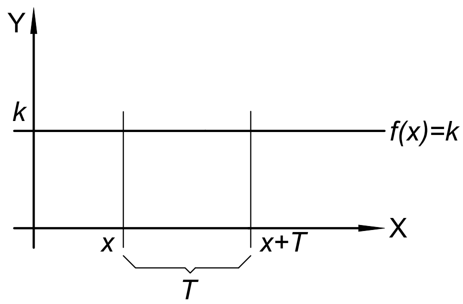
SERIES DE FOURIER

Cuestiones previas: la Serie de Fourier es un tipo especial de series funcionales en las que sus términos son funciones trigonométricas (*sen* y *cos*) de variable real *(x)*.
Se las utiliza especialmente en el estudio de fenómenos periódicos porque este tipo de series permiten representar funciones periódicas y por eso y por eso utilizaremos funciones de este tipo.

Definición de Funciones Periódicas: una función $f(x)$ se dice periódica si pertenece a un número real $T \neq 0$, tal que se verifique que $f(x)=f(x+T)$ para todo x del dominio de definición $f(x)$. T se denomina período de $f(x)$.

Propiedades de las funciones periódicas:
1) Si T es un período de f(x), entonces cualquier múltiplo entero de T es un período de $f(x)$. *T período* → *(n.T) período*, $n \in N$.
2) La suma, resta, producto y cociente de funciones periódicas que tienen el mismo período T, es también una función periódica del mismo período.
3) Si $f(x)$ es una constante, entonces cualquier número real es un período de ella.



4) El producto de una constante por una $f(x)$ periódica de período T, es también periódica y de período T. Ejemplo: $\underbrace{\text{sen } x \text{ y } 2 \text{ sen } x.}_{\text{SI}}$ ¡ojo!→ $\underbrace{\text{sen } x \text{ y } \text{sen } (2x)}_{\text{NO}}$

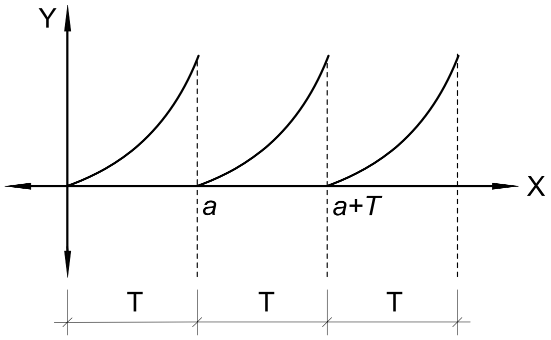
Las funciones periódicas más sencillas son las trigonométricas (seno, coseno, tangente)
En trigonometría se demuestra que sen x = sen $(x+2\pi)$ → $\underbrace{T = 2\pi}_{\text{Período}}$

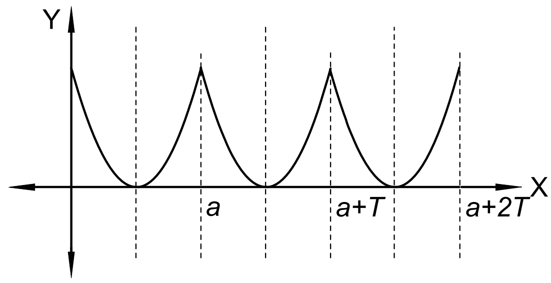
También se determina que:

$$\cos x = \cos (x+2\pi) \rightarrow T = 2\pi$$
$$tg\, x = tg\, (x+\pi) \rightarrow T = \pi$$

Se denomina período de una función periódica al menor período de dicha función. Por ejemplo de *sen x* → $T = 2\pi$

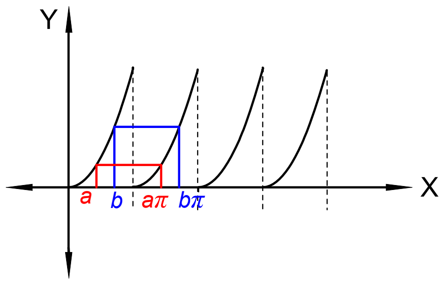
Gráfica de una función periódica: dada la definición, de ella se deduce que para trazar la gráfica de una función periódica basta con trazar la parte de ella que corresponde a un intervalo de longitud igual al período y luego se repite ese trazado en intervalos consecutivos de lo longitud igual al período.





