \cdot r^{n-1}$$

Multiplicando por r

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + ...+ a_1 \cdot r^n$$

restando estas dos igualdades obtenemos:

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n$$

$$S_n (1 - r) = a_1 \left(1 - r^n\right)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$ Suma de los n primeros términos de una P.G.

Serie geométrica infinita:

La progresión geométrica $\{a\, r^n\}_0$ da origen a la serie geométrica:

$$\sum_0^{\infty} a\, r^n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + a \cdot r^4 ....$$

Teorema 1: La serie geométrica es convergente si y solo si $|r| < 1$, y en este caso:

$$\sum_{0}^{\infty} a\,r^{n} = a + a \cdot r + a \cdot r^{2} + \ldots\ldots = \frac{a}{1-r}$$

3.3.3 Progresiones armónica

Definición 1: Una **progresión es armónica (P.H)** si todos los recíprocos de sus términos forman una progresión aritmética.

Si la sucesión a_1, a_2, a_3,....es una progresión aritmética de términos distintos de cero, entonces la correspondiente progresión armónica que designaremos por PH es: $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_4}$................

Los problemas relativos a las progresiones armónicas se resuelven considerando la P.A. correspondiente, ya que no existen formulas generales para el termino enésimo o para la sumatoria de sus n primeros términos.

3.4 EL BINOMIO DE NEWTON

3.4.1 Triángulo de Pascal

Una de aportes más importantes de este genial matemático es el conocido binomio de Newton, una fórmula que permite desarrollar y calcular cualquier expresión algebraica de la forma $(a + b)^n$, en la que a es un monomio, b es otro monomio y n un número natural. Si calculamos multiplicando monomios las primeras potencias de este binomio tendríamos los siguientes resultados:

$(a + b)^0 = 1a^0b^0$ 1

$(a + b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$ 1 1

$(a + b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$ 1 2 1

$(a + b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$ 1 3 3 1

$(a + b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$ 1 4 6 4 1

$(a + b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$ 1 5 10 10 5 1

Se observa que los coeficientes se pueden ordenar. Esta figura se llama el triangulo de pascal Newton obtuvo la fórmula general

Siendo

n =0										1									
n = 1									1		1								
n = 2								1		2		1							
n = 3							1		3		3		1						
n = 4						1		4		6		4		1					
n = 5					1		5		10		10		5		1				
n = 6				1		6		15		20		15		6		1			
n = 7			1		7		21		35		35		21		7		1		
n = 8		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
n = 9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Se observa lo siguiente:

Todas las filas comienzan y terminan con 1

Cada elemento, excepto el primero y el último, se obtiene sumando los dos que están en la fila superior

El triángulo es simétrico.

Los números de cada fila coinciden con los coeficientes del binomio $(a + b)^n$.

Podemos representar el triángulo de esta forma, girándolo 45º:

n = 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n = 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
n = 2	1	3	6	10	15	21	28	36		
n = 3	1	4	10	20	35	56	84			
n = 4	1	5	15	35	70	126				
n = 5	1	6	21	56	126					
n = 6	1	7	28	84						
n = 7	1	8	36							
n = 8	1	9								
n = 9	1									

Esta representación se denomina rectángulo de Tartaglia.

Cada número de esta tabla es igual a la suma de los números contenidos en la fila anterior, desde su primera columna hasta la misma columna del número que queremos calcular .

n =0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n = 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
n = 2	1	3	6	10	15	21	28	36		
n = 3	1	4	10	20	35	56	84			
n = 4	1	5	15	35	70	126				
n = 5	1	6	21	56	126					
n = 6	1	7	28	84						
n = 7	1	8	36							
n = 8	1	9								
n = 9	1									

Cada número de esta tabla es igual a la suma de los números contenidos en la columna anterior, desde su primera fila hasta la misma fila del número que queremos calcular.

n =0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n =1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
n =2	1	3	6	10	15	21	28	36		
n =3	1	4	10	20	35	56	84			
n =4	1	5	15	35	70	126				
n =5	1	6	21	56	126					
n =6	1	7	28	84						
n =7	1	8	36							
n =8	1	9								
n =9	1									

Cada número de esta tabla es igual a la suma de los números contenidos en las filas y columnas anteriores, desde su primera fila-columna hasta la fila-columna anterior del número que queremos calcular.

