Tema 4.- LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ampliación de Matemáticas.

I. T. I. Especialidades en Mecánica y Electrónica Industrial.

1 Transformada de Laplace

En el modelo matemático lineal de un sistema físico, como el de una masa-resorte o de un circuito eléctrico en serie, el lado derecho de la ecuación diferencial

$$mx'' + bx' + kx = f(t),$$

$$Lq'' + Rq' + \tfrac{1}{C}q = V(t)$$

es una función forzada y puede representar a una fuerza externa $f(t)$ o a un voltaje aplicado $V(t)$. Ya hemos resuelto problemas en los que estas funciones eran continuas. Sin embargo, no es raro encontrarse con funciones continuas por tramos, en cuyo caso resolver la ecuación diferencial que describe el circuito no es fácil. La transformada de Laplace que estudiaremos en este tema es una valiosa herramienta para resolver estos problemas.

Definición 1 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se llama transformada de Laplace de f a la función $F(s)$ definida por la integral*

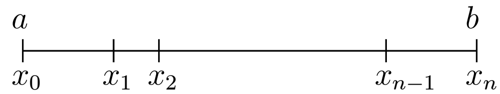
$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-sx} f(x)dx, \tag{1}$$

en todos los valores de s para los cuales la integral impropia sea convergente.

A la función f se la llama t*ransformada inversa de Laplace de F*. La función F suele representarse con el símbolo $\mathcal{L}[f]$, y con frecuencia se escribe también $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$. Asimismo, la función f se suele representar con el símbolo $\mathcal{L}^{-1}[F]$, escribiéndose $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Existen funciones para las cuales la integral impropia (1) no converge para ningún valor de s. Por ejemplo, éste es el caso para la función $f(t) = 1/t$, que crece demasiado rápido cerca de cero. Del mismo modo, no existe la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{t^2}$ que crece muy rápidamente cuando $t \to \infty$. Consideraremos, en lo que sigue, algunas propiedades que asegurarán la existencia de la transformada de Laplace.

Definición 2 *Se dice que una función f es continua por tramos, si en cada intervalo (a, b) existe una partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$*



de modo que

a) La función es continua en cada subintervalo (x_{i-1}, x_i).

b) Los límites de f cuando x tiende a los extremos de cada subintervalo, son finitos.

Nota: Obsérvese que en la definición anterior se exige que f esté definida y sea continua en todos los puntos del intervalo (a, b) salvo en los puntos de dicha partición. Pero, aunque la función no esté definida en los puntos de la partición, en todos ellos deben existir los correspondientes límites laterales.

Para establecer las condiciones de existencia de la integral de Laplace, es preciso hacer algunas hipótesis acerca de la función f. Comenzaremos por suponer que f es continua por tramos en cualquier intervalo $(a, b) \subset [0, +\infty)$. Ello implica que la función $e^{-sx} f(x)$ es integrable en todo intervalo de la forma $[0, b]$ con $b > 0$, así que la existencia de la integral de Laplace dependerá del comportamiento del integrando para valores grandes de x.

Definición 3 *Se dice que la función $f(x)$ es de orden exponencial α si existen constantes positivas M y x_0 tales que*

$$e^{-\alpha x} |f(x)| < M \text{ para todo } x \geq x_0.$$

Se puede probar que si f es de orden exponencial α, entonces $\lim_{x \to \infty} e^{-sx} f(x) = 0$, para todo $s > \alpha$.

Las funciones que normalmente se encuentran al resolver ecuaciones diferenciales lineales son a la vez continuas por tramos y de orden exponencial. Las transformadas de dichas funciones existen para valores de s suficientemente grandes.

Teorema 4 *Si $f(x)$ es una función continua por tramos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α, entonces su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ existe para todo $s > \alpha$.*

Una propiedad importante de la transformada de Laplace es su linealidad.