Integral definida de una función periódica: si una función *f(x)* es periódica y demás es integrable sobre un intervalo cualquiera de longitud igual al período, entonces es integrable sobre cualquier otro intervalo de la misma longitud y el valor de la integral sobre cualquiera de los intervalos es el mismo.

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$$



Sistema trigonométrico fundamental: se denomina sistema trigonométrico fundamental al conjunto de infinitas funciones siguientes.

$$\boxed{\{\,1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots \cos nx, \operatorname{sen} nx\,\}\ n \in N}$$

Este conjunto tiene la particularidad siguiente: todas las funciones que son sus elementos tienen período común T = 2π

En efecto:

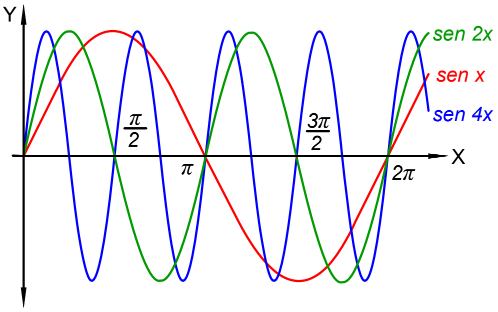
$f(x) = 1$ $\quad T \in R$ *es un período* $\rightarrow T = 2\pi$ es un período

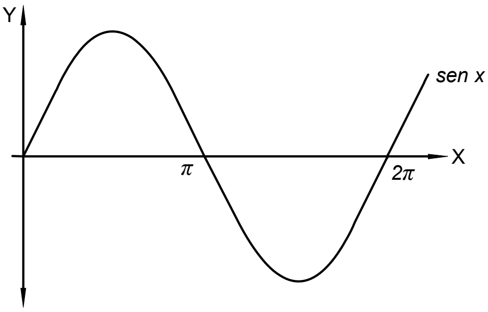
Para analizar las demás veamos que:

sen nx, n Є R, tiene período fundamental $T_n = \dfrac{2\pi}{n}$

porque $\operatorname{sen} n\left(x + \dfrac{2\pi}{n}\right) = \operatorname{sen}(nx + 2\pi) = \operatorname{sen} nx$

Entonces para todas estas funciones senoidales podemos ver que 2π es múltiplo del período fundamental común de *sen nx* para todo *n*. De la misma manera puede demostrarse para el *cos nx*. Todos los elementos tienen como período 2π.





<u>Propiedades del sistema trigonométrico fundamental:</u>

1) Goza de la propiedad de ser ortogonal sobre cualquier intervalo de longitud $T = 2\pi$. Dado un sistema de funciones: $\{Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x), \ldots Q_n(x); \quad n \in R$ tal que todas ellas son integrables sobre un intervalo común *[a,b]*, se dice que ese sistema es ortogonal sobre el intervalo *[a,b]* si y sólo si se verifica que la integral definida:

(I) $$\int_a^b Q_i(x)\,.\,Q_j(x)\,.\,dx = 0 \quad \text{para todo } i \neq j$$

y que además la integral: $\int_a^b Q_i(x)\,.\,dx \neq 0 \quad \text{para todo } i \neq j$

(II) $$\int_a^b Q_i(x)\,.\,Q_j(x)\,.\,dx \neq 0 \quad \text{para todo } i = j$$

En efecto, el sistema trigonométrico fundamental {1, cos x, sen x, cos 2x, sen 2x,…cos nx, sen nx } $n \in N$ es tal que:

(1) $$\int_0^{2\pi} \cos nx\,.\,dx = 0 \quad n \neq 0 \ (i \neq j) \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,.\,dx = 0 \quad n \neq 0 \ (i \neq j) \quad \text{para todo } n \neq 0$$

Además:

(2) $$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,.\,dx = \pi \quad (i = j) \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,.\,dx = \pi \quad (i = j) \quad \text{para todo } n \neq 0 \qquad n = m$$

Además también se cumplen:

(3) $$\int_0^{2\pi} \cos mx\,.\,\operatorname{sen} mx\,.\,dx = 0 \quad \text{para todo } n \text{ y } m$$

(4) $$\int_0^{2\pi} \cos mx\,.\,\cos mx\,.\,dx = 0 \quad \leftarrow \text{para todo } n \text{ y } m \rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx\,.\,\operatorname{sen} mx\,.\,dx = 0$$

(1), (2), (3) y (4) verifican la propiedad enunciada.
(1), (2), (3) y (4) también se verifican en intervalos $[a, a+2\pi]$ $\quad a \in R$.

