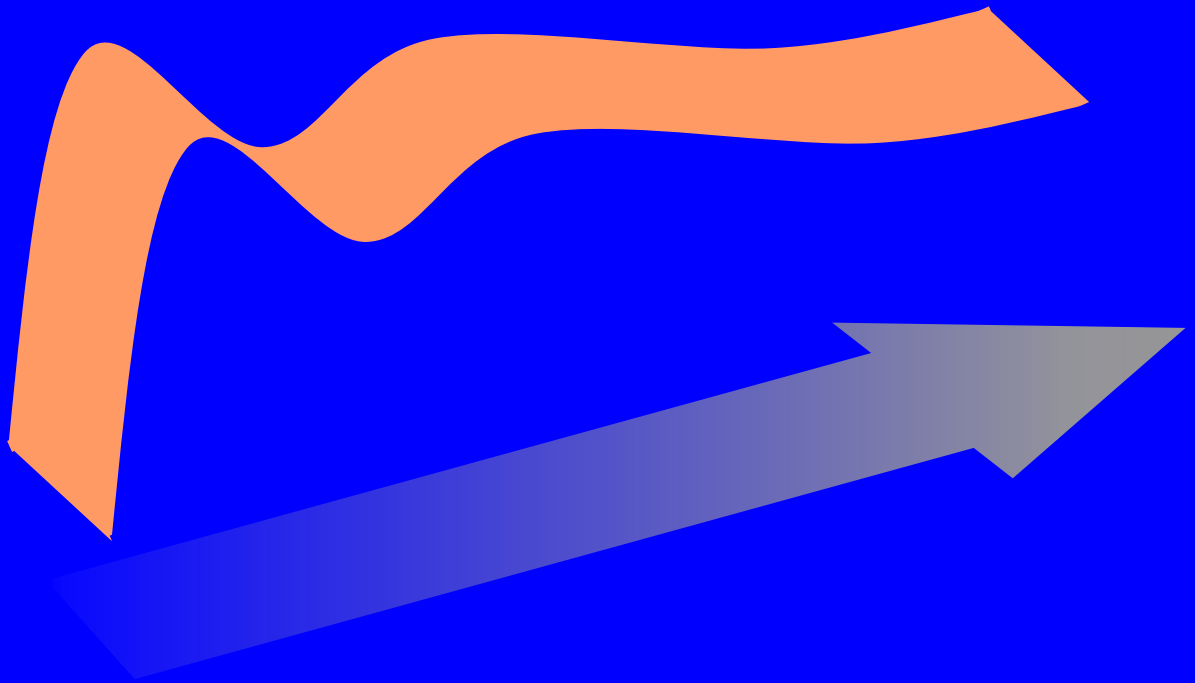


# Teoría de Sistemas



Carlos Bordóns Alba  
Manuel Ruiz Arahál  
Daniel Limón Marruedo



Universidad de Sevilla



# Teoría de Sistemas

Carlos Bordóns Alba  
Manuel R. Arahál  
Daniel Limón Marruedo

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática  
Universidad de Sevilla. 2001  
ISBN:84-88783-51-5

# Contenido

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción y fundamentos</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas dinámicos . . . . .	1
1.2 Conceptos básicos . . . . .	2
1.2.1 Variables y parámetros . . . . .	4
1.2.2 Modelos . . . . .	6
1.2.3 Simulaciones . . . . .	7
1.2.4 Realimentación . . . . .	8
1.3 Ecuaciones y evolución temporal . . . . .	9
1.3.1 Sistema mecánico . . . . .	10
1.3.2 Sistema eléctrico . . . . .	11
1.4 Linealidad en los sistemas dinámicos . . . . .	12
1.4.1 Sistemas lineales . . . . .	12
1.4.2 Sistemas no lineales . . . . .	13
1.4.3 Linealización . . . . .	14
<b>2 Representación de sistemas</b>	<b>17</b>

2.1	Clasificación de los sistemas . . . . .	17
2.2	Clasificación de comportamientos . . . . .	19
2.3	Señales de prueba . . . . .	21
2.4	Descripción interna y externa . . . . .	23
2.5	Ecuaciones diferenciales y en diferencias . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Modelado y Simulación</b>	<b>27</b>
3.1	Modelado de sistemas . . . . .	27
3.1.1	Exactitud del modelo frente a su sencillez . . . . .	28
3.1.2	Modelo externo e interno de un sistema . . . . .	29
3.1.3	Modelos deterministas y no deterministas . . . . .	30
3.1.4	Modelos paramétricos y no paramétricos . . . . .	30
3.1.5	Modelos con parámetros concentrados y distribuidos . . . . .	31
3.2	Modelado de sistemas mecánicos . . . . .	31
3.2.1	Sistemas mecánicos traslacionales . . . . .	32
3.2.2	Sistemas mecánicos rotacionales . . . . .	36
3.3	Sistemas hidráulicos . . . . .	40
3.3.1	Depósito . . . . .	40
3.3.2	Tubería y válvula . . . . .	41
3.3.3	Modelos de sistemas hidráulicos . . . . .	41
3.4	Modelado de sistemas eléctricos . . . . .	42
3.4.1	Resistencia . . . . .	43
3.4.2	Condensador . . . . .	43
3.4.3	Bobina . . . . .	44

<i>CONTENIDO</i>	3
3.4.4 Fuente . . . . .	44
3.4.5 Motores de corriente continua . . . . .	45
3.4.6 Modelos de sistemas eléctricos . . . . .	46
3.5 Sistemas térmicos . . . . .	46
3.5.1 Transferencia de calor por conducción . . . . .	47
3.5.2 Transferencia de calor por convección . . . . .	47
3.5.3 Transferencia de calor por radiación . . . . .	47
3.5.4 Modelos de sistema térmicos . . . . .	48
3.6 Linealización de modelos no lineales . . . . .	49
3.6.1 Punto de funcionamiento de un sistema . . . . .	50
3.6.2 Linealización de un sistema dinámico . . . . .	51
3.7 Simulación . . . . .	56
3.7.1 Métodos numéricos de integración . . . . .	57
<b>4 Sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo</b>	<b>63</b>
4.1 Transformación de Laplace . . . . .	63
4.1.1 Definición . . . . .	63
4.1.2 Resumen de Propiedades . . . . .	64
4.1.3 Cálculo de antitransformadas . . . . .	67
4.2 Descripción externa de los sistemas dinámicos . . . . .	72
4.2.1 Respuesta impulsional . . . . .	72
4.2.2 Función de transferencia . . . . .	74
4.3 Descripción interna de los sistemas dinámicos . . . . .	75
4.3.1 Sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo . . . . .	77

4.4	Álgebra de bloques . . . . .	78
4.4.1	Operaciones sobre señales . . . . .	79
4.4.2	Operaciones sobre bloques: reducción de sistemas . . . . .	80
4.5	Recordatorio de variable compleja . . . . .	81
4.6	Evolución temporal y transformada Laplace . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Respuesta temporal de sistemas lineales</b>	<b>85</b>
5.1	Sistemas dinámicos lineales de primer orden . . . . .	85
5.1.1	Solución de la ecuación diferencial de primer orden . . . . .	86
5.1.2	Ejemplos de sistemas de primer orden . . . . .	100
5.1.3	El sistema de primer orden como integrador . . . . .	104
5.2	Sistemas dinámicos lineales de segundo orden . . . . .	105
5.2.1	Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en escalón	107
5.2.2	Especificaciones de la respuesta transitoria . . . . .	112
5.3	Sistemas de orden $n$ . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Respuesta frecuencial de sistemas lineales</b>	<b>119</b>
6.1	Función de transferencia en el dominio de la frecuencia . . . . .	120
6.2	Transformación de Fourier . . . . .	122
6.3	Representación gráfica de la función de transferencia . . . . .	124
6.3.1	Diagrama de Nyquist . . . . .	124
6.3.2	Diagrama de Bode . . . . .	126
6.3.3	Ejemplos de representaciones gráficas . . . . .	133
<b>7</b>	<b>Estabilidad</b>	<b>139</b>

<i>CONTENIDO</i>	5
7.1 Introducción . . . . .	139
7.2 Criterios de estabilidad relativos a la descripción externa . . . . .	139
7.2.1 Criterio de Routh-Hurwitz . . . . .	143
7.3 Criterio de Nyquist . . . . .	147
7.3.1 Grado de estabilidad. Márgenes de fase y ganancia. . . . .	154
7.4 Criterios relativos a la descripción interna . . . . .	156
<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>





# Tema 1

## Introducción y fundamentos

La asignatura Teoría de Sistemas pretende proporcionar herramientas para el estudio del comportamiento de los sistemas dinámicos. En este primer tema se van a definir los conceptos necesarios para el curso de teoría de sistemas. Se incluyen ejemplos de sistemas conocidos con objeto de ilustrar las definiciones.

### 1.1 Sistemas dinámicos

Según el DRAE<sup>1</sup>, un sistema es un "Conjunto de cosas que ordenadamente relacionadas entre sí contribuyen a determinado objeto". La definición proporcionada por Aracil<sup>2</sup> coincide en lo esencial pues dice que "un sistema es un objeto formado por un conjunto de cosas o partes, entre las cuales se establece alguna forma de relación que las articula en la unidad que es el sistema".

Los sistemas dinámicos son aquéllos en los que el tiempo juega un papel fundamental debido a que algunas partes cambian. Resulta fácil hallar ejemplos de sistemas dinámicos pues éstos abundan en la naturaleza. Así por ejemplo, el sistema solar está formado por planetas y otros cuerpos relacionados entre sí por fuerzas. La posición relativa de los planetas varía en el tiempo, por lo que el sistema es dinámico. Otros ejemplos de sistemas dinámicos son:

- El cuerpo humano.
- La bolsa de Madrid.
- Un invernadero.
- La población de aves, plantas e insectos en una reserva natural.

---

<sup>1</sup>Diccionario de la Real Academia de la Lengua

<sup>2</sup>Dinámica de sistemas. J. Aracil y F. Gordillo. Alianza Editorial, 1997.

- Un circuito eléctrico.
- Un móvil sometido a la acción de fuerzas.
- Un depósito que se llena de líquido.
- Una cuba donde se mezclan reactivos para fabricar productos químicos.

Estos ejemplos tan diversos ponen de manifiesto que el concepto de sistema es muy amplio y es manejado en diversas disciplinas y campos del conocimiento.

En todos los casos citados se observa que dentro del sistema existen partes que se relacionan entre sí. Así, en el cuerpo humano hay distintos órganos que intercambian materia y energía, en la bolsa hay diversos agentes y entidades, en un circuito hay componentes, etc.

El carácter de dinámico se pone de manifiesto al observar cantidades correspondientes a las partes que varían. Por ejemplo, el nivel de agua de un depósito fluctúa cuando se retira o se añade agua. Utilizamos la palabra señal para designar a cualquier magnitud que puede variar con el tiempo.

Uno de los objetivos perseguidos en esta asignatura es proporcionar métodos que permitan explicar cómo se relacionan las señales en un sistema dinámico. Pero en primer lugar es preciso delimitar los términos que se van a emplear.

## 1.2 Conceptos básicos

En este punto se definen algunos términos que van a ser usados profusamente en este curso, por lo cual conviene aclarar su significado.

Se va a denominar señal o variable a cualquier magnitud que evoluciona con el tiempo. Hemos visto que en un sistema dinámico existen objetos que se relacionan entre sí de los cuales podemos extraer medidas que varían en el tiempo. Se conoce con el nombre de trayectoria precisamente la evolución temporal de una magnitud. El conjunto de trayectorias seguidas por las magnitudes indica el comportamiento del sistema.

Consideremos varios ejemplos de comportamiento. En primer lugar supongamos una masa colgada de un muelle. La posición de la misma cambia con el tiempo de forma oscilante. Se dice entonces que el sistema tiene un comportamiento oscilatorio. Un segundo ejemplo lo obtenemos al medir la presión atmosférica en una habitación. La medida se mantiene casi inalterable en el tiempo, con variaciones lentas. Hablaremos entonces de un comportamiento constante o casi constante. Una situación muy distinta se produce al considerar la cantidad de cierto isótopo radioactivo en una mezcla. Se observa que dicha cantidad disminuye exponencialmente con el tiempo, de forma que cada cierto periodo la cantidad es la mitad de la que había en el periodo anterior. Este comportamiento de

la desintegración radioactiva sigue un comportamiento denominado descenso exponencial. Como último ejemplo pensemos en una masa que cae libremente bajo la acción de la gravedad. La velocidad de la misma aumenta linealmente con el tiempo, mientras que la posición aumenta cuadráticamente. Estos dos comportamientos se denominan subida lineal y cuadrática respectivamente.

Para concretar con un ejemplo consideremos un cuerpo que cae bajo la acción del campo gravitatorio. La magnitud de interés es la posición sobre la vertical  $y$  medida en cierto sistema de referencia. Como es sabido, la aceleración es igual a  $g$ , por lo que el cuerpo se acelera constantemente. Si en el instante  $t = 0$  el cuerpo está en la posición  $y = 0$  en reposo, es decir  $v(0) = \dot{y}(0) = 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= g \\ \frac{dy(t)}{dt} &= v(t) = gt \\ y(t) &= \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

La evolución de la magnitud  $y$  a lo largo del tiempo ha sido obtenida como una función  $y(t)$  resolviendo las ecuaciones diferenciales.

La medición de señales tiene gran importancia pues permite conocer el estado del sistema. El estado es una descripción de la situación actual de un sistema. Retomando el ejemplo de la caída libre, el estado viene dado por la posición  $y(t)$  y la velocidad  $v(t)$  del objeto. Nótese que conociendo el par  $(y(t_1), v(t_1))$  y sabiendo que actúa una aceleración  $g$  es posible calcular futuros valores de  $(y(t), v(t))$  para  $t > t_1$ , lo cual puede tener gran utilidad práctica.

Las señales que forman parte del estado pueden ser muy diversas, dependiendo del sistema en cuestión. Por ejemplo, para conocer el estado de un circuito puede ser suficiente conocer los voltajes e intensidades eléctricas en distintos puntos del mismo. En una reacción química puede interesar conocer las concentraciones y temperaturas de los constituyentes de la mezcla. En un sistema mecánico basta con conocer la posición (y sus derivadas) de cada uno de los objetos.

Se puede definir el estado como el menor conjunto de variables cuyo conocimiento en un instante proporciona la posibilidad de determinar completamente las trayectorias futuras del sistema conocidas las señales que actúan sobre el mismo. El estado es un concepto fundamental en la teoría de sistemas, pues el comportamiento de un sistema queda descrito completamente por la evolución del estado. Las variables que forman el estado reciben el nombre de variables de estado.

Las gráficas en función del tiempo van a ser muy usadas en este curso. En la figura 1.1 se observa la evolución de la posición  $y$  y también de la velocidad  $v$  en el ejemplo

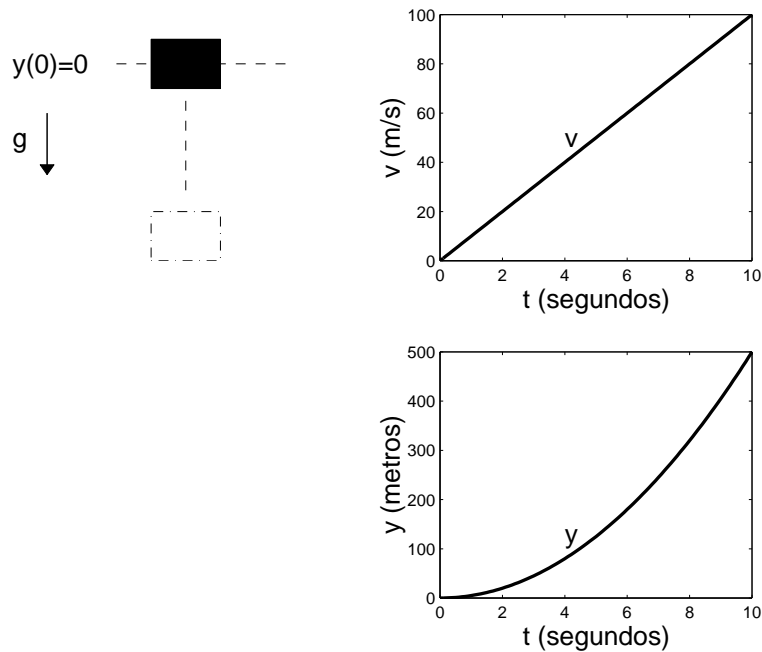


Figura 1.1: Evolución de la posición y la velocidad en la caída de un cuerpo de masa unidad bajo la acción gravitatoria.

de la caída vertical. En muchas situaciones prácticas es de gran importancia conocer la evolución de las magnitudes de un sistema. Por ejemplo para realizar predicciones acerca de la evolución futura de tal o cual variable o para controlar la trayectoria de la misma.

### 1.2.1 Variables y parámetros

Las magnitudes asociadas a un sistema dinámico son a menudo clasificadas de acuerdo con el interés que poseen para la persona que analiza el sistema. De este modo se habla de entradas y salidas.

Una variable es llamada salida si su valor puede considerarse consecuencia de los valores tomados por otras variables llamadas entradas. Por ejemplo, el nivel de un líquido en un depósito que se llena es una variable que depende de la cantidad de líquido que entra. La posición de un móvil depende de las fuerzas aplicadas sobre él. El precio de las acciones en bolsa depende de la oferta y la demanda. La temperatura de un cuerpo depende del calor aportado, etc.

Las entradas son señales cuyos valores afectan al sistema, modificando su estado. Tal es el caso de fuerzas aplicadas a objetos, el voltaje aplicado a una lámpara, etc. La trayectoria seguida por las entradas es la causante de cambios en el sistema. Estos cambios se ponen de manifiesto en las trayectorias del resto de señales.

Es importante distinguir entre variables del sistema y parámetros. Una variable es una

magnitud que cambia con el tiempo, como la posición en el ejemplo anterior. Un parámetro es un valor que distingue un sistema de otro. Por ejemplo, el valor de la constante gravitatoria  $g$ . Como es sabido, en la luna la aceleración gravitatoria es aproximadamente una sexta parte que en la tierra. Por tanto, el movimiento de un mismo objeto es diferente en la luna que en la tierra.

En la tabla siguiente se indican algunos sistemas conocidos y las variables asociadas clasificadas en entradas y salidas. Se indican también algunos parámetros.

Sistema	Entrada	Salida	Parámetro
Objeto movido por una fuerza	fuerza aplicada	posición	masa del cuerpo
Depósito que se llena	flujo entrante	nivel líquido	área del tanque
Cuerpo que se calienta	calor aportado	temperatura del cuerpo	calor específico
Carga de un condensador	intensidad	voltaje entre placas	capacidad del condensador

En muchos sistemas dinámicos de interés existen magnitudes que es posible modificar libremente, como por ejemplo: el voltaje aplicado a una lámpara o la ventilación de un invernadero. Estas variables reciben el nombre de entradas manipulables. Estas variables son de gran importancia para el control de sistemas. Por ejemplo, para controlar la temperatura de la ducha se puede manipular el grifo de agua caliente. En la industria existen muchos procesos de fabricación en los cuales hay que controlar posiciones, intensidades, temperaturas, niveles, etc. En tales casos es preciso seleccionar variables manipulables que permitan realizar el control. La tabla siguiente muestra algunos ejemplos que pretenden ilustrar las ideas explicadas.

Salida a controlar	Entrada manipulable
Temperatura ducha	apertura válvulas de agua
Velocidad de giro de ejes	voltaje de motor de corriente continua
Temperatura de líquido	voltaje aplicado a resistencia calefactora
Nivel de líquido en depósito	apertura válvulas de entrada y salida
Fuerza ejercida por un motor de corriente continua	intensidad suministrada
Temperatura en una habitación	encendido o apagado de calentador o refrigerador

Dentro de este contexto cabe hablar de otras entradas que no podamos manipular. Estas variables reciben el nombre de perturbaciones. En el ejemplo de la ducha esto ocurre cuando otra persona en la casa abre o cierra otro grifo de agua caliente. El objetivo del control es a menudo evitar el efecto de las perturbaciones. Por ejemplo, una gran antena de radio puede ser movida por el viento. El controlador de la misma es un dispositivo que mueve unos motores que se oponen a este movimiento, de forma que la antena apunte en

la dirección prefijada.

### 1.2.2 Modelos

El modelado consiste en obtener una representación matemática de un sistema. Normalmente, aplicando leyes en forma de ecuaciones diferenciales que se combinan adecuadamente. Un ejemplo lo tenemos en la ecuación  $\ddot{x} = g$  que es un modelo de la caída libre.

El modelo es una herramienta que permite entre otras cosas:

- Predecir la evolución del sistema.
- Explicar los comportamientos del sistema.
- Analizar el efecto de entradas sobre la evolución de las salidas.
- Estudiar los cambios en el sistema debidos a cambios en los parámetros.

Un aspecto a tener en cuenta es que un modelo es por sí mismo un sistema. Esta afirmación no debe sorprendernos pues estamos acostumbrados a llamar "sistema de ecuaciones" a un conjunto de tales expresiones matemáticas. En efecto, en un sistema de ecuaciones diferenciales hay valores variables que son función del tiempo y que se relacionan entre sí.

No hay que confundir las ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema con el propio sistema. En la figura 1.2(a) se muestra un dibujo de un sistema formado por diversos elementos interactuantes. A la derecha se ha dibujado un diagrama de bloques similar a los que se utilizarán a menudo en esta asignatura. Es interesante notar que el diagrama de la derecha es un modelo del sistema de la izquierda, pudiendo existir otros modelos diferentes. La existencia del sistema y sus propiedades son independientes de que existan modelos. No obstante, también es posible delinear modelos de sistemas que no existen, bien porque no han sido construidos aún o por otros motivos.

Las ecuaciones que forman los modelos de sistemas se obtienen a menudo realizando simplificaciones de la realidad. Para explicar esta afirmación observemos el ejemplo de la caída libre. En ningún momento hemos especificado la forma que tiene el cuerpo que cae. Esta propiedad es importante pues como sabemos no cae igual una hoja de papel que el mismo papel hecho bola.

Podemos preguntarnos cuál es el motivo de la discrepancia entre el comportamiento predicho por la ecuación  $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$  y el observado al caer una hoja de papel. La respuesta es simple: se ha obviado el efecto de la resistencia del aire.

Este ejemplo ilustra muy bien los peligros de confundir la realidad con los modelos. Un modelo matemático como  $\frac{d^2x}{dt^2} = g$  es un ente distinto de la realidad. El objetivo

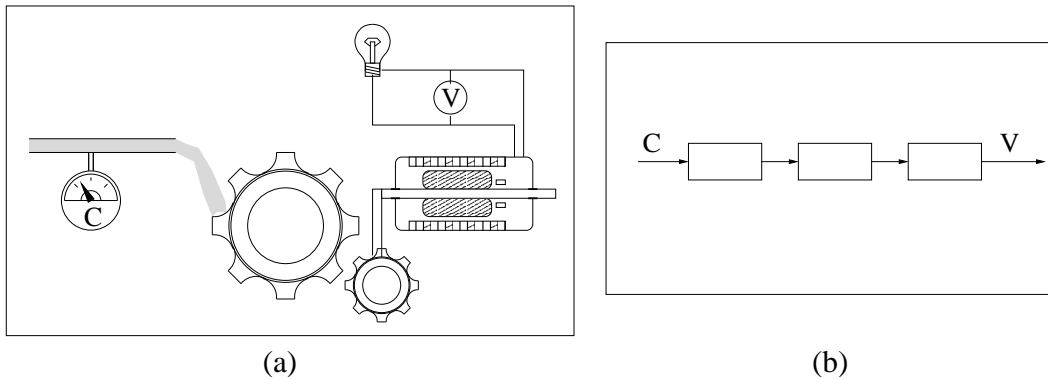


Figura 1.2: (a) Sistema formado por elementos variados. (b) Diagrama de un modelo del sistema anterior.

perseguido al crear modelos es que la evolución de las variables de éste se asemeje a la de las medidas hechas en la realidad. Tal meta se alcanza a veces de forma satisfactoria y otras no.

### 1.2.3 Simulaciones

Simular consiste en usar un modelo para proporcionar la evolución de cierta variable en la esperanza de que en la realidad se produzcan evoluciones similares. En una simulación es preciso conocer el valor de las entradas (manipulables o no) pues lo que se pretende calcular es el valor de las salidas. Para realizar la simulación se proporciona un modelo, una situación inicial y el valor de las entradas en cada instante de tiempo. Mediante un programa o por otros medios se obtiene entonces las trayectorias de las salidas del sistema. El modelo será útil en tanto en cuanto estas trayectorias sirvan para el propósito particular del usuario.

En la actualidad existen muchos ejemplos de simulación conocidos por el público en general. Tal es el caso de los simuladores de vuelo o la llamada realidad virtual. En la figura 1.3 se muestra de forma gráfica la idea de simulación. Obsérvese que el simulador incorpora un modelo, acepta valores para las entradas y produce como resultado las trayectorias de las salidas.

En Ingeniería la simulación permite comprobar algunas características de los equipos diseñados antes de construirlos. En Medicina, Astronomía, etc. la simulación permite decidir si los modelos manejados se aproximan lo suficiente a la realidad observada. En disciplinas tales como Ecología o Demografía, los modelos permiten predecir la evolución futura de ciertas variables como población o nivel de la capa de ozono bajo ciertas hipótesis. En la enseñanza la simulación es un medio potente y atractivo para proporcionar al alumno experiencias a un coste menor que los laboratorios tradicionales.

Pero no todo son ventajas, existe el peligro de abusar de las simulaciones, confiando demasiado en los resultados obtenidos mediante estos métodos. Hay que recordar que

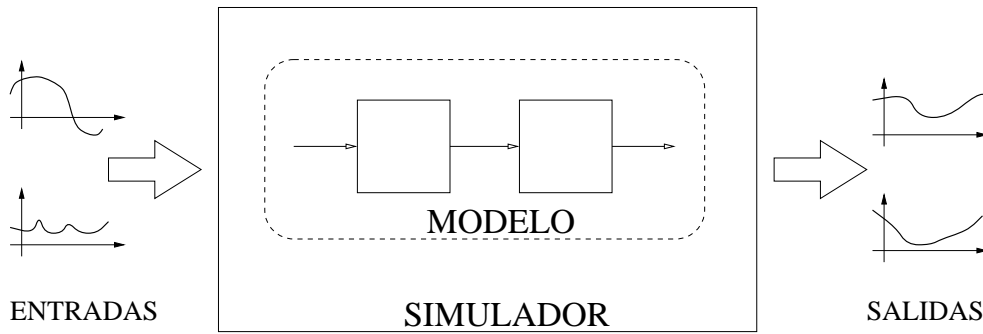


Figura 1.3: La simulación.

ninguna simulación es completamente perfecta por varios motivos:

- Las máquinas (computadoras digitales u otras) usadas para simular tienen una precisión limitada.
- Los modelos siempre incluyen simplificaciones de la realidad, pues no es posible tomar en consideración todos sus aspectos.
- Muchos programas para simulación siempre producen un resultado aún cuando las entradas proporcionadas sean irrealizables o incongruentes.

Existen muchos programas para simulación. Algunos orientados a una tarea concreta, como por ejemplo simulaciones de circuitos eléctricos, otros de propósito general como es el caso de Simulink que se usará en las prácticas.

### 1.2.4 Realimentación

La realimentación es un concepto que aparece con frecuencia en distintas disciplinas y especialmente en la dinámica de sistemas. Su importancia deriva del hecho de que provee una herramienta poderosa para enfrentarse a las incertidumbres y variaciones del mundo real.

Para ilustrar el concepto de realimentación considérese el llenado de un depósito mediante el agua que proviene de una tubería con una válvula. En la figura 1.4(a) se observa una persona llevando a cabo la operación de llenado. Siguiendo la nomenclatura explicada anteriormente se llama entrada a la señal que influye sobre el sistema, en este caso la apertura de la válvula. La salida es el nivel del depósito. La persona que abre y cierra la válvula está manipulando la señal de entrada. Nótese que esta persona observa el nivel, y abre o cierra la válvula en consecuencia. Por tanto la entrada (la posición de la válvula) depende de la salida. Se ha creado así un círculo de relaciones causa-efecto que recibe el nombre de realimentación. En la figura 1.4(b) se muestra un diagrama de bloques que refleja esta situación.



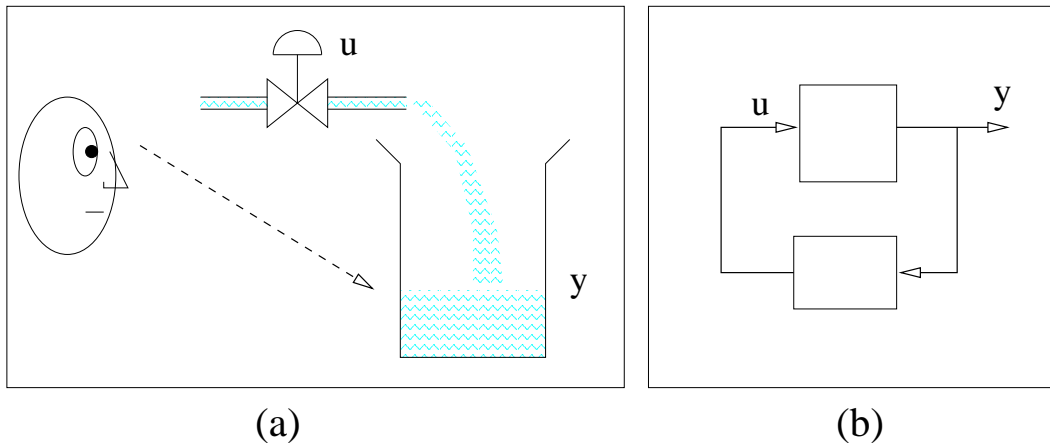


Figura 1.4: (a) Sistema en el que existe realimentación. (b) Diagrama de un modelo del sistema anterior.

La realimentación es usada frecuentemente por muchos animales para llevar a cabo tareas como la manipulación de objetos, pero éste no es el único ámbito en el que aparece. De hecho, la realimentación es un mecanismo de corrección del error que puede ser observado en la naturaleza y en ingenios fabricados por el hombre. Como ejemplo del primer tipo se puede considerar el mecanismo regulatorio de la temperatura de los mamíferos.

### 1.3 Ecuaciones y evolución temporal

En muchos casos, la evolución de un sistema puede determinarse fácilmente pues se conoce un modelo en ecuaciones diferenciales, las cuales rigen los cambios de sus variables. De este modo se puede obtener la evolución de las salidas en función de las entradas.

Por ejemplo, en el circuito eléctrico de la figura 1.5 se quiere calcular la evolución del voltaje en las placas del condensador. Es sabido que:

$$\begin{aligned} v_e &= iR + v_s \\ i &= C \frac{dv_s}{dt} \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde  $C$  es la capacidad del condensador,  $R$  es el valor de la resistencia,  $i$  es la intensidad que circula,  $v_e$  el voltaje de la fuente y  $v_s$  el voltaje entre placas.

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene  $v_s$  como una función de los parámetros  $R$  y  $C$ , de la entrada  $v_e$  y del tiempo.

En ocasiones, la tarea de hallar las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución

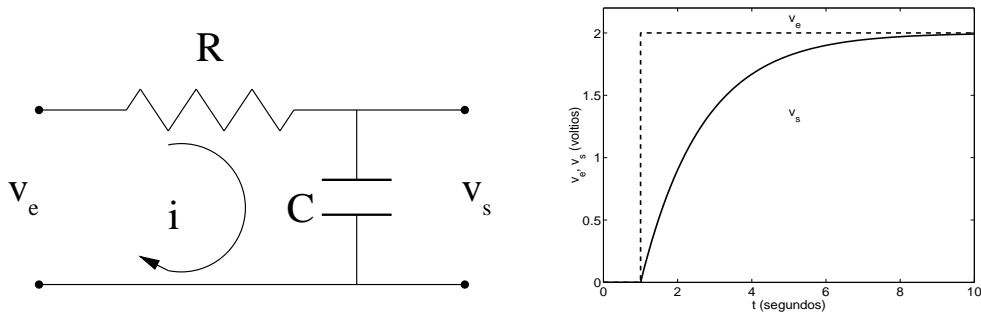


Figura 1.5: Circuito RC y evolución temporal de la señal de entrada  $v_e$  y de salida  $v_s$ .

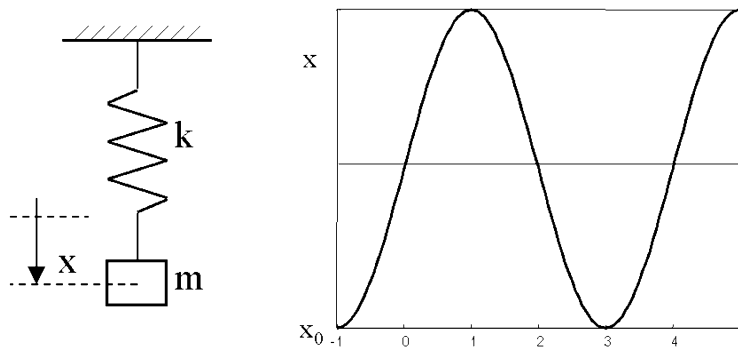


Figura 1.6: Evolución de la posición de una masa colgada de un muelle.

del sistema es simple. Este es el caso de algunos sistemas eléctricos, mecánicos, químicos, etc. en los cuales existen leyes generales y pocos elementos interactuantes.

Resulta interesante obtener las ecuaciones para algunos sistemas clásicos algunos de los cuales van a servir de ejemplo para las prácticas.

### 1.3.1 Sistema mecánico

El péndulo simple, una masa que cuelga de un muelle, el tiro parabólico, son ejemplos de sistemas que pueden ser descritos con facilidad por leyes de la Física.

La ley de Newton  $F = ma$ , la ley de Hook  $F = kx$ , etc. permiten escribir ecuaciones diferenciales en las que la masa, las longitudes de los objetos, sus posiciones y velocidades iniciales son parámetros, las fuerzas actuantes son entradas y la salida es la posición del objeto.

Obtengamos por ejemplo las ecuaciones correspondientes al movimiento de una masa colgada de un muelle como se muestra en la figura 1.6.

Tomando como origen de coordenadas el punto en el que el muelle tiene su longitud natural se tiene que:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1.3)$$

donde  $k$  es la constante de recuperación del muelle y  $m$  la masa del objeto colgado.

Si el objeto parte de una posición  $x_0$  distinta de la de reposo se obtiene un movimiento periódico  $x(t) = a \sin(\omega t + \theta_0)$ . La amplitud del movimiento es  $a = x_0$  pues no existe rozamiento. La frecuencia  $\omega$  cumple la relación  $\omega^2 = k/m$ . Finalmente, el ángulo inicial  $\theta_0$  se obtiene de la condición inicial  $x(0) = x_0 = a \sin(\theta_0)$ , por lo que  $\theta_0 = \pi/2$ .

Resulta interesante observar la evolución de este sistema para distintos valores de los parámetros  $k$  y  $m$ .

### 1.3.2 Sistema eléctrico

Los circuitos eléctricos que contienen resistencias, condensadores e inductancias son fácilmente analizados utilizando las leyes de Kirschhoff y las ecuaciones que ligan las variaciones de voltaje e intensidad a través de los elementos del circuito.

- Resistencia  $v = iR$
- Inductancia  $v = L di/dt$
- Condensador  $i = C dv/dt$

Para el circuito de la figura 1.7 se pueden escribir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_e &= iR + v_L + v_s \\ i &= C \frac{dv_s}{dt} \\ v_L &= L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Eliminando  $i$  y  $v_L$  resulta

$$v_e = v_s + CR \frac{dv_s}{dt} + LC \frac{d^2v_s}{dt^2} \quad (1.4)$$

En la mencionada figura 1.7 se muestra cómo evoluciona la variable  $v_s$  en un experimento en el cual  $v_e$  cambia bruscamente del valor cero al valor 1.

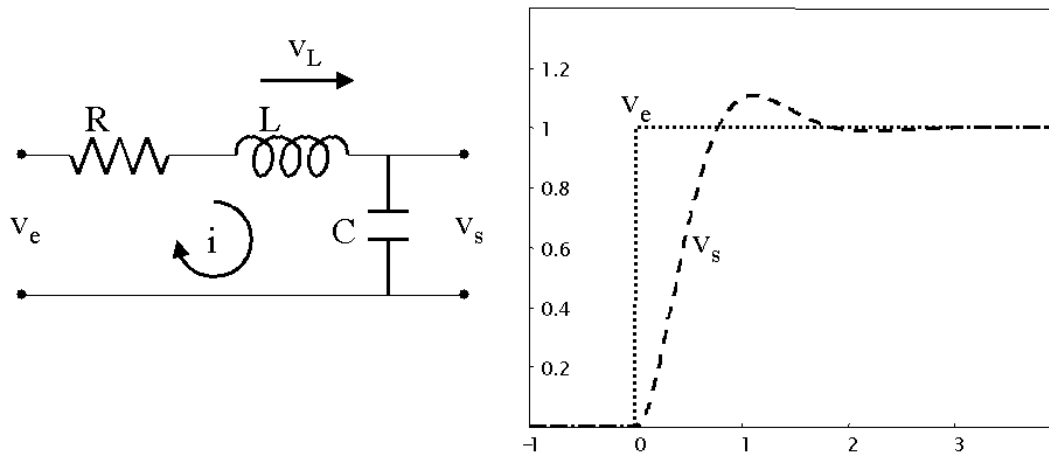


Figura 1.7: Circuito RLC y evolución de las señales eléctricas.

## 1.4 Linealidad en los sistemas dinámicos

Al construir modelos de sistemas es frecuente utilizar simplificaciones que reducen la tarea. Por ejemplo, en muchos modelos mecánicos se desprecia el efecto de la fricción entre móviles. Esta simplificación ya ha sido comentada en el ejemplo de la caída de un cuerpo verticalmente. Por supuesto es posible intentar tomar en consideración todos los fenómenos que intervienen en un sistema, de este modo se consiguen modelos más precisos.

La precisión y la complejidad van a menudo en sentidos contrapuestos. Por una parte interesa construir modelos precisos, pero por otra, conviene que el modelo sea simple pues de este modo la construcción y el uso del modelo resultan más económicos. El modelador debe llegar a un compromiso entre precisión y complejidad de acuerdo con los requisitos que el uso del modelo impone.

Los sistemas que resultan más fáciles de modelar son los llamados sistemas lineales de parámetros concentrados invariantes en el tiempo. Antes de definir con precisión los términos empleados conviene aclarar que los objetos que se van a presentar pueden tener o no existencia real. La realidad es siempre más compleja de lo que unas cuantas ecuaciones pueden indicar. Ahora bien, en muchos casos la realidad queda descrita con suficiente aproximación por sistemas lineales, por lo que éstos son de gran utilidad y conviene dedicar tiempo a su estudio.

### 1.4.1 Sistemas lineales

Los sistemas lineales pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales cuyo tratamiento es más sencillo que el de las ecuaciones diferenciales en general. Los modelos lineales consisten por tanto en ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. Tales ecuaciones están formadas por operadores lineales, por lo que disfrutan de ciertas propiedades que las hace matemáticamente simples de manejar.

Poseer la propiedad de ser lineal es equivalente a admitir que se cumple el principio de superposición. Este principio establece que la salida  $y$  de un sistema sometido a una entrada  $u = u_1 + u_2$  es la suma de las salidas correspondientes a la aplicación de  $u_1$  y a la aplicación de  $u_2$  por separado; es decir,  $y = y_1 + y_2$ .

Esta situación se presenta con frecuencia en la Física. Por ejemplo, si una masa  $m$  toma la aceleración  $a_1$  al aplicar la fuerza  $f_1$  y la aceleración  $a_2$  cuando se aplica la fuerza  $f_2$  entonces al aplicar  $f = f_1 + f_2$  se obtiene la aceleración  $a = a_1 + a_2$ .

Se puede poner en duda que en la realidad exista algún sistema que sea lineal. Sin embargo es evidente que los modelos lineales tienen un gran valor práctico. Basta para ello con observar que la mayoría de los modelos utilizados en ingeniería son lineales.

### Sistemas lineales invariantes con el tiempo

Si los coeficientes de una ecuación diferencial son constantes, el sistema dinámico correspondiente es llamado sistema lineal invariante con el tiempo (SLI).

Existen situaciones en las que los parámetros no varían, por ejemplo sistemas mecánicos con móviles cuyas masas son constantes. O sistemas eléctricos en los que la resistencia, la capacidad y la inductancia de los componentes no varían. También es fácil poner ejemplos de sistemas cuyos parámetros varían con el tiempo por lo que no son SLI. Tal es el caso de un circuito en el que la resistencia de algún elemento es función de la temperatura del mismo y ésta de la potencia disipada y del calor evacuado.

#### 1.4.2 Sistemas no lineales

Un sistema es llamado no lineal cuando no se cumple el principio de superposición. Queda patente pues que los sistemas lineales son un caso particular dentro de una gran variedad de comportamientos. De hecho, los sistemas lineales son escasos fuera del ámbito académico. Sin embargo, la discrepancia de los modelos lineales con la realidad es a menudo pequeña, por lo que la utilidad de éstos es grande.

La principal propiedad de los sistemas no lineales es que la respuesta del sistema depende no sólo de la forma de la señal de entrada sino de la amplitud. Este hecho no se produce en sistemas lineales pues se cumple el principio de superposición, de forma que la consecuencia de una entrada doble  $2u$  es una salida doble  $2y$ .