Proposición 5 ***Linealidad de la transformada.***

Si las funciones $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *y* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *admiten transformada de Laplace, entonces*

$$\mathcal{L}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathcal{L}[f(x)] + \beta\mathcal{L}[g(x)] \qquad \textit{para todos } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La proposición anterior permite asegurar que

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \qquad \text{para todos } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

es decir, que la transformada inversa también goza de la propiedad de linealidad.

2 Trasformadas de algunas funciones elementales

El cálculo directo de la transformada de una función mediante su definición no es, en general, sencillo. No obstante, para algunas funciones elementales como las constantes, exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas y potenciales, es factible, con sencillos cálculos, obtener sus transformadas. A continuación veremos algunos ejemplos.

- **Transformada de la función constante**

$$\mathcal{L}[k] = \int_0^\infty ke^{-sx}dx = -\frac{k}{s}\left[e^{-sx}\right]_0^\infty = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{k}{s}e^{-sx}\right] + \frac{k}{s} \qquad (s \neq 0)$$

pero $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{k}{s}e^{-sx}\right] = 0$ para todo $s > 0$, y si $s < 0$, entonces este límite no es finito. En consecuencia,

$$\mathcal{L}[k] = \frac{k}{s} \qquad \text{para todo } s > 0$$

- **Transformada de** e^{ax}

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^\infty e^{ax}e^{-sx}dx = \left[\frac{e^{x(a-s)}}{a-s}\right]_0^\infty = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x(a-s)}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \qquad (s \neq a)$$

ahora bien, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x(a-s)}}{a-s} = 0$ para todo $s > a$, y si $s < a$, entonces el límite anterior no es finito. Por consiguiente,

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \frac{1}{s-a} \qquad \text{para todo } s > a$$

- **Transformada de** sen bx

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\text{sen } bx] &= \int_0^\infty \text{sen } bx e^{-sx}dx = \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\text{sen } bx\right]_0^\infty + \frac{b}{s}\int_0^\infty \cos bx e^{-sx}dx \qquad (s \neq 0)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\text{ sen } bx\right] + \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\cos bx\right]\\ &\quad +\frac{b}{s^2} - \frac{b^2}{s^2}\int_0^\infty \text{sen } bx e^{-sx}dx\end{aligned}$$

ahora bien,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\text{sen } bx\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\cos bx\right] = 0 \qquad \text{para todo } s > 0,$$

y si $s < 0$, estos últimos límites no existen. Tenemos pues que

$$\int_0^\infty \text{sen } bx e^{-sx}dx = \frac{b}{s^2} - \frac{b^2}{s^2}\int_0^\infty \text{sen } bx e^{-sx}dx$$

con lo que resulta $\mathcal{L}[\text{sen } bx] = \dfrac{b}{s^2} - \dfrac{b^2}{s^2}\mathcal{L}[\text{sen } bx]$, y de aquí

$$\mathcal{L}[\text{sen } bx] = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \text{para todo } s > 0$$

- **Transformada de** $\cos bx$

En el proceso anterior, puede observarse que $\mathcal{L}[\text{sen } bx] = \dfrac{b}{s}\mathcal{L}[\cos bx]$, de donde se deduce

$$\mathcal{L}[\cos bx] = \frac{s}{s^2+b^2} \qquad \text{para todo } s > 0$$

- **Transformada de** Sh bx

Si usamos la propiedad de linealidad de la transformada, podemos escribir

$$\mathcal{L}[\text{Sh } bx] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{bx}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-bx}] = \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b} = \frac{b}{s^2-b^2}$$

para todo s que verifique simultáneamente $s > b$ y $s > -b$, es decir, para todo $s > |b|$. Por consiguiente,

$$\mathcal{L}[\text{Sh } bx] = \frac{b}{s^2-b^2} \qquad \text{para todo } s > |b|$$

- **Transformada de** Ch bx

Si usamos de nuevo la propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}[\text{Ch } bx] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{bx}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-bx}] = \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b}$$

igualdad que como en el caso anterior es válida para todo $s > |b|$, y de aquí

$$\mathcal{L}[\text{Ch } bx] = \frac{s}{s^2 - b^2} \qquad \text{para todo } s > |b|$$

En las Matemáticas, aparecen con alguna frecuencia, funciones a las que se denomina con cierta ambigüedad, *especiales*. El llamarlas así es para diferenciarlas de la no menos ambigua categoría de las funciones llamadas *elementales* como son las constantes, potenciales, exponenciales, trigonométricas, y las que se obtienen a partir de éstas mediante inversión, composición, suma, producto y cociente un número finito de veces.