Luego utilizaremos estas propiedades en la Serie de Fourier.

Polinomio trigonométrico de orden *"n"*: *recibe este nombre la expresión siguiente:*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1.\cos x + b_1.\operatorname{sen} x + a_2.\cos 2x + b_2.\operatorname{sen} 2x + \ldots + a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx$$

Podemos observar en esta expresión:

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$
$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$

Las funciones que componen este polinomio trigonométrico son todas funciones trigonométricas de período 2π. Por lo tanto el polinomio es una función periódica del tipo $T = 2\pi$

Serie trigonométrica: se denomina así a la serie fundamental siguiente:

$$\frac{a_0}{2} + a_1.\cos x + b_1.\operatorname{sen} x + a_2.\cos 2x + b_2.\operatorname{sen} 2x + \ldots + a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx \qquad (2)$$

Puede observarse que la suma parcial enésima de esta serie es el polinomio trigonométrico de orden n ($S_n(x)$); y como este, dijimos que es una función periódica de período 2π. Si suponemos que esa serie es convergente, entonces su suma debería también ser una función periódica de período 2π. Llamaremos $f(x)$ a esa suma. Podemos escribir:

$$f(x) = \lim_{x\to\infty} S_n(x); \qquad f(x) = f(x + 2\pi);$$

Podemos escribir también:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx$$

Hemos dicho que $f(x)$ debía ser periódica de período 2π. Como conclusión podemos decir que:
Si una serie trigonométrica representa una función $f(x)$, entonces necesariamente esa función debe ser periódica de período 2π.

Serie de Fourier de una función periódica *f(x)=f(x+2π)*:

Definición: sea $f(x)$ una función integrable en un intervalo de longitud 2π, y además periódica de período 2π. La serie trigonométrica:

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx$$

es la serie de Fourier de $f(x)$, y sus coeficientes son calculados con las fórmulas siguientes:

(1) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos nx\,.\,dx; \qquad n = 0, 1, 2, ...$

(2) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\operatorname{sen} nx\,.\,dx; \qquad n = 0, 1, 2, ...$

Puede observarse que los coeficientes calculados con fórmulas (2) y (3), dado la periodicidad del integrando, también pueden ser calculados integrando sobre cualquier intervalo de longitud 2π.

En práctica usaremos: $\int_{-\pi}^{\pi}$

Los coeficientes calculados con (2) y (3) reciben el nombre de coeficientes de Fourier de la función *f(x)*.
El hecho de que la serie (1) sea la serie de Fourier de la función *f(x)* se indica de la siguiente manera:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx \qquad (4)$$

y únicamente podrá sustituirse ~ por = cuando la serie del segundo miembro sea convergente, y su suma sea la función *f(x)*. En tal caso se dirá que la función esta desarrollada en serie de Fourier para ciertos valores del intervalo.
Para analizar esto, se han establecido condiciones.

Condición suficiente para que una serie trigonométrica sea la serie de Fourier de f*(x)*:

Supongamos que *f(x)* es una función periódica de período *2π* y que *f(x)* esta representada por la serie (4). Si dicha serie es integrable término a término sobre el intervalo *[-π, π]* y también son integrables término a término las series de ellas multiplicándolas por *sen nx* y *cos mx* respectivamente, entonces la serie (4) es la serie de Fourier de la función *f(x)*.
Bajo la hipótesis de integrabilidad que hemos denotado que los coeficientes a_n y b_n de (4) son calculados con la fórmula (2) y (3) de acuerdo con la definición de serie de Fourier, se parte de la (4) y se integra término a término se llega a a_n y b_n.
Para demostrarlo integraremos miembro a miembro la serie (4).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}.\,dx + \sum_{n:1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx.\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\operatorname{sen} nx.\,dx\right]$$

$$= 0 \quad \text{por propiedad anterior para todo n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\,dx = \frac{a_0}{2}.2\pi$$

$$= \left[\frac{a_0}{2}.x\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).dx \qquad (5)$$