Los sistemas no lineales pueden modelarse por medio de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, para las cuales no existe solución general, por lo que su estudio es complicado. Afortunadamente, en muchas situaciones es posible utilizar modelos lineales para describir sistemas que no lo son.

Para aclarar este punto considérese de nuevo el caso de un objeto que cae bajo la acción

de la gravedad. Si se tiene en cuenta la fricción con el aire las ecuaciones diferenciales que resultan son no lineales. Ahora bien, si la velocidad alcanzada por el objeto no es muy alta y si la forma del objeto no es muy aplanada, entonces es posible desprestigiar la fricción y escribir simplemente  $\ddot{x} = g$  que es una ecuación lineal. Resulta entonces que tenemos un modelo  $\ddot{x} = g$  lineal representando el comportamiento de un sistema no lineal. Se puede comprobar experimentalmente que el modelo propuesto proporciona resultados aceptables en muchas situaciones prácticas (como comprobación basta dejar caer una piedra desde una altura pequeña).

Las causas del comportamiento no lineal son variadas. En muchos casos la falta de linealidad proviene de la existencia de fenómenos intrínsecamente no lineales, como el rozamiento, la histéresis, los juegos entre piezas móviles, etc. En ocasiones el sistema contiene elementos no lineales introducidos a propósito para conseguir un objetivo. Este es el caso de conmutadores para el control de la temperatura.

### 1.4.3 Linealización

Como veremos en un tema posterior, las ecuaciones no lineales se pueden a menudo retocar para obtener otras que sí son lineales. Este proceso es llamado linealización. Los modelos obtenidos por linealización producen resultados aceptables en rangos de operación pequeños.

Para ilustrar el proceso de linealización considérese una función no lineal como el seno. En la figura 1.8 a) se muestra la conocida gráfica de  $\text{sen}(x)$  frente a  $x$ . Supongamos ahora que queremos obtener los valores aproximados de esta función en torno a  $x = 1$  (radianes). Dibujamos de nuevo la curva pero aumentando la zona de interés como se muestra en 1.8 b). La línea recta  $y = 0.54x + 0.3$  es aproximadamente igual al seno en un rango centrado en  $x = 1$  como puede observarse. En efecto, el teorema de Taylor permite calcular una expansión polinomial de la función seno, resultando:

$$\text{sen}(x) \approx \text{sen}(1) + \frac{x-1}{1!} \cos(1) + \dots, \quad (1.5)$$

despreciando los términos de orden superior al primero se obtiene la recta indicada previamente.

La aproximación  $y = 0.54x + 0.3$  es adecuada en un entorno de  $x = 1$  del mismo modo que un modelo lineal es adecuado para describir sistemas no lineales en rangos pequeños de operación.

La linealización es una técnica común en muchas ramas de la ingeniería, como la automática, la electrónica, etc. Son numerosas las situaciones en las que se utilizan modelos lineales e incluso se habla de sistemas lineales aunque la realidad sea no lineal. No hay que perder este hecho de vista y tener siempre presente la diferencia entre modelo y realidad.

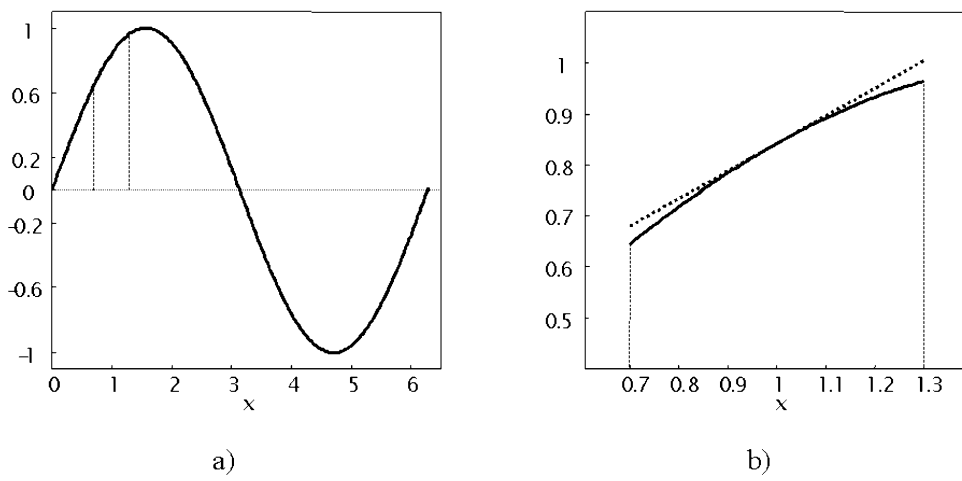


Figura 1.8: Linealización de la función seno en torno a  $x = 1$ .





## Tema 2

# Representación de sistemas

### 2.1 Clasificación de los sistemas

Como ya se ha indicado, las variables que pueden variar con el tiempo reciben el nombre de señales. Éstas pueden clasificarse en dos grupos:

**Continuas en el tiempo** Este tipo de señales pueden representarse por medio de una función del tiempo definida para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . El nombre de estas señales no indica que el valor medido haya de ser continuo. Por ejemplo, la presión medida con un manómetro es una señal continua en el tiempo, porque puede medirse en cualquier instante. Ahora bien, la cantidad medida puede ser una función discontinua; es decir, puede existir un instante de tiempo  $\tau$  tal que los límites de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow \tau$  por la izquierda y por la derecha sean diferentes. Esto puede ocurrir si se coloca un explosivo cerca de un manómetro y lo hacemos estallar.

**No continuas en el tiempo** También llamadas señales discretas. Estas señales sólo toman valores en instantes de tiempo discretos:  $t = \{t_0, t_1, \dots\}$ . Por este motivo pueden representarse como una sucesión de valores  $\{m_i\}$ .

Muchas señales son discretas por la forma en la que se realiza la medida. Por ejemplo, algunos aparatos pueden producir medidas a intervalos regulares, pero no continuamente. Éste es el caso del radar, la posición de un objeto en el aire o mar se obtiene cada segundo u otro periodo similar. Aunque la posición del objeto es una señal continua, las medidas tomadas por el radar no lo son. Otras veces, el carácter discreto de una señal proviene de la forma en que ésta se produce. Considérese por ejemplo el sueldo mensual de un trabajador en una empresa de trabajo eventual; ésta cantidad sólo se conoce cada mes, por lo que es discreta.

Los sistemas en los que intervienen sólo señales continuas en el tiempo reciben el nombre de sistemas continuos. Algunos sistemas tienen elementos de medida que toman muestras a intervalos regulares (como el radar del ejemplo anterior), estos sistemas reciben el

nombre de muestreados, y trabajan con señales discretas, por lo que también son llamados sistemas discretos.

Otra clasificación posible de los sistemas tiene en cuenta las interacciones de éstos con el entorno.

**Autónomos** Se llaman así los sistemas no influidos por señales exteriores. Se trata pues de sistemas aislados, en los que los cambios (si es que existen) son consecuencia de interacciones entre los propios elementos del sistema. Por supuesto esta situación de aislamiento total es difícil de obtener en la práctica, pues los campos electromagnéticos, gravitatorios, etc. afectan aunque sea levemente a los cuerpos. Sin embargo, muchas de las señales que actúan sobre el sistema tienen un efecto inapreciable, por lo que pueden despreciarse. Por ejemplo, la luz que incide sobre un péndulo no cambia su trayectoria, del mismo modo que la atracción de la Luna no variará el voltaje en un circuito eléctrico.

**No autónomos** Estos sistemas poseen entradas, que son variables cuya evolución modifica la del sistema. Por ejemplo, consideremos un depósito que puede alimentarse por medio de un caudal de agua proporcionado por una válvula. Es fácil ver que el nivel del mismo depende del agua que entra. Se dice entonces la posición de dicha válvula es una señal de entrada y que el sistema es no autónomo.

Los sistemas autónomos tienen interés pues conducen en muchos casos a ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, cuya resolución es simple. Los sistemas no autónomos son más fácilmente encontrados en la vida real, por lo que tienen un mayor interés para el ingeniero.

Un caso especial es aquél en el que existen entradas que son manipulables a voluntad. En este caso, como ya se ha indicado en el tema anterior, es posible dirigir la evolución del sistema de forma que se obtenga un comportamiento deseado. Por ejemplo, la temperatura del agua de salida de una ducha puede modificarse cambiando la posición de las válvulas de agua fría y caliente. Se denomina control a la acción realizada sobre un sistema para conseguir una evolución determinada.

El control se lleva a cabo manipulando señales de entrada. Tal manipulación o actuación puede realizarla una persona (control manual) o un mecanismo. En el segundo caso se habla de control automático, que es una disciplina de gran importancia en el contexto industrial como se pone de manifiesto en los ejemplos siguientes:

- Control de velocidad de giro de motores eléctricos. Muy importante en la industria de fabricación y en aparatos con elementos rotativos, como los electrodomésticos.
- Control de la temperatura de fluidos. También de interés en procesos industriales muy variados.
- Control de posición de elementos como: brazos robóticos, cabezales de lectura de discos magnéticos, timones de barcos o aviones.

- Control de vehículos autónomos o semi-autónomos. Como aviones, cohetes, robots móviles, etc.
- Control de concentraciones de compuestos en reacciones químicas.
- Control de la temperatura de edificios.

Los sistemas pueden también clasificarse atendiendo a cómo afecta el tiempo a la forma en la que se relacionan los elementos constituyentes.

**Estáticos** Las salidas de un sistema estático dependen exclusivamente del valor de las entradas en el mismo instante. Un sistema así es también llamado sin memoria. Por ejemplo, una resistencia eléctrica cumple que  $v(t) = Ri(t)$ , siendo  $v$  el voltaje e  $i$  la intensidad. Obsérvese que si la entrada  $i$  no varía, la salida  $v$  tampoco lo hace. Además, cualquier variación de la entrada es reflejada instantáneamente en la salida. Estos sistemas son idealizaciones de la realidad.

**Dinámicos** El valor de la salida es función de las entradas y salidas en otros instantes de tiempo distintos del actual. Así, en los sistemas causales, la salida depende de salidas pasadas y entradas pasadas. Un ejemplo de sistema dinámico causal es un depósito de agua. La salida es el nivel, el cual depende del nivel anterior y de la cantidad de agua suministrada (entrada).

Por otra parte, las relaciones entre los elementos del sistema pueden ser fijas o no. Un ejemplo de este tipo de sistema es una máquina cuyos elementos sufren envejecimiento. El comportamiento de esta máquina no es el mismo cuando está nueva que cuando ha envejecido. Atendiendo a esta idea los sistemas se clasifican en:

**Invariables con el tiempo** Los parámetros y las relaciones de estos sistemas permanecen inalterables.

**Variables con el tiempo** Las relaciones que ligan a las variables se modifican con el tiempo. Este es el caso de un depósito cuya forma es modificada. La salida del sistema es el nivel de agua, que depende del caudal suministrado y del nivel anterior. Ahora bien, la relación que liga las variables de entrada y salida tiene como parámetro la forma del depósito, que es variable, por lo que la relación es variable.

Los sistemas variables con el tiempo son muy frecuentes en la realidad. Piénsese que debido al envejecimiento muchos elementos mecánicos, eléctricos, etc. cambian con el tiempo. Así, las resistencias modifican su resistividad, los condensadores su capacidad, los cojinetes su rozamiento, etc.

## 2.2 Clasificación de comportamientos

Como se ya se ha indicado, el comportamiento de un sistema viene dado por las trayectorias de sus variables. Estas trayectorias pueden clasificarse de acuerdo con sus características

temporales.

A las trayectorias seguidas por las salidas de un sistema se le llama la respuesta temporal del mismo. Esta trayectoria puede tomar formas diversas en función de la posición de partida, de las relaciones entre las partes del sistema y en muchos casos en función de las entradas que se apliquen.

Es habitual distinguir dos tipos de respuesta:

**Respuesta libre** Es la que producen los sistemas autónomos, debida enteramente a interacciones entre elementos del propio sistema. También se llama respuesta libre la que produce un sistema no autónomo en el cual las entradas tienen constantemente un valor cero.

**Respuesta forzada** La respuesta forzada de un sistema no autónomo es la debida a las entradas. En los sistemas lineales, gracias al principio de superposición, es posible descomponer la respuesta en las dos partes libre y forzada que sumadas proporcionan la respuesta total.

Las trayectorias seguidas por una variable pueden ser estables o inestables. La estabilidad es una situación especial en la cual la evolución no sobrepasa ciertos límites. Por ejemplo, un cuerpo en reposo tiene un comportamiento estable, un eje rotando con velocidad constante también. El comportamiento inestable se caracteriza por evoluciones que sobrepasan límites considerados aceptables. Por ejemplo el movimiento de un avión en barrena.

Frecuentemente se plantea el problema de analizar el comportamiento de sistemas dinámicos, tanto reales como modelos. Una técnica usada en tales casos es aplicar como entrada al sistema una señal con propiedades conocidas de interés y observar la respuesta del mismo. Si la respuesta es estable será posible distinguir dos partes:

**Régimen permanente** El régimen permanente es el equilibrio alcanzado. En efecto, después de cierto tiempo el sistema puede llegar a presentar trayectorias en las que las variables o sus derivadas no cambian.

**Régimen transitorio** En el tiempo que transcurre entre la aplicación de una señal de entrada y la estabilización en un régimen permanente el sistema exhibe trayectorias llamadas régimen transitorio.

Para fijar los conceptos anteriores considérense los siguientes ejemplos:

- Un barco que parte de alta mar poniendo en marcha los motores. Transcurridos unos minutos en los que el barco se acelera se llega a una situación de velocidad constante. En esta situación la fuerza ejercida por los motores se emplea en mantener la velocidad ante la oposición de la fricción con aire y agua. La evolución de la

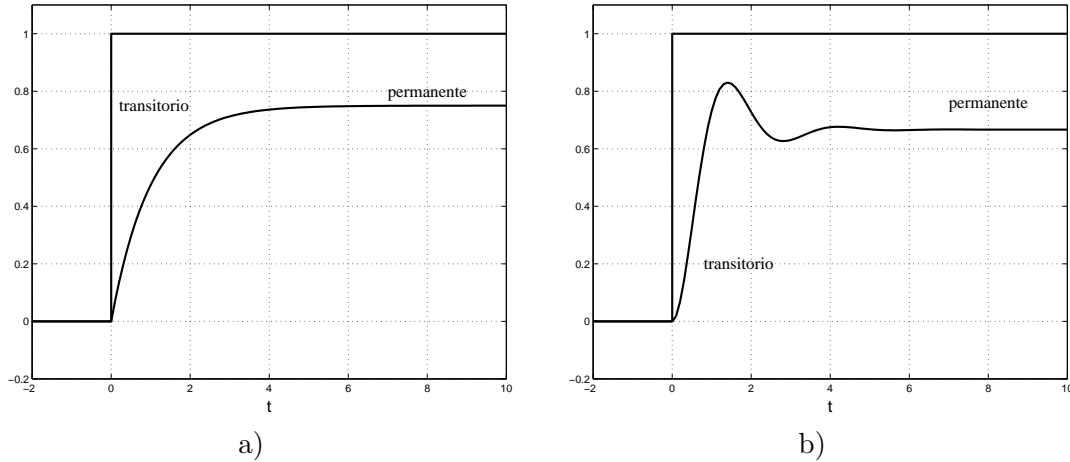


Figura 2.1: Regímenes transitorio y permanente en a) la velocidad de un barco y b) la posición de un muelle.

velocidad puede tener un aspecto parecido al mostrado en la figura 2.1a), en la cual se han señalado los regímenes transitorio y permanente.

- Un muelle es sometido a una fuerza de forma repentina, por ejemplo colocando un peso sobre él. Este cambio en las entradas provoca oscilaciones en el muelle las cuales se hacen cada vez menores por efecto de la fricción. Como resultado se obtiene un régimen transitorio como el mostrado en 2.1b) hasta que la posición del muelle permanece constante.

Los comportamientos suelen clasificarse en

**Oscilatorio** La respuesta consiste en oscilaciones que no decrecen con el tiempo, como el movimiento de un muelle sin fricción.

**Subamortiguado** Estos sistemas se llaman así porque existe menos amortiguamiento que el necesario para evitar oscilaciones. El nombre surge de una analogía con sistemas mecánicos en los que el amortiguamiento elimina las oscilaciones. El transitorio de la respuesta presenta un movimiento de vaivén que decrece con el tiempo.

**Sobreamortiguado** Se alcanza el régimen estacionario sin oscilaciones.

## 2.3 Señales de prueba

Resulta de interés conocer algunas señales que se usan con frecuencia como entradas para analizar el comportamiento de sistemas dinámicos.

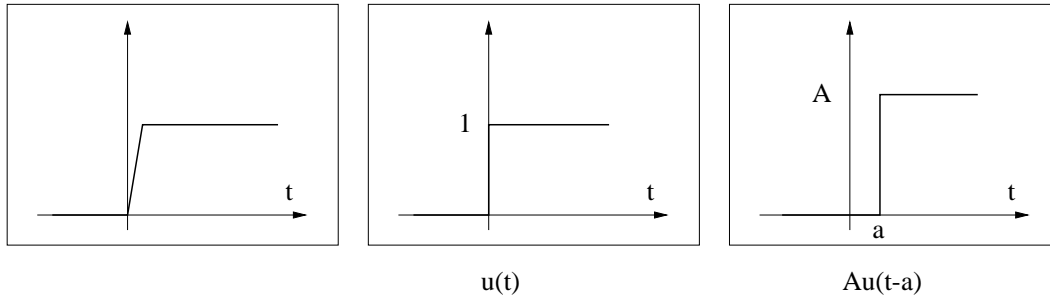


Figura 2.2: La señal escalón.

**Escalón** Es una señal que vale cero para tiempos menores que cero y uno para tiempo cero en adelante; es decir,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Esta señal puede obtenerse como límite de una señal con rampa entre dos niveles cuando la pendiente de la rampa tiende a infinito, como se muestra en la figura 2.2.

En un escalón desplazado  $\tau$  el cambio de cero a uno se produce en el instante  $t = \tau$ , por lo que se escribe como  $u(t - \tau)$ . Un escalón no unitario es aquél en el que se alcanza un valor distinto de uno, por ejemplo  $Au(t)$  es un escalón de amplitud  $A$ .

Los escalones permiten modelar situaciones tales como encendido o cierre de interruptores, válvulas, etc.

**Impulso** Es una señal que vale cero en todo instante excepto en  $t = 0$  en que alcanza un valor infinito, de tal forma que su integral vale uno. Se trata pues de la función delta de Dirac que puede definirse como:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) \neq 0 & t = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Esta señal puede obtenerse como límite de la suma de dos escalones iguales, centrados en  $t - \Delta$  y  $t + \Delta$  respectivamente. La amplitud de ambos escalones es igual y de signo contrario, y se calcula como  $A = \frac{1}{2\Delta}$ , de tal forma que se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Au(t - \Delta) - Au(t + \Delta)) dt = 1$$

Puede observarse en la figura 2.3 que, a medida que  $\Delta \rightarrow 0$  se tiene  $A = \frac{1}{2\Delta} \rightarrow \infty$  y los dos escalones se acercan al origen.

Al igual que ocurre con el escalón, es posible considerar impulsos desplazados en el tiempo, escribiéndose en la forma  $\delta(t - \tau)$  el impulso centrado en  $t = \tau$ .

La función impulso es la derivada del escalón, como se deduce de la construcción realizada. Además, puede comprobarse que si se define la función

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \delta(m) dm$$

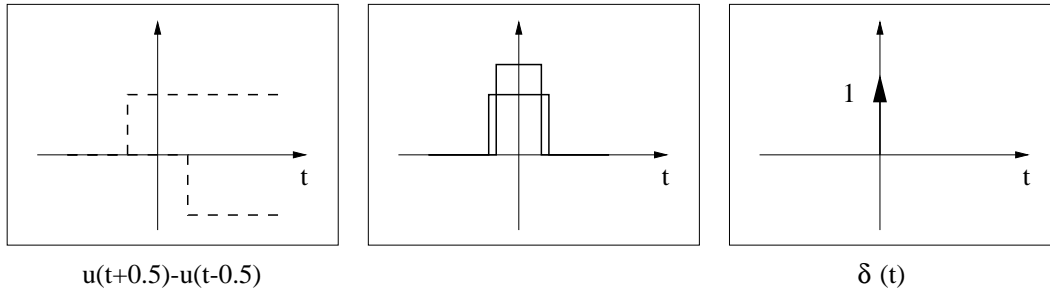


Figura 2.3: La señal impulso como límite de una suma de escalones.

ésta toma valor cero para todo  $t < 0$  y valor uno para  $t \geq 0$ , por lo que coincide con el escalón unitario  $u(t)$ .

Algunas señales de entrada se asemejan a un impulso, como es el caso de golpear un móvil de forma seca con otro objeto, por ejemplo jugando al billar.

**Rampa** La rampa es una señal nula hasta  $t = 0$  en que se convierte en una semirrecta de pendiente unidad que pasa por el origen; es decir,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

## 2.4 Descripción interna y externa

Los modelos de sistemas dinámicos son construidos con algún propósito. En ocasiones interesa conocer el efecto de unas variables sobre otras. A las primeras se les ha llamado entradas y a las segundas salidas.

Además de las entradas y salidas pueden existir variables internas, las cuales evolucionan de una manera que depende de las entradas. A su vez estas variables internas pueden influenciar a las salidas.

Un ejemplo de variable interna es el llenado de un depósito con un agujero en el fondo. Desde el punto de vista de una persona interesada en conocer el caudal de salida las variables importantes son: el caudal que entra  $u(t)$  y el caudal que sale  $y(t)$ . Sin embargo, existe una variable que influye en la salida y que depende de la entrada: el nivel. Como es sabido, el nivel  $n(t)$  cumple que

$$A \frac{d n(t)}{dt} = u(t) - y(t)$$

Pero por otra parte, la ley de vaciado del depósito es  $y(t) = k\sqrt{n(t)}$ , es decir, el caudal de salida depende del nivel del líquido.

Un mismo modelo puede representarse de diferentes modos, las representaciones que centran su atención exclusivamente en las entradas y salidas se denominan descripciones

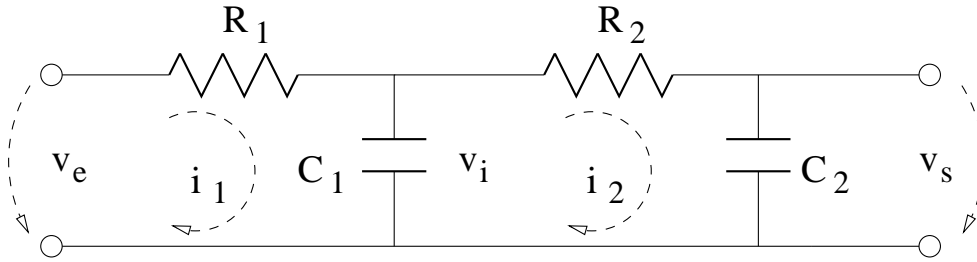


Figura 2.4: Circuito eléctrico con entrada  $v_e$ , salida  $v_s$  y algunas variables internas.

externas o de entrada-salida. Tal representación se obtiene normalmente eliminando las variables internas de las ecuaciones, sustituyéndolas por expresiones que contienen únicamente entradas y salidas.

Como ejemplo considérese el sistema de la figura 2.4 consistente en un circuito eléctrico con varios elementos. Se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_e &= i_1 R_1 + v_i \\ i_1 - i_2 &= C_1 \frac{dv_i}{dt} \\ v_i &= i_2 R_2 + v_s \\ i_2 &= C_2 \frac{dv_s}{dt} \end{aligned}$$

Supongamos que la entrada es el voltaje  $v_e$  y la salida es  $v_s$ . Las variables internas son  $i_1$ ,  $i_2$  y  $v_i$ , que pueden ser eliminadas para obtener la ecuación diferencial que liga la entrada y la salida.

$$v_e = R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + (R_1 (C_1 + C_2) + R_2 C_2) \frac{dv_s}{dt} + v_s$$

Resultando una descripción externa pues sólo aparecen las entradas y salidas ligadas por una ecuación diferencial de segundo orden. La representación interna en cambio utiliza tantas variables internas como sea preciso para obtener un sistema de varias ecuaciones de primer orden.

En el ejemplo del circuito, la ecuación de segundo orden puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Existen muchas formas posibles de realizar esta tarea; es decir, muchos sistemas de dos ecuaciones de primer orden que son equivalentes a la representación externa. Por ejemplo:

$$v_e = R_1 \left( C_1 \frac{dv_i}{dt} + C_2 \frac{dv_s}{dt} \right) + v_i$$



$$v_i = R_2 C_2 \frac{dv_s}{dt} + v_s$$

Ahora se utiliza la variable  $v_i$ , que junto con  $v_s$  aparece diferenciada en las ecuaciones. Estas variables reciben el nombre de variables de estado.

Ya se había indicado en el tema anterior que el vector de estado es el formado por el conjunto de variables de estado y recoge toda la historia pasada del modelo, de forma que, conociendo el estado y las entradas futuras es posible indicar cuál será la evolución de todas las demás variables que intervienen en el modelo.

El orden del sistema es el de la ecuación diferencial que proporciona la descripción externa y es igual a la dimensión del vector de estado.

## 2.5 Ecuaciones diferenciales y en diferencias

Las ecuaciones diferenciales lineales son una forma habitual de representar los modelos de sistemas dinámicos lineales de parámetros concentrados en tiempo continuo.

Una ecuación como

$$\frac{d^n y}{dt^n}(t) + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u}{dt^m}(t) + \cdots + b_m u(t)$$

es una forma de representar un modelo en tiempo continuo. Como es sabido, se denomina grado de la ecuación diferencial al de la derivada mayor. En los modelos causales (que son los que se tratarán aquí) el grado mayor pertenece siempre a las salidas, por tanto el grado es  $n$  y  $n > m$ .

En el caso de que el modelo sea de tiempo discreto es preciso usar una ecuación en diferencias como

$$\alpha_n y_{k-n} + \alpha_{n-1} y_{k-n+1} + \cdots + \alpha_0 y_k = \beta_m u_{k-m} + \cdots + \beta_1 u_{k-1}$$

Las ecuaciones en diferencias presentan ciertas ventajas cuando se trabaja con sistemas digitales. Sin embargo, consideraremos en este curso únicamente las ecuaciones diferenciales por sencillez.



## Tema 3

# Modelado y Simulación

### 3.1 Modelado de sistemas

En anteriores temas se ha visto que un sistema dinámico se caracteriza porque su estado evoluciona con el tiempo y que además se puede representar mediante ecuaciones matemáticas, que toman la forma de ecuaciones diferenciales, en el caso de ser sistemas continuos, o de ecuaciones en diferencias, en el caso de sistemas discretos.

Pero no se debe perder de vista que los sistemas dinámicos son sistemas concretos, sean reales o imaginarios, que pueden ser sistemas físicos, biológicos, económicos, etc. Todos ellos tienen ciertas magnitudes asociadas que evolucionan en el tiempo, por ejemplo la posición de un cuerpo en el caso de un sistema físico, o el número de individuos de una población bacteriana en un cultivo en el caso de un sistema biológico, o bien el valor de unas acciones en el mercado de la Bolsa en el caso un sistema económico.

Resulta de interés obtener una forma de caracterizar las magnitudes asociadas al sistema en cuestión con el fin de estudiar su comportamiento (análisis) o bien reproducir el comportamiento que va a tomar éste bajo ciertas condiciones (simulación). Este procedimiento se denomina *modelado de un sistema*. El sistema se puede caracterizar en forma de expresiones matemáticas (modelado matemático) o bien mediante reproducción a escala del sistema (modelado a escala). Esta última técnica es muy utilizada en campos como la aeronáutica, en las que los fenómenos implicados son muy complejos y además permite la reproducción de los sistemas en laboratorio. La teoría de sistemas está basada en la descripción matemática de los sistemas dinámicos, por lo que en lo sucesivo se asimila el modelado de un sistema a la obtención de ésta.

Se denomina *modelo* de un sistema al conjunto de expresiones matemáticas que caracterizan la evolución temporal de las magnitudes del sistema. Un modelo está bien planteado cuando el número de expresiones matemáticas independientes que se obtienen es igual al número de señales del sistema que intervienen en él.

En un modelo, además de las señales, están involucrados los parámetros del sistema, que son valores que lo caracterizan o distinguen de otro sistema semejante. A la hora de modelar sistemas reales, puede ser necesario obtener ciertos parámetros a partir de las señales del sistema dinámico real, con el fin de que el modelo reproduzca lo más fielmente posible su comportamiento. Este procedimiento se denomina *identificación* de un sistema. Una vez identificado un sistema, el modelo obtenido se debe validar, comparando las magnitudes reales obtenidas con las resultantes del modelo.

### 3.1.1 Exactitud del modelo frente a su sencillez

Un modelo está sujeto a errores y puede no representar exactamente el sistema. Para ilustrar este punto se va a tomar una serie de sistemas reales que son complejos.

- El mercado de la Bolsa. En este sistema la discrepancia se puede deber a la existencia de una serie de magnitudes cuyo comportamiento no se puede conocer de una forma precisa, estando sujetas a probabilidad, como por ejemplo el carácter impredecible de las personas o de los mercados cuya evolución afecta al comportamiento de la bolsa.
- El tiempo atmosférico. El error en el conocimiento de su evolución se puede deber al desconocimiento de algunas de las magnitudes que influyen en el sistema o a la forma en la que éstas lo hacen, así como de la impredecibilidad de ciertos eventos, como terremotos, etc. Es decir, resulta imposible establecer un conjunto de expresiones que modelen la globalidad del sistema.
- El horno de una fábrica de yeso. En este caso se conocen los fenómenos físicos que intervienen en el proceso, pero resulta impensable obtener un modelo de todos los elementos que forman el sistema. Es decir, que es posible establecer las expresiones que modelan el sistema, pero resulta tan complejo en su formulación o bien en su utilización que se desecha la posibilidad.

De esto se desprende que existen razones, ya sean de carácter práctico o bien teórico, por las que el modelo no se aproxima con total precisión al sistema que se quiere modelar. Por tanto un modelo de un sistema real siempre tiene asociado un grado de exactitud.

En el modelado de sistemas es importante la ponderación entre la exactitud con la que el modelo es capaz de representar el comportamiento del sistema y la simplicidad de éste, que facilita el tratamiento del mismo. Dependiendo del uso que se vaya a hacer del modelo, éste se orienta hacia la exactitud o hacia la sencillez.

Por ejemplo, en modelos destinados al análisis del sistema, se suelen tomar suficientemente sencillos como para que sean tratables matemáticamente. Por el contrario, los modelos destinados a la simulación interesa que sean precisos, de cara a reproducir con la mayor fiabilidad el comportamiento del sistema que se pretende simular.

### 3.1.2 Modelo externo e interno de un sistema

El modelo de un sistema depende del tipo de magnitudes que intervienen en él, que pueden ser:

- Variables externas:
  - Salidas.
  - Entradas:
    - \* Entradas manipulables.
    - \* Perturbaciones
- Variables internas.

Considérese un sistema para proporcionar agua caliente en una instalación doméstica. En este sistema, el agua se calienta en un depósito aislado térmicamente hasta alcanzar una cierta temperatura. El agua caliente y el agua fría son conducidas por tuberías hasta el grifo donde se mezclan produciendo un solo caudal a una temperatura comprendida entre la que tiene la corriente fría y la que tiene la caliente. En este sistema existen varias señales que evolucionan en el tiempo: la temperatura del agua a la salida del grifo, el caudal de salida, la apertura del grifo de agua fría, el caudal de agua fría, la apertura del grifo de agua caliente, el caudal de agua caliente o la temperatura del agua a la salida del termo. Para un usuario de esta instalación, resulta de interés el estudio del comportamiento de la temperatura a la salida del grifo, sin embargo para un encargado de mantenimiento de la instalación resulta de interés la temperatura a la salida del termo, por ejemplo. Por tanto la decisión de qué señal del sistema se considera como una señal de salida depende del propósito con el que se modela el sistema.

Por otro lado existen una serie de entradas manipulables al sistema, como son las aperturas de los grifos del agua caliente y fría, que se varían con el fin de determinar el caudal y la temperatura de la corriente de agua de salida que se desea. Existen otras señales cuya evolución influye sobre el sistema pero que no son manipulables por el usuario, como por ejemplo la presión del agua en la instalación o el caudal de gas que alimenta el termo. Estas señales son perturbaciones al sistema.

El resto de señales como el caudal de agua fría, el de agua caliente, la temperatura a la salida del termo, etc. son señales internas al sistema.

El modelo de un sistema se hace con el fin de obtener una representación del comportamiento dinámico del mismo. Sin embargo, parece razonable centrar la representación sobre las salidas del sistema exclusivamente, dado que son éstas las señales que resultan de interés. Esta representación se denomina *modelo externo* del sistema o *modelo entrada-salida*.

En el caso de que intervengan señales internas el modelo se denomina *modelo interno* del sistema y se obtiene de forma que las ecuaciones diferenciales que representan el sistema

sean de primer orden. En este caso las señales que intervienen en el modelo son variables de estado, y su conocimiento permite conocer la evolución de todas y cada una de las señales del sistema.

En sistemas autónomos, el modelo dependerá tan sólo de las magnitudes internas o externas elegidas. Es decir, que partiendo de una determinada situación inicial, el sistema evoluciona por sí mismo a lo largo del tiempo. Por tanto, la trayectoria seguida por cada magnitud dependerá exclusivamente de la situación inicial de la que parte (condiciones iniciales del sistema). Sin embargo en sistemas no autónomos las magnitudes de entrada al sistema intervienen en el sistema, y por tanto aparecen en el modelo, sea éste de tipo interno o externo. Por tanto, la trayectoria de cada magnitud asociada al sistema evolucionará dependiendo de las condiciones iniciales del mismo y de los valores que tomen las magnitudes de entrada del sistema a lo largo del tiempo.

### 3.1.3 Modelos deterministas y no deterministas

Se dice que un modelo es determinista cuando se parte de la base de que el modelo es capaz de expresar de forma única la evolución del sistema. Es decir, que conocido el modelo de un sistema y las condiciones iniciales de las que parte, así como la evolución de las entradas (en el caso de sistemas no autónomos), el sistema siempre evoluciona de la misma forma. Por el contrario, un modelo no determinista o estocástico considera que intervienen factores aleatorios, imposibles de modelar ni predecir. Por tanto tan sólo se podrán modelar ciertas características estadísticas de las magnitudes temporales del sistema, pero no la evolución de las mismas, pues varían por la influencia de eventos impredecibles. Según esto, ante unas mismas condiciones iniciales y magnitudes de entrada, el sistema evolucionará cada vez de una forma distinta, pero conservando una serie de características comunes de tipo estadístico, que son las que se pueden modelar.

### 3.1.4 Modelos paramétricos y no paramétricos

Un sistema es una entidad compleja resultante de la integración de sus partes en una unidad sustantiva. Por tanto, si se conoce el comportamiento de cada una de las partes que conforman el sistema y la forma cómo éstas se relacionan, se puede obtener un modelo del sistema. Este tipo de modelos se denominan *modelos paramétricos*, pues dependen de los parámetros de las ecuaciones que definen el modelo de cada elemento del sistema. Para ilustrar este tipo de modelos, véanse los propuestos en los sistemas de los temas 1 y 2.

El modelo de cada elemento que forma el sistema viene dado por las denominadas *ecuaciones de fenómenos elementales*. A las ecuaciones que interrelacionan a los elementos entre sí se denominan *ecuaciones de balance* del sistema.

Sin embargo el sistema se puede modelar obteniendo expresiones matemáticas que relacionen magnitudes del sistema sin considerar ni las partes que forman el sistema ni la forma cómo se integran en éste. Este tipo de modelos se denominan *modelos no paramétricos* o

*modelos de caja negra.*

En secciones posteriores se verá cómo se obtienen modelos paramétricos de sistemas físicos, tales como sistemas mecánicos, eléctricos, térmicos o hidráulicos, describiendo en cada caso las ecuaciones de los fenómenos elementales más típicos, así como las ecuaciones de balance.

### 3.1.5 Modelos con parámetros concentrados y distribuidos

Enunciados como: "sea una masa puntual ...", "considérese una carga concentrada en un punto del espacio ...", etc. son frecuentes en cursos básicos de Física. Es notable sin embargo el hecho de que tales objetos no tienen existencia real. Los sistemas reales son por lo general de parámetros distribuidos. Así, una resistencia es un trozo de material de longitud no nula, por lo que

- La señal eléctrica tarda cierto tiempo en atravesarla; es decir, la transmisión no es instantánea.
- Existe cierta inductancia y capacitancia; es decir, además de un valor  $R$  habría que tener en cuenta unos valores de  $L$  y  $C$ .

Estos fenómenos son a menudo despreciados, considerando la resistencia como un elemento sin inductancia ni capacitancia que transmite instantáneamente los cambios en la intensidad que circula por ella. Los elementos idealizados de esta forma reciben el nombre de elementos de parámetros concentrados.

Los modelos basados en parámetros concentrados son más fáciles de desarrollar y usar que los de parámetros distribuidos, por lo que suelen ser el objeto de estudio de cursos básicos de teoría de sistemas y control.

Los modelos que tienen en cuenta que los objetos reales no tienen sus propiedades concentradas en un punto reciben el nombre de modelos de parámetros distribuidos, y son más complejos que los de parámetros concentrados, por lo que sólo se usan cuando estos últimos no producen el resultado requerido.

## 3.2 Modelado de sistemas mecánicos

Un sistema mecánico es aquél formado por cuerpos que varían su posición ante la acción de una serie de fuerzas. Como se sabe, un cuerpo rígido puede describir tres traslaciones y tres rotaciones independientes entre sí. Se denomina grado de libertad a cada movimiento independiente que puede tener un sólido. Por tanto un cuerpo puede tener como máximo 6 grados de libertad.

Cada elemento que forma un sistema mecánico se modelará por una serie de ecuaciones que determinan el movimiento descrito por el cuerpo en función de las fuerzas que actúan sobre él. Las ecuaciones de balance surgen de la aplicación de las leyes de Newton sobre cada uno de los elementos.

El área de la Física encargada del estudio del comportamiento dinámico de los cuerpos es la Mecánica y está fuera del alcance de este curso el profundizar en esta disciplina. Por ello se describen a continuación unos casos sencillos, pero que representan a un amplio espectro de sistemas mecánicos, en los que se muestra cómo se obtienen modelos dinámicos.

### 3.2.1 Sistemas mecánicos traslacionales

Un sistema mecánico en el que el movimiento de los cuerpos que lo forman se reduce a traslaciones en una misma dirección se denomina sistema mecánico traslacional. Por tanto todos los cuerpos del sistema tienen un solo grado de libertad y sus movimientos describen trayectorias rectas todas con la misma dirección. En consecuencia, la posición de cada cuerpo viene dada por el desplazamiento que realiza en la dirección del movimiento. Los elementos más comunes que forman un sistema mecánico traslacional son los siguientes:

#### Masa móvil

Una masa sometida a una fuerza experimenta una aceleración como consecuencia de ésta. Aparece entonces una fuerza de reacción a la aceleración experimentada por el cuerpo denominada fuerza de inercia y cuya magnitud es directamente proporcional a la aceleración del cuerpo y su sentido el contrario al de movimiento del cuerpo.

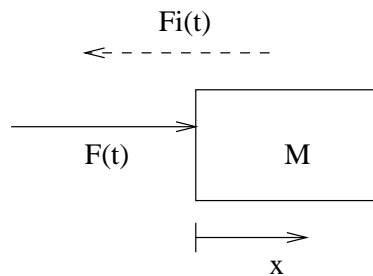


Figura 3.1: Esquema de una masa móvil .

La ecuación que rige el movimiento de este elemento es:

$$F_i(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(t) \quad (3.1)$$

La constante de proporcionalidad  $M$  es la masa del cuerpo.



Nótese que la fuerza ejercida sobre el cuerpo no influye directamente sobre la posición del cuerpo, si no sobre la aceleración que éste experimenta. La aceleración produce un cambio en la velocidad con la que se mueve el cuerpo, y la velocidad produce a su vez una variación en la posición de éste. Por tanto, conocida la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo, es necesario saber tanto la velocidad como la posición que tiene inicialmente el cuerpo para poder conocer el movimiento que éste realizará.

### Resorte o muelle

Un resorte es un elemento elástico que ante la acción de una fuerza se deforma variando su longitud. El resorte ejerce una fuerza que se opone a la fuerza impulsora que es función de la deformación experimentada. Una vez que la acción de la fuerza cesa, el resorte es capaz de recuperar su posición original, gracias a su característica elástica.

Generalmente se supone que la relación entre la fuerza aplicada sobre el muelle y el desplazamiento que éste experimenta es lineal. A este tipo de resortes se les denomina resortes lineales.

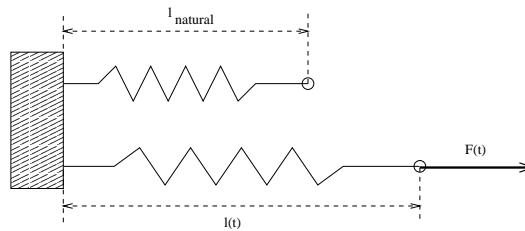


Figura 3.2: Esquema de un resorte o muelle.