n = 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n = 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
n = 2	1	3	6	10	15	21	28	36		
n = 3	1	4	10	20	35	56	84			
n = 4	1	5	15	35	70	126				
n = 5	1	6	21	56	126					
n = 6	1	7	28	84						
n = 7	1	8	36							
n = 8	1	9								
n = 9	1									

Los números de la fila n = 2 son los números triangulares. En general cada fila representa números poligonales

	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 9
n = 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n = 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
n = 2	1	3	6	10	15	21	28	36		
n = 3	1	4	10	20	35	56	84			
n = 4	1	5	15	35	70	126				
n = 5	1	6	21	56	126					
n = 6	1	7	28	84						
n = 7	1	8	36							
n = 8	1	9								
n = 9	1									

3.4.2 Coeficientes Binomiales

Debido a lo tedioso de estos cálculos se hace necesario el uso de alguna expresión que nos permita adquirir los binomios de mayor potencia.

Coeficientes binomiales son los coeficientes de cada uno de los términos del desarrollo ordenado de un binomio de la forma $(a + b)^n$

Se simboliza mediante la expresión $\binom{n}{k}$ que se lee " n sobre k "

Los coeficientes binomiales corresponden a los números que forman el Triángulo de Pascal

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n!}; \quad n,\ k \in \mathbf{Z}^+ ;\ n \geq k$$

Es la combinatoria, se lee, de n elementos tomados r,

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (n-1) \cdot n$ conocido como factorial de n.

Donde $0! = 1$ y $1! = 1$ por definición.

3.4.4 El desarrollo del Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{n}{k}b^n$$

El termino general del desarrollo del binomio $(a+b)^n$ que representa a cada uno de los términos es: $\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$

El desarrollo del **Binomio de Newton** se representa por:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k \;;\; a\neq 0,\ b\neq 0;\quad n,\ k \in \mathbf{Z}^+ \;;\; n\geq k}$$

Ejercicios Resueltos

1. Consideremos la siguiente situación: 2 ciclistas se preparan para una competencia: Pablo comienza con 1000 metros, y todos los días agrega 1000 metros más, en tanto que Emilio empieza con 200 metros y cada día duplica lo hecho el día anterior. Cuántos metros recorre cada uno el décimo día?

   Solución: Pablo aumenta el recorrido según una progresión aritmética, por lo tanto $a_n = 1000 + (10 - 1).\ 1000 = 10000$

   En cambio Emilio aumenta su recorrido según una progresión geométrica, por lo tanto $a_n = 200.\ 2^{10-1} = 102\ 400$

   Se puede ver en una tabla

	Pablo	Emilio
1er día	1000	200
2do día	2000	400
3er día	3000	800
4to día	4000	1600
5to día	5000	3200
6to día	6000	6400
7mo día	7000	12800
8vo día	8000	25600
9no día	9000	51200
10mo día	10000	102400

   Respuesta: El décimo día Pablo recorre 10000 metros y Emilio 102400 metros

2.- Hallar el término 11º y el término enésimo de la progresión aritmética 4, 7, 10, ...

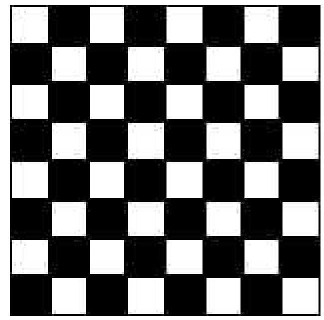
En esta sucesión, $a_1 = 4$ y $r = 3$, luego:

$a_{11} = 4 + (11-1).3 = 4 + 10.3 = 34$

El enésimo término será:

$a_n = 4 + 3(n-1) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$

3.- Leyenda sobre el tablero del ajedrez



El ajedrez es un juego antiquísimo. Cuenta muchos siglos de existencia y por eso no es de extrañar que estén ligadas a él diferentes leyendas, cuya veracidad es difícil comprobar debido a su antigüedad. Precisamente quiero contar una de estas leyendas. Para comprenderla no hace falta saber jugar al ajedrez; basta simplemente saber que el tablero donde se juega está dividido en 64 escaques (casillas negras y blancas, dispuestas alternativamente).