Multipliquemos miembro a miembro la (4) por *sen mx* *m: 1,2,3,…*

$$f(x).sen\,mx = \frac{a_0}{2}.sen\,mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos mx.sen\,mx + b_n.sen\,nx.sen\,mx$$

Integramos miembro a miembro la expresión anterior

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).sen\,mx.dx =$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sen\,mx.dx}_{=0 \text{ para todo } m \neq 0} + \sum_{n:1}^{\infty}\left[a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.sen\,mx\,dx}_{=0 \text{ para todo } m} + a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} sen\,nx.sen\,mx.dx}_{\substack{=0 \text{ si } n \neq m \\ =\pi \text{ si } n=m}}\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).sen\,mx.dx = b_m\pi \rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos mx.dx \quad m = 1, 2, 3, \ldots \quad (6)$$

Para obtener los coeficientes a_m multiplicamos miembro a miembro la (4) por *cos mx* y luego integramos entre $-\pi$ y π. Así tenemos:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos mx.dx \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7)$$

con lo que queda demostrado que las fórmulas (5), (6) y (7) son los coeficientes de la serie (4) y también son los coeficientes de Fourier de la función *f(x)*.

<u>Convergencia de la serie de Fourier:</u>

Antes hemos demostrado condiciones sólo suficientes, el problema que planteamos ahora es el siguiente: ¿ante qué condiciones f(x) es tal que su serie de Fourier es convergente y representa la función?

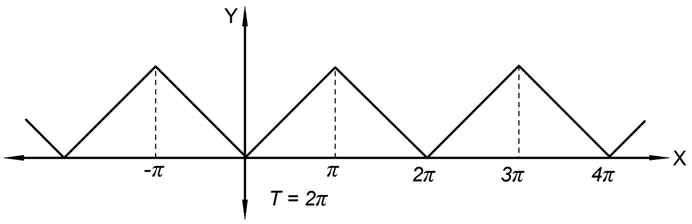
Se han enunciado diversos criterios para determinar la convergencia de Fourier. El más general y útil es el denominado Criterio de Convergencia de Dirichlet, que dice: "Sea *f(x)* una función acotada de período 2π tal que en un intervalo cualquiera de longitud igual al período 2π, tiene un número finito de máximos y mínimos, y un número finito de discontinuidades. Entonces su serie de Fourier converge para todo valor real de *"x"*; su suma es igual a *f(x)* en los puntos de continuidad de *f(x)*; y su suma es igual a la semi-suma de límites laterales en los puntos de discontinuidad".

Se puede observar que por ser acotada la función *f(x)* y tener en un intervalo finitas discontinuidades, entonces esas discontinuidades necesariamente deben ser finitas. Es decir en esas discontinuidades *f(x)* tiene límite laterales distintos.

Por ejemplo:

f(x) = |x| $\quad -\pi < x < \pi \quad$ $f(x) = f(x + 2\pi)$

$$|x| = \begin{cases} x & si\ 0 < x \leq \pi \\ -x & si\ -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$



como *f(x)* es continua para todo *x*, entones Serie de Furrier es convergente a *f(x)* para todo *x*.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n . \cos nx + bn . \operatorname{sen} nx, \quad \text{para todo } x$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . \cos nx . d\, x \qquad n: 0,\ 1,\ 2,\ ....$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . \operatorname{sen} nx . d\, x \qquad n: 1,\ 2,\ ....$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x . \cos nx . d\, x \; + \; \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x . \cos nx . d\, x$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left\{ \left[x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right]_{-\pi}^{0} - \int \frac{\operatorname{sen} nx}{n} d\, x \right\} + \frac{1}{\pi} \left\{ \left[x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} d\, x \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left\{ \underbrace{-\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}(-n\pi)}_{cero} + \frac{1}{n^2} [\cos nx]_{-\pi}^{0} \right\} + \frac{1}{\pi} \left\{ \underbrace{\frac{\pi}{n} \operatorname{sen} n\pi}_{cero} + \frac{1}{n^2} [\cos nx]_{0}^{\pi} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2} [\cos 0 - \cos(-n\pi)] + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2} [\cos n\pi - \cos 0] =$$

$$\int x \cos nx\, d\, x$$

Por Parte

$$\int u\, d\, v = u.v - \int v . d\, u$$

$$u = x \qquad d\, u = d\, x$$

$$d\, v = \cos nx . d\, x$$

$$v = \int \cos nx\, d\, x = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