El modelo de este elemento viene dado por

$$F(t) = K \cdot (l(t) - l_{\text{natural}}) \quad (3.2)$$

La constante de proporcionalidad  $K$  se conoce como constante del muelle. Al desplazamiento del muelle se le denomina elongación. Se llama elongación natural  $l_{\text{natural}}$  a la longitud que tiene el muelle en ausencia de la acción de la fuerza.

### Amortiguador

Un amortiguador es un elemento que se deforma bajo la acción de una fuerza ejerciendo una fuerza de reacción que es función de la velocidad con la que el elemento se deforma. Elementos con rozamiento viscoso tienen este tipo de comportamiento.

Un amortiguador se denomina lineal cuando la fuerza de reacción a la deformación es proporcional a la velocidad de ésta. Su modelo viene dado por:

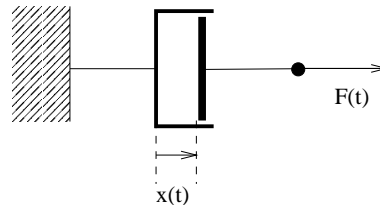


Figura 3.3: Esquema de un amortiguador.

$$F(t) = C \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (3.3)$$

Siendo  $C$  la constante de rozamiento viscoso y  $x(t)$  la deformación del elemento.

### Modelos de sistemas mecánicos traslacionales

Una vez conocidos los modelos de todos y cada uno de los elementos que forman el sistema, el modelo del sistema completo surge de la aplicación de las leyes de Newton. La segunda ley de Newton indica que la suma de las fuerzas aplicadas a un cuerpo, incluyendo las fuerzas de inercia es nula.

$$\Sigma \vec{F}(t) = 0 \quad (3.4)$$

Se debe tener en cuenta que tanto las fuerzas como los desplazamientos son magnitudes vectoriales. Esto quiere decir que no sólo influye el valor que toma la magnitud, si no su dirección y sentido. En el caso de sistemas traslacionales la dirección de todas las magnitudes está restringida a la dirección del movimiento, por tanto es el sentido del vector el que hay que tener en cuenta a la hora de plantear las ecuaciones de balance.

#### Ejemplo

Para ilustrar cómo obtener las ecuaciones que modelan un sistema mecánico, se va a tomar como ejemplo el sistema de la figura 3.4, que consiste en un sistema autónomo formado por dos masas puntuales sin rozamiento unidas entre sí por un muelle y una de ellas unida a la pared fija.

Las ecuaciones de de las fuerzas que intervienen en cada una de las masas son las siguientes:

1. Fuerzas ejercidas sobre la masa M1:

$$F_{i1} = M1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

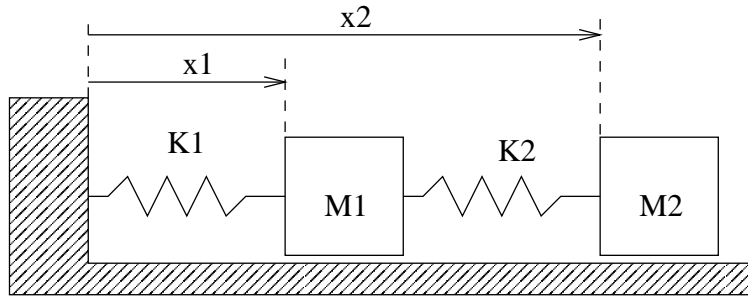


Figura 3.4: Ejemplo de un sistema traslacional.

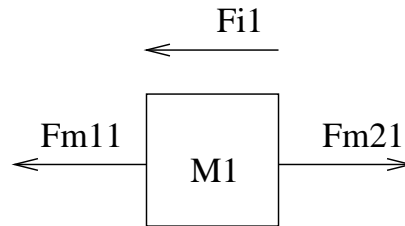


Figura 3.5: Balance de fuerzas sobre el cuerpo M1

$$F_{m11} = K1 \cdot (x_1 - l_{1n})$$

$$F_{m21} = K2 \cdot (x_2 - x_1 - l_{2n})$$

siendo  $F_{i1}$  la fuerza de inercia de la masa 1,  $F_{m11}$  la fuerza que el muelle 1 ejerce sobre la masa 1, y  $F_{m21}$  la fuerza que el muelle 2 ejerce sobre la masa 1.

2. Fuerzas ejercidas sobre la masa M2:

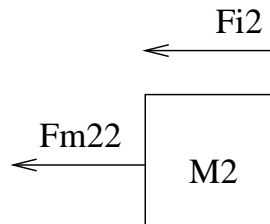


Figura 3.6: Balance de fuerzas sobre el cuerpo M2

$$F_{i2} = M2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$F_{m22} = K2 \cdot (x_2 - x_1 - l_{2n})$$

siendo  $F_{i2}$  la fuerza de inercia de la masa 2 y  $F_{m21}$  la fuerza que el muelle 2 ejerce sobre la masa 2.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo se llegan a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 F_{i1} + F_{m11} - F_{m21} = 0 & \quad \rightarrow \quad M1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K1 \cdot (x_1 - l_{1n}) - K2 \cdot (x_2 - x_1 - l_{2n}) = 0 \\
 F_{i2} + F_{m22} = 0 & \quad \rightarrow \quad M2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} + K2 \cdot (x_2 - x_1 - l_{2n}) = 0
 \end{aligned}$$

Estas son las dos ecuaciones que modelan el comportamiento del sistema. Nótese que dado que el sistema tiene 2 grados de libertad, son necesarias dos ecuaciones independientes para modelar su comportamiento. Nótese además que el modelo es un modelo paramétrico, pues depende de parámetros que definen el comportamiento de cada elemento del sistema. En este caso los parámetros son  $M1$ ,  $M2$ ,  $K1$ ,  $K2$ ,  $l_{1n}$  y  $l_{2n}$ .

### 3.2.2 Sistemas mecánicos rotacionales

Se denominan sistemas mecánicos rotacionales a aquéllos en los que los cuerpos que forman el sistema realizan rotaciones en el mismo plano, es decir, que los ejes de rotación de todos los cuerpos son paralelos. En estos sistemas, los giros realizados por los cuerpos varían por la acción de los pares de fuerzas ejercidos sobre ellos.

El movimiento de cada cuerpo que forma el sistema viene caracterizado por el giro que el cuerpo experimenta. Por tanto es el ángulo girado por el cuerpo el único grado de libertad que éste posee.

#### Momento de inercia

Un cuerpo de masa  $M$  sometido a un par de fuerzas experimenta un movimiento de rotación tal que el par de fuerzas de inercia cancela el par que lo impulsa.

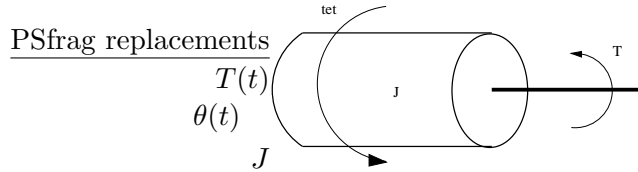


Figura 3.7: Giro de un cuerpo con un momento de inercia  $J$ .

Por tanto la ecuación que rige el comportamiento de este elemento viene dada por:

$$J \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = T(t) \quad (3.5)$$

Siendo  $\theta$  el ángulo girado por el cuerpo,  $T$  el par aplicado sobre éste y  $J$  su momento de inercia. Este parámetro está relacionado con la masa del cuerpo y su geometría.

La acción del par sobre el cuerpo no afecta directamente sobre la posición del cuerpo, sino sobre la aceleración angular que éste experimenta. La posición angular del cuerpo dependerá pues de las condiciones de velocidad y posición de las que parte.

### Muelle de torsión

Es un elemento elástico que se deforma ante la acción de un par. El elemento se opone a ser girado desarrollando un par de reacción proporcional al ángulo girado por éste al deformarse.

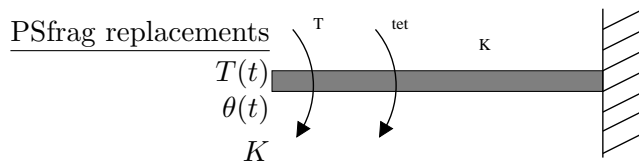


Figura 3.8: Esquema de un muelle de torsión

La ecuación que rige el comportamiento de este elemento es la siguiente:

$$K \cdot (\theta - \theta_o) = T(t) \quad (3.6)$$

Siendo  $K$  la constante de torsión del muelle y  $\theta_o$  el ángulo del muelle en estado de reposo.

### Amortiguador

Un amortiguador es un elemento que se deforma bajo la acción de un par creando un par de reacción que es función de la velocidad angular con la que el elemento se deforma. Elementos con rozamiento viscoso tienen este tipo de comportamiento.

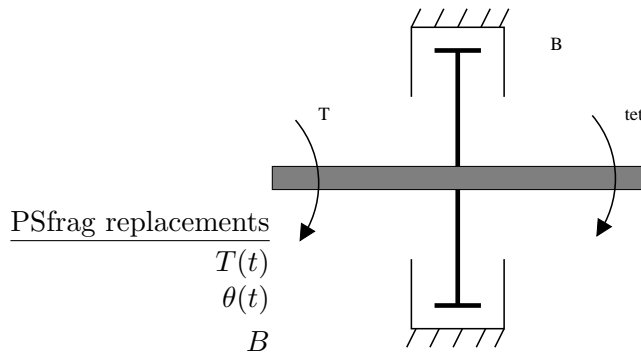


Figura 3.9: Esquema de un amortiguador de rotación

La ecuación que rige el comportamiento de este elemento es la siguiente:

$$B \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = T(t) \quad (3.7)$$

Siendo  $B$  la constante de rozamiento viscoso en el giro.

## Engranajes

Un engranaje es un dispositivo que transmite el movimiento giratorio de un eje a otro, transformando las propiedades de éste, tales como el ángulo girado o el par aplicado al eje. Generalmente los engranajes se componen de dos ruedas dentadas que engranan entre sí transmitiendo la energía de un eje a otro. Otros dispositivos de acoplamiento de ejes como por correas de transmisión o cadenas son asimilables a engranajes.

La relación entre el ángulo girado por cada eje es igual a la relación entre los radios de las ruedas dentadas, en caso de no existir deslizamiento u holguras entre ellas. Dado que el número de dientes que tiene una rueda ( $N$ ) es directamente proporcional a su radio ( $R$ ), es habitual referirse a éstos en vez de utilizar los radios. Por tanto:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.8)$$

En la figura 3.10 se muestra un engranaje de ruedas dentadas. Los ángulos girados por cada eje son proporcionales, pero el sentido del giro de cada eje se invierte por efecto del engranaje.

En un engranaje ideal, no hay pérdida de energía por rozamiento, transmitiéndose toda la energía mecánica de un eje a otro. Según esto

$$\theta_1 \cdot T_1 = \theta_2 \cdot T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.9)$$

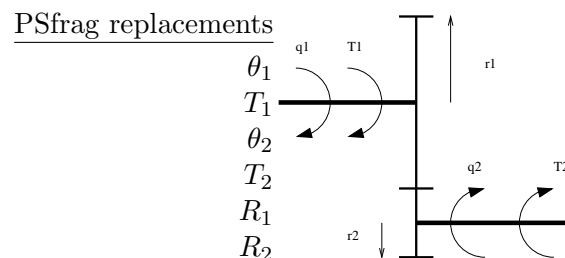


Figura 3.10: Esquema de un engranaje.

**Modelos de sistemas mecánicos rotacionales**

Una vez conocidos los modelos de todos y cada uno de los elementos que forman el sistema, el modelo del sistema completo surge de la aplicación de las leyes de Newton. La segunda ley de Newton, expresada en forma de pares de fuerzas, indica que la suma de los pares aplicados a un cuerpo, incluyendo los pares de inercia, es nula.

$$\Sigma \vec{T}(t) = 0 \tag{3.10}$$

Al igual que en el caso de sistemas traslacionales, a la hora de establecer las ecuaciones del modelo del sistema se debe tener en cuenta el sentido de los pares de fuerzas, ya que son magnitudes vectoriales.

Ejemplo

PSfrag replacements

En la figura 3.11 se muestra un sistema tal que sobre un eje con un momento de inercia  $J_1$  y una constante de fricción  $B_1$  y una constante de torsión  $K_1$  se aplica un par motor  $T(t)$ . Este eje está conectado mediante un engranaje de relación  $N_1/N_2$  a otro eje que acciona una carga cuyo momento de inercia es  $J_2$ , con una constante de fricción  $B_2$  y una constante de torsión de  $K_2$ .

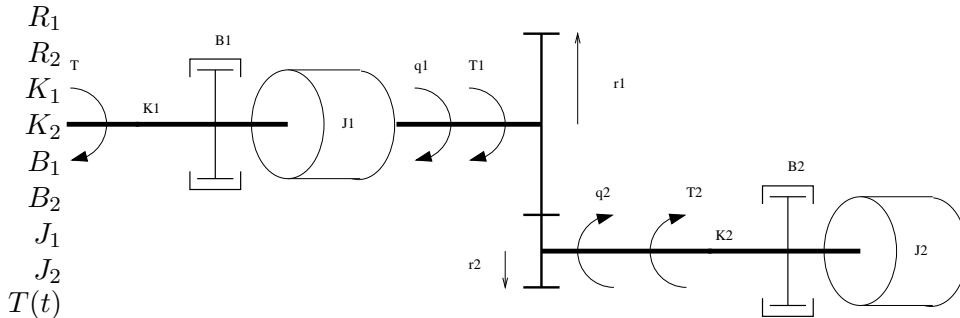


Figura 3.11: Ejemplo de sistema mecánico rotacional

Sea  $\theta_1$  el ángulo girado por el eje 1 respecto a la posición de reposo del mismo, y sea  $\theta_2$  el análogo en el eje 2.

Ecuaciones de balance sobre el eje 1:

$$T - J_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - B_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - K_1 \cdot \theta_1 - T_{e1} = 0 \tag{3.11}$$

Ecuaciones de balance sobre el eje 2:

$$T_{e2} - J_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - B_2 \cdot \frac{d\theta_2}{dt} - K_2 \cdot \theta_2 = 0 \tag{3.12}$$

Ecuación de balance en el engranaje:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.13)$$

$$\frac{T_{e1}}{T_{e2}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.14)$$

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la ecuación (3.12) de balance del eje 2 se tiene

$$T_{e2} - J_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - B_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - K_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \theta_1 = 0 \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.14) y sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.11) de balance del eje 1, se llega a:

$$T - J_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - B_1 \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - K_1 \cdot \theta_1 - \frac{N_1}{N_2} \cdot \left\{ J_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} + K_2 \cdot \frac{N_1}{N_2} \cdot \theta_1 \right\} = 0$$

Operando se obtiene

$$T - \left\{ J_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot J_2 \right\} \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} - \left\{ B_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot B_2 \right\} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} - \left\{ K_1 + \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot K_2 \right\} \cdot \theta_1 = 0$$

De esta ecuación se desprende que una carga de momento de inercia  $J_2$  unida a un eje 2 que está conectado a otro eje 1 mediante un engranaje de relación  $N_2/N_1$ , es equivalente a una carga en el eje 1 con un momento de inercia  $J_2 \cdot \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2$ . Esto es extensible al fenómeno de fricción y torsión del eje.

### 3.3 Sistemas hidráulicos

Son aquellos sistemas en los que se produce una circulación de líquido a lo largo de los elementos que forman el sistema bajo la acción de diferencias de presión. Los caudales de líquido y la diferencia de presiones son las magnitudes que se pretenden modelar. Las ecuaciones de balance surgen de la ley de conservación de masa.

#### 3.3.1 Depósito

Un depósito es un elemento que, alimentado por un caudal de entrada, es capaz de acumular líquido, suministrándolo en un caudal de salida. Como efecto de la acumulación de



líquido, éste se encuentra sometido a una presión hidrostática que en el fondo del depósito es proporcional a la altura del líquido en el mismo.

El modelo de un depósito prismático de sección  $S$  es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= q_{neto}(t) \\ p(t) &= p_a + \rho \cdot g \cdot h(t) \\ V(t) &= S \cdot h(t)\end{aligned}\tag{3.16}$$

Siendo  $V(t)$  el volumen de líquido contenido en el depósito,  $h(t)$  la altura del líquido en el depósito,  $q_{neto}(t)$  el caudal de líquido neto que entra en el depósito,  $p(t)$  la presión hidrostática en el fondo del depósito,  $\rho$  es la densidad del líquido,  $S$  la sección del depósito,  $p_a$  la presión atmosférica y  $g$  la constante gravitatoria. Normalmente se trabaja con presiones relativas ( $p(t) - p_a$ ), desapareciendo de los modelos la influencia de la presión atmosférica  $p_a$ .

### 3.3.2 Tubería y válvula

Estos dos elementos se analizan conjuntamente por tener un modelo semejante. Por una tubería (o por una válvula) circula un caudal de líquido tal que la caída de presión a lo largo del elemento es proporcional al cuadrado del caudal circulante. Esta caída de presión se debe a la fricción del líquido con las paredes del elemento.

El modelo de estos elementos es el siguiente:

$$q(t) = K_p \cdot \sqrt{p_1(t) - p_2(t)}\tag{3.17}$$

Siendo  $q(t)$  el caudal de líquido que circula a lo largo del elemento del punto de mayor presión  $p_1(t)$  al de menor presión  $p_2(t)$ . El parámetro  $K_p$  es la constante de fricción del elemento. En el caso de una tubería este parámetro depende de su luz y del material del que está hecha y es constante para una tubería dada. Sin embargo en el caso de una válvula, esta constante depende de la geometría de la válvula y de su apertura, de forma que cuanto más cerrada esté la válvula, mayor será la fricción que ésta produce, y por tanto menor será la constante  $K_p$ . Generalmente se considera la constante de fricción proporcional al porcentaje de apertura de la válvula.

### 3.3.3 Modelos de sistemas hidráulicos

Estos modelos surgen de la aplicación de las ecuaciones de balance sobre el sistema. En este caso las ecuaciones de balance vienen dadas por la ley de conservación de masa, por

la cual la masa del líquido que entra en un elemento es igual a la masa del líquido que sale más la cantidad de líquido que se acumula.

### Ejemplo

El sistema está formado por dos depósitos interconectados entre sí. El primer depósito se llena con un caudal de entrada  $Q_e(t)$ . Al estar los depósitos conectados entre sí, pasa el agua del depósito 1 al 2, llenándose también éste. El depósito 2 se vacía mediante un conducto de forma que esta descarga se debe a la presión del agua en éste depósito. El sistema se ilustra en la figura 3.12

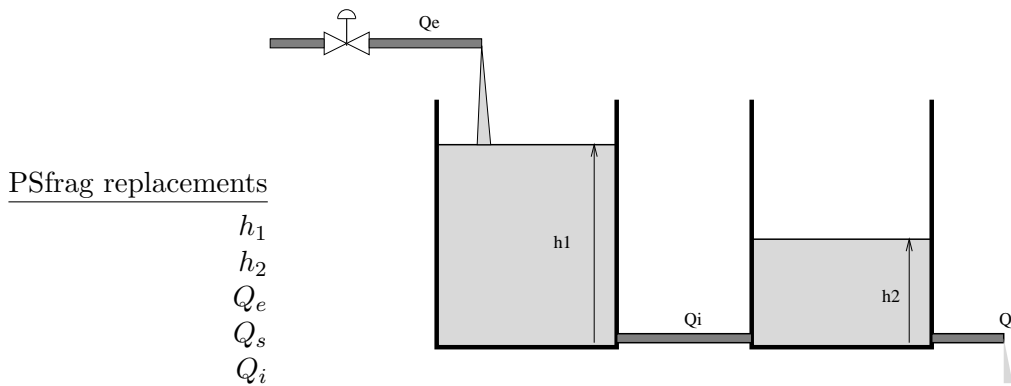


Figura 3.12: Sistema de dos depósitos interconectados

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema son las siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= Q_e(t) - Q_i(t) \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} &= Q_i(t) - Q_s(t) \\ Q_i(t) &= K_{h1} \sqrt{h_1 - h_2} \\ Q_s(t) &= K_{h2} \sqrt{h_2} \end{aligned}$$

Siendo  $Q_i(t)$  el caudal de líquido que circula del depósito 1 al 2,  $Q_s(t)$  el caudal que sale del depósito 2,  $A_1$  y  $A_2$  el área del depósito 1 y 2 respectivamente y  $K_{h1}$  y  $K_{h2}$  las constantes de fricción de las tuberías.

## 3.4 Modelado de sistemas eléctricos

Los sistemas eléctricos, o circuitos eléctricos, están formados por una serie de elementos interconectados entre sí por los que circula una intensidad eléctrica que da lugar a una caída de potencial eléctrico en el mismo. La energía potencial es la que impulsa la corriente eléctrica, que pierde energía al paso por un elemento. Esta energía se transforma en energía electrostática, magnética o bien térmica.

Dado que en todo elemento eléctrico debe circular una intensidad, éstos deben tener

al menos dos puntos de conexión con el circuito o nodos. Además los elementos se deben conectar entre sí formando bucles, es decir, de forma que no existan nodos de algún elemento sin conexión con otro.

Existe una analogía clara entre los sistemas eléctricos y los hidráulicos. En éstos el líquido circula a través de los elementos accionado por la diferencia de presión en el líquido. En los sistemas eléctricos es la intensidad (que no deja de ser un caudal de electrones) la que circula a través de los elementos accionada por la diferencia de potencial. Las fuentes eléctricas son semejantes a las fuentes de líquido que surten al sistema hidráulico.

Las ecuaciones de balance surgen al aplicar las Leyes de Kirchoff al sistema. A continuación se detallan los elementos más comunes de este tipo de sistemas.

### 3.4.1 Resistencia

Es un elemento tal que al circular una intensidad por él, ésta disipa energía calorífica (efecto Joule) produciendo una caída de potencial. La ecuación del modelo de la resistencia viene dado por la ley de Ohm, que se expresa de la siguiente forma:

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} \quad (3.18)$$

Siendo  $V(t)$  la diferencia de potencial a la que se somete la resistencia,  $i(t)$  la intensidad que circula y  $R$  la resistencia del elemento.

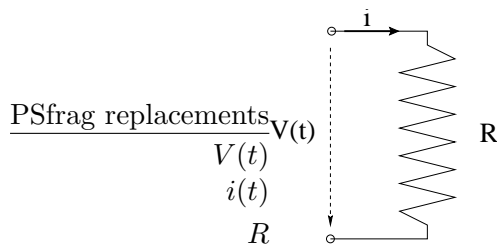


Figura 3.13: Esquema de una resistencia eléctrica

Este elemento es análogo a una tubería en un sistema hidráulico.

### 3.4.2 Condensador

Es un elemento que al someterse a una diferencia de potencial, se genera una intensidad proporcional a la variación de la diferencia de potencial. La ecuación del modelo de este elemento es:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \quad (3.19)$$

Se denomina al parámetro  $C$  capacidad del condensador.

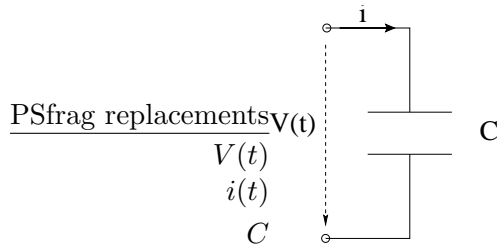


Figura 3.14: Esquema de un condensador eléctrico

El condensador es análogo a un depósito en un sistema hidráulico.

### 3.4.3 Bobina

Es un elemento que al someterse a una diferencia de potencial se genera una variación en la intensidad que circula por éste proporcional a la diferencia de potencial. Las bobinas almacenan energía eléctrica en forma de energía magnética. La ecuación del modelo es la siguiente:

$$V(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (3.20)$$

Siendo  $L$  la constante de autoinducción de la bobina.

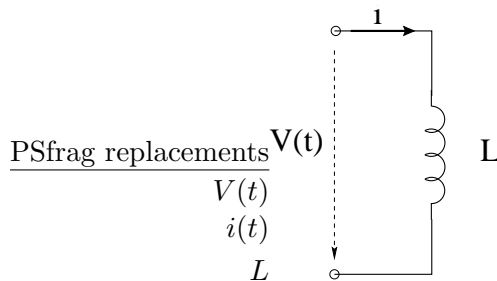


Figura 3.15: Esquema de una bobina eléctrica

### 3.4.4 Fuente

Es un elemento que crea una diferencia de potencial, de forma tal que, al conectarla a elementos eléctricos, se genera una intensidad, que aporta energía eléctrica al circuito. Es

por tanto un elemento activo.

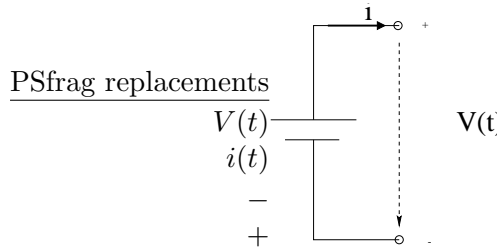


Figura 3.16: Esquema de una fuente eléctrica de corriente continua

Si la diferencia de potencial generada es constante a lo largo del tiempo, la fuente se denomina fuente de corriente continua. Por el contrario, si la diferencia de potencial toma la forma de una onda senoidal se denomina fuente de corriente alterna.

### 3.4.5 Motores de corriente continua

Son dispositivos eléctricos que generan un campo magnético, que por inducción sobre un rotor, producen un movimiento de rotación en un eje. Para ello es necesario que por el rotor circule una intensidad llamada intensidad de campo. Esta inducción produce una caída de potencial sobre el circuito denominada fuerza contraelectromotriz que es proporcional a la velocidad angular del eje. La intensidad que circula por el circuito inductor se denomina intensidad de armadura. Estos dispositivos transforman pues energía eléctrica en energía mecánica y se utilizan para accionar sistemas rotacionales.

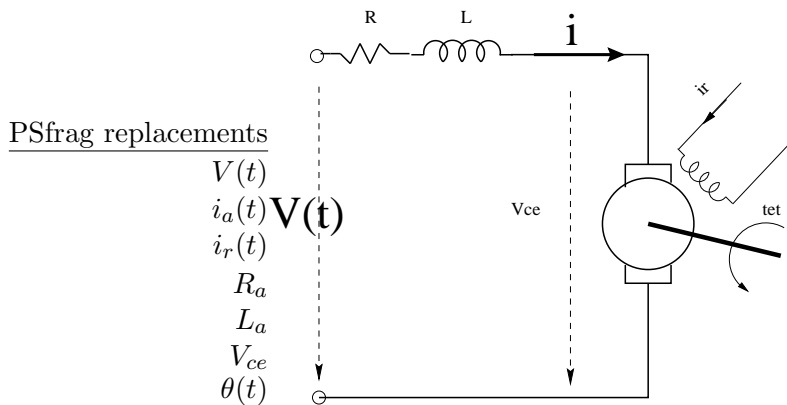


Figura 3.17: Esquema de un motor de corriente continua

Las ecuaciones que modelan un motor son:

$$\begin{aligned}
 V_a(t) &= R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + V_{ce} & (3.21) \\
 V_{ce} &= K_{ce} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\
 T(t) &= K \cdot i_a \cdot i_r
 \end{aligned}$$

Siendo  $i_a(t)$  la intensidad en la armadura o circuito inductor,  $V_a(t)$  la tensión aplicada al circuito inductor,  $V_{ce}$  la fuerza contraelectromotriz,  $\theta(t)$  el ángulo girado por el eje rotor y  $T(t)$  el par con el que este gira,  $K$  es la constante del par motriz,  $K_{ce}$  es la constante contraelectromotriz y  $R_a$  y  $L_a$  son la resistencia y la inductancia del circuito inductor. Generalmente se trabaja con una intensidad en el rotor  $i_r(t)$  constante, por lo que el par generado por el motor será proporcional a la intensidad de la armadura  $i_a(t)$ , de forma que  $T(t) = K_r \cdot i_a(t)$ .

### 3.4.6 Modelos de sistemas eléctricos

Las ecuaciones de balance de este tipo de sistemas se expresan mediante las leyes de Kirchoff. Estas leyes se enuncian de la siguiente forma:

1. La suma de las intensidades que entran en un nodo es igual a la suma de las intensidades que salen.
2. La suma de las diferencias de potencial entre los nodos de los elementos que forman un bucle es nula.

#### Ejemplo

En temas anteriores se han formulado modelos de circuitos. En el apartado 2.4 del tema 2 se propone modelar un circuito (véase la figura 2.4 del tema 2) y se obtienen las ecuaciones correspondientes aplicando las ecuaciones de los elementos y las leyes de Kirchoff.

## 3.5 Sistemas térmicos

Se denominan sistemas térmicos a aquellos sistemas cuyos elementos varían su estado termodinámico (temperatura, presión, densidad, entalpía, entropía, etc.) bajo la acción de aportes o transferencias de calor. Un ejemplo de sistema térmico puede ser el termo para calentar agua en las instalaciones domésticas. Este sistema pretende calentar un caudal de agua que circula a través de él mediante el aporte de calor fruto de la combustión de gas.

El estado termodinámico de un elemento varía por la transferencia de calor con otro elemento del sistema o con el ambiente. La transferencia de calor puede realizarse mediante una serie de mecanismos que se detallan a continuación.

### 3.5.1 Transferencia de calor por conducción

Esta transferencia de calor se produce entre elementos que están en contacto. El calor fluye a través del que tiene mayor temperatura al que tiene menor. La cantidad de calor que fluye de un cuerpo a otro por unidad de tiempo  $\dot{Q}$  se modela considerando que es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre ellos.

$$\dot{Q} = K_{cond} \cdot (T_1 - T_2) \quad (3.22)$$

Siendo  $K_{cond}$  la constante de conducción de calor por un cuerpo, que depende de la superficie de contacto y de las características de los cuerpos. Cuando se calienta un cuerpo mediante una fuente de calor, por ejemplo, un metal en una fragua, se produce este mecanismo de transferencia de calor. El calor pasa de la fuente, en este caso las brasas, al metal que se encuentra en contacto con ellas.

### 3.5.2 Transferencia de calor por convección

Esta transferencia de calor se produce entre elementos que están a distintas temperaturas, pero el mecanismo de la transferencia tiene asociado el movimiento de un fluido. Por ejemplo, cuando se enfría un cuerpo caliente introduciéndolo en una corriente de agua fría, el enfriamiento del cuerpo se produce porque el calor se transfiere del cuerpo con mayor temperatura al caudal de agua que está a menor temperatura, transportando el caudal de agua la energía sustraída al cuerpo caliente.

El modelo de este tipo de transferencia viene dado por la siguiente ecuación:

$$\dot{Q} = K_{conv} \cdot (T_1 - T_2) \quad (3.23)$$

Siendo  $K_{conv}$  la constante de convección un parámetro que depende del movimiento del fluido que interviene en la transferencia y de la superficie de contacto.

### 3.5.3 Transferencia de calor por radiación

Es un fenómeno por el cual un cuerpo con una determinada temperatura emite una radiación electromagnética. De esta forma, libera energía calórica transfiriéndola a otros cuerpos. La transferencia de calor entre cuerpos mediante este mecanismo, se produce por la exposición de uno de los cuerpos a la radiación emitida por el otro.

El modelo de este fenómeno viene dado por:

$$\dot{Q} = K_{rad} \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.24)$$

Siendo la constante de radiación  $K_{rad}$  un parámetro que depende de la geometría, de la posición relativa y de las propiedades de los cuerpos.

### 3.5.4 Modelos de sistema térmicos

Los modelos de sistemas térmicos surgen de la aplicación de las ecuaciones de balance de masa y de energía al conjunto de los elementos. Las ecuaciones de balance de masa son análogas a las que se aplican para modelar sistemas hidráulicos, y expresan que la masa de un producto que entra en un elemento es igual a la masa del producto que sale de éste más la masa que se acumula en el sistema.

Por otro lado las ecuaciones de conservación de la energía indican que la cantidad de calor que se aporta a un elemento menos la cantidad de calor que éste desprende es igual a la cantidad de calor acumulado por éste. A la diferencia entre la cantidad de calor aportado y la cantidad de calor desprendido se denomina la cantidad de calor neto. Estas ecuaciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d(m \cdot C_e \cdot T)}{dt} = \dot{Q}_{aportado} - \dot{Q}_{desprendido} = \dot{Q}_{neto} \quad (3.25)$$

Siendo  $m$  la masa del elemento sobre el que se realiza el balance, y  $C_e$  el calor específico del elemento. Este parámetro depende de la naturaleza del elemento.

#### Ejemplo

Vamos a ver cómo se obtiene el modelo de un sistema formado por una caldera que contiene un líquido que se calienta con una fuente de calor, por ejemplo un quemador de gas. Además el líquido está en contacto con el ambiente, a una temperatura  $T_a$ , con el que intercambia calor.

Las transferencias de calor que se ven implicadas son la que se produce entre el líquido y el ambiente y el aporte de calor por la combustión. La primera de ellas se produce por convección, por lo que la ecuación de la transferencia de calor es:

$$\dot{Q}_{la} = K_{conv} \cdot (T_l - T_a)$$

Siendo  $T_l$  la temperatura del líquido,  $T_a$  la temperatura del ambiente. La fuente de calor se modela como un aporte de la cantidad de calor por unidad de tiempo al líquido



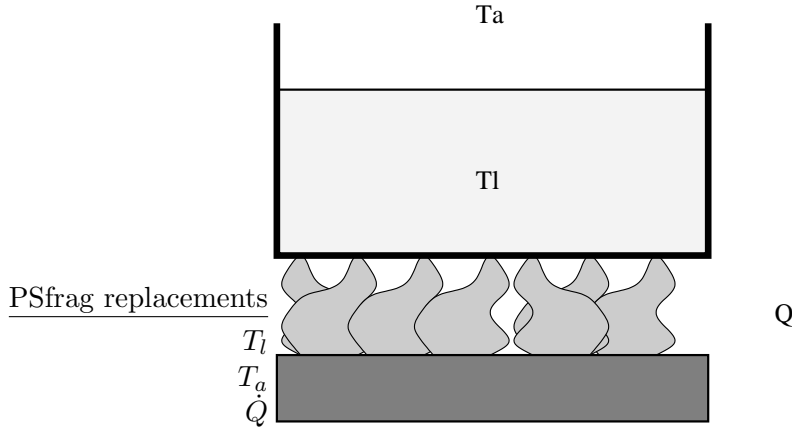


Figura 3.18: Calentamiento de un líquido en una caldera

constante y de valor  $\dot{Q}$ . Aplicando la ecuación de balance de energía al líquido se tiene que :

$$m \cdot C_e \cdot \frac{dT_l}{dt} = \dot{Q}_{neto} = \dot{Q} - \dot{Q}_{la} = \dot{Q} - K_{conv}(T_l - T_a)$$

En esta ecuación la magnitud que nos interesa es la temperatura del líquido  $T_l(t)$ , cuya evolución depende del calor aportado por la fuente de calor  $\dot{Q}$  y de la temperatura ambiental  $T_a$ .

### 3.6 Linealización de modelos no lineales

Anteriormente se ha visto cómo la obtención de un modelo conduce generalmente a la representación del comportamiento del sistema mediante una serie de ecuaciones, generalmente ecuaciones diferenciales, en las que se relacionan entre sí magnitudes del sistema, con derivadas de éstas respecto al tiempo. A continuación se tratará con el modelo entrada/salida o descripción externa del sistema, pero todo el análisis hecho es extensible a modelos internos del sistema.

El modelo del sistema en su formulación entrada/salida tiene la forma de:

$$F\left(\frac{d^n y_1}{dt^n}, \dots, \frac{dy_1}{dt}, y_1, \dots, \frac{d^n y_{ny}}{dt^n}, \dots, \frac{dy_{ny}}{dt}, y_{ny}, \frac{d^m u_1}{dt^m}, \dots, \frac{du_1}{dt}, u_1, \dots, \frac{d^m u_{nu}}{dt^m}, \dots, \frac{du_{nu}}{dt}, u_{nu}\right) = 0 \quad (3.26)$$

Siendo  $y_1, \dots, y_{ny}$  las salidas del sistema a modelar, y  $u_1, \dots, u_{nu}$  las entradas al sistema. La función  $F(\cdot)$  representa el conjunto de ecuaciones que relacionan las entradas con las salidas del sistema. Para que el sistema esté bien planteado, el número de ecuaciones debe ser igual al número de variables a determinar, en este caso las salidas del sistema, por tanto son necesarias  $ny$  ecuaciones.

Sin pérdida de generalidad, y en aras de la sencillez en la exposición, supondremos en adelante que el sistema es monovariable, es decir, que tan sólo tiene una salida y una entrada. En este caso el modelo viene dado por la ecuación:

$$f\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \dots, \frac{dy}{dt}, y, \frac{d^m u}{dt^m}, \dots, \frac{du}{dt}, u\right) = 0 \quad (3.27)$$

Según la forma que toma la función  $f$  se pueden clasificar los sistemas en:

- **Sistemas lineales:** aquéllos en los que la función  $f$  es una función lineal. Es decir, en los que la ecuación diferencial es una combinación lineal de las entradas y salidas y de sus derivadas. Por tanto toma la forma siguiente:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n \cdot y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m \cdot u \quad (3.28)$$

Siendo  $(a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)$  parámetros constantes del modelo lineal del sistema. La linealidad de los sistemas es una propiedad que les confiere una serie de características que los hace muy interesantes y que se detallarán en temas posteriores. Entre ellas se pueden destacar las siguientes:

1. Solución sencilla de las ecuaciones diferenciales.
  2. Tratamiento sistemático de sistemas (generalización de resultados), utilizando por ejemplo su representación por función de transferencia.
  3. Aplicación de potentes procedimientos de análisis, como la transformada de Laplace o el análisis frecuencial.
- **Sistemas no lineales:** aquéllos en los que la función  $f$  es una función no lineal.

### 3.6.1 Punto de funcionamiento de un sistema

En los procesos industriales es habitual que el comportamiento del sistema evolucione en torno a un *punto de funcionamiento*. Es decir, en una situación tal que las magnitudes del sistema evolucionan en torno a un valor constante.

Por ejemplo, piénsese en un depósito que se llena constantemente con un caudal de entrada  $Q_e$  y que descarga a través de una tubería de forma que la descarga se produce por gravedad. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$A \cdot \frac{dh(t)}{dt} = Q_e - Q_s = Q_e - K \cdot \sqrt{h(t)}$$

En el que  $A$ , el área del depósito, es de  $1\text{m}^2$ ,  $h$  su altura y  $K$  la constante de fricción de la tubería, de  $10\text{l}/(\text{min} \cdot \text{m}^{1/2})$ . Se considera que el caudal de entrada  $Q_e$  es constante con un valor de  $10\text{ l/min}$ .

En la figura 3.19 se muestra la evolución de la altura del depósito y del caudal de salida partiendo de una situación inicial en la que el depósito está vacío.

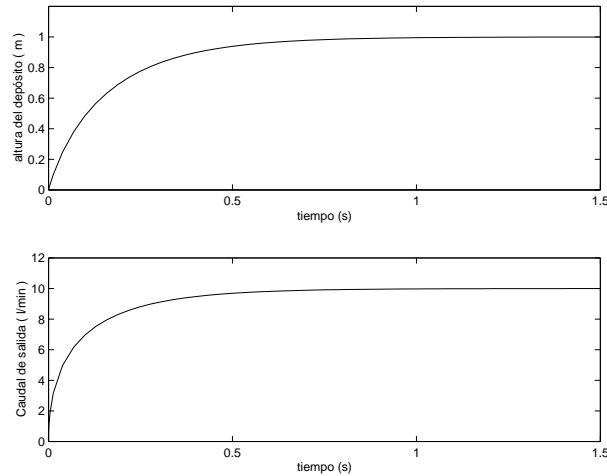


Figura 3.19: Evolución de la altura y del caudal de salida.

El sistema evoluciona hasta un punto en el que la altura del depósito permanece constante (en consecuencia  $\frac{dh}{dt} = 0$ ). En este punto el caudal de salida es igual al caudal de entrada, es decir  $10\text{ l/min}$  y la altura en la que se queda el depósito es:

$$Q_s = Q_e \Rightarrow K \cdot \sqrt{h_o} = Q_e \Rightarrow h_o = \left(\frac{Q_e}{K}\right)^2 = 1\text{m}$$

El sistema permanecerá en ese punto indefinidamente hasta que no cambie el caudal de entrada. Esto quiere decir que el sistema está en equilibrio. Al estado en el que el sistema permanece se denomina punto de equilibrio del sistema.

En el funcionamiento normal del sistema se sabe que el caudal de entrada está en torno a  $10\text{ l/min}$ , por lo que la altura del depósito evolucionará hasta un valor en torno a  $1\text{ m}$  y el caudal de salida en torno a  $10\text{ l/min}$  (véase la figura 3.20). Por tanto el sistema permanecerá normalmente en torno al punto de equilibrio antes calculado. Este punto se denomina *punto de funcionamiento*, y corresponde al estado en el que se considera que el sistema funciona normalmente. Este punto debe ser un punto de equilibrio.

### 3.6.2 Linealización de un sistema dinámico

Como ya se ha visto, el conjunto de ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico de un sistema puede ser lineal o no lineal. Los sistemas lineales resultan convenientes por el hecho de su sencillez de tratamiento y análisis.

