



Unidad Temática 2: FUNCIONES CON VALORES REALES

Problema 1:

Graficar los siguientes conjuntos e indicar cuales de ellos son abiertos y cuáles cerrados. En cada caso escribir el conjunto frontera y especificar los conjuntos acotados.

$$A = \{(x, y)/3x^2 + 2y^2 < 6\}$$

$$D = \{(x, y)/(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) < 0\}$$

$$B = \{(x, y, z)/x + y > 3\}$$

$$E = \{(x, y)/1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$C = \{(x, y)/|x| < 1 \wedge |y| < 1\}$$

$$F = \{(x, y)/|y - x + 1| < 2\}$$

Problema 2:

Determinar y representar gráficamente los dominios de las siguientes funciones:

$$\text{a) } z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

$$\text{d) } z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

$$\text{b) } z = \log(x + y + z - 1)$$

$$\text{e) } z = \sqrt{xy} + \log(x + y)$$

$$\text{c) } z = \arcsen\left(\frac{2x - y}{x + y}\right)$$

$$\text{f) } z = \frac{y}{x^2}$$

Problema 3:

Hallar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \ln(x^2 + y)$$

$$\text{d) } f(x, y) = \sqrt{4 - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)}$$

Problema 4:

Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones, en el orden que se indica:

De 1er Orden:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + y^2 \sen(xy)$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)}$$

De 2do Orden:

$$\text{a) } f(x, y) = xe^y + y + 1$$

$$\text{b) } f(x, y) = \sen(xy)$$

De 3er Orden:

$$\text{a) } f(x, y, z) = \cos(x - 2y) + z^3$$

$$\text{b) } f(x, y, z) = x^4 z^2 y + z \cos(y) + y \sen(x)$$

Problema 5:

- a) La temperatura en cualquier punto (x,y) de una placa viene dada por:

$$T = 500 - 0,6x^2 - 1,5y^2$$

Donde x e y se miden en metros [m].

Calcular, en el punto $(2,3)$ el ritmo de cambio de la temperatura, con respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones x e y .

- b) La ecuación de onda en una dimensión está dada por:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2 \frac{d^2w}{dx^2}$$

Donde w es la altura de la onda, x es la variable de distancia y t es la variable de tiempo. c es una constante que representa la velocidad de propagación de las ondas en el medio, por ende varía dependiendo del tipo de medio y de onda. Demuestre que la siguiente función es solución de la ecuación de onda:

$$w(x,t) = \text{sen}(x + ct)$$

Problema 6:

- a) Exprese $\frac{dw}{dt}$ en términos de t , si:

$$w = x + \frac{y}{z}, \quad x = \cos(t), \quad y = \text{sen}(t), \quad z = \frac{1}{t}$$

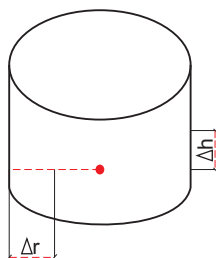
- b) Exprese $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$ en términos de r y s si:

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = rs, \quad y = r^2 + \ln(s), \quad \text{y } z = 2r.$$

Problema 7:

El volúmen neto, del cilindro de la figura es $v = \pi r^2 h$

- a) Si $r = 5[cm]$ y $h = 12[cm]$ redondeados al milímetro más cercano. ¿Cuál es el error máximo porcentual previsible al calcular el volúmen?.
- b) ¿Con que exactitud puede calcularse el volúmen si las mediciones de r y h tuvieran un error de 1 por 100?.
- c) Identificar en la figura los sólidos cuyos volúmenes corresponden a los términos de dv .
- d) ¿Qué sólido representa la diferencial entre V y dv ?



Problema 8:

La resistencia R producida por otras dos en paralelo de x e y [Ohms] puede calcularse mediante la fórmula:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

¿En que porcentaje aproximado cambia R si x crece de 20 a 20.1 [Ohms] e y decrece de 25 a 24.6 [Ohms]?

Problema 9:

La potencia disipada por una resistencia en un circuito eléctrico se calcula mediante la expresión

$P = \frac{E^2}{R}$. ¿Cuál es el valor aproximado del error de P , si al efectuar las lecturas, cometemos un error del 3 % con el voltímetro (E) y del 2 % con el Puente de Wheastone (R), siendo el valor de las lecturas efectuadas $E = 220[V]$ y $R = 63[Ohms]$?

Problema 10:

Su empresa fabrica tanques cilíndricos circulares rectos, para el almacenamiento de melaza. Las medidas de los tanques son 25[fts] de altura y 5[fts] de radio. ¿Cuál es la sensibilidad del volumen de los tanques fabricados, con respecto a pequeñas variaciones en la altura y en el radio? ¿Como ingeniero que debe garantizar precisión en el volumen de los tanques fabricados, en que magnitud debe prestar especial atención durante el proceso de manufactura del tanque?.

NOTA: [fts] = pies.