$$= -\frac{1}{n^2 \pi} + \frac{\cos n\pi}{\pi n^2} + \frac{\cos n\pi}{n^2 \pi} - \frac{1}{n^2 \pi} =$$

$$\boxed{= -\frac{2}{n^2 \pi} + \frac{2 \cos n\pi}{n^2 \pi} \qquad \text{para todo } n \neq 0}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\, x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x . d\, x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x . d\, x = \pi \qquad a_0 = \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x . \operatorname{sen} nx . d\, x + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x . \operatorname{sen} nx . d\, x = 0 \qquad b_n = 0$$

$$\boxed{f(x) = \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{a_0} + \sum_{n:1}^{\infty} \overbrace{\left(-\frac{2}{n^2\pi} + \frac{2.\cos n\pi}{n^2\pi}\right)}^{a_n}.\cos n\pi - \overbrace{\left(\frac{2}{n}\cos n\pi\right)}^{b_n}.\operatorname{sen} n\pi}$$

para $x=1$ → $f(x)= \{1\} = 1$

<u>Serie de Fourier de funciones periódicas de período arbitrario *T=2l*</u>

Sea $f(x) = f(x+2l)$

Para aplicar a estas funciones la teoría anteriormente vista para funciones de período 2π, efectuaremos un cambio de variable, el que conduce a una nueva función tal que la nueva variable es de período 2π.

$$\boxed{x = \frac{lt}{\pi}} \qquad (1)$$

En efecto:

$$f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = Q(t) \qquad (2)$$

Mostremos que esta $Q(t)$ es de período 2π → $Q(t)=Q(t+2\pi)$

$$\mathbf{Q(t+2\pi)} = f\left[\frac{l(t+2\pi)}{\pi}\right] = f\left[\frac{l\mathbf{t}}{\boldsymbol{\pi}} + 2l\right] \quad \rightarrow \quad \mathbf{f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = Q(t)}$$

Luego: para la función $Q(t)$ podemos usar los conceptos de Fourier para funciones de período 2π.

Podemos escribir → $Q(t) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n:1}^{\infty} a_n.\cos nt + b_n.\operatorname{sen} nt$

siendo sus coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q(t).\cos nt.\,dt \qquad n: 0, 1, 2, 3...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q(t).\operatorname{sen} nt.\,dt \qquad n: 1, 2, 3...$$

$$f(t) = f(x) = Q(t) \qquad t = \frac{\pi x}{l} \qquad dt = \frac{\pi}{l}.dt \qquad \left\{\begin{array}{l} t = \pi \rightarrow x = l \\ t = -\pi \rightarrow x = -l \end{array}\right\} \text{ Extremos}$$

$$\boxed{f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n.\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n.\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}} \qquad (6)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\,.\,\overbrace{\cos\frac{n\pi x}{l}}^{nt}\,.\,\overbrace{\frac{\pi}{l}\,.\,dx}^{dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\,.\,\frac{\cos n\pi x}{l}\,.\,dx \qquad n:0,1,2...} \qquad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,.\,\overbrace{sen\frac{n\pi x}{l}}^{nt}\,.\,\overbrace{\frac{\pi}{l}\,.\,dx}^{dt}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\,.\,sen\frac{n\pi x}{l}\,.\,dx \qquad n:1,2...} \qquad (8)$$

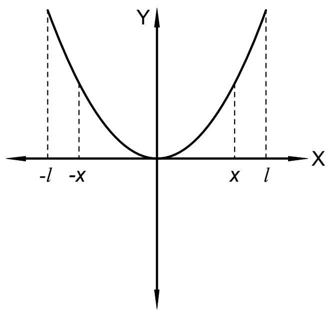
(6) → serie de Fourier de la función *f(x)* de período arbitrario $T = 2l$ se sus coeficientes son calculados por (7) y (8).

Series de Fourier de funciones pares e impares.