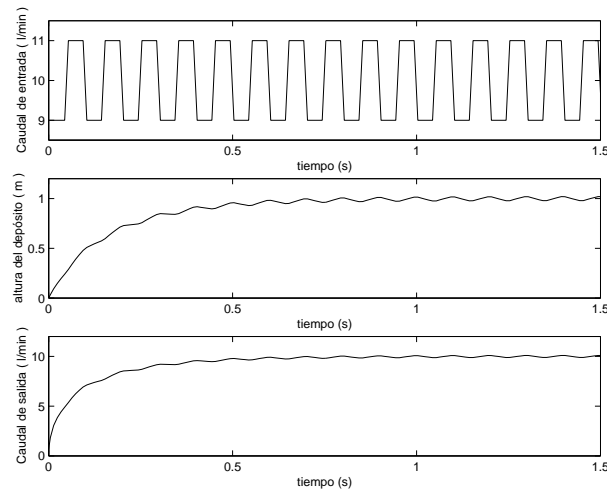


Figura 3.20: Evolución del caudal de salida y de la altura del depósito ante variaciones en torno al punto de funcionamiento.

Dado que un sistema en su funcionamiento normal evoluciona en torno a un punto de funcionamiento, parece razonable pensar que el análisis del sistema sería más sencillo si tratásemos de analizar el comportamiento del sistema alrededor de éste, sin considerar cómo será fuera del rango en que va a evolucionar el sistema.

Es bien sabido que una función no lineal se puede aproximar en un determinado rango por una función lineal. A este procedimiento se le denomina linealización de una función en torno a un punto. Toda aproximación está sujeta a un determinado error, asociado al rango de aproximación. Cuanto mayor sea éste, mayor será el error cometido por la aproximación.

Extendiendo esto a sistemas dinámicos, parece razonable aproximar el modelo no lineal del sistema por un modelo lineal en torno al punto de funcionamiento. Este modelo lineal aproximado guardará las características del sistema dinámico en su evolución en el punto de funcionamiento y en el rango de variación del sistema en torno a éste. Este modelo por ser lineal tiene todas las características beneficiosas de los sistemas lineales. Además, como toda aproximación, tiene asociado un error que se comete y que será tanto mayor cuanto mayor sea el rango de variación del sistema. A este procedimiento se le denomina *linealización de un sistema*.

### Cálculo del modelo lineal aproximado

Como es sabido el modelo de un sistema dinámico monovariante en general viene dado por la ecuación (3.27) en la que, para simplificar la exposición, se va a denominar las variables del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} &\rightarrow y^{(n)}, \quad \dots, \quad \frac{dy}{dt} \rightarrow \dot{y} \\ \frac{d^m u}{dt^m} &\rightarrow u^{(m)}, \quad \dots, \quad \frac{du}{dt} \rightarrow \dot{u} \end{aligned}$$

Un procedimiento para linealizar una función en torno a un punto es mediante un desarrollo en serie de Taylor de la función en ese punto. Según esto la función se puede aproximar por:

$$\begin{aligned} &\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right]_0 \cdot (y^{(n)} - y^{(n)}]_0) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_0 \cdot (\dot{y} - \dot{y}]_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right]_0 \cdot (y - y]_0) + \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial u^{(m)}} \right]_0 \cdot (u^{(m)} - u^{(m)}]_0) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right]_0 \cdot (\dot{u} - \dot{u}]_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right]_0 \cdot (u - u]_0) + O(2) = 0 \end{aligned}$$

Siendo  $y^{(n)}]_0, \dots, \dot{y}]_0, y]_0$  los valores que toman dichas señales en el punto de funcionamiento y  $O(2)$  los términos de orden superior, que se consideran despreciables en el modelo linealizado. Haciendo el cambio de variables siguiente:

$$\begin{aligned} y - y]_0 &\rightarrow \alpha \\ u - u]_0 &\rightarrow \beta \end{aligned}$$

se tiene que :

$$\begin{aligned} y^{(n)} - y^{(n)}]_0 &\rightarrow \alpha^{(n)} \\ &\vdots \\ \dot{y} - \dot{y}]_0 &\rightarrow \dot{\alpha} \\ y - y]_0 &\rightarrow \alpha \\ u^{(m)} - u^{(m)}]_0 &\rightarrow \beta^{(m)} \\ &\vdots \\ \dot{u} - \dot{u}]_0 &\rightarrow \dot{\beta} \\ u - u]_0 &\rightarrow \beta \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que los términos de las derivadas parciales particularizadas en el punto de funcionamiento son constantes, haciendo las siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned}
& \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right|_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_0} \rightarrow a_1 \\
& \quad \vdots \\
& \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_0} \rightarrow a_{n-1} \\
& \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_0} \rightarrow a_n \\
& -\frac{\left. \frac{\partial f}{\partial u^{(m)}} \right|_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_0} \rightarrow b_0 \\
& \quad \vdots \\
& -\frac{\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_0} \rightarrow b_{m-1} \\
& -\frac{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_0} \rightarrow b_m
\end{aligned}$$

se obtiene la siguiente ecuación

$$\alpha^{(n)} + a_1 \cdot \alpha^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot \dot{\alpha} + a_n \cdot \alpha = b_0 \cdot \beta^{(m)} + b_1 \cdot \beta^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \cdot \dot{\beta} + b_m \cdot \beta$$

que es la ecuación lineal del modelo linealizado del modelo no lineal en torno al punto de funcionamiento.

### Ejemplo

Para ilustrar el procedimiento se va a linealizar el modelo del sistema del depósito visto anteriormente en torno a su punto de funcionamiento. El modelo del sistema es el siguiente:

$$A \cdot \frac{dh}{dt} + K \cdot \sqrt{h} - Q_e = 0$$

En este caso, la salida del sistema, representada por  $y$  en el epígrafe anterior, es la

altura del depósito  $h$ , y la actuación o entrada al sistema, representada por  $u$  en el epígrafe anterior, es el caudal de entrada  $Q_e$ .

El punto de funcionamiento viene dado por los siguientes valores:

$$\begin{aligned} Q_e]_0 &= 10 & l/min \\ h]_0 &= 1 & m \\ \left. \frac{dh}{dt} \right]_0 &= 0 & m/s \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} \alpha &= h - h]_0 = h - 1 \\ \beta &= Q_e - Q_e]_0 = Q_e - 10 \end{aligned}$$

y calculando los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la ecuación del modelo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \right]_0 &= A = 1 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right]_0 &= \left. \frac{K}{2 \cdot \sqrt{h}} \right]_0 = \frac{10}{2 \cdot \sqrt{1}} = 5 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial Q_e} \right]_0 &= -1 \end{aligned}$$

se obtienen los coeficientes de la ecuación del modelo lineal. En este caso  $n = 1$  y  $m = 0$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \right]_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \right]_0} = \frac{5}{1} = 5 \\ b_0 &= - \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial Q_e} \right]_0}{\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right]_0} = - \frac{-1}{5} = 1 \end{aligned}$$

Se llega a la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{d\alpha}{dt} + 5 \cdot \alpha = 1 \cdot \beta$$

El modelo lineal aproxima el comportamiento del sistema en torno al punto de funcionamiento, de forma que, cuanto más alejados estemos de este punto, más error se cometerá en el comportamiento obtenido por este modelo, frente al no lineal. En la figura

3.21 se muestra el comportamiento del modelo no lineal (línea continua) y el del modelo linealizado (línea a trazos). En ésta se muestra la evolución del caudal de entrada  $Q_e$  al depósito (véase la figura 3.21 (a)). Durante un cierto periodo de tiempo el caudal de entrada varía en torno al punto de funcionamiento en 10 l/min. En este periodo el modelo no lineal y el linealizado representan prácticamente el mismo comportamiento de la altura en el depósito y del caudal de salida (véanse las figuras 3.21 (b) y (c)). Sin embargo, después se produce un cambio del caudal de entrada  $Q_e$  evolucionando en torno a otro punto distinto, en este caso 5 l/min. Entonces se observa que el comportamiento de las magnitudes del sistema derivado del modelo no lineal difiere en gran medida del derivado del modelo linealizado, tomando la altura incluso valores imposibles.

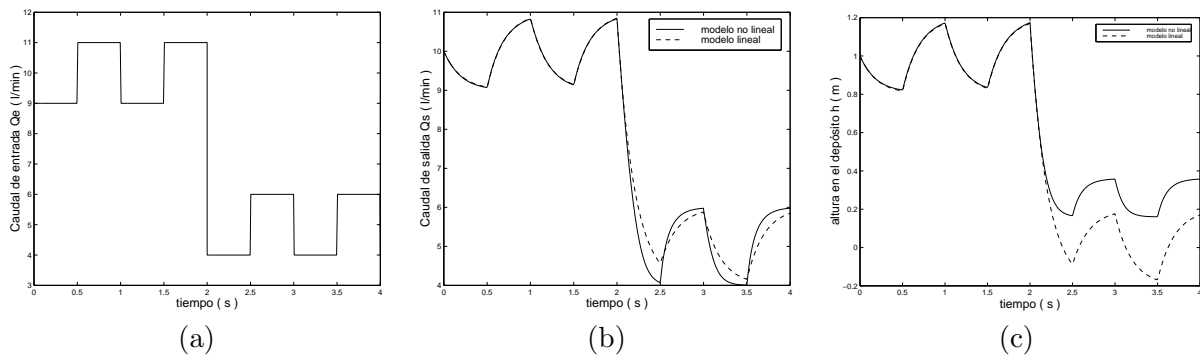


Figura 3.21: Comparación del comportamiento del modelo no lineal con el modelo linealizado

### 3.7 Simulación

El objeto del modelado de un sistema dinámico es la obtención de una expresión matemática del comportamiento del sistema con el fin de analizar su evolución o bien, reproducir lo más fielmente posible la evolución de sus señales. Ya sea para uno u otro fin, es necesario calcular cuál va a ser la evolución de las señales del sistema bajo unas ciertas condiciones iniciales y para unas entradas determinadas. A este procedimiento se denomina simulación del sistema y es una herramienta fundamental en el estudio de sistemas dinámicos.

La evolución del sistema dependerá de las condiciones iniciales de las que parte el sistema y, en sistemas no autónomos, de sus señales de entrada. La elección de las señales de entrada que se utilizan para la simulación condiciona la evolución del mismo. Las señales de entrada pueden ser señales de prueba, del tipo escalón, impulso o rampa, o bien señales más realistas que imiten las condiciones de operación del sistema físico. Las señales de prueba se utilizan para comprobar y comparar la evolución del sistema de una forma sistemática, definiendo parámetros que cuantifican la idoneidad de la evolución de la señal ante ese tipo de señales de entrada. La simulación del sistema, si es suficientemente fiel al comportamiento del sistema real, permite un estudio de la influencia de la variación de parámetros o de señales de entrada o de sus condiciones iniciales, sobre el comportamiento de las magnitudes del sistema.



En modelos matemáticos en forma de ecuaciones diferenciales, para obtener la evolución temporal de las señales es necesario integrar las ecuaciones diferenciales de éste. Por tanto la simulación de este tipo de modelos se traduce en un procedimiento para integrar las ecuaciones diferenciales involucradas en el modelo. Esta tarea se puede llevar a cabo de dos formas distintas:

- **Analógica:** Se desarrolla un circuito electrónico utilizando módulos analógicos que realizan ciertas funciones, por ejemplo integradores o ganancias. Por tanto el circuito electrónico obtenido es a su vez un sistema dinámico cuya evolución es análoga a la del modelo que se desea simular. El modelo matemático se debe manipular para poder expresarlo utilizando tan sólo las funciones que realizan los módulos electrónicos. Cada uno de estos módulos se realizan utilizando componentes electrónicos como resistencias, condensadores o amplificadores. Los parámetros de éstos pueden no ser constantes, pues pueden variar por ejemplo con el tiempo o con la temperatura del circuito. Esto hace que la respuesta dinámica del circuito varíe al variar éstos. Por tanto la precisión de la simulación está sujeta a la bondad de los componentes que intervienen en el circuito. Este problema, junto a la complejidad en su diseño y la poca flexibilidad que la tecnología analógica permite, son las razones principales que han condicionado su uso para el cálculo, y en particular, para la simulación.
- **Digital:** Para la simulación se utiliza un computador digital, que tiene la propiedad de poder realizar un cierto procesamiento de información (números o caracteres) y generar un resultado. Esta tarea se lleva a cabo en forma de secuencia de operaciones básicas, que constituyen un programa. Por tanto es posible realizar programas que resuelvan problemas de cálculo de una forma secuencial, es decir, como una secuencia de operaciones. Este tipo de algoritmos se denominan métodos numéricos. La simulación se reduce pues a desarrollar un algoritmo o método numérico que integre ecuaciones diferenciales y codificarlo en forma de programa. Una simulación del sistema bajo unas ciertas condiciones equivale a ejecutar este programa para unos datos de entrada determinados.

Entre las características principales de la utilización del cálculo digital se encuentra el hecho de que la precisión del resultado de la simulación es constante, y tan sólo depende del número de bits que utiliza el computador para codificar las cantidades numéricas. También es importante el hecho de que un computador es capaz de realizar cualquier tipo de programa, y ejecuciones del mismo para distintos datos de entrada.

### 3.7.1 Métodos numéricos de integración

Un método numérico de integración consiste en un algoritmo iterativo que integra ecuaciones diferenciales. La integración analítica de las ecuaciones diferenciales da como resultado la expresión explícita de las señales que intervienen en ellas. Por ejemplo para el caso del modelo entrada-salida del sistema, la solución de la integración analítica tiene la forma  $y = y(t)$ . Esta función dependerá en general de los parámetros del modelo, de las condiciones iniciales del sistema así como de las señales de entrada ( $y =$

$y(t, u(t), y_0, \text{parámetros})$ ). La integración analítica es muy compleja y no siempre es posible de obtener para todos los sistemas. Tan sólo se conocen métodos de integración analítica de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales.

En un método numérico de integración, no se obtiene la expresión analítica de la señal como función del tiempo, sino que se obtiene una secuencia de valores que toma la señal a lo largo del tiempo. Al ser un método iterativo, se discretiza el tiempo, de forma que se calcula en cada instante el valor que tomará la señal en función del valor que tomaba ésta, sus derivadas y las señales de entrada en el instante anterior. Por tanto cada iteración del algoritmo corresponde al cálculo del valor aproximado que toma la señal en un instante determinado en función de los valores aproximados de las señales obtenidas en iteraciones anteriores  $\hat{y}(t_i) = F(\hat{y}(t_{i-1}), \dots, \hat{y}(t_1), \hat{y}(t_0), u(t_{i-1}), \dots, u(t_1), u(t_0))$ , obteniéndose la evolución aproximada de la señal hasta ese instante. Las iteraciones terminarán cuando se complete el intervalo de tiempo que se desea simular. El resultado de la simulación es por tanto una secuencia de valores aproximados que toma la señal en una secuencia de instantes determinados:

$$\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{final} \\ \hat{y}(t_0) & \hat{y}(t_1) & \hat{y}(t_2) & \cdots & \hat{y}(t_{final}) \end{bmatrix}$$

Al intervalo de tiempo que hay entre los instantes de la secuencia se denomina paso de integración. Como es razonable, cuanto menor sea éste, más cantidad de valores de la señal se calcularán, y por tanto mayor será la precisión con la que se obtienen los valores. El paso de integración es por tanto un parámetro del método de integración que es muy importante, y su elección está relacionada con las características de las ecuaciones diferenciales del modelo. Si se elige un paso de integración grande, la aproximación de los valores numéricos obtenidos a los analíticos será muy basta. Sin embargo, si se toma un paso de integración muy pequeño, el número de iteraciones del algoritmo es mucho mayor y además se incurre en errores de redondeo en el cálculo con el computador. Estos errores de redondeo se deben al hecho de que los computadores utilizan un número limitado de bits para representar los valores numéricos, y por lo tanto un número limitado de decimales en su resolución. Por tanto si los cálculos requieren un gran número de decimales, el error cometido por la pérdida de decimales debido a esta limitación es importante.

Existen métodos de integración en los que el paso de integración es constante, entre los que se encuentra el método de Euler, y otros en los que el paso varía, eligiéndose en cada instante en función de la evolución de la señal hasta ese instante, entre los que se encuentra el método de Runge-Kutta.

### El método de integración de Euler

Para ilustrar este método, se va a considerar un caso concreto. Sea la ecuación  $\frac{dx}{dt} = f(t)$  con condición inicial  $x(0) = x_0$ . Por tanto, en el instante de tiempo  $t = 0$  se sabe que  $x(t) = x_0$ . Además se sabe que

$$\dot{x}(0) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x_0}{t - 0} \approx \frac{x(h) - x_0}{h}$$

tomando un valor  $h = \Delta t$  suficientemente pequeño. Es decir, que el valor de  $x(t)$  en un instante  $h$  próximo a cero es aproximadamente  $x(h) \approx x_0 + hf(0)$ . Del mismo modo, para el instante  $2h$  se puede escribir  $x(2h) \approx x(h) + hf(h)$ , como  $x(h)$  no es conocido se puede utilizar su valor aproximado  $\hat{x}(h) = x_0 + hf(0)$ . Queda claro que de este modo se puede obtener una secuencia de valores aproximados  $\{\hat{x}(kh)\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Nótese que este método equivale a hacer una extrapolación lineal con la derivada en cada punto.

Para ilustrar el método de Euler se parte de la situación mostrada en la figura 3.22 (a). El eje horizontal representa la variable  $t$ , en el eje vertical se ha colocado el valor  $x(0) = x_0$ . A partir de este punto se traza una recta con pendiente  $f(0)$ . Sobre esta recta se halla el punto de abscisa  $h$  y ordenada  $\hat{x}(h) = x_0 + hf(0)$ . La nueva situación es la mostrada en 3.22 (b): ahora se toma  $\hat{x}(h)$  como punto de partida para trazar una nueva recta de pendiente  $f(h)$  y obtener sobre ella el punto de abscisa  $2h$  y ordenada  $\hat{x}(2h) = \hat{x}(h) + hf(h)$ . En la figura 3.22 (c) se muestra el resultado obtenido al repetir los pasos anteriores 50 veces con  $h = 0.1$ , siendo  $f(t) = \cos(t)$  y  $x(0) = 0$ . Se observa que la solución proporcionada por la integración numérica es un conjunto de valores  $\{\hat{x}(kh)\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 50$ . Estos valores se han representado uniendo mediante segmentos los puntos  $(kh, \hat{x}(kh))$ , de forma que se obtiene una aproximación mediante trozos rectos. En la citada figura se muestra también con trazo punteado la solución exacta obtenida resolviendo  $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$ , con  $x(0) = 0$  que da como resultado  $x(t) = \sin(t)$ .

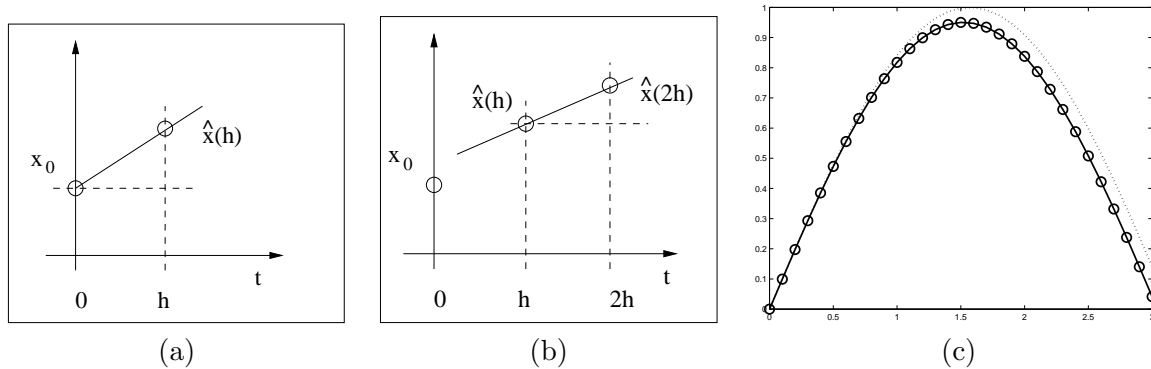


Figura 3.22: El método de Euler para integración numérica

A continuación vamos a ver cómo se aplica el método de Euler a modelos entrada/salida de la forma que se expresa en la ecuación (3.27). Este modelo se puede poner de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= \ddot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \frac{dy^{n-1}}{dt} &= y^n \\ y^n(t) &= g(y^{n-1}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^m(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)) \end{aligned}$$

Aplicando el método de Euler a cada ecuación se obtienen las siguientes ecuaciones iterativas:

$$\begin{aligned} y((k+1)h) &= y(kh) + \dot{y}(kh) \cdot h \\ \dot{y}((k+1)h) &= \dot{y}(kh) + \ddot{y}(kh) \cdot h \\ & \vdots \\ y^{n-1}((k+1)h) &= y^{n-1}(kh) + g([y^{n-1}(kh), \dots, \dot{y}(kh), y(kh), u^m(kh), \dots, \dot{u}(kh), u(kh)]) \cdot h \end{aligned}$$

Se puede observar que el valor de todas las magnitudes en el instante  $t = (k+1)h$  dependen de valores de las magnitudes en el instante anterior  $t = kh$ . Esto hace que la integración de la ecuación diferencial del modelo se pueda hacer mediante un algoritmo iterativo, en el que en cada iteración se calcula la evolución de las señales del sistema tras un periodo de tiempo  $h$ . Este procedimiento termina una vez alcanzado el tiempo final hasta el que se quiere simular el sistema.

### Ejemplo

Consideremos un depósito prismático (sección constante) alimentado por un caudal. Si  $u$  representa el caudal que llega al depósito medido en metros cúbicos por segundo,  $y$  la altura del nivel medida en metros y  $A$  es la sección del depósito en metros cuadrados, se tiene que la derivada del volumen de líquido es el caudal aportado. Puesto que el volumen es  $V = Ay$  y  $A$  es constante se tiene que

$$A \frac{dy}{dt} = u$$

operando se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y} \\ \dot{y} &= \frac{1}{A} \cdot u \end{aligned} \tag{3.29}$$

Aplicando el método de Euler se obtienen las ecuaciones iterativas:

$$\begin{aligned} y((k+1) \cdot h) &= y(k \cdot h) + \dot{y}(k \cdot h) \\ \dot{y}(k \cdot h) &= \frac{1}{A} \cdot u(k \cdot h) \end{aligned} \tag{3.30}$$

El valor del nivel en el instante inicial  $y(0)$  es una condición inicial necesaria para la integración de la ecuación. Los valores tomados por la entrada son también necesarios para calcular la evolución del nivel. El algoritmo iterativo para la integración es:

1. Asignar el valor inicial  $k \leftarrow 1$ .
2. Hacer:
  - 2.1 Si  $k=1$ , se asigna el valor inicial  $y_k \leftarrow y(0)$   
si no, se calcula el nuevo valor  $y_k \leftarrow y_{k-1} + h \cdot dy_{k-1}$
  - 2.2 Calcular  $dy_k \leftarrow \frac{1}{A} \cdot u_k$
  - 2.3 Calcular  $t \leftarrow k \cdot h$
  - 2.4 Actualizar  $k \leftarrow k + 1$
  - 2.5 Si  $t \leq t_{final}$ , ir a 2
3. Fin del algoritmo.

En el algoritmo se obtiene como resultado unos vectores con los valores de la salida  $y$  y de sus derivadas (en este caso denominados  $y$  y  $dy$ ), en cada período de integración. El parámetro  $h$  del algoritmo es muy importante y su valor depende del comportamiento dinámico del sistema, y por lo tanto de los parámetros de éste. Nótese que el algoritmo toma como datos de entrada el paso de integración  $h$ , las condiciones iniciales del sistema  $y(0)$ , el valor de la señal de entrada en cada instante  $u_k$  y el tiempo de simulación  $t_{final}$ .

En la simulación del sistema se pueden plantear diversos experimentos:

- Analizar la influencia de la señal  $u$  en la evolución de  $y$ . Para ello basta con proporcionar la ley  $u(t)$  y usar el modelo para calcular el nivel. Véase figura 3.23 a).
- Analizar la influencia de los parámetros. En este caso el único parámetro es la sección del depósito. La forma de proceder consiste en realizar varias simulaciones con valores de  $A$  diferentes, manteniendo iguales el resto de condiciones. Véase figura 3.23 b).
- Analizar la influencia de los valores iniciales. La forma de proceder es similar al caso anterior. En cada experimento simulado se utiliza un valor inicial  $y(0)$  diferente. Véase figura 3.23 c).

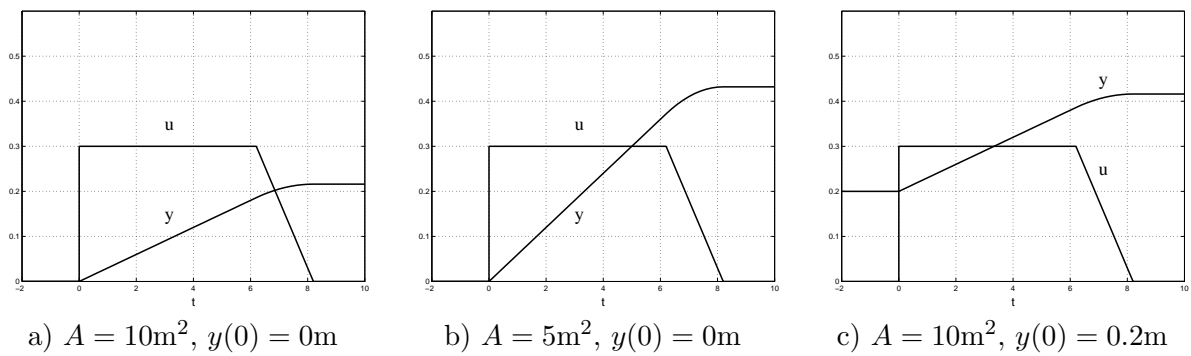


Figura 3.23: Tres experimentos de simulación realizados con el modelo de llenado de un depósito.

## Tema 4

# Sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo

Este tema trata sobre la descripción de los sistemas dinámicos en tiempo continuo. Para ello en primer lugar se emplea la transformada de Laplace como herramienta para sistemas lineales y luego se presentan los conceptos fundamentales de respuesta impulsional, función de transferencia y ecuaciones de estado, que serán usados en temas posteriores.

### 4.1 Transformación de Laplace

En esta sección se va a repasar la transformada de Laplace que suministra una herramienta de gran interés para el estudio de los sistemas cuya descripción matemática viene dada por ecuaciones lineales invariantes en el tiempo.

#### 4.1.1 Definición

La transformada de Laplace es un método opcional que puede utilizarse con ventaja para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. La transformada de Laplace se define como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$f(t)$  es una función del tiempo tal que  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ ,  $s = \sigma + jw$  una variable compleja y  $\mathcal{L}$  un símbolo operacional. La existencia de la transformada  $F(s)$  está condicionada a la convergencia de la integral.

A la función  $f(t)$  se la conoce como la *anti-transformada de Laplace*,  $F(s)$  y se expresa así,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)]$$

En la tabla siguiente se tienen las transformadas de Laplace de las funciones más usuales.

Tabla de Transformadas de Laplace

Señal	$f(t)$	$F(s)$
Impulso	$\delta(t)$	1
Escalón	$1 (t \geq 0)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	$t(t \geq 0)$	$\frac{1}{s^2}$
Parábola	$t^2(t \geq 0)$	$\frac{2}{s^3}$
Rampa de orden $n$	$t^n(t \geq 0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)}$
Onda sinusoidal	$\text{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$
Onda cosenoidal	$\text{cos}\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$
Sinusoide con decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}\text{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{((s+\alpha)^2+\omega^2)}$
Cosenoide con decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}\text{cos}\omega t$	$\frac{s+\alpha}{((s+\alpha)^2+\omega^2)}$
Rampa de orden $n$ con decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
Función retardada en el tiempo	$f(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s}F(s)$

#### 4.1.2 Resumen de Propiedades

1. *Linealidad:* Si  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  son las transformadas de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ ,  $F_1(s) + F_2(s)$  es la transformada de Laplace de  $f_1(t) + f_2(t)$ , según se desprende de la definición.
2. *Derivación real:* Si  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

En efecto, como  $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ , realizamos la integración por partes haciendo

$$u = f(t); \quad du = f'(t) dt; \quad v = \int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \quad \text{y} \quad dv = e^{-st} dt$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

por lo que resulta,



$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \left[ -\frac{f(t)e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} f'(t) dt \implies$$

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt, \quad \text{pero} \quad \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[f'(t)]$$

luego:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad \text{c.q.d.}$$

Esta propiedad resulta de gran utilidad pues, como se verá más adelante, permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

3. *Integración real:* Si  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(0) dt}{s}$$

Si en la expresión  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$  se hace:

$$u = e^{-st}; \quad du = -se^{-st} dt$$

$$v = \int f(t) dt; \quad dv = f(t) dt$$

se tiene que,

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{st} dt = \left[ e^{-st} \int f(t) dt \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} \left[ \int f(t) dt \right] dt =$$

$$= - \int f(0) dt + s \int_0^{\infty} \left[ \int f(t) dt \right] e^{-st} dt ;$$

$$\text{y como } \int_0^{\infty} \left[ \int f(t) dt \right] e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] \implies$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(0) dt}{s} \quad \text{c.q.d.}$$

4. *Teorema del valor final:*

Hay veces en que hechas las operaciones precisas con la ecuación transformada, interesa conocer el valor de la función  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , que correspondería al régimen permanente. El procedimiento consistiría en hallar la antitransformada y hacer que  $t \rightarrow \infty$ .

El procedimiento es laborioso y resulta mucho más cómodo verificar el valor de la variable sobre la propia ecuación transformada.

Supondremos que existe  $\mathcal{L}[f(t)]$  y  $\mathcal{L}[f'(t)]$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  y demostraremos que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Sabemos que

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad \text{haciendo que } s \rightarrow 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{pero } \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(\tau) d\tau = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] \end{aligned}$$

y sustituyendo en 4.1, se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

y como  $f(0)$  no depende de  $t$  ni de  $s$ , queda,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \text{ c.q.d.}$$

##### 5. Teorema del valor inicial:

Si lo que nos interesa conocer del sistema es su comportamiento cuando  $t \rightarrow 0$ , que correspondería a conocer su comportamiento transitorio, se puede hallar también sobre la ecuación transformada, ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Al igual que antes, en la expresión

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad \text{hacemos que } s \rightarrow \infty$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

y como el primer miembro es cero,  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(0) = f(0)$  ya que  $f(0)$  no depende de  $s$  y como  $f(0)$  es  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$  quedará

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \text{ c.q.e.}$$

## 6. Integral de convolución:

Sean

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \quad y \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

El producto de ambas,

$$F_1(s) * F_2(s) = \int_0^\infty f_1(t)e^{-st} dt \int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \tag{4.2}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(t)f_2(\tau)e^{-s(t+\tau)} dt d\tau \tag{4.3}$$

Haciendo el cambio de variables,

$$\begin{aligned} t &= u - v & v &= \tau \\ \tau &= v & u &= t + \tau \end{aligned}$$

el Jacobiano de la transformación vale,

$$J\left(\begin{matrix} t, \tau \\ u, v \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial \tau}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como  $t > 0$ ,  $u > v$  luego  $v$  variará de 0 a  $u$ .

La ecuación 4.3 queda

$$\begin{aligned} F_1(s) * F_2(s) &= \int_0^\infty \int_0^u f_1(u-v) f_2(v)e^{-su} dv du = \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_0^u f_1(u-v) f_2(v)dv \right] e^{-su} du \end{aligned}$$

luego

$$F_1(s) * F_2(s) = \mathcal{L} \left[ \int_0^u f_1(u-v) f_2(v) dv \right]$$

La expresión encerrada en el corchete se conoce como integral de convolución y representa la antitransformada del producto de dos transformadas.

## 4.1.3 Cálculo de antitransformadas

Con el cálculo de antitransformadas se pretende determinar a partir de la transformada de Laplace  $F(s)$  la correspondiente antitransformada; es decir,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

**La transformada posee sólo polos reales y simples**

Supóngase que el denominador de la función  $F(s)$  de la que se quiere hallar la antitransformada es de la forma

$$d(s) = (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)$$

de modo que los diferentes  $p_i$  son reales y diferentes entre si. En tal caso la función  $F(s)$  admite una descomposición en fracciones simples de la forma

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

los coeficientes  $a_i$  reciben la denominación de residuos de  $F(s)$  en  $s = -p_i$ . Multiplicando los dos miembros de la expresión anterior por  $(s + p_i)$  y haciendo  $s = -p_i$  se tiene

$$a_i = \left[ \frac{n(s)(s + p_i)}{d(s)} \right]_{s=-p_i}$$

puesto que se sabe, de la tabla de transformadas, que

$$\mathcal{L}^{-1} = \left[ \frac{a_i}{(s + p_i)} \right] = a_i e^{-p_i t}$$

se tiene que

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}$$

En esta expresión se pone de manifiesto que a cada  $p_i$  se asocia una función (una trayectoria o un comportamiento) de la forma  $e^{-p_i t}$ . Estas funciones reciben la denominación de *modos naturales del sistema*. Se dice que un modo natural es asintóticamente estable si  $p_i > 0$ .

Ejemplo. Sea la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)}$$

se tiene que los residuos resultan ser

$$a_1 = \left[ \frac{(s + 3)}{(s + 2)} \right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[ \frac{(s + 3)}{(s + 1)} \right]_{s=-2} = -1$$

luego

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

### La transformada posee polos complejos

Supongamos ahora que la transformada de Laplace posee un par de polos complejos conjugados  $-p_1$  y  $-\bar{p}_1$ . En tal caso la descomposición en fracciones simples tomará la forma:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + \bar{p}_1)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Si se multiplican los dos miembros de esta expresión por  $(s + p_1)(s + \bar{p}_1)$ , y se hace  $s = -p_1$ , se tendrá:

$$(\alpha_1 s + \alpha_2)_{s=-p_1} = \left[ \frac{n(s)(s + p_1)(s + \bar{p}_1)}{d(s)} \right]_{s=-p_1}$$

Esta expresión permite determinar  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  igualando partes reales e imaginarias.

Para hallar la antitransformada correspondiente al término asociado al par complejo basta recordar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \left[ \frac{\omega}{((s + \alpha)^2 + \omega^2)} \right] &= e^{-\alpha t} \text{sen} \omega t \\ \mathcal{L}_1 \left[ \frac{s + \alpha}{((s + \alpha)^2 + \omega^2)} \right] &= e^{-\alpha t} \text{cos} \omega t \end{aligned}$$

En concreto, si se supone:

$$p_1 = a + j\omega \quad \text{y} \quad \bar{p}_1 = a - j\omega$$

se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + \bar{p}_1)} &= \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + a + j\omega)(s + a - j\omega)} = \\ &= \alpha_1 \left[ \frac{s + a}{((s + a)^2 + \omega^2)} \right] + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 a)}{\omega} \left[ \frac{\omega}{((s + a)^2 + \omega^2)} \right] \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que

$$f(t) = \alpha_1 e^{-at} \text{cos} \omega t + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1 a)}{\omega} e^{-at} \text{sen} \omega t$$

Ejemplo

Sea la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{(s+1)}{s(s^2+2s+2)}$$

Se tiene:

$$a_1 = \left[ \frac{(s+1)}{(s^2+2s+2)} \right]_{s=0} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{aligned}$$

De donde se tiene,

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin t \quad t \geq 0$$

### La transformada posee polos múltiples

Supóngase que una de las raíces del polinomio del denominador de la transformada de Laplace es múltiple. Por ejemplo, supóngase que la raíz  $-p_1$  tiene multiplicidad  $r$ . En tal caso el denominador admitirá la descomposición:

$$d(s) = (s+p_1)^r (s+p_2) \dots (s+p_n)$$

En tal caso, la transformada de Laplace admite la descomposición:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_r}{(s+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

Si se multiplican los dos miembros de esta expresión por  $(s+p_1)^r$  se tendrá:

$$b_r = \left[ \frac{n(s)(s+p_1)^r}{d(s)} \right]_{s=-p_1}$$

Obsérvese que

$$(s+p_1)^r F(s) = b_r + b_{r-1}(s+p_1) + \dots + b_1(s+p_1)^{r-1} + \frac{a_2(s+p_1)^r}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n(s+p_1)^r}{s+p_n}$$

derivando esta expresión con respecto a  $s$  se tiene

$$\frac{d}{ds} [(s + p_1)^r F(s)] = b_{r-1} + 2b_{r-2}(s + p_1) \dots + (r - 1)b_1(s + p_1)^{r-2} +$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{a_2(s + p_1)^r}{s + p_2} \right] + \dots + \frac{d}{ds} \left[ \frac{a_n(s + p_1)^r}{s + p_n} \right]$$

y haciendo en esta expresión  $s = -p_1$  se tiene

$$\left[ \frac{d}{ds} [(s + p_1)^r F(s)] \right]_{s=-p_1} = b_{r-1}$$

Derivando de nuevo con respecto a  $s$  y procediendo análogamente se tiene

$$b_{r-2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{ds^2} [(s + p_1)^r F(s)] \right]_{s=-p_1}$$

En general se tendrá

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left[ \frac{d^j}{ds^j} [(s + p_1)^r F(s)] \right]_{s=-p_1}$$

### Ejemplo

Sea

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s + 1)^3}$$

que se descompone

$$F(s) = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)}$$

Se tendrá

$$\begin{aligned} b_3 &= [s^2 + s + 2]_{s=-1} = 2 \\ b_2 &= [2s + 1]_{s=-1} = -1 \\ b_1 &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)^3} - \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{(s + 1)}$$

De donde se tiene,

$$f(t) = (t^2 - t + 1)e^{-t}$$

## 4.2 Descripción externa de los sistemas dinámicos

Puesto que las señales que definen un sistema dinámico son las de entrada  $u(t)$  y las de salida  $y(t)$  interesa disponer de una *relación explícita directa* entre ambas. Esta relación la suministra la descripción externa que se define por una *función de entrada-salida*  $F$  tal que hace corresponder al conjunto de valores tomados por la señal de entrada  $u$  en un cierto intervalo  $(t_0, t)$ , el valor tomado por la salida  $y(t)$  en el instante  $t$ . Formalmente se puede escribir,

$$y(t) = F(u[t_0, t]) \quad (4.4)$$

en donde  $F(\cdot)$  es un funcional, es decir una función cuyo argumento lo constituye el conjunto de valores tomados por  $u(t)$  en el intervalo  $(t_0, t)$ .

Desde el punto de vista de la descripción externa un sistema dinámico lineal se define como aquél que cumple la propiedad de linealidad, en virtud de la cual,

$$F(\alpha_1 u_1[t_0, t] + \alpha_2 u_2[t_0, t]) = \alpha_1 F(u_1[t_0, t]) + \alpha_2 F(u_2[t_0, t])$$

en donde  $\alpha_1, \alpha_2$  son números reales arbitrarios.

En este tema se van a considerar sistemas que puedan ser descritos mediante la siguiente ecuación diferencial lineal de orden  $n$ :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_n u \quad (4.5)$$

Habitualmente se emplean dos formas de descripción externa: la respuesta impulsional y la función de transferencia.

### 4.2.1 Respuesta impulsional

Una forma de escribir la solución a una ecuación diferencial del tipo (4.5) es la siguiente:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (4.6)$$

en donde  $h(t, \tau)$  recibe el nombre de *respuesta impulsional* del sistema. La expresión (4.6) es una forma de descripción externa de un sistema dinámico. Obsérvese que la salida del sistema obtenida mediante la respuesta impulsional depende del instante  $t$  y de todos los instantes anteriores ( $\tau$ ).

La respuesta impulsional de un sistema puede tener las siguientes propiedades:

1. Propiedad de **causalidad o realizabilidad**, en virtud de la cual un efecto no puede preceder a una causa, lo que implica que

$$h(t, \tau) = 0 \quad \text{para} \quad t < \tau$$



2. Propiedad de **estabilidad**, en virtud de la cual la estabilidad del sistema exige la convergencia de (4.6), lo que se traduce en

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, \tau) = 0$$

3. Propiedad de **estacionaridad**, en virtud de la cual el sistema es invariante con el tiempo, lo que se traduce en que

$$h(t, \tau) = h(t - \tau, 0) = h(t - \tau)$$

Ejemplo. Sea el sistema dinámico descrito por la ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu$$

En donde  $a$  y  $b$  son dos números reales. La solución de esta ecuación de la forma de la expresión (4.6) es la siguiente,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

En donde la respuesta impulsional  $h(t, \tau) = be^{-a(t-\tau)}$ , es claro que cumple las propiedades de causalidad, estabilidad y estacionaridad.

La respuesta impulsional admite un significado adicional muy preciso. Supóngase un sistema con una sola entrada y una sola salida. Supóngase, además, que dicho sistema se somete a la siguiente señal de entrada:

$$u(t) = \delta(t_1)$$

en donde  $\delta(t)$  es la función de Dirac. En tal caso se tiene que,

$$y(t) = h(t, t_1)$$

si el sistema no es estacionario o

$$y(t) = h(t - t_1)$$

si el sistema es estacionario.