El juego del ajedrez fue inventado en la India. Cuando el rey hindú Sheram lo conoció, quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él son posibles. Al enterarse de que el inventor era uno de sus súbditos, el rey lo mandó llamar con objeto de recompensarle personalmente por su acertado invento.

El inventor, llamado Seta, se presentó ante el soberano. Era un sabio vestido con modestia, que vivía gracias a los medios que le proporcionaban sus discípulos.

– Seta, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado –dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

– Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado –continuó diciendo el rey–. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.

Seta continuó callado.

– No seas tímido –le animó el rey-. Expresa tu deseo. No escatimaré nada para satisfacerlo.

– Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Seta se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.

– Soberano –dijo Seta–, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero del ajedrez.

– ¿Un simple grano de trigo? –contestó admirado el rey.

– Sí, soberano. Por la segunda casilla ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32…

– Basta –le interrumpió irritado el rey–. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo; por cada casilla doble cantidad que por la precedente. Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa, menosprecias, irreverente, mi benevolencia. En verdad que, como sabio que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate. Mis servidores te sacarán un saco con el trigo que necesitas.

Seta sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio.

Durante la comida, el rey se acordó del inventor del ajedrez y envió para que se enteraran de si habían entregado ya al reflexivo Seta su mezquina recompensa.

– Soberano, tu orden se está cumpliendo –fue la respuesta–. Los matemáticos de la corte calculan el número de granos que le corresponde.

El rey frunció el ceño. No estaba acostumbrado a que tardaran tanto en cumplir sus órdenes.

Por la noche, al retirarse a descansar, el rey preguntó de nuevo cuánto tiempo hacía que Seta había abandonado el palacio con su saco de trigo.

– Soberano –le contestaron–, tus matemáticos trabajan sin descanso y esperan terminar los cálculos al amanecer.

– ¿Por qué va tan despacio este asunto? –gritó iracundo el rey–. Que mañana, antes de que me despierte, hayan entregado a Seta hasta el último grano de trigo. No acostumbro a dar dos veces una misma orden.

Por la mañana comunicaron al rey que el matemático mayor de la corte solicitaba audiencia para presentarle un informe muy importante.

El rey mandó que le hicieran entrar.

– Antes de comenzar tu informe –le dijo Sheram–, quiero saber si se ha entregado por fin a Seta la mísera recompensa que ha solicitado.

– Precisamente para eso me he atrevido a presentarme tan temprano –contestó el anciano–. Hemos calculado escrupulosamente la cantidad total de granos que desea recibir Seta. Resulta una cifra tan enorme…

– Sea cual fuere su magnitud –le interrumpió con altivez el rey– mis graneros no empobrecerán. He prometido darle esa recompensa y, por lo tanto, hay que entregársela.

– Soberano, no depende de tu voluntad el cumplir semejante deseo. En todos tus graneros no existe la cantidad de trigo que exige Seta. Tampoco existe en los graneros de todo el reino. Hasta los graneros del mundo entero son insuficientes. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la Tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren los lejanos desiertos del Norte. Que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo, y toda la cosecha obtenida en estos campos ordena que sea entregada a Seta. Sólo entonces recibirá su recompensa.

El rey escuchaba lleno de asombro las palabras del anciano sabio.

– Dime, cuál es esa cifra tan monstruosa –dijo reflexionando–.

– ¡Oh, soberano! Dieciocho trillones cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones setenta y tres mil setecientos nueve millones quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince.

Verifica si el resultado es correcto

Respuesta:

Para poder convencernos, hagamos el cálculo. Si se comienza por la unidad, hay que sumar las siguientes cifras: 1, 2, 4, 8, etc. El resultado obtenido tras 63 duplicaciones sucesivas nos mostrará la cantidad correspondiente a la casilla 64, que deberá recibir el inventor. Podemos hallar fácilmente la suma total de granos, si duplicamos el último número, obtenido para la casilla 64, y le restamos una unidad. Es decir, el cálculo se reduce simplemente a multiplicar 64 veces seguidas la cifra dos:

2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2, y así sucesivamente 64 veces.