Dentro de la amplia gama de funciones especiales, sólo nos vamos a interesar en una de ellas, y además de forma muy breve, lo justo para poderla emplear en el cálculo de las transformadas de las funciones potenciales.

Definición 6 *Se llama función gamma a la función* $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida mediante la integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

la cual es convergente para todo $x > 0$.

Algunas propiedades de la función gamma son las siguientes:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\Gamma(n+1) = n! \qquad$ para todo $n \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Haciendo uso de esta función gamma, podemos calcular las trasformadas de las funciones potenciales.

- **Transformada de** x^a.

  Para calcular la integral de Laplace de la función x^a, hacemos el cambio de variable $sx = t$ con $s > 0$:

$$\mathcal{L}[x^a] = \int_0^\infty x^a e^{-sx} dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^a e^{-t} \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty t^a e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

pero para que la última igualdad tenga sentido ha de ser $a + 1 > 0$, porque si no, la integral que define la función gamma, es divergente. Por otra parte, al hacer el cambio de variable, hemos exigido que $s > 0$, ya que si $s = 0$, el cambio no tiene sentido, y si $s < 0$, la potencia $\left(\frac{t}{s}\right)^a$ no estaría bien definida para casi todos los valores de a. Por tanto,

$$\mathcal{L}[x^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \qquad \text{para todo } a > -1 \text{ y para todo } s > 0$$

Nota: Cuando $-1 < a < 0$, la función x^a no es continua por tramos, ya que en cualquier semientorno del origen en el que $x > 0$, no está acotada, es decir tiene una discontinuidad de segunda especie. El teorema 4, no garantiza la existencia de la integral de Laplace de esta función. No obstante puede demostrarse (aunque nosotros no lo haremos), que efectivamente hay convergencia y por lo tanto que existe la transformada que hemos calculado.

3 Propiedades de la trasformada de Laplace

Una primera propiedad de la trasformada es su continuidad.

Proposición 7 ***Continuidad de la transformada.***
Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y de orden exponencial α, entonces su transformada de Laplace es continua en $(\alpha, +\infty)$.

Existe una importante relación entre las transformadas de una función y de su derivada, cuya importancia radica en el amplio uso que puede hacerse de ella en la resolución de problemas de valores iniciales. De hecho, esta es una de las herramientas más potentes para este tipo de problemas.

Teorema 8 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua y con derivada continua por tramos que es además de orden exponencial, entonces*

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0).$$

La igualdad del teorema 8 admite esta GENERALIZACIÓN: supongamos ahora que existe f'' y que al igual que f' en el teorema, es continua por tramos y de orden exponencial, asimismo supongamos que f' es continua, entonces

$$\mathcal{L}[f''(x)] = s\mathcal{L}[f'(x)] - f'(0)$$

pero al sustituir $\mathcal{L}[f'(x)]$ por su valor, resulta

$$\mathcal{L}[f''(x)] = s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0)$$

El razonamiento puede generalizarse, y admitiendo que $f^{n)}$ es continua por tramos, de orden exponencial y que $f^{n-1)}$ es continua, podemos escribir

$$\mathcal{L}[f^{n)}(x)] = s^n\mathcal{L}[f(x)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0)$$

igualdad que puede demostrarse usando el método de inducción.

Existe, también, una interesante relación entre las transformadas de una función y de sus primitivas

Teorema 9 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua por tramos y de orden exponencial, entonces*

$$\mathcal{L}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(x)] - \frac{1}{s}\int_0^a f(x)dx.$$

Dos propiedades relativas a la derivación e integración de transformadas de Laplace son las siguientes.