En la figura 4.1 se muestra la respuesta impulsional del sistema del ejemplo anterior. De lo anterior se desprende que la respuesta impulsional de un sistema es determinable experimentalmente en la medida en que se pueda realizar físicamente una señal de entrada  $u(t) = \delta(t)$ . Es sabido que esta última no tiene significado físico, pero sin embargo se pueden concebir aproximaciones aceptables. Debe añadirse que en la práctica como

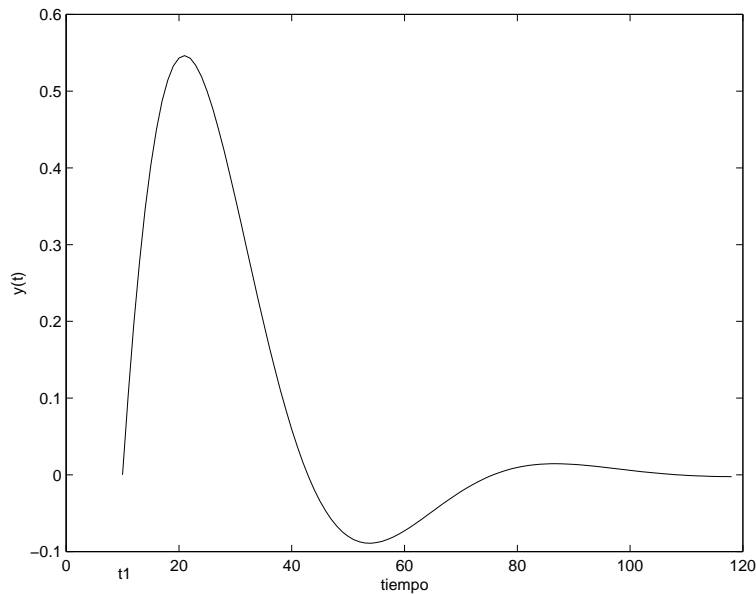


Figura 4.1: Respuesta Impulsional

realmente se miden las respuestas impulsionales es por las técnicas de correlación que no se van a tratar aquí.

Para sistemas multivariables, con  $m$  entradas y  $p$  salidas, la respuesta impulsional es una matriz, de dimensión  $p \times m$ , cuyo término  $h_{i,j}$  representa la respuesta del  $i$ -ésimo canal de salida, cuando se aplica una entrada  $u(t) = \delta(t)$  al canal  $j$ -ésimo, siendo nulas el resto de las entradas.

#### 4.2.2 Función de transferencia

Para los sistemas lineales estacionarios existe una forma de descripción externa muy empleada en la práctica: la función de transferencia. Se define la función de transferencia como la transformada de Laplace de la respuesta impulsional de un sistema.

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-\tau s} d\tau \quad (4.7)$$

Aplicando la transformación de Laplace a la expresión (4.6), para el caso de un sistema estacionario, se tiene

$$Y(s) = H(s) U(s) \quad (4.8)$$

en donde  $Y(s)$  y  $U(s)$  son, respectivamente, las transformadas de Laplace de las señales de entrada y salida.

En la práctica la función de transferencia se determina directamente a partir de la ecuación diferencial. Un punto muy importante a considerar es que esta determinación se hace suponiendo *condiciones iniciales* nulas para las señales  $u(t)$  e  $y(t)$ .

Ejemplo. Sea el sistema descrito por la ecuación diferencial,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2y = bu$$

La transformada de Laplace de los distintos términos de la ecuación es la siguiente,

$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_2Y(s) = bU(s)$$

Con lo que se tiene,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{b}{s^2 + a_1s + a_2}$$

es decir que la transformación de Laplace de la respuesta impulsional es la función de transferencia.

Para el caso de sistemas multivariables con  $m$  entradas y  $p$  salidas la función de transferencia se convierte en una matriz cuyo término  $H_{ij}$  representa el cociente entre la transformada de Laplace de la señal de salida que se obtiene por el canal  $i$  y la transformada de Laplace de la señal de entrada que se aplica al canal  $j$ , supuestas nulas las otras señales de entrada.

### 4.3 Descripción interna de los sistemas dinámicos

La descripción externa, según se ha visto en la sección anterior, suministra una *relación explícita directa* entre las señales de entrada y de salida. También se puede representar el comportamiento del sistema mediante una relación explícita indirecta entre las señales de entrada y de salida, que es lo que se denomina *descripción interna*. La relación se dice que es indirecta puesto que  $u(t)$  e  $y(t)$  no están relacionadas directamente sino a través de otra variable  $x(t)$  llamada *estado del sistema dinámico*, que juega un papel primordial en esta forma de descripción.

Se entiende por estado de un sistema dinámico la menor colección de variables cuyo valor, en un cierto instante de tiempo  $t$ , resume el pasado dinámico del sistema hasta dicho instante y es suficiente para predecir la futura evolución del sistema a partir del mencionado tiempo  $t$ . El estado se representa, normalmente, por la letra  $x$ , y el conjunto de todos los estados por  $X$ . Un ejemplo lo suministra, en mecánica racional, el conjunto de valores tomados por la posición y velocidad de una partícula, cuyo conocimiento, en cierto instante, resume el pasado dinámico de la partícula y permite prever la futura evolución de la misma.

Debe notarse que, tal como se ha definido, el estado de un sistema dinámico representa una magnitud abstracta sin ninguna referencia, en principio, a magnitudes físicas medibles. Ello, no obstante, no se opone a que en alguna circunstancia el estado de un sistema dinámico pueda ser asimilado a conjuntos de magnitudes susceptibles de interpretación física e incluso medibles, como sucedía en el ejemplo más arriba mencionado del estado de una partícula en mecánica racional.

La descripción interna está basada en la existencia de las dos funciones siguientes:

1. **La función de transición** que describe el cambio de estado que experimenta el sistema entre dos instantes de tiempo  $t_0$  y  $t_1$  como consecuencia de la aplicación de una señal  $u[t_0, t_1]$ . Formalmente se escribe,

$$x(t_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u) \quad (4.9)$$

en donde  $\phi$  representa la función de transición,  $x_0$  el estado en el instante  $t_0$  y  $u$  la señal de entrada aplicada entre  $t_0$  y  $t_1$ .

La función de transición debe satisfacer las propiedades:

- 1.1 *Causalidad*: para todo  $u_1$  y  $u_2$  tales que  $u_1(t) = u_2(t)$ ,  $t_0 < t < t_1$  se tendrá,

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$$

lo que se puede expresar diciendo que a la misma causa sigue el mismo efecto.

- 1.2 *Consistencia*:  $\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0$

- 1.3 *Composición*: Para  $t_2 > t_1 > t_0$  se tiene,

$$\begin{aligned} \phi(t_2, t_0, x_0, u) &= \phi(t_2, t_1, x_1, u) \\ x_1 &= \phi(t_1, t_0, x_0, u) \end{aligned}$$

La interpretación de las anteriores propiedades es evidente.

2. **La función de lectura o de salida** que suministra el valor de la señal de salida en el instante de tiempo  $t$  cuando el sistema se encuentra en el citado  $x(t)$  y está sometido a un valor de la señal de entrada  $u(t)$ . Formalmente se escribe,

$$y(t) = \eta[t, x(t), u(t)] \quad (4.10)$$

en donde  $\eta$  representa la función de lectura.

Debe observarse que, tal como se indicaba al principio de esta sección, la relación entre la señal de entrada  $u(t)$  y la señal de salida  $y(t)$  se hace indirecta y se realiza a través del estado  $x(t)$ . Es decir, que así como en la descripción externa la función  $F$  determina  $y(t)$ , a partir de  $u[t_0, t]$ , en la descripción interna, a partir de  $u[t_0, t]$ , y por medio de la función de transición, se genera el estado  $x(t)$ , y es a partir del estado y de la función de la lectura como se tiene el valor de la señal de salida  $y(t)$ . La mayor complejidad que aparentemente presenta este segundo camino se ve ampliamente compensada por la mayor simplicidad conceptual y facilidad operativa que se obtiene con él. Ello se pondrá de manifiesto en lo que sigue.

### 4.3.1 Sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo

Una amplia clase de sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo admite una representación matemática de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \quad (4.11)$$

en donde, si el sistema tiene  $n$  estados,  $m$  entradas y  $p$  salidas,  $x$ ,  $u$  e  $y$  son vectores de dimensión  $n$ ,  $m$  y  $p$  respectivamente y  $A, B, C$  y  $D$  son matrices de dimensión  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  y  $p \times m$  respectivamente. El vector  $x$  es el vector de estado del sistema. En la mayoría de las aplicaciones  $D = 0$ , por lo que en lo sucesivo y mientras no se indique lo contrario, se prescindirá de la matriz  $D$ .

Obsérvese que esta representación equivale a la descripción del sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. El aumento de la cantidad de variables de estado, de entradas o salidas no incrementa la complejidad de las ecuaciones.

La escritura de las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de un sistema dinámico según las expresiones 4.11 recibe el nombre de representación por variables de estado o por vector de estado del mismo.

En lo que sigue se tratarán únicamente los sistemas dinámicos invariantes en el tiempo con lo que, teniendo en cuenta además que  $D = 0$ , las ecuaciones 4.11 se emplearán en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.12)$$

En donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices cuyos elementos son numéricos. Se hablará indistintamente de un sistema dinámico  $\Sigma$  y de la terna  $(A, B, C)$  que lo representa.

Los sistemas dinámicos lineales que admiten una representación matemática tal como la de las expresiones 4.11 reciben la denominación de *sistemas lineales diferenciales de dimensiones finitas*, haciendo alusión con esta denominación a que el vector de estado es un vector de dimensión  $n$ . Existen otras clases de sistemas dinámicos lineales, como son los (sistemas de parámetros distribuidos) en los cuales el vector de estado tiene una dimensión infinita.

Ejemplo. Un sistema descrito mediante la ecuación diferencial de segundo orden  $\frac{d^2y}{dt^2} = u$  se puede expresar como dos ecuaciones diferenciales de primer orden si se definen los estados como  $x_1 = y$  y  $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

que escrita en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

y con la ecuación algebraica  $y = x_1$  constituye la descripción interna del sistema.

## 4.4 Álgebra de bloques

Como es sabido al modelar un sistema se obtienen una serie de ecuaciones diferenciales que pueden ser lineales o no lineales. En el caso de modelos no lineales es posible obtener un modelo lineal aproximado del modelo no lineal, válido en un rango de variación de las magnitudes del sistema en torno al punto de funcionamiento. En consecuencia siempre es posible obtener un modelo lineal de un sistema dinámico. El interés de obtener este tipo de sistemas reside en la sencillez de tratamiento y análisis de este tipo de modelos.

Es frecuente que un sistema dinámico que se pretende modelar esté formado por una serie de subsistemas no autónomos interconectados entre sí. Cada subsistema tiene una magnitud de entrada que excita al subsistema y una magnitud de salida que evoluciona en consecuencia. Al estar conectado con otros subsistemas, su salida afectará a la entrada de algún o algunos subsistemas perteneciente al mismo sistema o incluso a sí mismo. A su vez su entrada estará influida por las salidas o entradas de otros subsistemas.

Para un análisis sistemático de los modelos de los sistemas, éstos se suelen representar gráficamente, describiendo cada subsistema que lo forma mediante un bloque. Cada uno de ellos tiene una magnitud de entrada y una magnitud de salida cuya evolución es consecuencia de la acción de la entrada sobre él. Las señales se representan por flechas que cuyo sentido indica si son entradas o salidas( ver figura 4.2) .

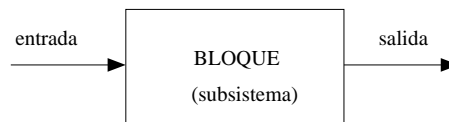


Figura 4.2: Representación de un subsistema mediante un bloque

En el caso de modelos lineales de los subsistemas, cada uno de éstos se puede modelar por una ecuación diferencial lineal. Utilizando la transformada Laplace para representar el modelo del sistema y sus magnitudes de entrada y de salida, cada bloque es equivalente a una función de transferencia  $G(s)$ , de forma que las magnitudes de entrada y de salida se representan por su transformada Laplace  $U(s)$  e  $Y(s)$  (véase la figura 4.3) . La señal de salida verifica que  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ .

Un sistema quedará pues representado por una serie de bloques que están interconectados entre sí formando lo que se denomina el *diagrama de bloques* del sistema. Esta representación resulta interesante por una serie de razones:

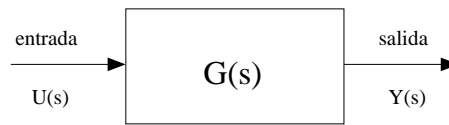


Figura 4.3: Representación de un subsistema lineal mediante un bloque y la transformada Laplace

- Permite la obtención de las ecuaciones de todo el sistema o de parte de él mediante una serie de operaciones que se realizan sobre las señales y los bloques que forman el diagrama. Estas operaciones dan lugar al *álgebra de bloques*.
- Mantiene identificado cada subsistema, lo que permite introducir fácilmente cambios en el modelo del sistema.
- Permite visualizar de una forma sencilla las relaciones causa-efecto involucradas en el sistema.
- Facilita el análisis del papel que juega cada subsistema en el comportamiento global del sistema

#### 4.4.1 Operaciones sobre señales

Estas operaciones son:

1. *Bifurcación*: Representa la conexión de varios subsistemas que tienen la misma entrada. Por tanto la señal se bifurca entrando en ambos subsistemas.

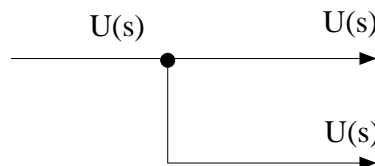


Figura 4.4: Operación de bifurcación de señales

2. *Suma*: dos o más señales, generalmente salidas de subsistemas, se superponen formando una única señal, sumándose o restándose.

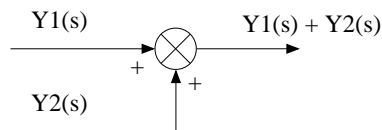


Figura 4.5: Operación de suma de señales

3. *Transformación de una señal en un bloque*: una señal al entrar en un bloque se transforma generando una determinada señal de salida.

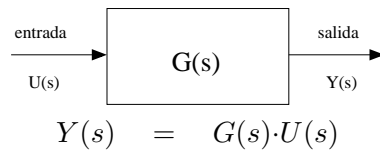


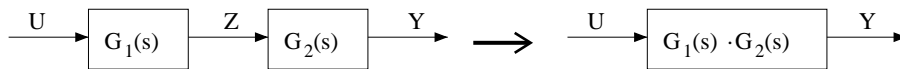
Figura 4.6: Transformación de una señal en un bloque

#### 4.4.2 Operaciones sobre bloques: reducción de sistemas

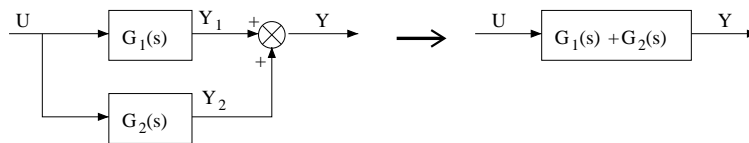
Los diagramas de bloques representan subsistemas conectados entre sí. A veces resulta interesante obtener las ecuaciones de todo el sistema o bien de una parte de él. El álgebra de bloques permite realizar una serie de operaciones sobre los bloques y señales que permiten y simplifican la obtención de bloques equivalentes de todo o parte del diagrama de bloques. Esta operación se denomina reducción del diagrama de bloques.

Existen una serie de operaciones sobre bloques destinadas a la reducción de los diagramas:

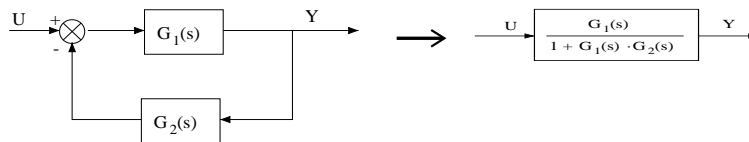
1. Bloques en cascada o en serie:



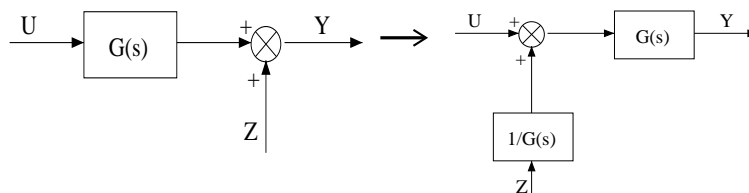
2. Bloques en paralelo:



3. Realimentación:

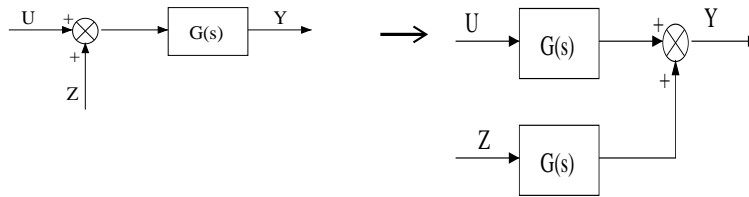


- 4.

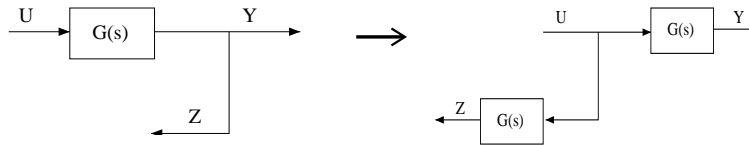




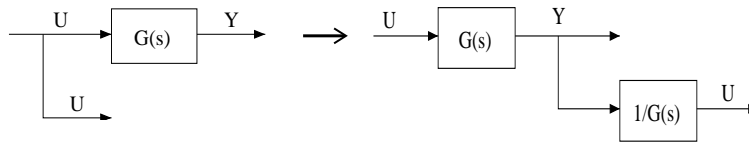
5.



6.



7.



## 4.5 Recordatorio de variable compleja

Se incluye aquí un resumen de las propiedades de la variable compleja y los operadores usuales. Alguna de estas propiedades serán usadas aunque en contadas ocasiones.

Un número complejo es un par ordenado

$$c = (x, y) \quad (4.13)$$

de números reales,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  denominados respectivamente parte real y parte imaginaria. El número  $c$  puede escribirse como suma de las partes real e imaginaria. Para ello es necesario definir previamente el número imaginario puro  $j = (0, 1)$  (llamado también  $i$ ), con lo que

$$c = x + jy \quad (4.14)$$

La tabla siguiente resume las propiedades de los números complejos y sus operaciones.

$j$	$j^2 = -1$
parte real	$c = (x, y) \Rightarrow \operatorname{Re}(c) = x$
parte imaginaria	$c = (x, y) \Rightarrow \operatorname{Im}(c) = y$
suma	$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
multiplicación	$(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$
propiedad conmutativa	$c_1 + c_2 = c_2 + c_1, \quad c_1 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1$
propiedad asociativa	$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3), \quad (c_1 \cdot c_2) \cdot c_3 = c_1 \cdot (c_2 \cdot c_3)$
propiedad distributiva	$c \cdot (c_1 + c_2) = c \cdot c_1 + c \cdot c_2$
elementos neutros	$c + (0, 0) = c \quad \forall c, \quad c \cdot (1, 0) = c \quad \forall c$
elemento inverso suma	$c + (-c) = 0$
elemento inverso multiplicación	$c = (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow c^{-1} = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$
módulo	$c = (x, y) \Rightarrow  c  = \sqrt{x^2 + y^2}$
conjugado	$c = (x, y) \Rightarrow \bar{c} = (x, -y)$
propiedades conjugado	$\operatorname{Re}(c) = \frac{c+\bar{c}}{2}, \quad \operatorname{Im}(c) = \frac{c-\bar{c}}{2}, \quad c \cdot \bar{c} =  c ^2, \quad \forall c$
desigualdad triangular	$ c_1 + c_2  \leq  c_1  +  c_2 $
forma polar	$c = r(\cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta)),$ con $\tan(\theta) = \frac{x}{y}$ y $r =  c $
teorema de Euler	$\cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta) = e^{j\theta}$
forma exponencial	$c = re^{j\theta}$ con $\tan(\theta) = \frac{x}{y}$ y $r =  c $
fórmula de De Moivre	$(\cos(\theta) + j \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + j \operatorname{sen}(n\theta),$ siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

## 4.6 Evolución temporal y transformada Laplace

La transformada de Laplace  $\mathcal{L}[f(t)]$  de una función del tiempo  $f(t)$  es otra función  $F(s)$  con dominio en un subconjunto del plano complejo. La transformada de Laplace es un número complejo, por lo que tiene parte real e imaginaria. Como veremos en un tema posterior, la información relevante de la transformada de Laplace se encuentra en la localización de los polos.

Los polos son puntos en los que el denominador de la transformada de Laplace se anula, por lo que en ellos la función tiene un valor infinito. La localización de los polos en el plano complejo proporciona información acerca de  $f(t)$ .

Para ilustrar estos hechos en la tabla 4.1 se muestran algunas funciones que aparecen con frecuencia al analizar sistemas dinámicos junto con el módulo de sus transformadas de Laplace y la situación de los polos. Obsérvese que, al ser  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  un número complejo es posible obtener su módulo. Por otra parte, el argumento de la función  $s$  es también un número complejo, por lo que la función  $|F(s)|$  aparece como la gráfica de una superficie sobre el plano complejo. Los ejes del plano complejo se han indicado como  $\operatorname{Re}(s)$  en la abscisa y  $\operatorname{Im}(s)$  en la ordenada.

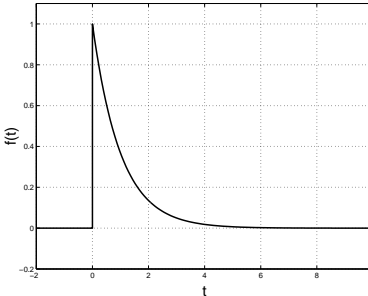
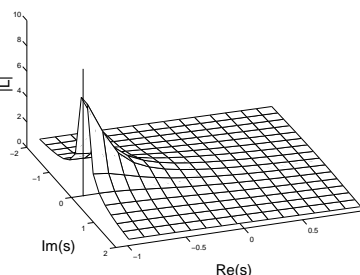
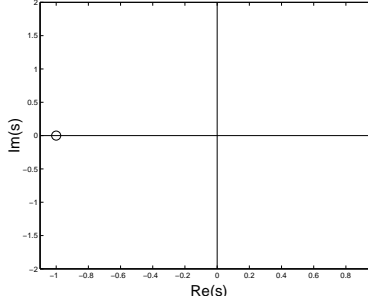
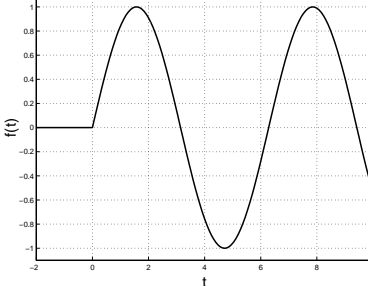
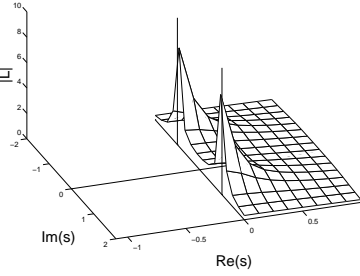
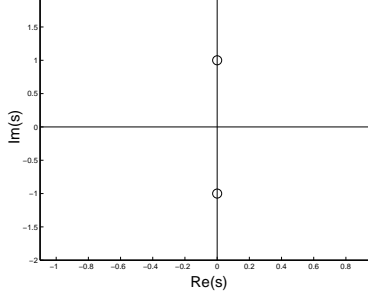
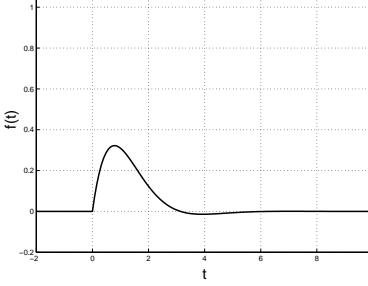
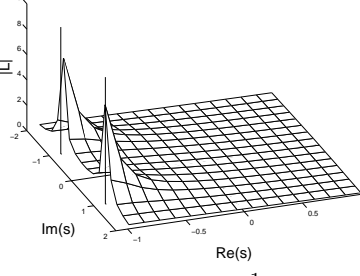
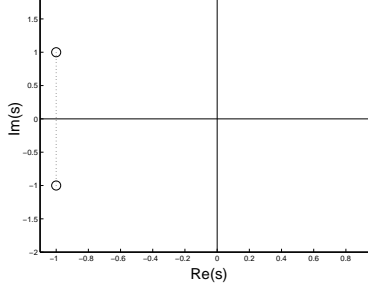
Función $f(t)$	Módulo de $\mathcal{L}[f(t)]$	Polos de $\mathcal{L}[f(t)]$
 <p data-bbox="316 829 544 871"><math>f(t) = e^{-t}, t \geq 0</math></p>	 <p data-bbox="722 829 950 871"><math> \mathcal{L}[f(t)]  = \left  \frac{1}{s+1} \right </math></p>	 <p data-bbox="1193 829 1291 871"><math>p = -1</math></p>
 <p data-bbox="316 1207 544 1249"><math>f(t) = \text{sen } t, t \geq 0</math></p>	 <p data-bbox="722 1207 950 1249"><math> \mathcal{L}[f(t)]  = \left  \frac{1}{s^2+1} \right </math></p>	 <p data-bbox="1144 1207 1339 1249"><math>p_1 = -i, p_2 = i</math></p>
 <p data-bbox="316 1585 544 1627"><math>f(t) = e^{-t} \text{sen } t, t \geq 0</math></p>	 <p data-bbox="722 1585 950 1627"><math> \mathcal{L}[f(t)]  = \left  \frac{1}{(s+1)^2+1} \right </math></p>	 <p data-bbox="1079 1585 1404 1627"><math>p_1 = -1 - i, p_2 = -1 + i</math></p>

Tabla 4.1: Algunas señales comunes (izquierda), el módulo de sus transformadas de Laplace (centro) y la situación de los polos de éstas (derecha).



## Tema 5

# Respuesta temporal de sistemas lineales

En capítulos anteriores se ha indicado la necesidad de obtener modelos de sistemas. Ahora se pretende estudiar la evolución temporal de la salida de un modelo ante una serie de entradas. El estudio se lleva a cabo para sistemas continuos, dedicando una especial atención a la respuesta de sistemas de bajo orden ante una entrada en forma de escalón.

### 5.1 Sistemas dinámicos lineales de primer orden

Se denomina sistema lineal diferencial de primer orden de entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$  al aquél regido por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu \quad (5.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son dos constantes, denominadas coeficientes de la ecuación;  $u(t)$  es una señal denominada señal de entrada o excitación; e  $y(t)$  es otra señal denominada señal de salida del sistema.

La ecuación diferencial anterior admite una solución única siempre que se fije el valor inicial de  $y(t)$ . Este valor inicial se denotará en lo que sigue por  $y_0$ . La ecuación (5.1) establece que la pendiente de  $y(t)$  en cada instante de tiempo, es una combinación lineal de los valores que toma en este instante  $u(t)$  e  $y(t)$ . En la figura 5.1 se muestran las evoluciones de  $u(t)$  e  $y(t)$  durante un experimento típico.

En la práctica se presentan múltiples sistemas que pueden ser representados por una ecuación diferencial de primer orden. Y esto es importante pues el modelo de primer orden es la aproximación más sencilla que puede hacerse del comportamiento dinámico de un sistema. En el apartado 5.1.2 se presentan distintos sistemas que pueden ser representados por una ecuación diferencial de primer orden.

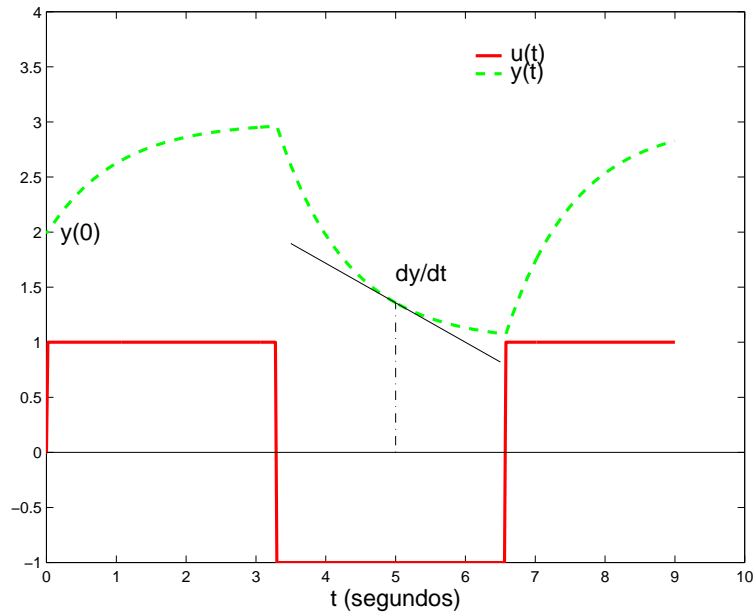


Figura 5.1: Evolución de la salida del modelo de primer orden  $\dot{y} + y = u$  siendo  $y(0) = 2$ .

### 5.1.1 Solución de la ecuación diferencial de primer orden

Para el estudio de la solución de la ecuación diferencial de primer orden, conviene distinguir dos casos:

#### Señal de entrada nula (respuesta libre)

En el supuesto de que la señal de entrada  $u(t)$  sea nula para todo  $t \geq 0$ , la ecuación diferencial de primer orden se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = -ay \quad y(0) = y_0 \quad (5.2)$$

lo que constituye la parte *homogénea* de la ecuación diferencial de primer orden de (5.1). La solución de esta ecuación puede obtenerse por integración directa haciendo,

$$\frac{dy}{y} = -a dt$$

cuya integración conduce a,

$$\ln y(t) - \ln y(0) = -at$$

lo que, teniendo en cuenta que  $y(0) = y_0$ , puede escribirse,

$$y_h(t) = y_0 e^{-at}$$

El subíndice  $h$  se refiere a que esta solución lo es de la parte homogénea de (5.1).

Las gráficas a) y b) de la figura 5.2 muestran la forma general de la evolución de  $y_h(t)$  según que  $a$  sea, respectivamente, negativa o positiva. Estas gráficas muestran cómo se comporta un sistema en ausencia de excitación partiendo de una situación inicial dada dependiendo del valor del parámetro  $a$ . Del estudio de la figura se obtiene una clara distinción entre dos formas de comportamiento que permiten una primera clasificación de los sistemas en *estables* o *inestables*, según que la evolución libre de los mismos tienda a un estado de reposo o no. En este caso simple se observa que la estabilidad depende únicamente del signo del coeficiente  $a$ , para apoyar visualmente esta afirmación se ha incluido en la figura 5.2 las gráficas c) y d) en las que se han superpuesto la salida de varios sistemas de primer orden en ausencia de excitación y partiendo de distintos valores iniciales (marcados con cruces). El caso c) corresponde a  $a = 0.5$ , el caso d) a  $a = -0.1$ .

### Señal de entrada no nula (respuesta forzada)

Se trata de resolver la ecuación diferencial (5.1) en el caso en que  $u(t)$  no sea idénticamente nula. Para simplificar la notación se escribirá  $v(t) = b u(t)$ , con lo que la ecuación (5.1) se convierte en

$$\frac{dy}{dt} + ay = v \quad (5.3)$$

Hay que determinar qué función  $w(t)$  debe sumarse a la solución homogénea  $y_h(t)$  para obtener la solución de la ecuación (5.3). Es decir, se supone que  $y(t)$  se descompone en,

$$y(t) = y_h(t) + w(t) \quad (5.4)$$

lo que llevado a la ecuación (5.3) resulta,

$$\frac{d(y_h + w)}{dt} + a(y_h + w) = v \quad y_h(0) + w(0) = y_0$$

es decir,

$$\frac{dy_h}{dt} + ay_h + \frac{dw}{dt} + aw = v \quad w(0) = y_0 - y_h(0)$$

que, habida cuenta de la expresión (5.2), se puede escribir,

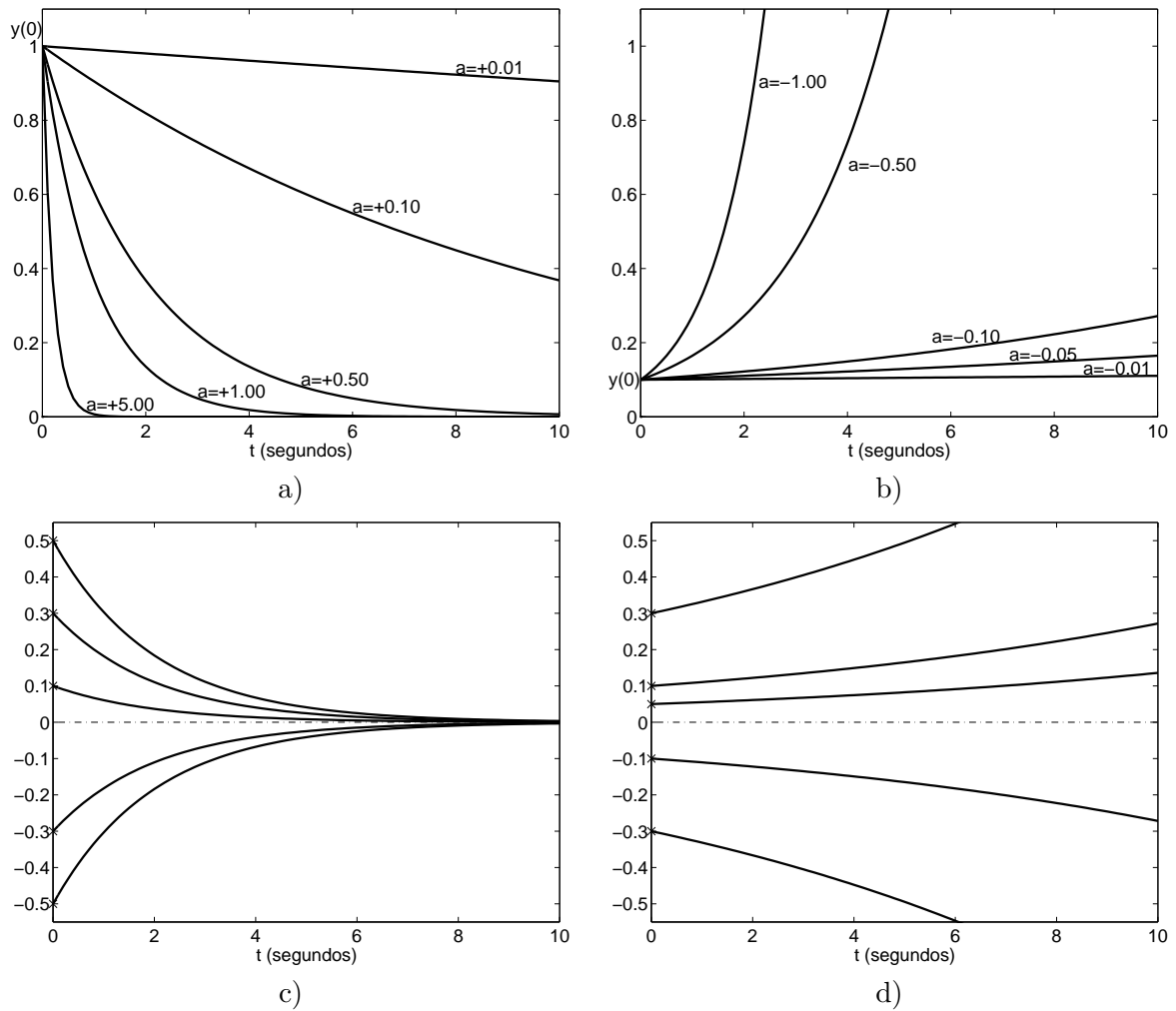


Figura 5.2: Evolución de la salida  $y(t)$  de modelos de primer orden con entrada nula. En los casos a) y b) se trata de distintos modelos partiendo de un mismo punto inicial. En c) es un mismo modelo con  $a = 0.5$  partiendo de distintas situaciones iniciales. El caso d) es igual al c) pero con  $a = -0.1$



$$\frac{dw}{dt} + a w = v \quad w(0) = 0 \quad (5.5)$$

Por lo tanto la ecuación diferencial que satisface  $w(t)$  tiene la forma de (5.1) pero con una notable diferencia, y es que la condición inicial para  $w(t)$  es 0. Es decir, la señal  $w(t)$  constituye la respuesta del sistema ante la señal de entrada  $u(t)$  a partir del reposo.

La discusión anterior permite interpretar la expresión (5.4) diciendo que la respuesta  $y(t)$  de un sistema dinámico lineal a una señal de entrada  $u(t)$  a partir de un valor inicial  $y(0)$  puede considerarse como la suma de la respuesta del sistema, a partir del valor inicial  $y(0)$ , ante una señal de entrada nula más la respuesta del sistema a la señal de entrada  $u(t)$  a partir del reposo. Es fácil ver que  $w(t)$  viene dada por,

$$w(t) = e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} v(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

En efecto, en primer lugar es inmediato ver que  $w(0) = 0$ . Además sustituyendo la expresión (5.6) en la (5.5) se tiene que,

$$\frac{dw}{dt} = -a e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} v(\tau) d\tau + e^{-at} \frac{d}{dt} \int_0^t e^{a\tau} v(\tau) d\tau = -a w + v$$

Combinando los anteriores resultados se tiene que la respuesta de un sistema regido por una ecuación diferencial lineal de la forma (5.1) ante una señal de entrada  $u(t)$  viene dada por,

$$y(t) = e^{-at} y_0 + e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} b u(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

A este mismo resultado se puede llegar empleando las técnicas basadas en la transformada de Laplace, con las cuales se puede demostrar directamente de una forma muy sencilla la expresión (5.6). Además, en las aplicaciones prácticas, es de esta última forma como se procede. Sin embargo para un planteamiento teórico más general, conviene desarrollar el estudio de los sistemas lineales como se ha hecho anteriormente.

Se discuten a continuación las respuestas de un sistema diferencial lineal de primer orden a señales de entrada que presentan especial interés en las aplicaciones como son las señales en escalón, en rampa y sinusoidal.

### Respuesta a un escalón

Se dice que un sistema se somete a una señal de entrada en escalón en el instante inicial  $t = 0$ , si en dicho instante se produce una variación brusca de la señal de entrada

permaneciendo posteriormente ésta en un valor  $u(t) = \text{constante}$ .

Si se supone  $y(0) = y_0$ ,  $u(t \geq 0) = 1$ , y teniendo en cuenta la expresión (5.7), se tendrá,

$$y(t) = e^{-at} \left[ y_0 + \frac{b}{a} (e^{at} - 1) \right] = e^{-at} y_0 + \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) \quad (5.8)$$

En la figura 5.3 se representa la respuesta de un sistema lineal de primer orden a una entrada en escalón.

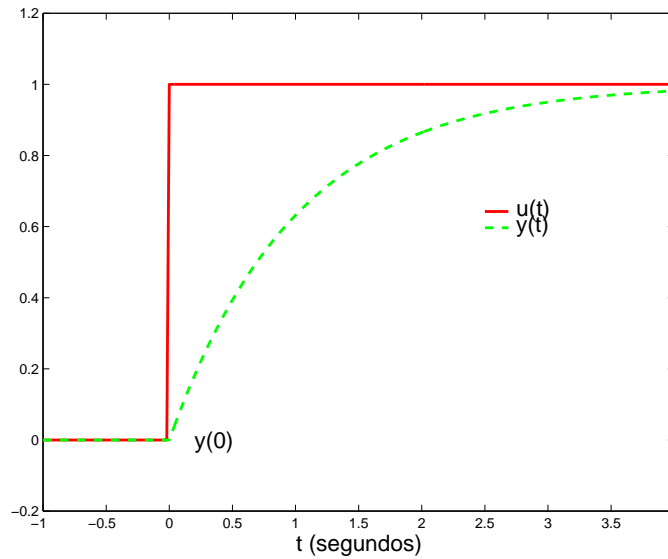


Figura 5.3: Salida del sistema  $\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$  cuando la entrada es un escalón unitario, partiendo de condiciones iniciales nulas.

Para estudiar la respuesta en el tiempo de un sistema lineal de primer orden estable a una entrada en escalón, es interesante escribir la ecuación diferencial de primer orden de la forma siguiente:

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku \quad (5.9)$$

en donde  $\tau = 1/a$  y  $K = b/a$ . Si se supone además, para simplificar, que  $y_0 = 0$  se tendrá que la expresión (5.8) se puede escribir,

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5.10)$$

La constante  $K$  recibe la denominación de *ganancia estática* del sistema, puesto que representa la relación entre la señal de salida ( $y(t)$ ) y la señal de entrada ( $u(t)$ ) para  $t \rightarrow \infty$ ; es decir,  $K = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$ . Se está haciendo la suposición de que dichos valores límite existen y son finitos.

La constante  $\tau$  tiene una dimensión de tiempo y se llama *constante de tiempo* del sistema.

El resultado (5.10) puede obtenerse de una forma más sencilla empleando la transformada de Laplace. En efecto, la ecuación diferencial de un sistema de primer orden viene dada por la expresión (5.1), y puesto que la transformada de Laplace de una señal escalón es:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

se tiene que la de la señal de salida será,

$$Y(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + \tau s}$$

Las constantes  $A$  y  $B$  resultan ser:

$$A = \left. \frac{K}{(1 + \tau s)} \right|_{s=0} = K \quad \text{y} \quad B = \left. \frac{K}{s} \right|_{s=-\frac{1}{\tau}} = -K\tau$$

con lo que se tiene  $Y(s)$ , cuya antitransformada de Laplace resulta ser,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = K(1 - e^{-t/\tau})$$

es decir la expresión (5.10)

En la figura 5.4 se representa la respuesta a una entrada en escalón de un sistema de primer orden de ganancia  $K$  y constante de tiempo  $\tau$ .