Con objeto de simplificar el cálculo, podemos dividir estos 64 factores en seis grupos de 10 factores 2 y uno de 4 factores 2. La multiplicación sucesiva de 10 factores 2, como es fácil comprobar, es igual a 1024 y la de 4 factores 2 es de 16.

Por lo tanto, el resultado que buscamos es equivalente a:

1024 x 1024 x 1024 x 1024 x 1024 x 1024 x 16

Multiplicando 1024 x 1024 obtenemos 1.048.576

Ahora nos queda por hallar:

1.048.576 x 1.048.576 x 1.048.576 x 16

Restando del resultado una unidad, obtendremos el número de granos buscado:

18.446.744.073.709.551.615

Para hacernos una idea de la inmensidad de esta cifra gigante, calculemos aproximadamente la magnitud que debería tener el granero capaz de almacenar semejante cantidad de trigo. Es sabido que un metro cúbico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12.000.000.000.000 m^3, o lo que es lo mismo, 12.000 km^3. Si el granero tuviera 4 m de alto y 10 m de ancho, su longitud debería de ser de 300.000.000 km, o sea, el doble de la distancia que separa la Tierra del Sol.

150.000.000 km

El rey hindú, naturalmente, no podía entregar semejante recompensa. Sin embargo, de haber estado fuerte en matemática, hubiera podido librarse de esta deuda tan gravosa. Para ello le habría bastado simplemente proponer a Seta que él mismo contara, grano a grano, el trigo que le correspondía.

¿Cuánto tiempo crees que hubiera tardado, en hacerlo?

Si Seta, puesto a contar, hubiera trabajado noche y día, contando un grano por segundo, en el primer día habría contado 86.400 granos. Para contar un millón de granos habría necesitado, como mínimo, 10 días de continuo trabajo. Un metro cúbico de trigo lo habría contado aproximadamente en medio año, lo que supondría un total de 5 cuartos. Haciendo esto sin interrupción durante 10 años, habría contado 100 cuartos como máximo. Por consiguiente, aunque Seta hubiera consagrado el resto de su vida a contar los granos de trigo que le correspondían, habría recibido sólo una parte ínfima de la recompensa exigida.

EJERCICIO PROPUESTO

1.- En una PA el 5^to^ término es 11/3, el 7^mo^ es 7. Si tiene 13 términos calcular: a) el primero; b) el último c) la suma de los trece. Rta: a) -3 b) 17 c) 91

2.- En una PG el 8^vo^ término es ¼ y el 9^no^ 0,125. Si tiene 20 términos calcular: a) el primero; b) el último c) la suma de los veinte. Rta: a) 32 b) $1/2^{14}$ c) $2^6 - 2^{-14}$

3.- Un joven ahorra cada mes $5 más que el mes anterior. En 5 años sus ahorros sumarán $ 9330.
Determinar
a) lo que ahorró el primer mes.
b) lo que ahorró el último mes.
Rta: a) $8   b) $303

4.- Un padre proyecta colocar en un baúl $ 100 el día que su hijo cumpla un año, e ir duplicando la cantidad sucesivamente en todos los cumpleaños. ¿Cuánto tendrá que colocar el día que su hijo cumpla 18 años? ¿Cuánto habrá en el baúl luego? Rta: a) $13107200 b) $26214300

5.- Una máquina costó $ 9000. Se calcula que al final de cada año sufre una depreciación igual al 15 % del valor que tiene al principio de ese año. ¿Cuál será su valor al cabo de 5 años? Rta: $3993,35

6.- El número de bacterias de un cultivo está aumentando un 25 % cada hora. Si al principio había 300000 ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 5 horas? Rta: 915527,34

7.- El valor de un auto se deprecia 18 % cada año. Su precio original fue $ 19000. ¿Cuánto valdrá al cabo de 9 años? Rta: $3184,77

8.- Una ciudad tiene 600000 habitantes. La tasa de crecimiento de esa población es 8 % anual. ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de tres años? Rta: 755827,2

9.- El valor de una mercadería se deprecia 4 % cada año. Su precio original fue de $ 19000. ¿Cuánto valdrá al cabo de 4 años? Rta $16137,58

10.-La población de una ciudad aumenta en 35 % cada 10 años. Si su población en 1940 era de 40000 habitantes, ¿cuál será su población en el año 2000? Rta: 242137,8