Problema 11:

Hallar la derivada direccional de $z = 2xy - 3y^2$ en el punto $p(5; 5)$, según la dirección del vector $\mathbf{s} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Problema 12:

Calcular la derivada de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ en el punto $A(-1; 1)$ según la dirección del vector $\mathbf{s} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Problema 13:

Hallar la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en el punto $p(1, -1, 2)$, en la dirección del vector $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Problema 14:

Calcular para que dirección en el punto $P(3, 2)$ se anula la derivada de la función $f(x, y) = xy + y^2$.

Problema 15:

Dada la función: $f(x; y) = 9 - x^2 - y^2$

- a) Esbozar la gráfica de f en el primer octante y marcar el punto $(1; 2; 4)$ sobre la superficie.
- b) Calcular $D_{\bar{\mathbf{u}}}f(1; 2)$ donde $\bar{\mathbf{u}} = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}$ y $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

- c) Hallar un vector $\bar{\mathbf{u}}$ ortogonal a $\nabla f(1; 2)$ y calcular $D\bar{\mathbf{u}}f(1; 2)$. Discutir el significado geométrico del resultado.

Problema 16:

Calcule la mayor razón de cambio de $f(x; y) = x^2 + y + \sqrt{y}$ en el punto $(2; 1)$. ¿En qué dirección ocurre esto?

Problema 17:

Hallar las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $z = x \cos(y) - ye^x; p(0, 0)$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9; P_0(1, 2, 3)$

Problema 18:

Dadas las siguientes superficies:

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$

- $g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$

Hallar las ecuaciones paramétricas de la curva de intersección entre ambas y determinar la ecuación de la recta tangente a dicha curva, en $P_0(1, 1, 3)$.

Problema 19:

Encuentre los puntos sobre el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, donde el plano tangente es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$.

Problema 20:

Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son extremos o puntos de silla.

a) $z = x^2 + y^2$

d) $z = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

b) $z = y^2 - x^2$

e) $z = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

Problema 21:

Calcular los extremos absolutos de la función en la región R .

- a) $f(x; y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$. Siendo R la placa triangular cerrada acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$ en el primer cuadrante.
- b) $f(x, y) = x^2 - 4xy; R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Problema 22:

Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluyendo la frontera $x^2 + y^2 = 1$ se calienta de manera que la temperatura en cualquier punto (x, y) es:

$$T(x; y) = x^2 + 2y^2 - x$$

Determine los puntos más calientes y más fríos de la placa, así como la temperatura en cada uno de ellos.

Problema 23:

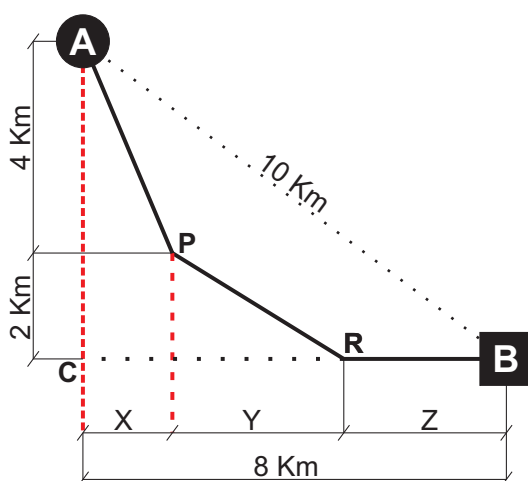
Se va a construir un almacén de $500[m^3]$ de volumen con forma de paralelepípedo. El aire caliente que produzca su sistema de calefacción ascenderá, lo que supondrá una pérdida de calor por unidad de techo igual a 5 veces lo que se produzca por el suelo. Si la pérdida de calor a través de las 4 paredes laterales es, por unidad de área, el triple que en el suelo, determinar las dimensiones del almacén que minimizan las pérdidas de calor y en consecuencia el coste de calefacción.

Problema 24:

Una compañía petrolífera va a construir un oleoducto desde la plataforma petrolífera A, situada a $4[Km]$ mar adentro, hasta la refinería B, $2[Km]$ tierra adentro, además entre la línea de la playa y la línea de la refinería hay una zona de dunas (ver figura) y la distancia entre A y B son $10[Km]$.

Cada milla de oleoducto por el mar, cuesta tres millones de euros, por la zona de dunas 5 millones y por la tierra 2 millones. Por tanto, el coste del oleoducto depende de los puntos P y R elegidos. Se pide:

- a) Hallar la ruta que hace mínimo el coste de construcción.
- b) Calcular dicho coste.



Problema 25:

Hallar la menor distancia desde la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 - 255 = 0$ al origen de coordenadas.

Problema 26:

Calcular los lados $x; y; z$ de un triángulo de perímetro $6[m]$ y de área máxima.

Problema 27:

Sea $T(x; y; z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura de cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima sobre la curva de intersección de la esfera con el plano $x - z = 0$.