La constante de tiempo  $\tau$  caracteriza la velocidad de respuesta del sistema, es decir, la duración del régimen transitorio. Ello se pone de evidencia por las dos consideraciones siguientes.

1. Existe una relación entre la constante de tiempo y la tangente  $y(t)$  en el origen. En efecto de la expresión (5.10) se tiene,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.11)$$

haciendo  $t = 0$  se tiene,

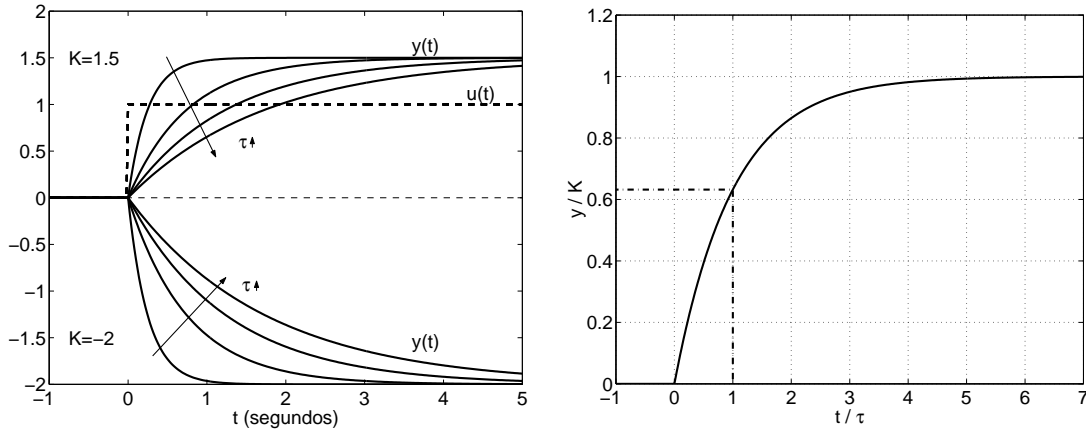


Figura 5.4: Izquierda: Respuesta a un escalón unitario de varios modelos de primer orden con distinto valor de los parámetros ganancia  $K$  y constante de tiempo  $\tau$ . Los valores de  $K$  son 1.5 y  $-2$ , los valores de  $\tau$  son 0.25, 0.75, 1.25 y 1.75. Las flechas indican valores crecientes de  $\tau$ . Derecha: representación de la respuesta normalizada  $y(t)/K$  frente al tiempo normalizado  $\frac{t}{\tau}$ . Se ha señalado el tiempo  $t = \tau$  en el cual  $y(t) \approx 0.63K$ .

$$\frac{dy}{dt}(0) = \frac{K}{\tau} \quad (5.12)$$

lo cual puede interpretarse tal como se hace en la figura 5.5. Recuérdese que se ha hecho  $u = 1$ .

- Haciendo  $t = \tau$  se tiene que la constante de tiempo es el tiempo al cabo del cual la señal de respuesta alcanza la fracción

$$1 - \frac{1}{e} \approx 0.632 \approx \frac{2}{3}$$

del valor final (figura 5.5)

Observando la figura 5.5 se tiene que la respuesta de un sistema de primer orden en una entrada en escalón alcanza en un tiempo  $t \approx 3\tau$  un valor con una diferencia sobre el valor final menor del 5%. La constante de tiempo proporciona por tanto mucha información sobre la respuesta del modelo lineal de primer orden.

En la práctica se presenta el problema de determinar el modelo matemático de un sistema a partir del conocimiento de la respuesta del mismo ante una entrada en escalón. Este problema surge con frecuencia en situaciones en las que las ecuaciones diferenciales son demasiado complejas y sin embargo la respuesta al escalón es simple. En efecto, si dicha respuesta se asemeja a la de un modelo lineal de primer orden resulta lógico proponer un modelo de primer orden. En tal caso es preciso determinar experimentalmente los parámetros  $K$  y  $\tau$  que aparecen en la ecuación diferencial (5.9). Esta tarea resulta extremadamente sencilla a partir de la respuesta del sistema a una entrada en escalón.

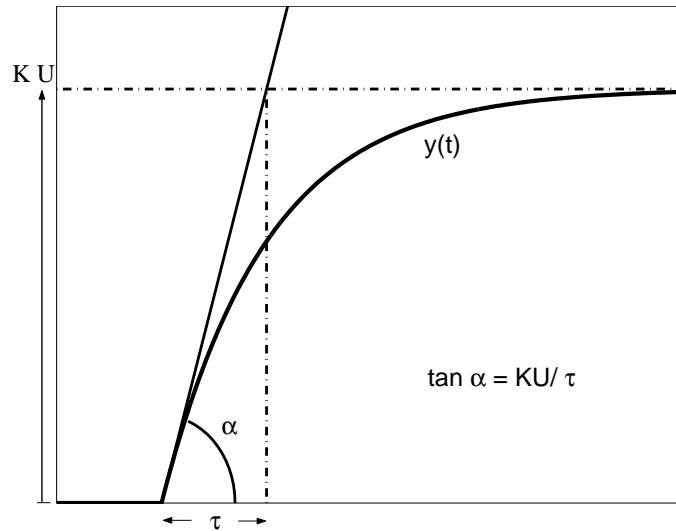


Figura 5.5: Relación entre la constante de tiempo y la tangente en el origen en la respuesta de un modelo lineal de primer orden ante una entrada escalón de amplitud  $U$  partiendo de condiciones iniciales nulas.

En efecto, de acuerdo con la figura 5.4 el valor de la constante de tiempo  $\tau$  se determina midiendo la abscisa correspondiente a la ordenada que sea el 63,2% del valor alcanzado por el sistema en régimen estacionario. La constante estática  $K$  es sencillamente el cociente entre el valor alcanzado por la respuesta en régimen estacionario y la amplitud de la entrada en escalón.

Como ejemplo considérese el problema de obtener un modelo matemático de la evolución de la población de bacterias en un cultivo de laboratorio cuando se añade un lote de nutriente o de contaminante. Empezar la vía del modelado mediante ecuaciones diferenciales es algo impensable. En lugar de eso se puede realizar el experimento con las bacterias, obtener la curva de respuesta del sistema y compararla con la curva de un modelo lineal de primer orden. Si ambas curvas tienen forma parecida es posible hallar un valor de  $K$  y de  $\tau$  de forma que el modelo se ajuste a los datos. Este modelo puede usarse luego para predecir resultados sin necesidad de realizar el experimento.

### Señal de entrada en rampa

Supóngase una señal de entrada en rampa, es decir, una señal de entrada cuyos valores crecen linealmente con el tiempo,  $u = \omega t$ , tal como la que se representa en la figura 5.6. Se supondrá además, para simplificar, que el valor inicial es  $y(0) = y_0 = 0$ . De acuerdo con la expresión (5.7) se tiene que,

$$y(t) = wbe^{-at} \int_0^t e^{a\tau} \tau d\tau = \frac{wb}{a} \left( t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a} \right) \quad (5.13)$$

esta última expresión, introduciendo la ganancia  $K$  y la constante de tiempo  $\tau$ , puede

escribirse como

$$y(t) = \omega K(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}). \quad (5.14)$$

Este mismo resultado se puede obtener con ayuda de la transformada de Laplace. En efecto, para el caso de una entrada en rampa, se tiene

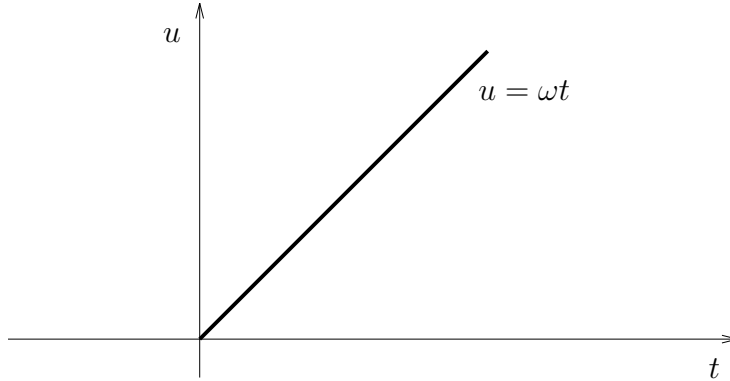


Figura 5.6: Entrada en rampa

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2}$$

con lo que ,

$$Y(s) = \frac{\omega K}{s^2(1 + \tau s)} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{B}{1 + \tau s}$$

siendo,

$$A_1 = \frac{1}{0!} \left[ \frac{\omega K}{(1 + \tau s)} \right]_{s=0} = \omega K$$

$$A_2 = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{ds} \frac{\omega K}{(1 + \tau s)} \right]_{s=0} = -\tau \omega K$$

$$B = \left[ \frac{\omega K}{s^2} \right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = \omega K \tau^2$$

de donde se desprende que  $y(t)$  tendrá la forma (5.14).

En la expresión (5.14) se observa que el tercer término del paréntesis del segundo miembro tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Este término constituye el régimen transitorio de la respuesta total. Una vez desaparecido el régimen transitorio, la respuesta en régimen permanente será,

$$y_{rp}(t) = \omega K(t - \tau) \quad (5.15)$$

Para interpretar esta respuesta cabe distinguir dos casos:

1.  $K = 1$ . En tal caso se tiene que la respuesta viene dada por

$$y_{rp} = \omega(t - \tau) \quad (5.16)$$

es decir, en el instante  $t$  la salida es igual a la entrada en el instante  $t - \tau$ . La salida se encuentra retardada  $\tau$  segundos con respecto a la entrada. En la figura 5.7 se representa la expresión (5.14) para  $K = 1$ . Se observa en esta figura cómo la señal de salida se encuentra retardada con respecto a la señal de entrada. El error en régimen permanente es igual a  $\omega\tau$ . Este error recibe la denominación de *error de arrastre*.

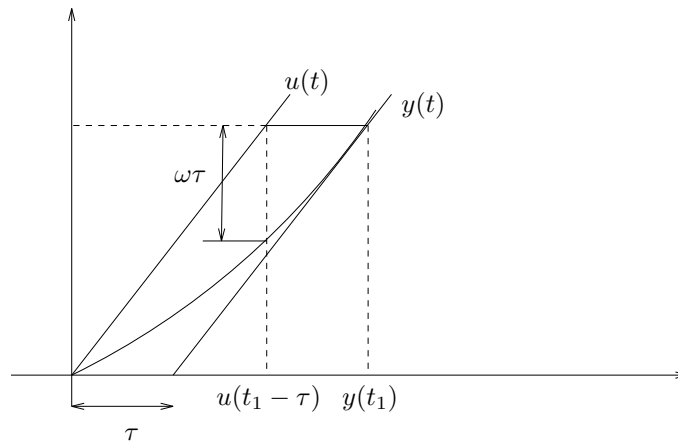


Figura 5.7: Respuesta a rampa.

Respecto al régimen transitorio se tiene que para  $t = \tau$

$$y(\tau) = \frac{K\omega\tau}{e} \approx \frac{K\omega\tau}{3} \quad (5.17)$$

es decir, que el sistema ha respondido sólo en un tercio del valor alcanzado por la señal de entrada. En la figura 5.7 se interpreta este resultado.

La consideración del error de arrastre en la respuesta de un sistema de primer orden, es sumamente importante en ciertos casos como por ejemplo cuando el sistema en cuestión es un aparato de medida. Supóngase un globo en el que se encuentra un termómetro de mercurio. Se supone que la temperatura varía linealmente con la altura; se tiene entonces que el termómetro se encuentra sometido a una señal de entrada en rampa. Las lecturas del termómetro, según las consideraciones anteriores, presentan un error de arrastre.

2.  $K \neq 1$ . La salida y entrada divergen, por lo que el error de arrastre se hace infinito.

### Respuesta armónica

Se considera ahora el caso de que la señal de entrada es sinusoidal, es decir,  $u = \text{sen}\omega t$ , siendo  $\omega$  la frecuencia angular expresada en radianes por segundo. Suponiendo que  $y_0 = 0$ , se tiene que la respuesta del sistema, de acuerdo con la expresión (5.7), viene dada por

$$y(t) = e^{-at} \left[ \frac{\omega b}{a^2 + \omega^2} \right] + \frac{b}{a^2 + \omega^2} (a \text{sen}\omega t - \omega \text{cos}\omega t) \quad (5.18)$$

En la figura 5.8 se muestra una forma típica de esta respuesta.

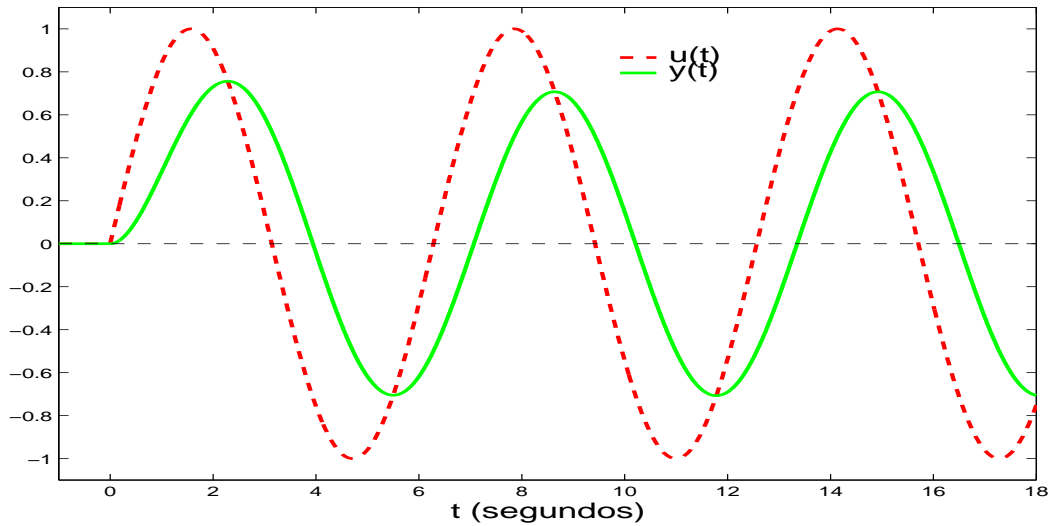


Figura 5.8: Respuesta armónica (salida ante una entrada senoidal  $u = \text{sen}t$ ) de un modelo de primer orden con  $K = 1$  y  $\tau = 1$ s.

Para  $t \rightarrow \infty$ , es decir un tiempo suficientemente grande, el primer término del segundo miembro se anula, por lo que la respuesta en régimen permanente resulta ser

$$y_{rp}(t) = \frac{b}{a^2 + \omega^2} (a \text{sen}\omega t - \omega \text{cos}\omega t) \quad (5.19)$$

Esta expresión se puede escribir de una forma más sencilla componiendo seno y coseno en  $\text{sen}(\omega t + \phi)$ . El ángulo  $\phi$  cumple

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \text{sen}\phi = -\frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (5.20)$$

con lo que 5.19 puede escribirse

$$y_{rp}(t) = Y \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (5.21)$$



siendo

$$\begin{aligned} \tan\phi &= -\omega/a = -\omega\tau \\ Y &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

La expresión (5.21) puede interpretarse diciendo que la respuesta de un sistema lineal de primer orden a una señal sinusoidal, es otra señal sinusoidal de la misma frecuencia cuya amplitud ha variado en una relación  $Y$ , y que ha adquirido un desfase  $\phi$ . Inspeccionando la figura 5.8 puede comprobarse esta interpretación. Nótese que el desfase entre las dos ondas senoidales es observado en la gráfica como un desfase temporal  $\Delta t$  que puede medirse como la distancia entre valles o picos correspondientes en la curva de  $u$  y de  $y$ . El desfase  $\phi$  está expresado en radianes y se relaciona con  $\Delta t$  por medio de la frecuencia angular  $w$  de una forma lineal:  $\phi = \Delta t w$ .

De 5.22 se obtiene que tanto la relación de amplitudes  $Y$  como el desfase  $\phi$ , son función de la frecuencia angular  $w$  de la entrada. Para ilustrar mejor esta dependencia se tiene la figura 5.9, en la cual se muestra la salida de un modelo lineal de primer orden con  $K = 1$  y  $\tau = 1$ s. ante entradas senoidales de varias frecuencias. Obsérvese que el desfase no es lo mismo que la diferencia temporal entre las ondas.

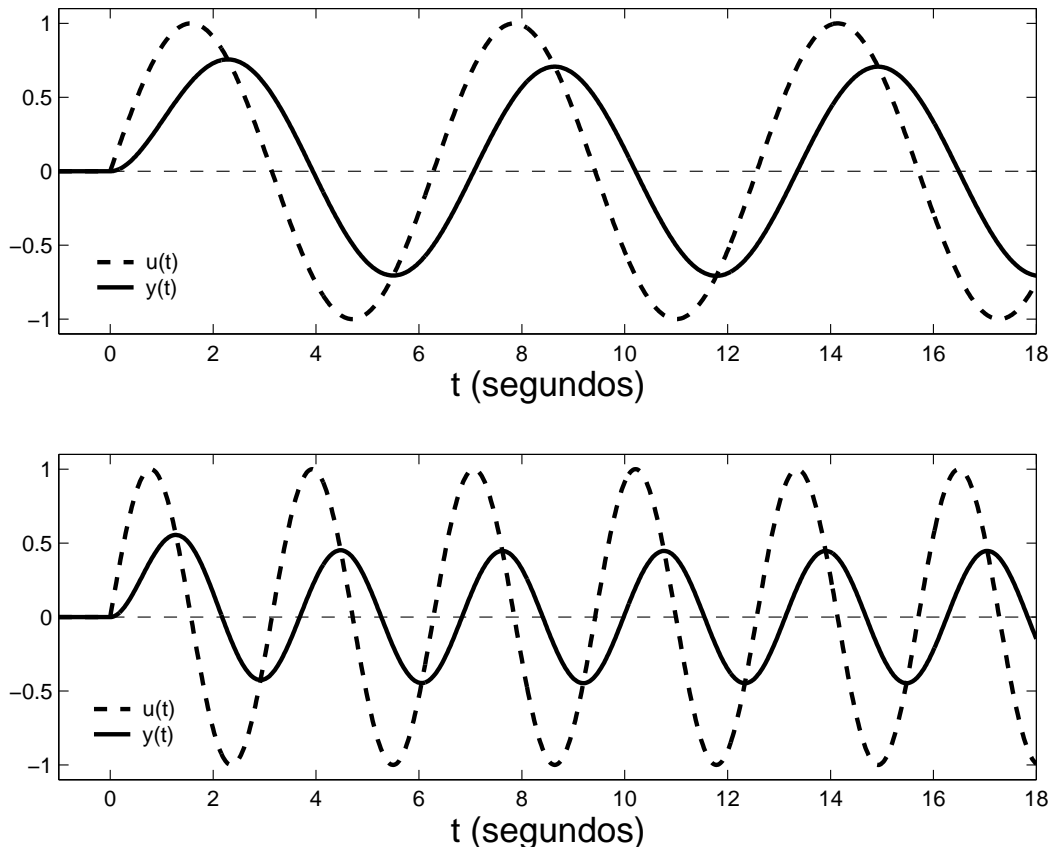


Figura 5.9: Respuesta armónica para  $u = \text{sen}0.5t$  y para  $u = \text{sen}1.5t$ .

En la figura 5.10 se representa  $Y(\omega)$  y  $\phi(\omega)$  para una entrada senoidal de amplitud unidad. Este tipo de curvas serán de gran utilidad y se estudiarán más a fondo en temas sucesivos.

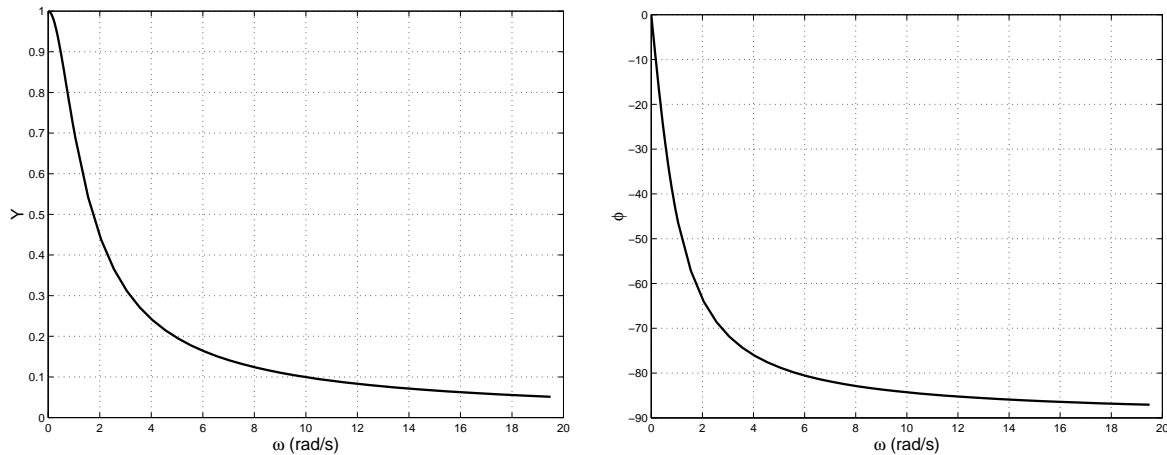


Figura 5.10: Relación de la amplitud  $Y$  y fase  $\phi$  de la respuesta armónica con la frecuencia angular  $\omega$  para un modelo de primer orden con  $K = 1$  y  $\tau = 1$ .

Otra forma de representar gráficamente la respuesta en frecuencia de un sistema lineal es por medio de un diagrama polar. Recuérdese que en un diagrama polar se representan números complejos como puntos en el plano. La abcisa equivale a la parte real y la ordenada a la parte imaginaria, el módulo del vector que une el origen con el punto es el módulo del número complejo, el ángulo del vector con el eje real es el argumento del número complejo.

La respuesta armónica se puede representar mediante un número complejo cuyo módulo es  $Y(\omega)$  y cuyo argumento es  $\phi(\omega)$ . Haciendo variar  $\omega$  se obtiene un lugar geométrico, en el que  $\omega$  es el parámetro. En la figura 5.11 se representa la respuesta en frecuencia correspondiente a un sistema lineal de primer orden con  $K = 1$  y  $\tau = 1$ .

Existen otras formas de representar gráficamente la respuesta en frecuencia de un sistema lineal que serán estudiadas más adelante.

### Filtrado con un sistema lineal

Si la señal de entrada a un sistema lineal es una señal arbitraria, la reproducción de la misma a la salida será muy fiel si la constante de tiempo del sistema es suficientemente pequeña. Es decir, si la constante de tiempo del sistema es menor que las más rápidas variaciones que se produzcan en esta señal de entrada. Lo que a su vez se puede interpretar en el dominio de la frecuencia diciendo que la constante de tiempo del sistema sea lo suficientemente pequeña como para permitir el paso de todos los armónicos de la señal de entrada, (recordar la figura 5.8). La figura 5.12 ilustra este hecho.

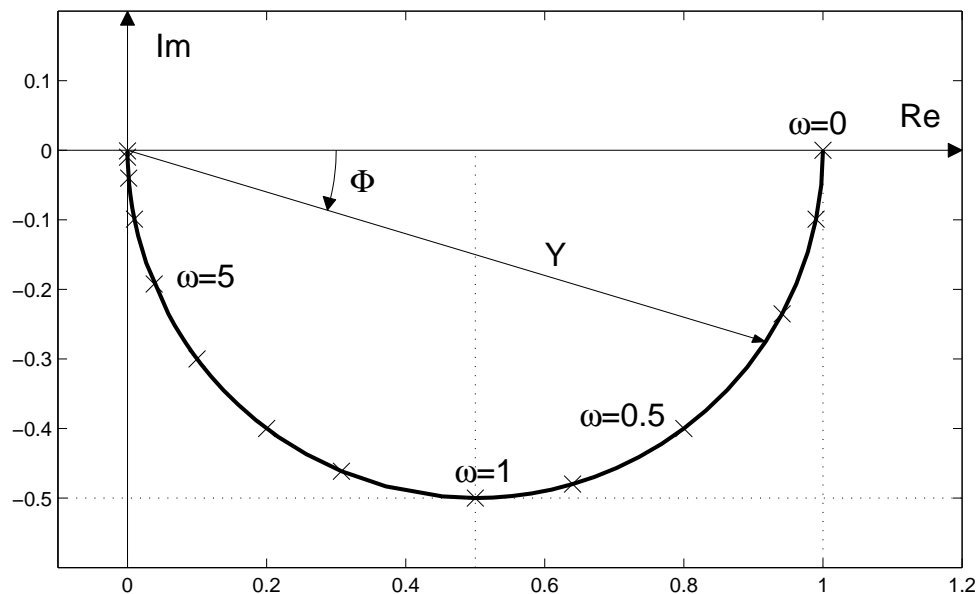


Figura 5.11: Diagrama polar de la respuesta armónica.

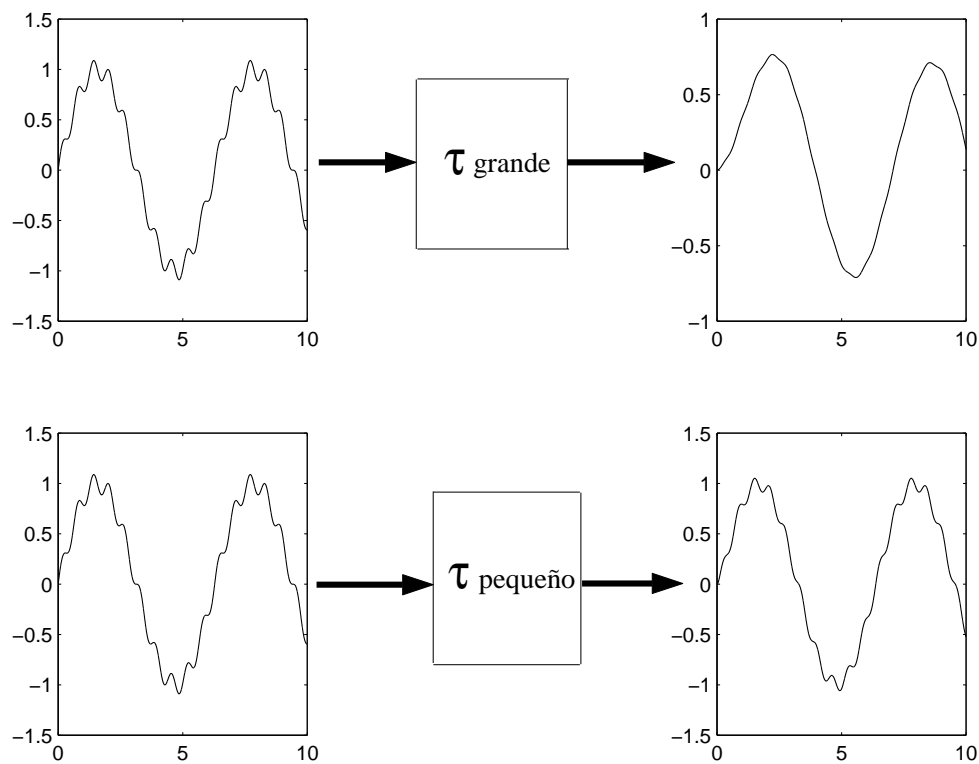


Figura 5.12: Filtrado de una señal muy oscilatoria al atravesar un par de sistemas lineales de ganancia unidad. El sistema de la parte superior tiene una constante de tiempo alta y el de la parte inferior otra menor.

Por el contrario si la constante de tiempo es grande, la respuesta del sistema es lenta, por lo que el sistema no puede seguir las variaciones rápidas de la señal de entrada resultando de ello que éstas desaparecen de la señal de salida. El sistema actúa como *limando las asperezas* de la señal de entrada. La figura 5.12 ilustra este hecho que recibe la denominación de *filtrado* de la señal de entrada. Se puede dar del mismo una interpretación en el dominio de la frecuencia similar a la dada más arriba para el caso de una constante de tiempo pequeña.

De hecho, el concepto de filtrado de una señal es enormemente importante y lo único que se ha hecho hasta aquí ha sido introducirlo, ilustrando una forma de comportamiento de los sistemas dinámicos lineales de primer orden.

### 5.1.2 Ejemplos de sistemas de primer orden

- **Circuito eléctrico LR.**

El circuito representado en la figura 5.13 está regido por una ecuación diferencial de la forma

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R} \frac{dI}{dt} + I = \frac{E}{R}$$

considerando la señal de entrada, la tensión aplicada al sistema ( $E$ ) y la señal de salida a la intensidad ( $I$ ) que recorre el circuito, se tiene un sistema de primer orden. La ganancia estática es  $1/R$  y la constante de tiempo es  $L/R$ .

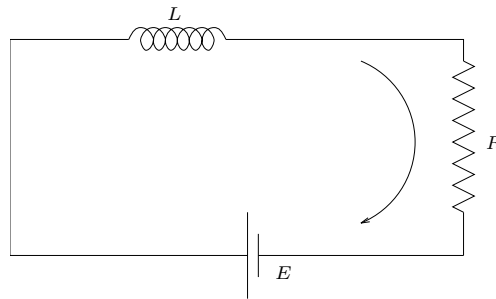


Figura 5.13: Circuito RL.

- **Circuito eléctrico RC.**

El circuito de la figura 5.14 es un circuito clásico de carga de un condensador a través de una resistencia. Se considera que la salida es la carga del condensador  $q$  y la entrada el voltaje de la fuente  $E$ . La ecuación diferencial que rige el proceso es la siguiente:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \Rightarrow \quad RC \frac{dq}{dt} + q = CE$$

La ganancia estática es  $C$ , puesto que  $Q/E$  es, en régimen permanente, la carga que el condensador alberga. La constante de tiempo es  $RC$ .

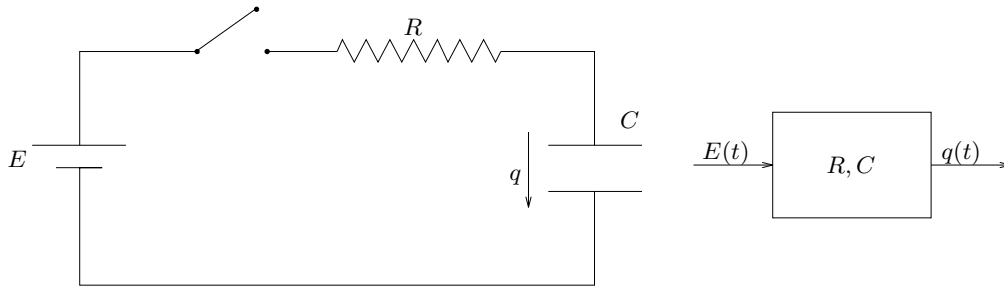


Figura 5.14: Circuito RC.

- **Termómetro de mercurio.**

Un termómetro puede considerarse como un sistema en el que la señal de entrada  $u$  es la temperatura del medio en el que se encuentra inmerso y la señal de salida  $y$ , es la temperatura indicada por el mismo. Si se denota por  $\dot{Q}$  la cantidad de calor intercambiada entre el medio y el termómetro por unidad de tiempo, y por  $C_e$  la capacidad calorífica de la ampolla, se tendrá que

$$mC_e \frac{dy}{dt} = \dot{Q} = K(u - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{mC_e}(u - y)$$

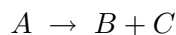
Por otra parte el flujo de calorías que entra en el mercurio se aporta fundamentalmente por conducción. De acuerdo con la ley de Newton es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el medio y el mercurio.

$$\frac{dQ}{dt} = k(u - y)$$

Se concluye de las dos ecuaciones anteriores que un termómetro de mercurio puede considerarse como un sistema lineal de primer orden. Obsérvese que, como corresponde a un sistema de medición, la ganancia estática es  $k = 1$ .

- **Reacción química.**

Supóngase la descomposición espontánea de una molécula  $A$  en dos moléculas  $B$  y  $C$ :



la cual se efectúa de manera que la velocidad de reacción es proporcional al número de moléculas  $A$  presentes.

Si se denota por  $y$  la concentración de la sustancia  $A$ , se tiene

$$-\frac{dy}{dt} = ky$$

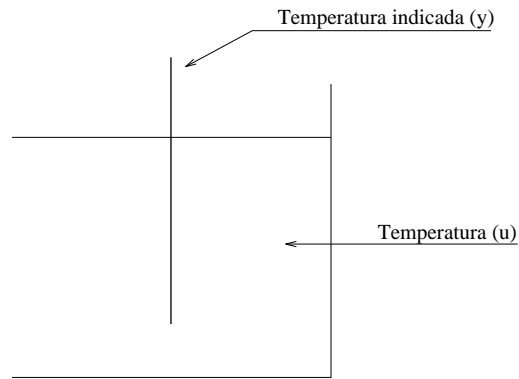


Figura 5.15: Termómetro de mercurio.

es decir,

$$\frac{1}{k} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

Se trata de un sistema lineal de primer orden autónomo de constante de tiempo  $1/k$ . El parámetro  $k$  es denominado en Química *constante de velocidad* de la reacción, y en la práctica presenta una gran dependencia de la temperatura.

- **Dinamómetro.**

Se trata de medir la fuerza  $u$  aplicada por medio del desplazamiento  $y$  que imprime a un dinamómetro de coeficiente de elasticidad  $k$ , de coeficiente de viscosidad  $\alpha$  y masa despreciable, figura 5.16.

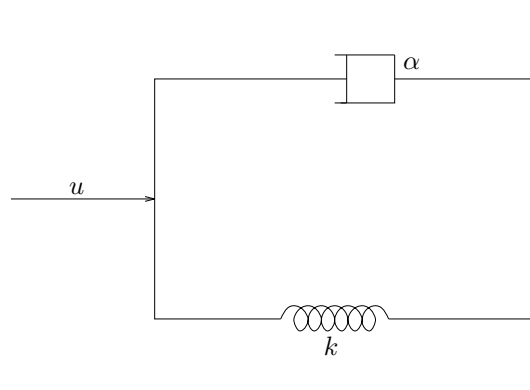


Figura 5.16: Dinamómetro

Según las leyes de la Mecánica se tiene

$$u = ky + \alpha \frac{dy}{dt}$$

Por lo tanto un dinamómetro es un sistema de medida lineal de primer orden.

- **Mezcla de dos fluidos.**

Supóngase un recipiente (figura 5.17) en el que se contiene una masa  $m$  de un líquido que contiene una fracción  $C_r$  de un componente  $A$ , y supóngase que el recipiente se alimenta por un caudal  $Q$  de líquido en el que la fracción de componente  $A$  es  $C_e$ . Se supone que la mezcla es perfecta e instantánea, es decir, que la composición es la misma en todo instante en todo el recipiente. Se supone además que el flujo de entrada es igual al de salida, con lo que el volumen contenido en el recipiente es constante. Es fácil ver que en estas condiciones se tiene,

$$M \frac{dC_r}{dt} = Q(C_e - C_r)$$

es decir,

$$\frac{M}{Q} \frac{dC_r}{dt} + C_r = C_e$$

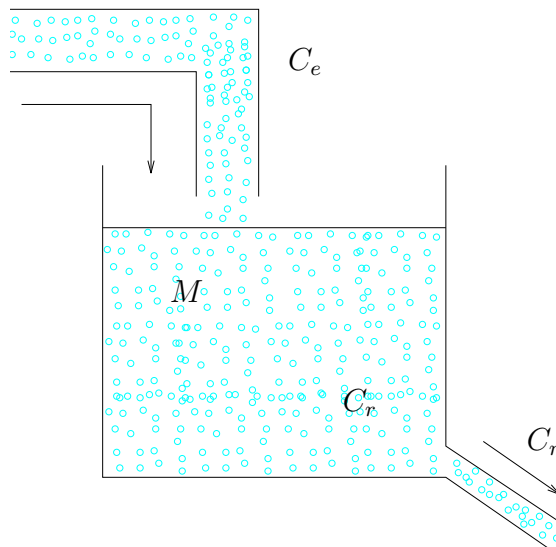


Figura 5.17: Mezcla de Fluidos.

Se trata por lo tanto de un sistema de primer orden.

- **Motor eléctrico de corriente continua.**

Supóngase el motor eléctrico de corriente continua cuyo diagrama se ha representado en la figura 5.18. El par motor supuesta la intensidad de campo  $\phi$  constante, viene dado por

$$P = C_p I$$

donde  $C_p$  es la constante del par motriz e  $I$  es la intensidad del inducido. Por otra parte la intensidad de inducido  $I$ , la velocidad angular  $\omega$  y la tensión que alimenta al inducido  $u$  (señal de entrada), están relacionadas por la siguiente ecuación.

$$u = RI + L \frac{dI}{dt} + K\omega$$

siendo  $K\omega$  el voltaje contraelectromotriz. De acuerdo con las leyes de la Mecánica el par motor  $P$  y la velocidad de salida del motor  $\omega$ , están ligados por la ecuación,

$$P = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

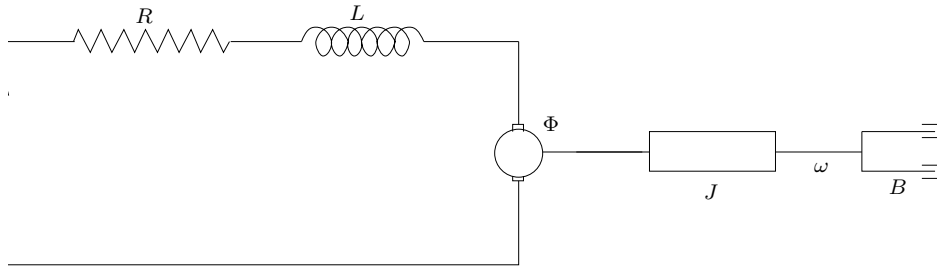


Figura 5.18: Motor eléctrico.

De las tres ecuaciones anteriores, considerando el caso en que  $L = 0$ , se obtiene,

$$J \frac{d\omega}{dt} + \left( B + \frac{KC_p}{R} \right) \omega = \frac{C_p}{R} u$$

es decir, considerando como señal de entrada la tensión aplicada al inducido y como señal de salida la velocidad de giro del motor, se tiene un sistema de primer orden.

### 5.1.3 El sistema de primer orden como integrador

En los apartados anteriores se ha considerado un sistema lineal de primer orden como el regido por una ecuación diferencial de la forma 5.1. Esta misma ecuación puede escribirse también de la forma siguiente:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t (bu - ay) dt \quad (5.23)$$

La consideración de esta segunda forma de escribir la ecuación que rige el comportamiento de un sistema lineal de primer orden es sumamente interesante, por cuanto que su sentido físico es más claro. La acción del sistema puede descomponerse en dos partes:

- Una parte estática (sin memoria) en la que se determina

$$f = bu - ay \quad (5.24)$$



- Una integral en la que los valores de  $f$  determinados para cada instante de tiempo  $t$  se van acumulando (integrando) dando con ello lugar a la variable de salida  $y$ .

En la figura 5.19 se tiene representado un esquema en el que se distinguen la parte estática del integrador.

Esta manera de interpretar el funcionamiento de un sistema lineal de primer orden, es más intuitiva desde un punto de vista físico por cuanto que en la naturaleza es más fácil interpretar los procesos en términos de integraciones que de diferenciaciones. De hecho la integración (acumulación) es un proceso normal del que es muy sencillo encontrar ejemplos, mientras que la diferenciación es enormemente más artificiosa. No debe olvidarse sin embargo, que la resolución de una ecuación diferencial es más simple que la de una ecuación integral, y es por ello que en cualquier caso el enfoque por ecuaciones diferenciales es más frecuente que el que aquí se presenta.

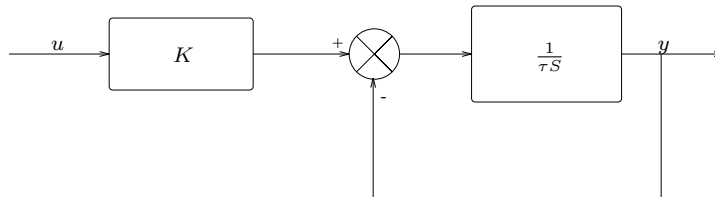


Figura 5.19: El sistema de primer orden mediante integrador.

## 5.2 Sistemas dinámicos lineales de segundo orden

Se va a considerar un sistema lineal de segundo orden como el regido por una ecuación diferencial de la forma,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b u \quad (5.25)$$

El problema del estudio de un sistema de segundo orden queda reducido a la resolución de la anterior ecuación diferencial cuando la señal de entrada  $u(t)$  se particulariza en una cierta función del tiempo. Para que la solución esté completamente determinada se requiere el conocimiento de los valores iniciales de  $y(t)$  y de  $dy/dt$ . En esta sección se puede hacer un desarrollo completamente paralelo al realizado en la sección anterior para los sistemas de primer orden. La complejidad de tratamiento algebraico que esto requiere es grande, y es por ello por lo que se va a estudiar sencillamente los casos simplificados que ofrecen mayor interés práctico.

En este sentido, y como primera hipótesis simplificadora, se va a suponer siempre que se trabaja con unas condiciones iniciales nulas.

La ecuación diferencial de un sistema de segundo orden que se va a considerar aquí es,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b u \quad (5.26)$$

La *ecuación característica* de un sistema de segundo orden de esta forma es:

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \quad (5.27)$$

la cual se puede escribir también, en el supuesto de que sus raíces sean  $-p_1$  y  $-p_2$ , de la forma siguiente,

$$(r + p_1)(r + p_2) = 0 \quad (5.28)$$

Otra forma frecuente de escribir la ecuación diferencial de un sistema de segundo orden es la siguiente,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \delta \omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 k u(t) \quad (5.29)$$

Esta forma es especialmente útil cuando se trata con sistemas cuyas raíces de la ecuación característica son complejas. Los parámetros que intervienen en esta forma reciben una denominación especial.