Teorema 10 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos, de orden exponencial α y tal que existen $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$ y $\int_s^\infty F(p)dp$ siendo $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, entonces*

$$\int_s^\infty F(p)dp = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

Teorema 11 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y de orden exponencial α, entonces $\mathcal{L}[f(x)]$ es derivable para todo $s > \alpha$ y se verifica que*

$$F'(s) = -\mathcal{L}[xf(x)]$$

Los siguientes resultados establecen relaciones entre los comportamientos de una función y de su transformada, para valores grandes o pequeños de las variables.

Proposición 12 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua por tramos y de orden exponencial, entonces su transformada verifica*

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Teorema 13 ***Teorema del valor inicial***

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua y con derivada continua por tramos que además es de orden exponencial, entonces

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}[f(x)] = f(0)$$

Teorema 14 ***Teorema del valor final***

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua y con derivada continua por tramos que además es de orden exponencial α siendo α negativa, entonces

$$\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

4 Traslaciones, cambios de escala

Veremos en esta sección cómo afecta a las transformadas de Laplace una traslación en las variables x y s, así como los cambios de escala. Previamente introducimos la siguiente definición.

Definición 15 *Se llama escalón unidad a la función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida así*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A partir de la definición es inmediato comprobar que $\mathcal{L}[u(x)] = \dfrac{1}{s}$.

Teorema 16 ***Primera fórmula de traslación***

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

Teorema 17 ***Segunda fórmula de traslación***

Si $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}[f(x-a)u(x-a)] = e^{-sa}\mathcal{L}[f(x)]$$

Teorema 18 ***Cambio de escala***

Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y de orden exponencial α, entonces

$$F(ks) = \frac{1}{k}\mathcal{L}\left[f\left(\frac{x}{k}\right)\right] \qquad \text{para todo } k > 0 \text{ y para todo } s > \frac{\alpha}{k}$$

y alternativamente

$$F\left(\frac{s}{k}\right) = k\mathcal{L}[f(kx)] \qquad \text{para todo } k > 0 \text{ y para todo } s > \alpha k$$

5 Funciones periódicas

En el caso de las funciones periódicas que tengan transformada de Laplace, el cálculo de la integral se reduce al de una integral ordinaria.

Teorema 19 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y periódica de período T, entonces*

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx \qquad \text{para todo } s > 0$$

6 Convolución. Teorema del producto de transformadas

Definición 20 *Sean $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones integrables en $[0, x]$ para todo $x > 0$. Se llama convolución de f y g, a la función $f * g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida así*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - t) g(t) dt$$

De la definición se deduce de forma inmediata que la convolución de dos funciones es conmutativa, es decir que $f * g = g * f$.

Teorema 21 ***Teorema del producto de transformadas***

Si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ son funciones continuas por tramos y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}[(f * g)(x)] = \mathcal{L}[f(x)] \mathcal{L}[g(x)]$$

7 Algunas técnicas de cálculo de transformadas inversas

Se presenta con frecuencia el cálculo de la transformada inversa de una función racional del tipo $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ donde P y Q son polinomios y el grado de Q mayor que el de P. Sabemos que en tal caso, la función admite una descomposición en fracciones simples de algunas de estas formas

$$\frac{A}{s - a} \qquad \frac{A}{(s - a)^n} \qquad \frac{As + B}{(s - a)^2 + b^2}$$

que corresponden respectivamente a raíces reales simples, raíces reales múltiples y pares de raíces complejas conjugadas simples del denominador (no consideraremos el caso de raíces complejas múltiples).