Cuestiones previas:

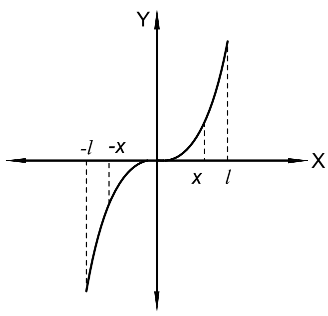
Definición de *f(x)* par sobre *[-l,l]*:
f(x) es par para el *[-l,l]* si y sólo si: $\boxed{f(x)=f(-x)}$

La gráfica tiene simetría respecto del eje y:

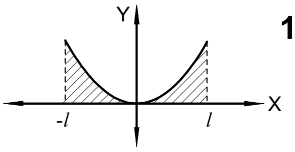


Definición de *f(x)* impar sobre *[-l,l]*:
f(x) es impar sobre *[-l,l]* si y sólo si: $\boxed{f(x)= - f(-x)}$ para todo *x* perteneciente a *[-l,l]*

Se gráfica tiene simetría respecto al origen de coordenadas:

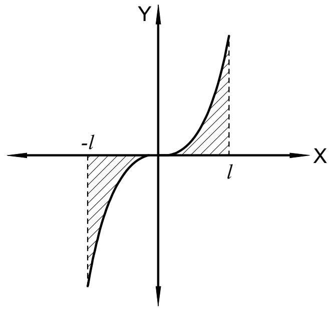


Propiedades de las funciones pares e impares:



1) Integral definida de una función par sobre *[-l,l]*:

Si *f(x)* es par sobre *[-l,l]* entonces: $\int_{-l}^{l} f(x)\,.\,dx = 2.\int_{0}^{l} f(x)\,.\,dx$



2) Integral definida de una función impar sobre *[-l,l]*:

Si *f(x)* es impar sobre *[-l,l]* entonces: $\int_{-l}^{l} f(x)\,.\,dx = 0$

3) El producto de dos funciones pares y el de dos funciones impares es siempre una función par sobre el intervalo.

a) Si *f(x)* es par, y *g(x)* es par sobre *[-l,l]*
F(x) = f(x).g(x) = f(-x).g(-x) = F(-x) → *F(x)* es par

b) Si *f(x)* es impar, y *g(x)* es impar sobre *[-l,l]*
F(x)=f(x).g(x)
F(-x) = f(-x).g(-x) = [-f(x)].[-g(x)] = f(x).g(x) = F(x) → *F(x) es par* sobre *[-l,l]*

4) El producto de una función par por una impar siempre es una impar sobre dicho intervalo.
Si *f(x)* es par, y *g(x)* es impar sobre *[-l,l]*
F(x) = f(x).g(x)
F(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).[-g(x)] = -f(x).g(x) = -F(x)

Serie de Fourier de una función par:
Si *f(x)* es par sobre *[-l,l]*, entonces le corresponde una función cosenoidal de la siguiente forma con *T = 2l*.

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n:1}^{\infty} a_n . \cos\frac{n\pi x}{l}$$

Siendo sus coeficientes: $a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) . \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx \quad n:0, 1, 2...$

Series de funciones impares:
Si *f(x)* es impar sobre *[-l,l]*, entonces le corresponde una función senoidal de la siguiente forma:

$$f(x) \sim \sum_{n:1}^{\infty} b_n . \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

y sus coeficientes: $b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) . \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\, dx \quad n:1, 2...$

Demostración para f(x) par:

f(x) = *f(x+2l)* y *f(x)* es par en *[-l,l]*.

H) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos \frac{n\pi x}{l}$

T) $a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^{l} f(x) . \cos \frac{n\pi x}{l} . dx; \quad n: 0, 1, 2...$

como por H) *f(x)* es periódica de período *2l*, la serie de Fourier que le corresponde es:

(1) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n . \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$

(2) $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) . \cos \frac{n\pi x}{l} . dx; \quad n: 0, 1, 2...$

(3) $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) . \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} . dx; \quad n: 0, 1, 2...$

como por H) *f(x)* es par. Se observamos los integrando de la fórmula (2) y (3)

$$f(x) . \cos \frac{n\pi x}{l} \text{ es par en } [-l, l] \rightarrow \int_{-l}^{l} f(x) . \cos \frac{n\pi x}{l} . dx = 2 . \int_{0}^{l} f(x) . \cos \frac{n\pi x}{l} . dx$$

reemplazamos en (2)