- El parámetro  $k$  recibe la denominación de *ganancia estática*, y es una constante que carece de dimensiones.
- El parámetro  $\omega_n$  recibe el nombre de *frecuencia propia no amortiguada* y se expresa en radianes por segundo.
- El parámetro  $\delta$  recibe el nombre de *factor de amortiguamiento*, y es un número sin dimensiones.

Las relaciones que ligán a los parámetros de la forma (5.26) con los de la forma (5.29) son las siguientes.

$$\omega_n = \sqrt{a_2}, \quad k = \frac{b}{a_2}, \quad \delta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad (5.30)$$

Los parámetros  $\omega_n$  y  $\delta$  son normalmente positivos para los casos de interés (raíces con parte real negativa).

### 5.2.1 Respuesta de un sistema de segundo orden a una entrada en escalón

En esta sección se va a analizar el comportamiento de un sistema de segundo orden genérico cuando es excitado por un escalón unitario. Por simplicidad se considera que la ganancia estática vale la unidad, siendo los resultados obtenidos fácilmente extrapolables a otro caso escalando la salida con este factor  $k$ . Además, se supondrá que las condiciones iniciales son nulas.

El comportamiento del sistema va a depender de las raíces del denominador de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} s = -p_1 &= -\delta\omega_n - \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1} \\ s = -p_2 &= -\delta\omega_n + \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Resulta evidente que estas raíces serán reales o complejas dependiendo de que factor de amortiguamiento  $\delta$  sea mayor o menor que uno. Además, siempre que  $\delta$  sea negativo el sistema será inestable. Se estudia a continuación el comportamiento para distintos valores de  $\delta$ .

#### Factor de amortiguamiento mayor que la unidad (sobreamortiguado)

En este caso las raíces del denominador de la función de transferencia son reales y por tanto dan lugar a dos exponenciales. Usando la transformada de Laplace, la respuesta ante escalón será:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

cuya antitransformada puede calcularse, dando lugar a:

$$\begin{aligned} y(t) = 1 &+ \left[2(\delta^2 - \delta\sqrt{\delta^2 - 1} - 1)\right]^{-1} e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n t} \\ &+ \left[2(\delta^2 + \delta\sqrt{\delta^2 - 1} - 1)\right]^{-1} e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n t} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Esta expresión suministra la forma analítica de la respuesta de un sistema de segundo orden, con factor de amortiguamiento mayor que la unidad, a una entrada en escalón.

En la figura 5.20a) se muestra un ejemplo de este comportamiento; desde un punto de vista cualitativo la característica esencial de esta respuesta es su carácter de lentitud en alcanzar el valor  $y = 1$ .

Nótese que aunque a primera vista la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden, en realidad aparece el efecto de la suma de dos exponenciales. En el caso de un valor de  $\delta$  grande uno de los términos disminuye más rápidamente que el otro y el efecto de una de las exponenciales se puede considerar despreciable, con lo que la respuesta es asimilable a la de un sistema de primer orden. El caso extremo se representa en la figura 5.20b) que corresponde al caso de dos raíces reales iguales.

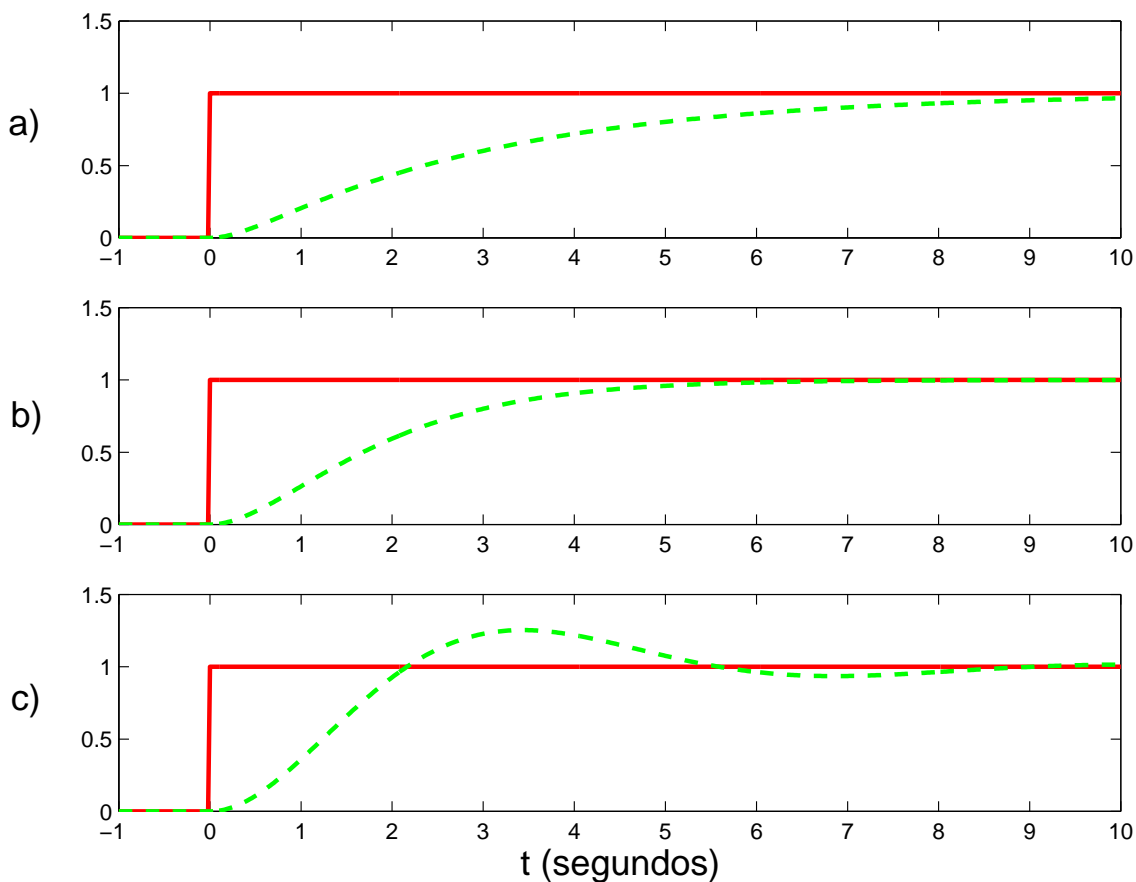


Figura 5.20: Respuesta ante escalón unitario de tres sistemas de segundo orden con ganancia unidad y con  $\omega_n = 1$ : a) sobreamortiguado (con  $\delta = 1.6$ ), b) críticamente amortiguado ( $\delta = 1$ ) y c) subamortiguado (con  $\delta = 0.4$ ).

### Factor de amortiguamiento menor que la unidad (subamortiguado)

Si el factor de amortiguamiento  $\delta$  es menor que la unidad (y no negativo), es decir,  $0 \leq \delta < 1$ , entonces sucede que las raíces  $p_1$  y  $p_2$  son complejas. En la figura 5.21 se representa la situación de las raíces  $p_1$  y  $p_2$  en el plano complejo.

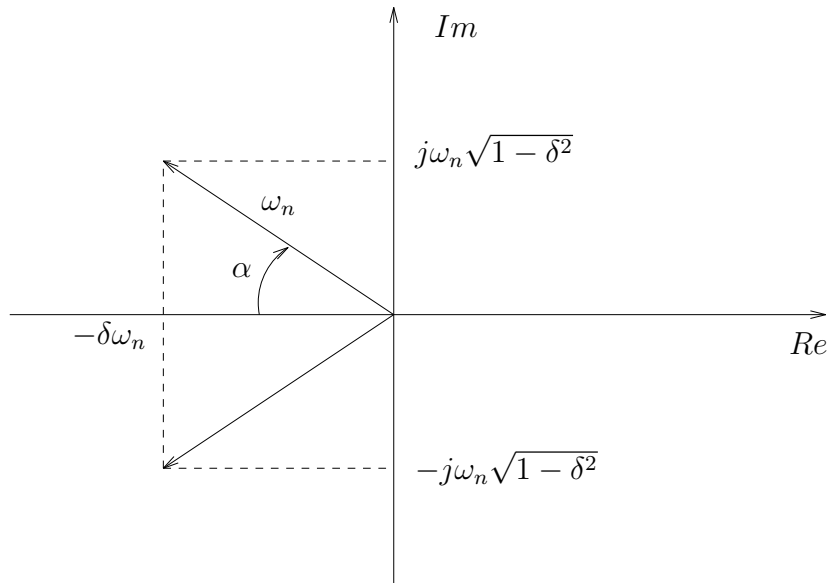


Figura 5.21: Relación entre parámetros de un modelo de segundo orden con raíces complejas

La consideración del ángulo  $\alpha$ , tal como se ha indicado en la figura 5.21 permite escribir,

$$\cos\alpha = \delta \quad \text{sen}\alpha = \sqrt{1 - \delta^2} \quad (5.33)$$

Se puede calcular la respuesta temporal usando la transformada de Laplace:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (5.34)$$

siendo  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$  la frecuencia propia amortiguada del sistema. La  $y(t)$  se puede calcular de la  $Y(s)$  recordando que la antitransformada del primer sumando de 5.34 es un escalón, la del segundo se corresponde con un coseno amortiguado por una exponencial y la del tercero con un seno amortiguado por una exponencial. Por tanto:

$$y(t) = 1 - e^{-\delta\omega_n t} (\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \text{sen}(\omega_d t))$$

Esta expresión puede escribirse en forma más compacta como sigue:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \alpha) \quad (5.35)$$

siendo  $\alpha = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$  el ángulo que forman los polos con el eje real. La expresión anterior suministra la forma analítica de la respuesta de un sistema de segundo orden, con factor de amortiguamiento menor que la unidad, a una entrada en escalón. La forma general de la respuesta se tiene en la figura 5.20c), en la que se observa que el comportamiento de un sistema de segundo orden con factor de amortiguamiento menor que la unidad está caracterizado por la presencia de oscilaciones. Esta forma de respuesta, que se caracteriza por una senoide exponencialmente amortiguada, se dice que es *subamortiguada*.

De la observación de la expresión 5.35 se desprende que la frecuencia de oscilación del sistema viene dada por,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \quad (5.36)$$

El periodo de oscilación del sistema viene dado por

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (5.37)$$

### Factor de amortiguamiento igual a la unidad (críticamente amortiguado)

En el caso de que el factor de amortiguamiento sea igual a la unidad, es decir  $\delta = 1$ , se tendrá que las dos raíces de la ecuación característica serán iguales entre sí, es decir,  $p_1 = p_2 = -\omega_n$  es una raíz doble de la ecuación característica.

Para obtener la respuesta a una entrada en escalón del sistema con factor de amortiguamiento igual a la unidad se calcula la antitransformada de:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s}$$

que, haciendo uso de las tablas, proporciona:

$$y(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} \quad (5.38)$$

Esta respuesta se ha representado en la figura 5.22 y se dice que está *críticamente amortiguada*.

En la figura 5.22 se representan las respuestas a una entrada en escalón para distintos valores del factor de amortiguamiento. Se observa cómo con factores de amortiguamiento inferiores a la unidad, se tiene un comportamiento oscilatorio, el cual es más oscilante cuanto menor es el valor de  $\delta$ . Por otra parte, para valores del amortiguamiento mayor que la unidad, se tienen respuestas sin sobreoscilación, pero que son considerablemente más lentas. Esto último hace que en las aplicaciones prácticas se tienda siempre a tener

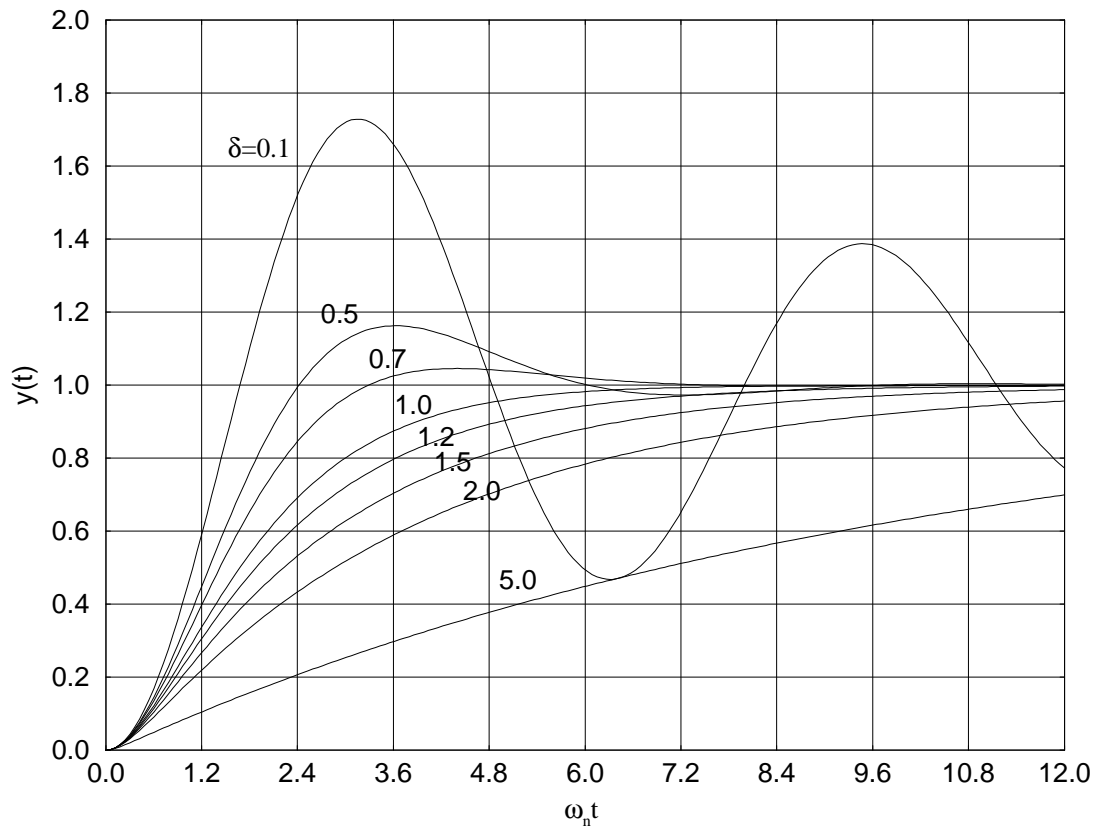


Figura 5.22: Respuesta ante escalón en función del factor de amortiguamiento para modelos con ganancia unidad. La abcisa es el tiempo normalizado  $\omega_n t$ .

respuestas amortiguadas, puesto que son más rápidas, aunque siempre manteniendo las oscilaciones dentro de unos límites razonables.

### 5.2.2 Especificaciones de la respuesta transitoria

En muchas situaciones interesa conocer las características del comportamiento de un sistema en el dominio del tiempo. Las prestaciones de un sistema de control se especifican normalmente en términos de su respuesta ante escalón, ya que el escalón es una señal que posee una gran riqueza en frecuencia y excita suficientemente al sistema.

Se pueden definir algunos términos (partiendo siempre de condiciones iniciales nulas)

**Tiempo de subida** ( $t_s$ ): es el tiempo transcurrido desde el instante en que se produce el escalón hasta que la salida alcance un determinado porcentaje de su valor final. Este porcentaje puede ser el 100% o un intervalo como del 10 al 90% o del 5 al 95%.

**Sobreoscilación**: es la amplitud de la primera oscilación medida en porcentaje sobre el salto que sufre el valor final de la salida.

**Tiempo de pico** ( $t_p$ ): es el tiempo en el que se produce la sobreoscilación.

**Tiempo de establecimiento** ( $t_e$ ): es el tiempo que tarda la salida en quedarse en una determinada franja alrededor del valor final. Esta franja puede ser del  $\pm 2\%$  o del  $\pm 5\%$ .

Obsérvese que una vez definidos estos valores el transitorio queda prácticamente definido, pues de alguna forma se está *modelando* la forma de la respuesta ante escalón. Como lo que se desea en un sistema de control es que la salida siga fielmente a la entrada, está claro que ante una entrada en escalón, interesa que tanto el tiempo de subida, como el de establecimiento y la sobreoscilación sean lo más pequeños posibles. Como resulta que estos objetivos son contradictorios, ya que cualquier sistema físico al intentar hacerlo más rápido tiende a sobreoscilar, en la práctica siempre hay que llegar a un compromiso entre velocidad de respuesta y sobreoscilación.

En el caso de sistemas de segundo orden subamortiguados es posible establecer unas relaciones analíticas entre las especificaciones de la respuesta transitoria y los parámetros que lo definen ( $\delta$  y  $\omega_n$ ).

Así, podemos calcular el tiempo de subida (de 0 a 100%) como el instante en que la salida vale 1.

$$y(t_s) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t_s}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad \text{sen}(\omega_d t_s + \alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_d t_s + \alpha = \pi, 2\pi, \dots$$



Por tanto,  $t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d}$ .

El valor del primer pico de sobreoscilación, y el instante de tiempo en que se produce, son dos tipos de características muy interesantes para definir el comportamiento de un sistema de segundo orden. El instante de tiempo en el cual se produce el primer pico de oscilación del sistema, puede obtenerse, de una forma analítica, derivando  $y(t)$  con relación al tiempo, e igualando esta derivada a cero. En efecto, se tiene:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \alpha) - \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \alpha) = 0 \quad (5.39)$$

Esta derivada se anulará cuando,

$$\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

por lo tanto, el primer pico de oscilación se producirá cuando

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad (5.40)$$

Llevando el valor de  $t_p$  a la expresión 5.35 se tiene,

$$y_{max}(t) = 1 - \frac{e^{-\delta \pi / \sqrt{1 - \delta^2}}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) \quad (5.41)$$

la cual, habida cuenta de que,

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad y \quad \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \delta^2} \quad (5.42)$$

puede escribirse,

$$y_{max}(t) = 1 + e^{\left(-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right)} \quad (5.43)$$

Por lo tanto la sobreoscilación viene dada por:

$$SO = 100 e^{\left(-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right)} \quad (5.44)$$

En la figura 5.23a) se muestra la dependencia de la sobreoscilación con el factor de amortiguamiento.

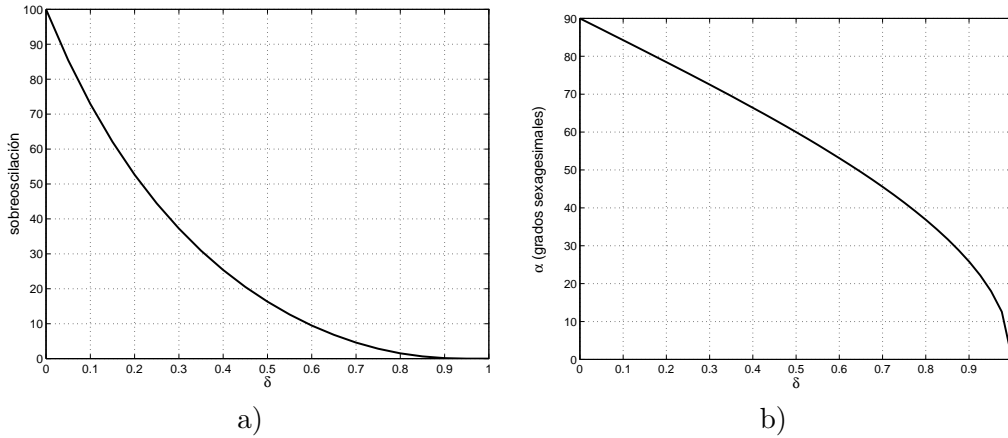


Figura 5.23: a) Sobreoscilación en función del factor de amortiguamiento. b) Ángulo  $\alpha$  en función del factor de amortiguamiento.

El tiempo de establecimiento es algo más complicado de obtener analíticamente, pero se puede obtener de forma aproximado teniendo en cuenta que la envolvente de la salida es la exponencial  $e^{-\delta\omega_n t}$ , que se corresponde con un sistema de primer orden de constante de tiempo  $\tau = 1/\delta\omega_n$ . Por tanto, según se analizó para este tipo de sistemas, la salida alcanza un 5% del valor final en:

$$t_e \approx 3\tau = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

y un 2% del valor final en un tiempo:

$$t_e \approx 4\tau = \frac{4}{\delta\omega_n}$$

### 5.3 Sistemas de orden n

Una vez estudiados los sistemas de primer y segundo orden conviene realizar un estudio similar para sistemas de orden superior, puesto que la mayoría de los sistemas reales serán de orden mayor que dos. Para ello supóngase que el modelo matemático del sistema que se está considerando tiene la forma:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_o \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_m u \quad (5.45)$$

en donde, por razones de realizabilidad física que se considerarán más adelante,  $n > m$ .

Si las condiciones iniciales son nulas, su transformada de Laplace es

$$Y(s)(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) = U(s) (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) \quad (5.46)$$

por lo tanto, la transformada de Laplace de la salida del sistema  $y(t)$ , correspondiente a una entrada  $u(t)$ , cuya transformada es  $U(s) = \mathcal{L} [u(t)]$  resulta ser

$$Y(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s) \quad (5.47)$$

Puesto que  $U(s)$  se supone conocido, el problema es el de determinar  $Y(s)$ , problema que se reduce al cálculo de la antitransformada de  $Y(s)$ . Para las funciones normalmente empleadas  $U(s)$  es el cociente de dos polinomios en  $s$ , por lo que  $Y(s)$  será a su vez el cociente de dos polinomios, es decir,

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + p_1)^{n_1} (s + p_2)^{n_2} \dots (s + p_q)^{n_q}} \quad (5.48)$$

El polinomio del denominador  $U(s)$  se ha factorizado, siendo  $-p_i$  las raíces de la ecuación  $P(s) = 0$ , que recibe la denominación de *polos* de  $Y(s)$ . Para mayor generalidad, se ha supuesto que cada uno de los polos tiene una multiplicidad  $n_i$  aunque normalmente  $n_i = 1$ , para todo  $i$ .

El cociente de polinomios  $Y(s)$  se puede descomponer en fracciones simples, escribiéndose,

$$Y(s) = \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s + p_i)^k} \quad (5.49)$$

en donde los coeficientes  $c_{ik}$  reciben la denominación de *residuos* de  $Y(s)$  en el polo  $-p_i$ . Los residuos se calculan con ayuda de la expresión

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \left( \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} [(s + p_i)^{n_i} Y(s)] \right) \Big|_{s = -p_i} \quad (5.50)$$

Si todos los polos son simples, es decir, si todos los valores de  $n_i$  son igual a la unidad, entonces la expresión 5.49 se escribe

$$Y(s) = \sum_{i=1}^q \frac{c_{i1}}{s + p_i} \quad (5.51)$$

y los residuos se determinan por la expresión

$$c_{ik} = c_{i1} = (s + p_i) Y(s) \Big|_{s=-p_i} \quad (5.52)$$

expresiones que no son sino particularizaciones para  $n_i = 1$  de las correspondientes expresiones 5.49 y 5.50.

El estudio de la respuesta ante escalón unitario es más complejo que en casos anteriores, pero se pueden hacer algunas conclusiones cualitativas sobre la forma de la respuesta.

Los polos de  $Y(s)$  serán polos reales o complejos conjugados, con lo que se puede escribir:

$$Y(s) = \frac{K' \prod_{i=1}^m (s + c_i)}{s \prod_{j=1}^t (s + p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\delta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

cuya antitransformada proporciona una respuesta formada por la suma de un escalón de magnitud igual a la ganancia estática  $K$ , exponenciales y senos y cosenos amortiguados por exponenciales:

$$y(t) = K + \sum_{j=1}^t a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r e^{-\delta_k \omega_k t} \{b_k \text{sen} \omega_k \sqrt{1 - \delta_k^2} t + c_k \text{cos} \omega_k \sqrt{1 - \delta_k^2} t\}$$

De esta última ecuación se ve que la respuesta de un sistema de orden  $n > 2$  está compuesta por una cantidad de términos que incluyen las funciones simples halladas en las respuestas de los sistemas de primer y segundo orden. Si todos los polos están en el semiplano izquierdo del plano  $s$  los términos exponenciales tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito y la salida en permanente tiende al valor  $K$ . La ganancia estática  $K$  es igual al valor de la salida en régimen permanente y vale:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

siempre que dicho límite exista.

Para sistemas estables, los polos situados lejos del eje imaginario tienen partes reales negativas de valor elevado y por tanto los términos exponenciales que corresponden a estos polos se extinguen muy rápidamente. Cuanto mayor sea la distancia del polo al eje menor es el tiempo de establecimiento del transitorio debido a este polo.

El tipo de respuesta está determinado por los polos, mientras que la forma de la respuesta viene dada principalmente por los ceros, ya que éstos definen los residuos y por

tanto los pesos de unos componentes sobre otros. Si hay un cero y un polo en la misma posición, el residuo correspondiente es cero y por tanto desaparece la contribución de dicho polo a la salida; en general un polo y un cero muy cercanos prácticamente se cancelan entre sí.

Con las anteriores consideraciones se puede introducir el concepto de *polos dominantes* como aquéllos (normalmente un par complejo conjugado) que marcan la forma de la respuesta por ser los más cercanos al eje imaginario. Se suele considerar que los polos son dominantes cuando los demás están a una distancia del eje mayor o igual que cinco veces la relación entre sus partes reales.

De esta forma, en muchas situaciones es posible aproximar un sistema de alto orden por otro de orden inferior, con lo que el tipo de comportamiento vendrá dado por el de un sistema de primer o segundo orden en función de los polos dominantes. Según la situación de éstos, se obtienen distintos comportamientos reflejados en la figura 5.24. Nótese que si no existe una preponderancia clara de unos polos sobre otros no se puede hacer la aproximación, y habría que estudiar el comportamiento más en detalle.

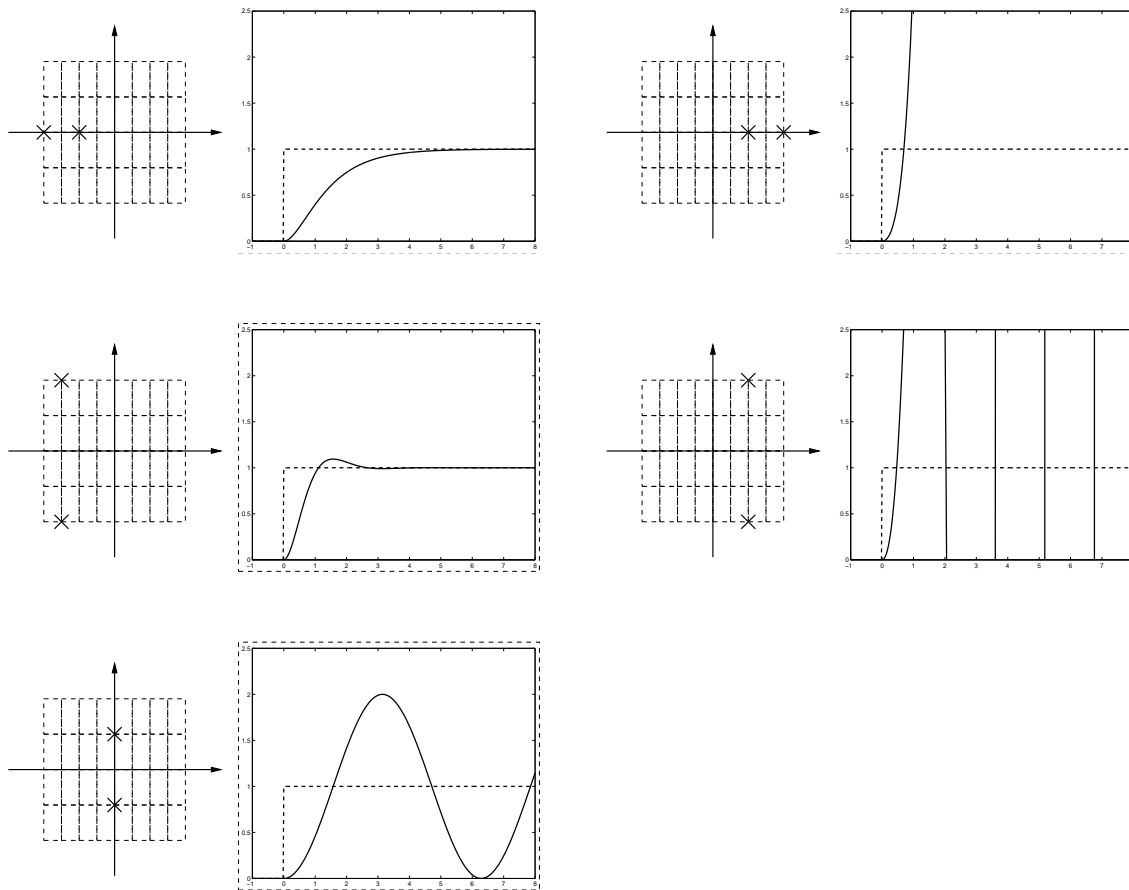


Figura 5.24: Respuesta ante escalón según la situación de los polos dominantes



## Tema 6

# Respuesta frecuencial de sistemas lineales

Este tema se dedica a analizar la respuesta de sistemas lineales ante entradas de tipo periódico, en particular senoidales. El interés de este estudio está justificado por un lado porque este tipo de señales son muy comunes en diversas aplicaciones de ingeniería y por otro porque la interpretación frecuencial de la función de transferencia proporciona un método experimental accesible para la identificación de sistemas.

Algunos ejemplos de aplicaciones en las que aparecen señales senoidales son:

Sistemas eléctricos: las instalaciones y redes eléctricas están sometidas a tensiones de 50 Hz generadas por los alternadores.

Sistemas mecánicos: las vibraciones, su propagación y las técnicas de eliminación o amortiguamiento de las mismas están basadas en el estudio de la respuesta del sistema ante señales periódicas en cierto rango de frecuencias. Fenómenos de este tipo pueden aparecer en un automóvil (tanto las vibraciones producidas por el motor como por ruedas desequilibradas), en la estructura de un edificio (por efecto del viento) o en los instrumentos musicales.

Sistemas térmicos: en los cálculos de climatización la temperatura ambiente es una perturbación clave que tiene una variación en periodos de 24 horas.

Sistemas electrónicos y de comunicaciones: la transmisión por radio o televisión se realiza mediante ondas electromagnéticas portadoras de frecuencia elevada, que se difunden por el espacio y excitan las antenas. La calidad de transmisión o de reproducción (en el caso de equipos de música) viene determinada por la capacidad de reproducir señales en determinados rangos de frecuencia.

## 6.1 Función de transferencia en el dominio de la frecuencia

En esta sección se va a demostrar que las características de respuesta en frecuencia de un sistema se pueden obtener directamente de su función de transferencia simplemente sustituyendo la variable compleja  $s$  por  $j\omega$ .

Para ello se va a estudiar la salida de un sistema dado por  $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$  ante una entrada de tipo  $u(t) = U_o \text{sen} \omega t$ . Se tiene por tanto:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{p(s)}{q(s)}U(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \frac{\omega U_o}{s^2 + \omega^2}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s + p_i}$$

Si el sistema es estable los polos  $-p_i$  tienen parte real negativa y los términos  $e^{-p_i t}$  desaparecen en el estado estacionario; en caso contrario el sistema es inestable y no tiene sentido hablar de régimen estacionario. En el caso general de que existan polos múltiples con grado de multiplicidad  $r$ , éstos dan lugar a exponenciales multiplicadas por  $t^r$ , que también desaparecen transcurrido el régimen estacionario.

Por tanto:

$$y_{est}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

donde los residuos vienen dados por

$$a = [Y(s)(s + j\omega)]_{s=-j\omega} = \left[ G(s) \frac{U_o \omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \right]_{s=-j\omega} = -\frac{U_o G(-j\omega)}{2j}$$

Análogamente

$$\bar{a} = \frac{U_o G(j\omega)}{2j}$$

Al ser  $G(j\omega)$  un número complejo, se puede escribir en forma polar como

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi} \quad \phi = \arctan \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \quad G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

La expresión temporal de la salida del sistema vendrá dada por tanto por:

$$y_{est}(t) = U_o |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = U_o |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi) = Y_o \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Se deduce de ello que (una vez finalizado el transitorio) la salida de un sistema excitado por una onda senoidal es a su vez otra onda senoidal de la misma frecuencia que la de entrada pero de distinta amplitud y distinto desfase, que vienen dados por:

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} \quad \angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$



Por tanto, la respuesta de un sistema lineal ante una entrada senoidal  $U(j\omega)$  se obtiene directamente como  $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ , de forma análoga a  $Y(s) = G(s)U(s)$ . Nótese que la sustitución de  $s$  por  $j\omega$  es válida sólo para el cálculo de la salida ante una entrada senoidal.

Si en la función de transferencia se hace  $s = j\omega$  ésta se convierte en una expresión compleja  $G(j\omega)$  que tiene la notable propiedad de que, para un cierto valor de la pulsación  $\omega$ , su módulo  $|G(j\omega)|$  y su argumento  $\phi = \angle G(j\omega)$  representan precisamente la atenuación y el desfase que sufre una señal senoidal de frecuencia  $f = \omega/2\pi$ . Este hecho se ilustra en la figura 6.1. Obsérvese que el desfase medido en segundos es  $\varphi = \phi/\omega$ .

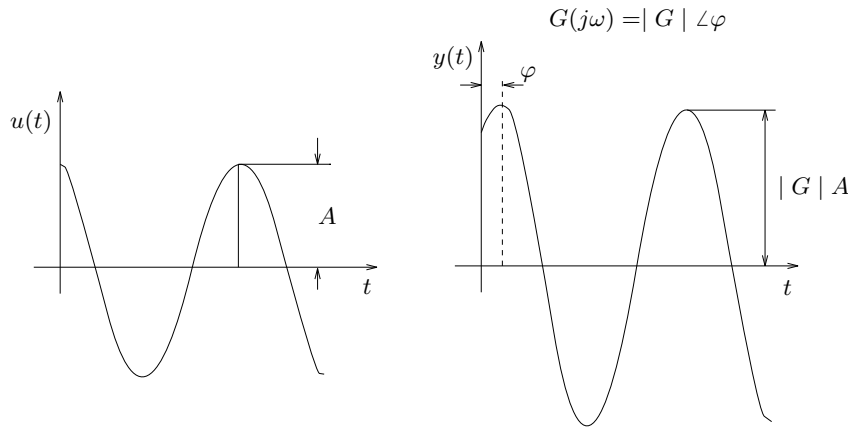


Figura 6.1: Respuesta en frecuencia

*Ejemplo:*

Considérese el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu$$

sometido a una señal senoidal, de pulsación  $\omega$  y de amplitud unitaria. Es sabido que esta señal se puede representar en forma compleja  $u(t) = e^{j\omega t}$ . La respuesta del sistema, en régimen estacionario, a la anterior señal de entrada es la solución particular de la anterior ecuación diferencial la cual se comprueba fácilmente que es,

$$y(t) = \frac{b}{(j\omega) + a} e^{j\omega t}$$

Nótese que esta notable propiedad de la función de transferencia lleva implícito un método experimental de medida de la función de transferencia de un sistema dinámico. Este método consiste, sencillamente, en la aplicación de señales senoidales de distintas frecuencias, y en la medida, para cada una de ellas, de la atenuación y del desfase que

sufren al atravesar el sistema. La medida de la atenuación y del desfase suministran el módulo y el argumento de  $G(j\omega)$  para el valor de  $\omega$  correspondiente.

Por tanto la función de transferencia  $G(s)$  suministra información tanto sobre el comportamiento en el dominio del tiempo (empleando las tablas de la transformada de Laplace) como de la frecuencia (gracias a la propiedad expuesta).

## 6.2 Transformación de Fourier

El análisis anterior es válido solamente para entradas senoidales, caso de gran interés práctico como ya se ha indicado. Sin embargo, los resultados obtenidos se pueden aplicar a otro tipo de entradas si se tiene en cuenta la transformación de Fourier.

Dada una función del tiempo periódica  $f_T(t)$  de periodo  $T$ , se puede desarrollar en serie de Fourier, de la forma:

$$f_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \text{sen } \omega_n t)$$

donde  $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$  y los coeficientes vienen dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cos \omega_n t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \text{sen } \omega_n t dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

supuesto que dichas integrales sean finitas.

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son funciones de  $\omega_n$ , pero no del tiempo, por lo que  $f_T(t)$  queda definida mediante los módulos de los componentes armónicos que lo integran; ahora bien, tomando como parámetros, por agrupación de las componentes en seno y coseno de igual frecuencia, los valores:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctan \left( \frac{a_n}{b_n} \right)$$

cada término puede expresarse como

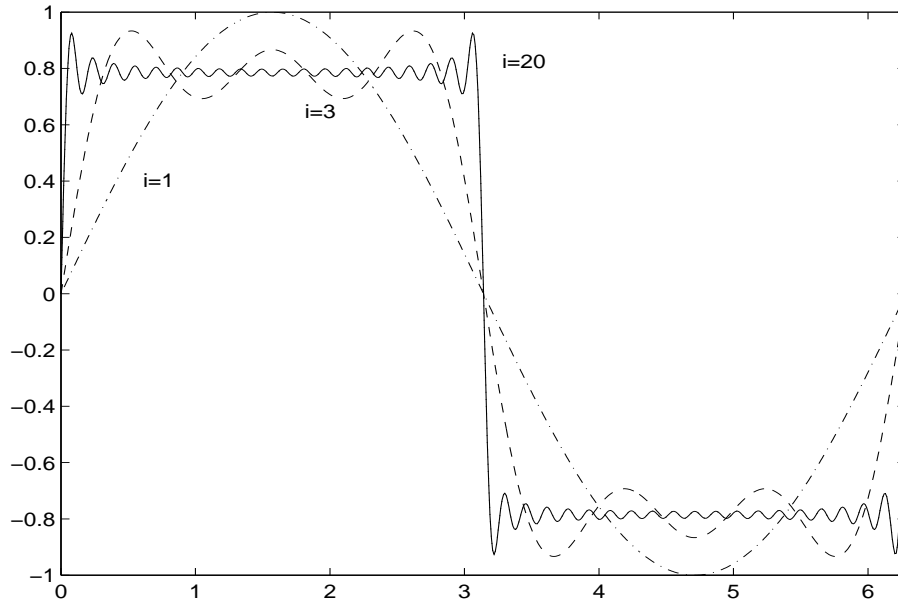


Figura 6.2: Desarrollo en serie de Fourier de una onda cuadrada

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Por lo tanto, para definir  $f_T(t)$  basta con especificar la *amplitud* y el *desfase* que corresponde a cada frecuencia fundamental:

$$f_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

Un ejemplo de desarrollo de Fourier es el de una onda cuadrada, que viene dado por:

$$c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t)$$

y cuya representación gráfica puede verse en la figura 6.2. Nótese cómo el desarrollo en serie tiende a la onda original conforme el número de términos de la serie crece.

Dado que los sistemas lineales verifican el principio de superposición (la suma de las entradas produce la suma de las salidas ante cada una de ellas), la salida de un sistema ante la señal periódica  $f_T(t)$  de desarrollo de Fourier conocido será

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(t)$$

donde  $y_n(t)$  es la salida del sistema ante  $\sin(\omega_n t + \varphi_n)$ .

Por tanto, para calcular la salida de un sistema lineal ante cualquier señal periódica de forma arbitraria basta con conocer la respuesta ante un conjunto de ondas senoidales de frecuencias múltiplos de la de la señal original.

En el caso de que la señal de entrada no sea periódica, se puede considerar que  $T \rightarrow \infty$ , y el sumatorio del desarrollo de Fourier tiende a la integral, por lo que puede escribirse, finalmente, para una función no periódica (*Transformación de Fourier o Integral de Fourier*):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

El razonamiento en este caso para calcular la salida de un sistema es el mismo ya que la integral se puede considerar como una suma y aplicar el principio de superposición.

### 6.3 Representación gráfica de la función de transferencia

Dada la importancia de la respuesta ante entradas senoidales, es usual emplear representaciones gráficas de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Se emplean diagramas que representan el número complejo  $G(j\omega)$  en función de la frecuencia. A continuación se estudian dos de los diagramas más comunes: diagrama de Nyquist y diagrama de Bode.

#### 6.3.1 Diagrama de Nyquist

La función de transferencia  $G(j\omega)$  se representa mediante una curva en un diagrama polar. Esta curva se construye representando para cada valor de  $\omega$  el módulo y el argumento de la expresión compleja que resulta de hacer  $s = j\omega$  en  $G(s)$ . Como se sabe, el módulo y el argumento de  $G(j\omega)$  representan la amplificación (o atenuación) y el desfase de una señal sinusoidal que atraviese el sistema. En la figura 6.3 se representa un diagrama de esta naturaleza. Conviene observar que  $\omega$  varía de 0 a  $\infty$ .

El diagrama de Nyquist es por tanto una curva parametrizada en  $\omega$  que, para cada punto (es decir, para cada frecuencia), proporciona el módulo y el argumento de la función de transferencia.