Se puede comprobar que las transformadas inversas de cada una de estas fracciones, después de aplicar la linealidad de la antitransformada, son las siguientes:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-a}\right] = Ae^{ax}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s-a)^n}\right] = A\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{ax}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As+B}{(s-a)^2+b^2}\right] = Ae^{ax}\cos bx + \frac{Aa+B}{b}e^{ax}\text{sen } bx$$

8 Función delta

Ahora vamos a estudiar una función muy especial. Fue introducida en 1930 por P.A. M. Dirac, premio Nobel de Física en 1933, en su libro "Principios de Mecánica Cuántica" (edición española, Ariel 1967) de esta manera tan informal:

"*... introducimos* la *cantidad* $\delta(x)$ *que depende de un parámetro* x y *satisface las condiciones*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \qquad\qquad \delta(x) = 0 \quad \text{para todo } x \neq 0$$

Si queremos tener una imagen de $\delta(x)$*, consideremos una función de la variable real* x *que sea nula fuera de un pequeño dominio de amplitud* ϵ *alrededor del origen* y *que en* el *interior de ese dominio tome valores grandes. No importa la forma exacta de la función dentro de ese dominio, con tal de que no sufra en él variaciones innecesariamente bruscas (por ejemplo, con tal de que la función sea siempre del orden de* ϵ^{-1}*). Pasando al límite para* $\epsilon \to 0$*, esta función tenderá a confundirse con* $\delta(x)$*.*

$\delta(x)$ *no es una función de* x *según definición matemática ordinaria de función — que le exigiría tener un valor definido para cada punto de su dominio — sino algo más general que llamaremos función impropia para destacar su diferencia con las funciones definidas de modo ordinario. Por tanto,* $\delta(x)$ *no es una cantidad que pueda usarse en análisis matemático con tanta generalidad como las funciones ordinarias, y su uso debe restringirse a ciertos tipos de expresiones sencillas para las que sea evidente que no puede dar lugar a inconsecuencias lógicas."*

Posteriormente, y para justificar la función δ definida por Dirac de este modo heurístico, L. Schwarz introdujo la teoría de las distribuciones, dentro de la cual queda definida con todo rigor.

Pero la citada teoría tiene un nivel muy superior al contexto en el que nos situamos en esta asignatura, por lo que para desarrollar algunas propiedades de la función δ, en especial las relacionadas con la transformada de Laplace, volvemos al punto de vista informal con que fue introducida.

Quede claro pues que en los razonamientos que siguen, seremos deliberadamente poco rigurosos, por lo que éstos no resistirán una crítica seria, pero a pesar de ello, optamos por este punto de vista poco formal, para evitar así el tener que presentar los resultados sin ninguna clase de justificación, ofreciendo al menos unos argumentos plausibles aunque poco aptos para puristas.

De acuerdo con la representación anterior, si definimos la función

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{si } 0 \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \epsilon < x \end{cases}$$

podremos escribir que $f_\epsilon(x) \simeq \delta(x)$ para valores pequeños de ϵ. Vamos a calcular entonces la transformada de Laplace de f_ϵ

$$\mathcal{L}[f_\epsilon(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f_\epsilon(x) dx = \int_0^\epsilon e^{-sx} \frac{1}{\epsilon} dx = e^{-sc} \qquad c \in [0, \epsilon]$$

En la ultima igualdad hemos empleado el primer teorema de la media para integrales.

Ahora bien, la igualdad aproximada $f_\epsilon(x) \simeq \delta(x)$ es tanto más exacta cuanto más pequeño sea ϵ, y lo mismo le ocurre a la igualdad aproximada $e^{-sc} \simeq 1$. De lo que podemos *inferir* que

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = 1$$

9 Bibliografía

Kreyszig, E., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. (2 vols).* Limusa Wiley.
Nagle, R.K., Saff, E.B., *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales.* Addison-Wesley Iberoamericana.
Rodrigo del Molino, F., Rodrigo Muñoz, F. *Problemas de Matemáticas para Científicos y Técnicos.* Tebar.
Spiegel, M.R. *Transformadas de Laplace.* McGraw-Hill *(*Colección Schaum).
Zill, D.G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Transformadas de Laplace