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^{l} f(x) . \cos \frac{n\pi x}{l} . dx; \quad n: 0, 1, 2...} \qquad (4)$$

en (3)

$$f(x) . \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \text{ es una función impar } \rightarrow \int_{-l}^{l} f(x) . \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} . dx = 0$$

reemplazamos en (3)

$$\boxed{b_n = \frac{1}{l} . 0 = 0} \quad \textit{para todo } n = 1,2,3\ldots \qquad (5)$$

con (4) y (5) reemplazamos en (1)

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos \frac{n\pi x}{l}}$$

<u>Serie de Fourier de *f(x)* impar:</u>

H) *f(x) = f(x+2l)* y *f(x)* es impar en *[-l,l]*

T) $f(x) \sim \sum_{n:1}^{\infty} b_n . sen \frac{n\pi x}{l}$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) . sen \frac{n\pi x}{l} . dx \qquad n: 0, 1, 2...$$

Demostración $T = 2l$
(1), (2) y (3) son válidas para esta demostración.
Como *f(x)* por H) es impar:

en (2) $\underbrace{f(x)}_{par} . \underbrace{cos \frac{n\pi x}{l}}_{impar}$ es impar en *[-l,l]* → $\overbrace{\int_{-l}^{l} f(x) . cos \frac{n\pi x}{l} . dx}^{impar} =$

$$= 2\int_0^l f(x) . sen \frac{n\pi x}{l} . dx$$

reemplazamos en (3) $\boxed{b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) . sen \frac{n\pi x}{l} . dx =}$ para todo n = 1,2,3…

con (4) y (5) en (1) $\boxed{f(x) \sim \sum_{n:1}^{\infty} b_n . sen \frac{n\pi x}{l}}$ (6)

<u>Casos particulares:</u>

(I) *f(x) = f(x+2l)*; *f(x)* par en *[-π,π]* $T = 2\pi$

T) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . cos\, nx$

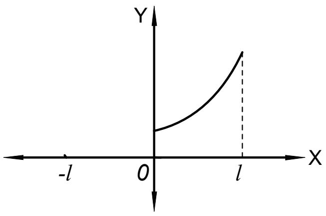
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) . cos\, nx . dx; \quad n: 0, 1, 2...$$

(II) *f(x) = f(x+2l)*; *f(x)* impar en *[-π,π]* $T = 2\pi$

T) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n . sen\, nx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) . sen\, nx . dx \qquad n: 1, 2...$$

Desarrollos de medio rango:

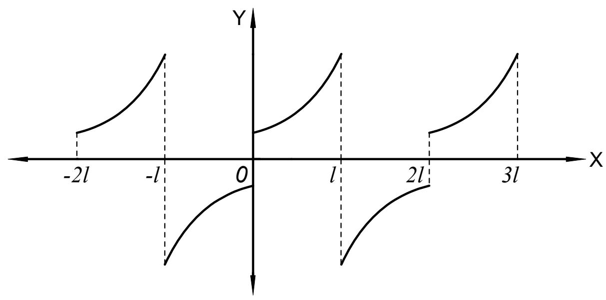


f(x) definida sólo en el intervalo *[0,l]*

Demostraremos que una función definida así, que es seccionalmente continua, de "0" a "*l*" le corresponde tanto una serie cosenoidal de Fourier como una serie senoidal de Fourier en todo ese intervalo.

(I) <u>Desarrollo de *f(x)* definida en *[0,l]*, sección continua en *[0,l]* en la serie senoidal de Fourier.</u>

Efectuamos una extensión periódica de f(x) a partir del intervalo *[0,l]*, sobre el *[-l,0]* siendo esa extensión impar. Gráficamente:



$$F(x) \begin{cases} f(x)\,; & 0 < x < l \\ -f(-x)\,; & -l < x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = F(x + 2l)$$

F(x) por ser periódica e impar le corresponde:

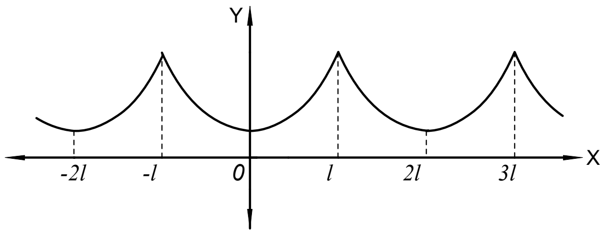
$$F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.\, sen\,\frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,.\,sen\,\frac{n\pi x}{l}\,.\,d\,x \qquad n:1,2...$$

Como segunda parte demostraremos que le corresponded una serie cosenoidal.

(II) <u>Desarrollo de *f(x)* definida en *[0,l]*, sección continua en *[0,l]* en la serie cosenoidal de Fourier.</u>

Para obtenerlo efectuamos una extensión periódica par de *f(x)* a partir del intervalo *[0,l]* sobre el intervalo *[-l,0]*.



$$F(x)\begin{cases} f(x)\ ; & 0 < x < l \\ f(-x)\ ; & -l < x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = F(x + 2l) \qquad F(x) \text{ par en } [-l,l]$$

por ser periódica par le corresponde:

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x) . \cos\frac{n\pi x}{l} . dx; \quad n: 0, 1, 2...$$

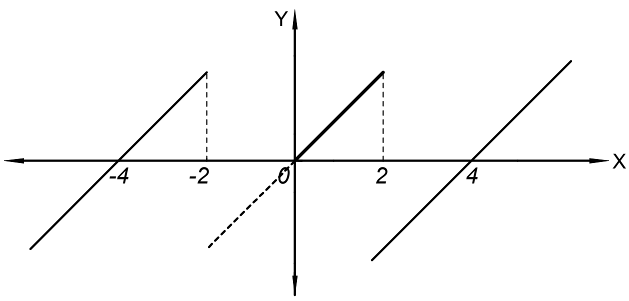
En todos los puntos de continuidad *F(x)* le corresponde esa serie como *F(x) = f(x)* en *0 < x < l*.

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} F(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos\frac{n\pi x}{l} \\ a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l F(x) . \cos\frac{n\pi x}{l} . dx \end{aligned}} \qquad 0 < x < l$$

<u>Ejemplo:</u> obtener los desarrollos de medio rango de: *f(x) = x* *0 < x < l*

(I) <u>Desarrollo en serie senoidal de Fourier:</u>

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$



$$T = 2l = 4$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) . \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} . dx$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,.\,sen\frac{n\pi x}{2}\,.\,dx=\left[-\frac{2x}{n\pi}\,.\,cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2 cos\frac{n\pi x}{2}\,.\,dx=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\,.\,cos\,n\pi+\left[\frac{2^2}{n^2\pi^2}\,.\,sen\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\,.\,cos\,n\pi+\left[\frac{2^2}{n^2\pi^2}\,.\,sen\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=\;=-\frac{4}{n\pi}\,.\,cos\,n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\,.\underbrace{sen\,n\pi}_{0}=$$

$$\boxed{b_n=-\frac{4}{n\pi}\,.\,cos\,n\pi}$$

La serie que le corresponde es:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n\pi}\,.\,cos\,n\pi\,.\,sen\frac{n\pi x}{2}}$$

para todo x tal que $0 < x < 2$
$cos\ n\pi = \pm 1$ para todo n = 1,2,…

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\,.\,sen\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{\pi}\,.\,sen\,\pi x+\frac{1}{3\pi}\,.\,sen\frac{3\pi x}{2}-...$$

para $x = 1$

$$1=\frac{4}{\pi}\,.\,sen\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\,.\,sen\,\pi+\frac{4}{3\pi}\,.\,sen\frac{3\pi}{2}-...$$

(II) <u>Desarrollamos en serie cosenoidal de Fourier:</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} v=x & dv=cos\frac{n\pi x}{2}\;dx \\ dv=dx & v=\frac{2}{n\pi}\,.\,sen\frac{n\pi x}{2} \end{array}}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n.\,cos\frac{n\pi x}{l};\qquad 0<x<2$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,.\,cos\frac{n\pi x}{l}\,.\,dx;\qquad n=0,1,2..$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,.\,cos\frac{n\pi x}{2}\,.\,dx=\left[\frac{2x}{n\pi}.\,sen\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=\frac{2}{n\pi x}\int_0^2 sen\frac{n\pi x}{2}\,.\,dx=$$

$$=\left[\frac{4}{n\pi}\,.\,sen\,2\pi+\frac{2^2}{n^2\pi^2}\,.\,cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\,.\,cos\,n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}\,.\,cos\,0\qquad \text{para todo } x\neq 0$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^2 f(x)\,.dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,.dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2$$

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\,(cos\,n\pi-1)\,.\,cos\frac{n\pi x}{2}}$$

para todo x tal que $0 < x < 2$