Fórmula General	**Nombre, comentarios**
$F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	Definición de transformada
$\mathcal{L}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathcal{L}[f(x)] + \beta\mathcal{L}[g(x)]$	Linealidad
$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0)$ $\mathcal{L}[f''(x)] = s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}[f^{n)}(x)] = s^n\mathcal{L}[f(x)] - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{n-1)}(0)$	Derivación de una función
$\mathcal{L}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(x)] - \frac{1}{s}\int_0^a f(x)dx$	Integración de una función
$\mathcal{L}[xf(x)] = -F'(s)\,, \quad \mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n F^{n)}(s)$ $\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(p)dp$	Derivación de la transformada Integración de la transformada
$\mathcal{L}[e^{ax}f(x)] = F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{ax}f(x)$	Traslación s (Primera fórmula de traslación)
$\mathcal{L}[u(x-\lambda)f(x-\lambda)] = e^{-s\lambda}\mathcal{L}[f(x)],$ $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s\lambda}F(s)\right] = u(x-\lambda)f(x-\lambda)$	Traslación x (Segunda fórmula de traslación)
$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ $\mathcal{L}[(f*g)(x)] = \mathcal{L}[f(x)]\mathcal{L}[g(x)]$	Convolución
$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-sx}f(x)dx$	f periódica de periodo T

Transformadas de Laplace

$f(x)$	$F(s) = L[f(x)]$
k	$\dfrac{k}{s}$
x	$\dfrac{1}{s^2}$
$x^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$x^a \quad (a + 1 > 0)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\text{sen } bx$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bx$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$
$\text{Sh } bx$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}$
$\text{Ch } bx$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}$
$u(x)$	$\dfrac{1}{s}$
$\delta(x)$	1

$F(s) = L[f(x)]$	$f(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	xe^{ax}
$\dfrac{1}{(s-a)^k}$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{ax}$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{ax} - e^{bx}\right)$
$\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b} e^{ax} \text{sen } bx$
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{ax} \cos bx$
$\dfrac{s}{(s^2+b^2)^2}$	$\dfrac{x}{2b} \text{sen } bx$
$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$u(x-a)$
e^{-as}	$\delta(x-a)$

Apéndice.- INTEGRALES IMPROPIAS

El significado dado en cursos anteriores a la integral de Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ presupone que f es una función acotada en el intervalo acotado $[a,b]$. Ahora bien, es posible extender el concepto de integral cuando se presentan al menos uno de los dos casos siguientes, hablándose, cuando esto sucede, de *integrales impropias:*
a) Uno al menos de los límites de integración no es finito (integral impropia de 1^a especie)
b) La función f no está acotada sobre el intervalo $[a,b]$ (integral impropia de 2^a especie)
Pasamos a definir sólo el caso a) que es el que nos interesa.

Si f es una función real de variable real, definida al menos en un intervalo de la forma $[a,\infty)$, y f es integrable Riemann en todo intervalo acotado $[a,x]$ con $x \geq a$, tiene sentido plantearse el límite

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)\,dt \tag{*}$$

cuando el límite (*) existe y es finito, se designa por $\int_a^\infty f(t)\,dt$ y se dice que la integral impropia $\int_a^\infty f(t)\,dt$ es convergente. Si el límite (*) existe y no es finito o bien no existe, se dice que la integral impropia es divergente.

Análogamente, si ahora f es una función real de variable real, definida al menos en un intervalo de la forma $(-\infty,a]$, y f es integrable Riemann en todo intervalo acotado $[x,a]$ con $x \leq a$, tiene sentido plantearse el límite

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt$$

y pondremos $\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt$ cuando este límite exista y sea finito.

Por otra parte, cuando el dominio de f es $\mathbb{R}$, y además f es integrable Riemann en cada intervalo acotado de la recta real, tiene sentido plantearse los dos límites anteriores. En este caso la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ se dice que es convergente cuando lo sean simultáneamente las integrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ y $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ y pondremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^a f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

Conviene observar que si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ es convergente su valor es igual a $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{-x}^x f(t)\,dt$, pero puede ocurrir que este último límite exista y sea finito sin que dicha integral sea convergente; en cualquier caso, el límite

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^x f(t)\,dt$$

recibe el nombre de valor principal de la integral.