**Ejemplo 1:** El diagrama de Nyquist de un sistema de primer orden genérico  $G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$  se puede dibujar calculando primero el número complejo  $G(j\omega)$  y representándolo para

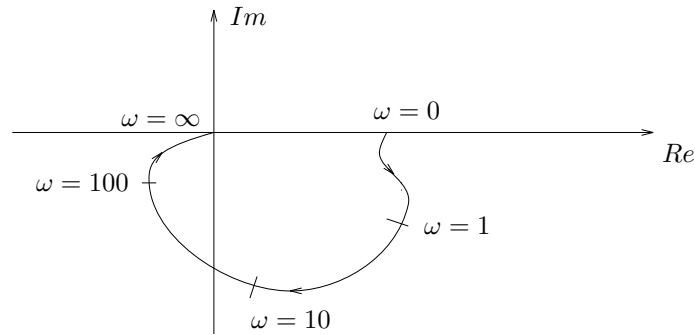


Figura 6.3: Diagrama de Nyquist

valores de  $\omega$  entre 0 e  $\infty$ :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{1 + \tau^2\omega^2}$$

Se observa que la parte real es siempre positiva y la imaginaria siempre negativa. Además, para  $\omega = 0$  el valor de  $G(j\omega)$  vale  $K$  (la ganancia estática) y para  $\omega \rightarrow \infty$  vale 0. Se puede demostrar que la forma de la curva es una semicircunferencia, como se muestra en la figura 6.4.

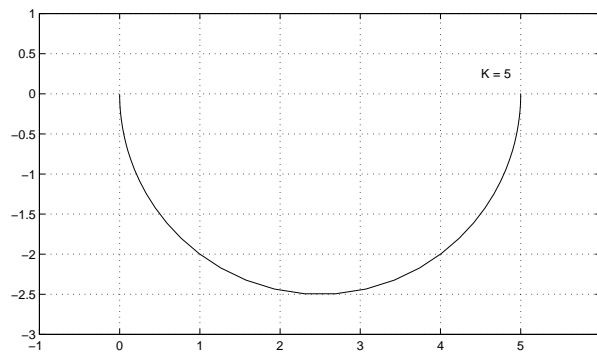


Figura 6.4: Diagrama de Nyquist de un sistema de primer orden con  $K = 5$  y  $\tau = 1$

Ejemplo 2: Si se añade un polo en el origen al sistema del ejemplo anterior, su diagrama de Nyquist se calcula haciendo:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + \tau j\omega)} = \frac{K}{j\omega - \tau\omega^2} = \frac{K(-j\omega - \omega^2\tau)}{\omega^2(1 + \omega^2\tau^2)} = \frac{-K\omega}{\omega^2(1 + \omega^2\tau^2)}j - \frac{K\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

El número complejo  $G(j\omega)$  evoluciona desde el infinito hasta el cero según la frecuencia varía de cero a infinito. Concretamente:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -K\tau - \infty j$$

por tanto la curva tiene una asíntota en  $-K\tau$  y sube hasta el origen, según se muestra en la figura 6.5.

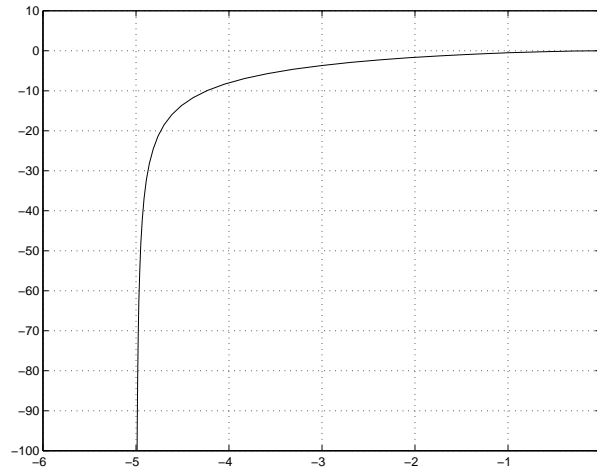


Figura 6.5: Diagrama de Nyquist de un sistema de primer orden con integrador y valores  $K = 5$  y  $\tau = 1$

### 6.3.2 Diagrama de Bode

En este caso, la función de transferencia  $G(j\omega)$  se representa mediante el conjunto de las dos curvas siguientes (fig. 6.6):

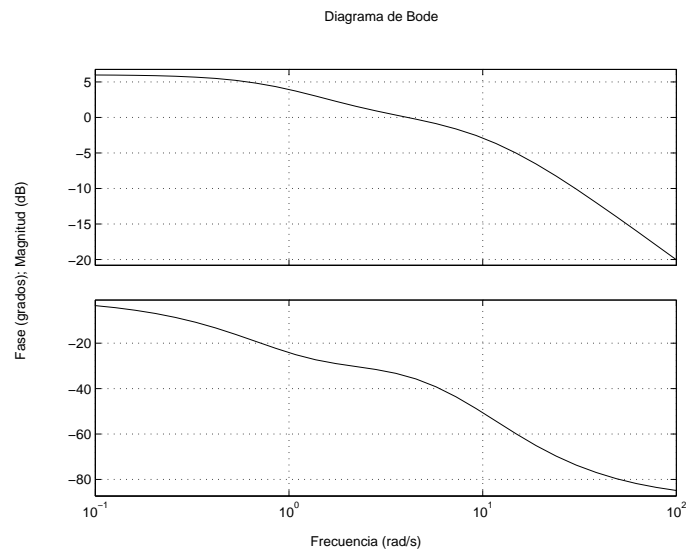


Figura 6.6: Diagrama de Bode de  $G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+20)}$

- Curva de amplitud:  $\log |G(j\omega)|$  en función de  $\omega$  (en escala logarítmica).
- Curva de fase:  $\arg G(j\omega)$  en función de  $\omega$  (en escala logarítmica).

Obsérvese que tanto la amplitud como la fase se representan en función de la frecuencia expresada en escala logarítmica. Esto es debido a que, si los sistemas trabajan en un rango amplio de frecuencias, las escalas logarítmicas permiten una mejor representación. En el caso de escalas lineales, si se desea estudiar con detalle las frecuencias bajas, entonces las altas se salen del diagrama, y si se desea incluir las altas, las bajas salen muy comprimidas. La escala logarítmica comprime más cuanto mayor es la frecuencia y convierte productos en sumas. La utilización de un rango amplio de frecuencias es bastante usual; por ejemplo de 0 a 7000 rpm en el motor de un coche o de 15 Hz a 22 kHz en un amplificador de audio<sup>1</sup>.

El empleo de logaritmos para representar los módulos permite facilitar la combinación de funciones de transferencia en serie, ya que en tal caso el producto de los módulos se convierte en la suma de sus logaritmos.

Conviene recordar que la medida logarítmica de la relación entre dos señales  $A$  se expresa en

- decibelios (dB),  $20 \log_{10} A$
- décadas  $\log_{10} A$
- octavas  $\log_2 A$

Este conjunto de curvas, como veremos a continuación, es el más utilizado en la práctica para representar gráficamente la función de transferencia.

La representación de una función de transferencia en el diagrama de Bode se hace mediante unas aproximaciones asintóticas que simplifican enormemente su trazado. Para estudiar estas aproximaciones consideremos la función de transferencia

$$G(j\omega) = \frac{k(j\omega + c_1)(j\omega + c_2) \dots}{(j\omega)^N (j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \dots}$$

La denominada *forma de Bode* de esta función de transferencia es la siguiente

$$G(j\omega) = \frac{k \frac{\prod c_i}{\prod p_j} \left(1 + \frac{j\omega}{c_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{c_2}\right) \dots}{(j\omega)^N \left(1 + \frac{j\omega}{p_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{p_2}\right) \dots} \quad (6.1)$$

en donde la denominada *ganancia de Bode* viene dada por

$$k_B = k \frac{\prod c_i}{\prod p_j}$$

---

<sup>1</sup>Es interesante destacar que la escala logarítmica es propia de la percepción humana. Así, la sensación auditiva de un tono más agudo se corresponde con una progresión geométrica en la frecuencia de las notas y la sensibilidad de las películas fotográficas sigue escalas logarítmicas para corresponderse con la sensibilidad del ojo humano.

La expresión (6.1) es una expresión compleja en función de  $\omega$ . Es decir, para cada valor de  $\omega$  tomará un valor complejo y, por tanto, tendrá un módulo y un argumento. El módulo será tal que si tomamos su logaritmo se podrá escribir

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |k_B| + 20 \log \left| \left( 1 + \frac{j\omega}{c_1} \right) \right| + \dots \\ &+ 20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| + 20 \log \left| \frac{1}{\left( 1 + \frac{j\omega}{p_1} \right)} \right| + \dots \end{aligned} \quad (6.2)$$

mientras que el argumento será

$$\begin{aligned} \arg G(j\omega) &= \arg k_B + \arg \left( 1 + \frac{j\omega}{c_1} \right) + \dots \\ &+ \arg \frac{1}{(j\omega)^N} + \arg \frac{1}{\left( 1 + \frac{j\omega}{p_1} \right)} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Obsérvese que mediante la adopción de una escala logarítmica para el módulo se ha descompuesto aditivamente en las aportaciones de cada uno de los elementos que aparecen en (6.1).

Esta descomposición aditiva, junto con la que se da de una manera natural para el argumento, permite que se obtenga la representación gráfica en el diagrama de Bode a partir de la representación gráfica de cada uno de los elementos que aparecen en (6.1). Vamos a ver a continuación cómo se representa gráficamente cada uno de estos elementos.

#### Diagrama de Bode de una constante

La representación en el diagrama de Bode de una constante es inmediata y se tiene en la figura 6.7.

#### Diagrama de Bode de una integración pura

El diagrama de Bode de una integración pura

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| &= -20 \log |j\omega| = -20 \log \omega \\ \arg \frac{1}{j\omega} &= \arg \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90 \end{aligned}$$

que, al ser logarítmico el eje de frecuencias, viene dado por tanto por una recta de pendiente -20 decibelios por década y con un desfase constante igual a -90 grados, según se muestra en la figura 6.8.

En el caso de que fuera un polo con orden de multiplicidad  $l$ , la recta tendría una pendiente de  $-20l$  decibelios por década y la fase sería de  $-90l$  grados.



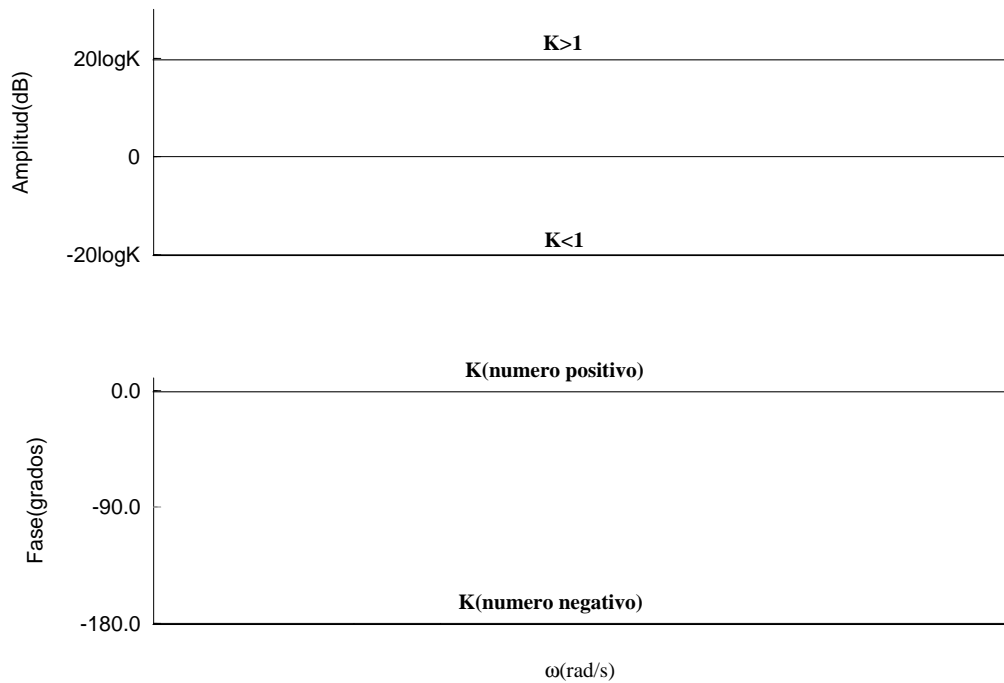


Figura 6.7: Diagrama de Bode de una constante

#### Diagrama de Bode del término asociado a un polo

- Si el polo es un número real negativo  $s = -p$ , se puede dibujar una aproximación asintótica. Considere el término siguiente con  $p > 0$ :

$$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p}}$$

Para estudiar su representación en el diagrama de Bode se considerarán, en primer lugar, dos situaciones extremas:

- Frecuencias mucho menores que  $p$ :  $\omega \ll p$ . En tal caso se tendrá que

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p}} \right| \approx 20 \log 1 = 0dB$$

- Frecuencias mucho mayores que  $p$ :  $\omega \gg p$ . En cuyo caso

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p}} \right| \approx 20 \log \left| \frac{1}{\frac{j\omega}{p}} \right| = -20 \log \frac{\omega}{p}$$

Por tanto, la representación gráfica del módulo presenta dos asíntotas. Para valores bajos de  $\omega$  la asíntota es sencillamente la recta horizontal trazada en 0 dB; mientras que para valores altos de la frecuencia la asíntota es una recta de pendiente -20 dB/década. Estas dos asíntotas se cortan en el punto  $\omega = p$ .

Para completar la curva se pueden considerar dos puntos interesantes:

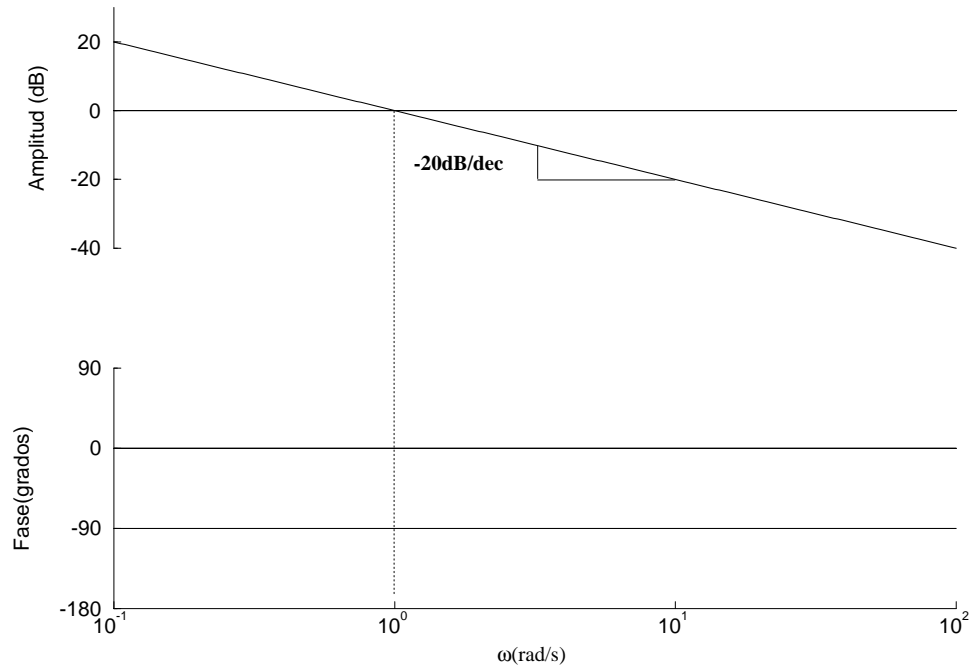


Figura 6.8: Diagrama de Bode de una integración pura

- para  $\omega/p = 0.5$  se tiene  $|G(j\omega)| = -1$  dB.
- para  $\omega/p = 1$  se tiene  $|G(j\omega)| = -3$  dB.

Esto indica que la representación aproximada por las asíntotas tiene un error máximo de 3 dB que además ocurre en  $\omega = p$ .

Por lo que respecta a la fase no es posible hacer unas aproximaciones asintóticas como las que se acaban de ver para la amplitud. No obstante, se dispone de una plantilla que permite trazar la curva de fase correspondiente. La fase varía desde  $-90^\circ$  hasta  $0^\circ$ , pasando por  $-45^\circ$  en  $\omega = p$ . En la figura 6.9 se dibujan el diagrama exacto y el aproximado para un polo en  $\omega = 1$ .

Para la representación anterior se ha considerado que  $p > 0$ , es decir, el polo es estable. En el caso de que el polo sea inestable, da lugar al término  $\frac{-1}{\frac{j\omega}{-p}+1}$  y, lógicamente, el valor  $\omega = -p$  no se puede representar en eje logarítmico. Para representar este número complejo basta saber que su módulo es el mismo que el de  $\frac{-1}{\frac{j\omega}{p}+1}$  y lo único que cambia es la fase. Al ser este número el conjugado cambiado de signo de un polo con  $p > 0$  la fase varía ahora entre  $-180^\circ$  y  $-90^\circ$  con la misma forma. Resumiendo: si  $p < 0$  la curva de módulos es una recta horizontal hasta  $\omega = p$  y luego desciende 20 dB por década mientras que la fase evoluciona desde  $-180^\circ$  hasta  $-90^\circ$ , tomando el valor  $-135^\circ$  en  $\omega = p$ .

- Si los polos son complejos no es sencillo realizar una representación asintótica. Se pueden expresar en la forma genérica de un sistema de segundo orden en función de  $\delta$  y  $\omega_n$ , sustituyendo  $s$  por  $j\omega$ :

$$\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2 + 2\delta\left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right) + 1}$$

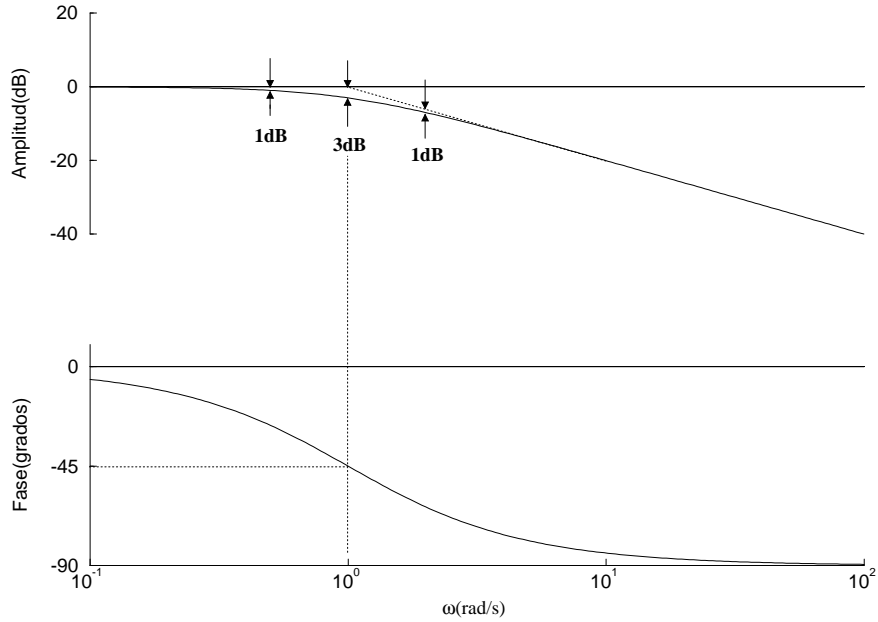


Figura 6.9: Diagrama de Bode de un polo real en  $s = -1$ .

cuyo módulo en dB es:

$$-20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Se pueden calcular módulo y fase en función de la frecuencia y dibujarlos según se muestra en la figura 6.10. Se observa que el resultado depende del factor de amortiguamiento  $\delta$ .

Se observa que la curva de módulos tiene un máximo, llamado *pico de resonancia*  $M_r$ , que se produce a la llamada *frecuencia de resonancia*  $\omega_r$ . Estos dos valores dependen claramente del factor de amortiguamiento  $\delta$ , de la forma:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}$$

A medida que  $\delta$  tiende a cero, la frecuencia de resonancia tiende a  $\omega_n$ . Para  $0 < \delta \leq 0.707$ ,  $\omega_r$  es menor que la frecuencia propia amortiguada  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$ . Para  $\delta > 0.707$  no hay pico de resonancia. De las expresiones anteriores se observa también que al tender  $\delta$  a cero el pico de resonancia tiende a infinito, lo que significa que si se excita el sistema a su frecuencia propia, la magnitud de  $G(j\omega)$  se hace infinita.

Se puede ver que para frecuencias muy alejadas de  $\omega_n$  el comportamiento es el mismo que el de un polo real doble situado en  $\omega = \omega_n$ : caída del módulo de 40 dB por década y fase de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$ .

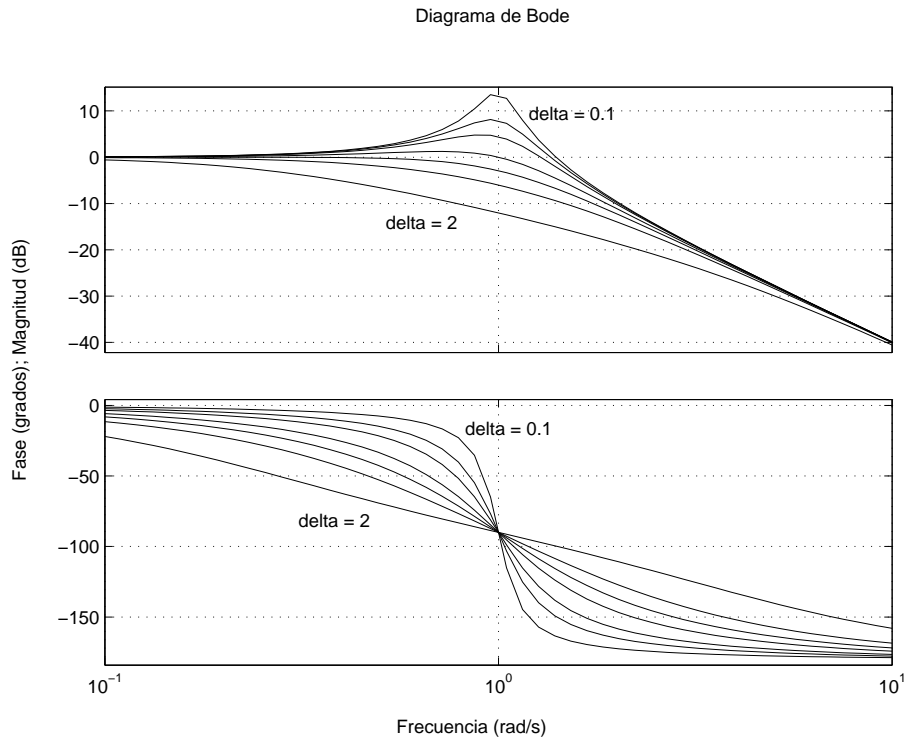


Figura 6.10: Diagrama de Bode de un par de polos complejos, con  $\omega_n = 1$  y distintos valores de  $\delta$

#### Diagrama de Bode de una diferenciación pura

El diagrama de Bode de un diferenciador puro

$$G(j\omega) = j\omega$$

se obtiene de forma similar al de un integrador puro. En la figura 6.11 se representa el diagrama correspondiente. En este caso la curva de amplitud tiene una pendiente positiva de 20 dB por década y la de fase un ángulo de  $90^\circ$ .

#### Diagrama de Bode del término asociado a un cero

El término asociado a un cero

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{p} + 1$$

por consideraciones análogas a las que se han hecho para un sistema de primer orden (asociado a un polo), tiene la forma que se muestra en la figura 6.12.

Análogamente al caso de un polo, un cero en el que  $p < 0$  da lugar al término  $\frac{j\omega}{-p} + 1$ , cuyo módulo es el mismo que el de  $\frac{j\omega}{p} + 1$  y lo único que cambia es la fase. Al ser este número el conjugado cambiado de signo de un cero con  $p > 0$  la fase varía ahora entre  $180^\circ$  y  $90^\circ$  con la misma forma. Resumiendo: si  $p < 0$  la curva de módulos es una recta

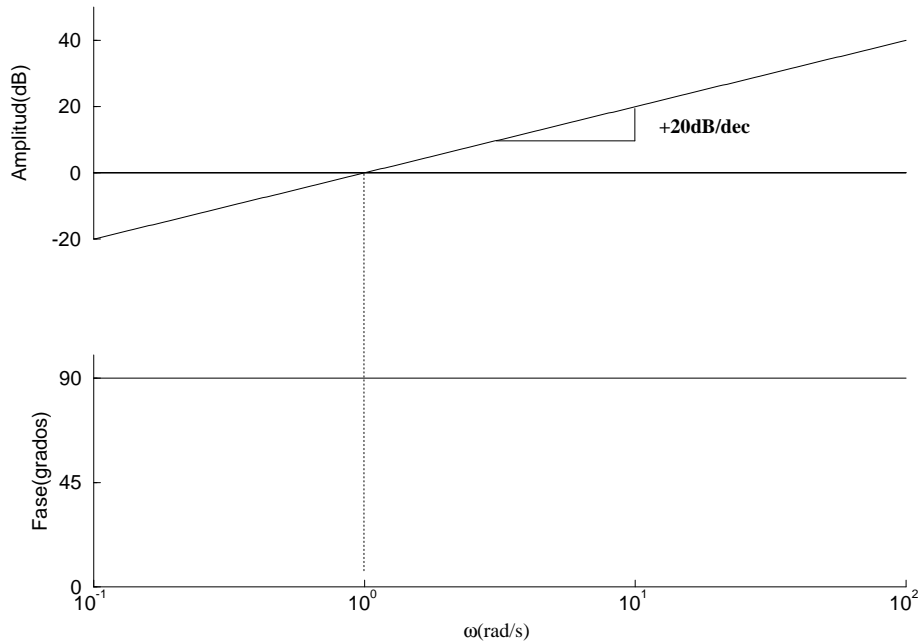


Figura 6.11: Diagrama de Bode de una diferenciación pura

horizontal hasta  $\omega = p$  y luego asciende 20 dB por década mientras que la fase evoluciona desde  $180^\circ$  hasta  $90^\circ$ , tomando el valor  $135^\circ$  en  $\omega = p$ .

Combinando todo lo que se acaba de ver, y teniendo en cuenta las expresiones (6.2) y (6.3), se puede obtener la representación gráfica de la función de transferencia.

### 6.3.3 Ejemplos de representaciones gráficas

#### Ejemplo 1

Como ejemplo de un diagrama de Bode completo, se representa en la figura 6.13 el correspondiente a  $G(s) = \frac{100(s+0.1)}{(s+3)(s+50)}$ .

Obsérvese que la curva de módulos se puede aproximar por tres rectas, correspondientes a los cambios de pendientes causados por el cero en  $\omega = 0.1$ , que sube 20 dB/década, luego el polo en  $\omega = 3$  que hace que la línea permanezca horizontal y a continuación el polo en  $\omega = 20$  que hace bajar otros 20. Por su parte la curva de fase se calcula sumando las correspondientes al cero (de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ) y las dos de los polos (cada una de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$ ).

#### Ejemplo 2

En este ejemplo se van a dibujar tres gráficas: una en la que se muestran la representación asintótica del diagrama de Bode de los factores de la función de transferencia, otra en la que se muestra en diagrama de Bode completo, tanto exacto como asintótico y

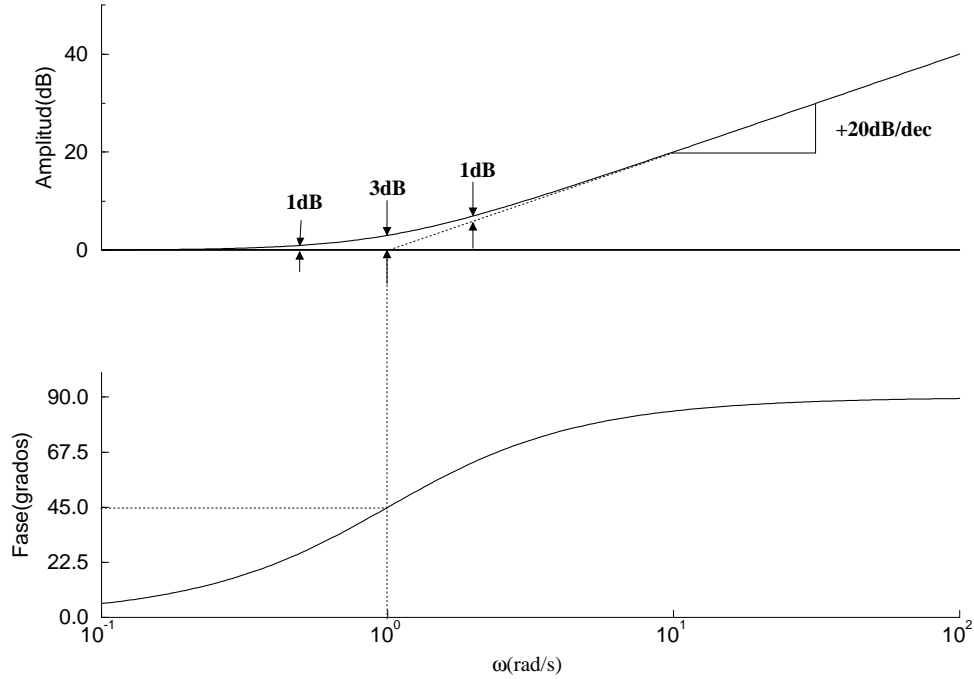


Figura 6.12: Diagrama de Bode del término asociado a un cero

una tercera gráfica con el diagrama de Nyquist.

$G(s) = \frac{10}{(10 \cdot s + 1) \cdot (s + 1)}$ . Este sistema posee dos polos, situados en  $s = -1$  y  $s = -0.1$ . Para dibujar el diagrama de Bode, basta con dibujar la ganancia estática (que vale  $20 \log 10 = 20$  dB) y los términos correspondientes a los dos polos. Obsérvese que el error cometido al usar la representación asintótica es despreciable (figura 6.14). El diagrama de Nyquist se puede obtener directamente del de Bode extrayendo de éste los puntos más representativos.

### Ejemplo 3

$$G(s) = \frac{10 \cdot (s + 3)}{s \cdot (s + 2) \cdot (s^2 + s + 2)}$$

Este sistema posee un cero real (en  $s = -3$ ) y cuatro polos (dos reales, en  $s = 0$  y  $s = -2$ , y un par de complejos, en  $\omega_n = \sqrt{2}$ ). Aunque la representación asintótica no es muy adecuada para los polos complejos, en este caso el error cometido no es considerable.

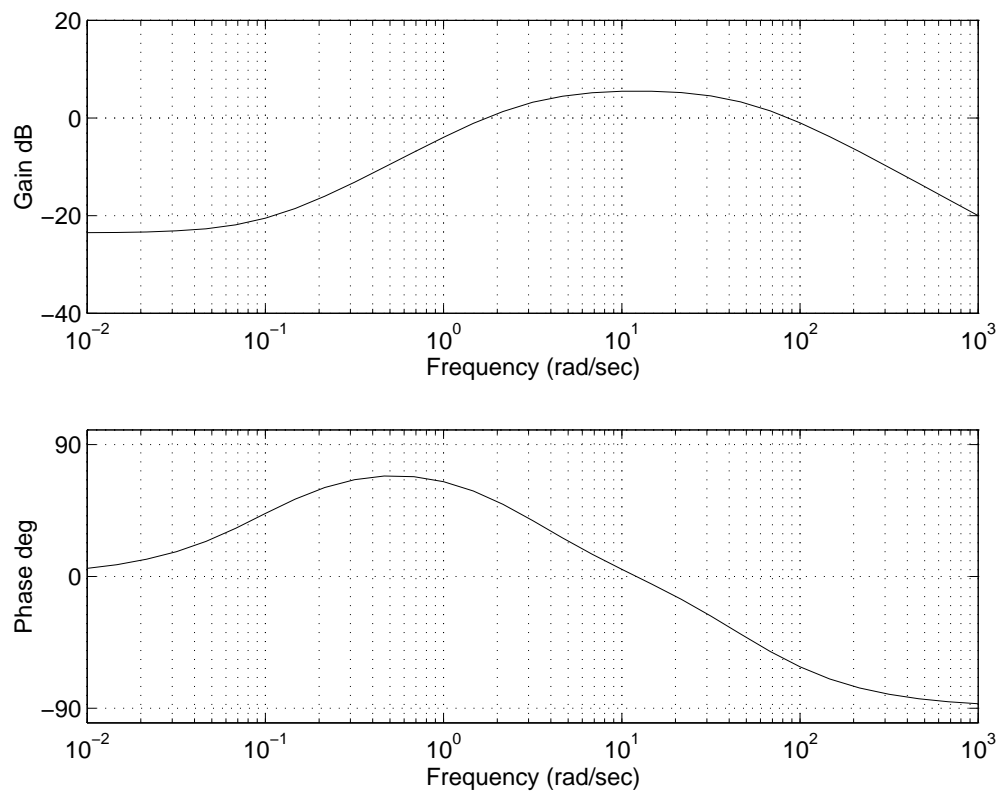


Figura 6.13: Ejemplo de diagrama de Bode

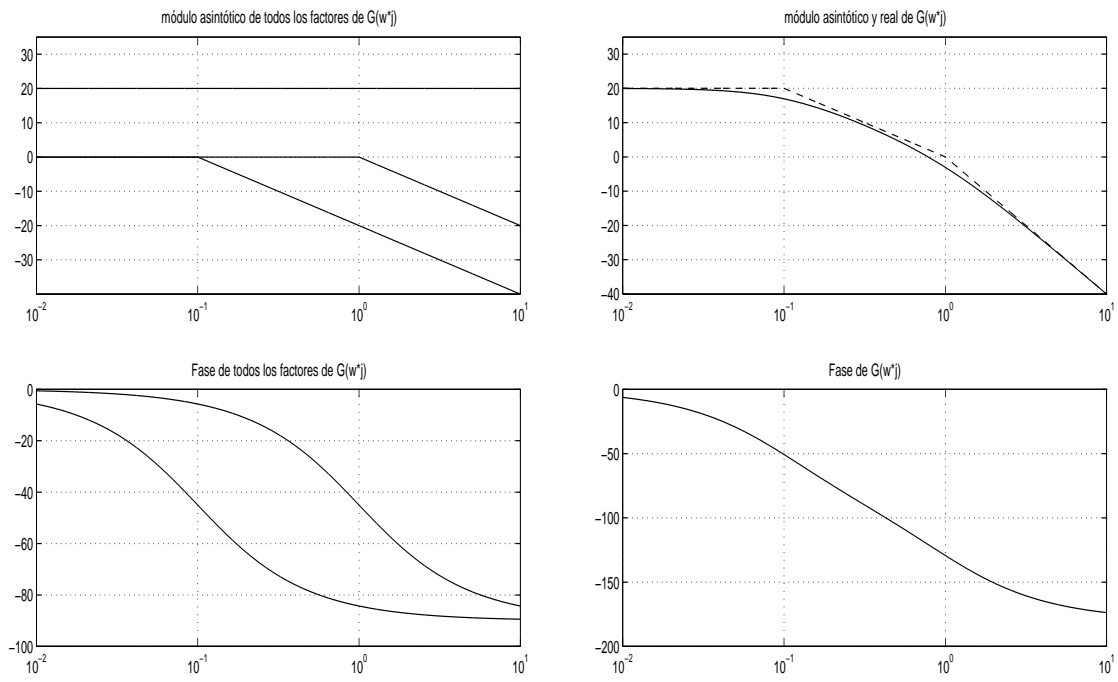
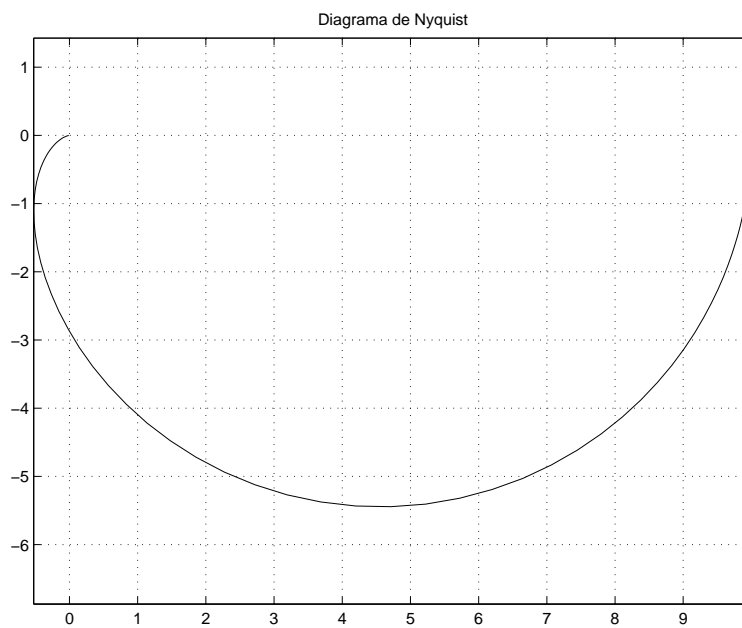


Figura 6.14: (a) Bode de los factores. (b) Bode total





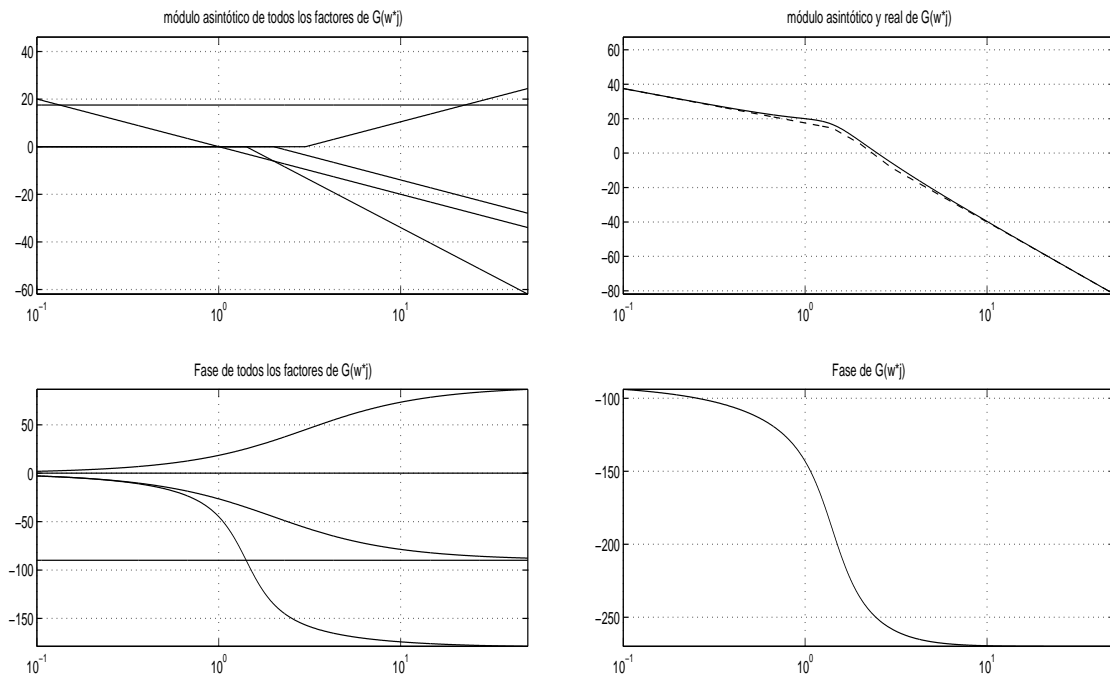
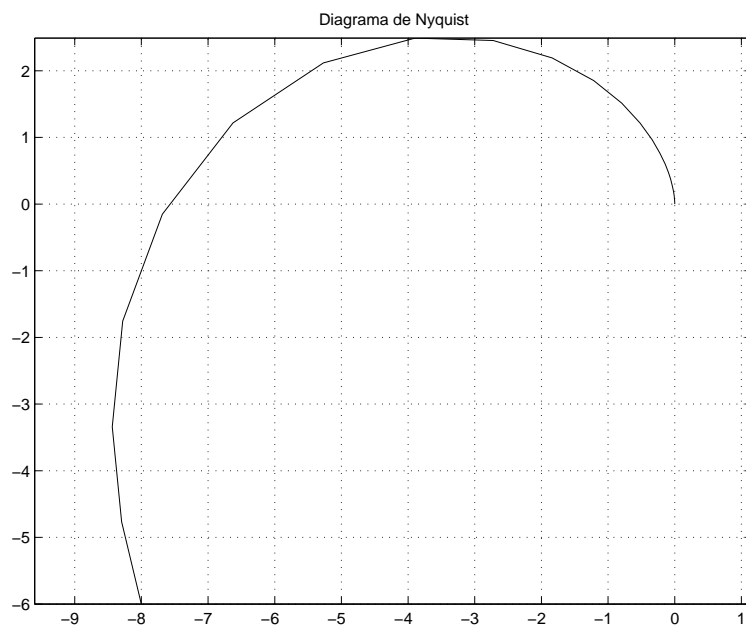


Figura 6.15: (a) Bode de los factores. (b) Bode total





## Tema 7

# Estabilidad

### 7.1 Introducción

La estabilidad es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos a la que cabe considerar como la más importante de todas. El estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos ocupa un lugar primordial en el análisis y en la síntesis de los sistemas. El presente capítulo se va a dedicar al análisis de la estabilidad de los sistemas dinámicos, es decir, a establecer criterios que permitan discernir si un determinado sistema dinámico, descrito por una cierta forma de representación matemática, es estable o no.

El estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos, se hará atendiendo a la forma de representación adoptada; en este sentido se estudiará en primer lugar la estabilidad de los sistemas dinámicos dados por su descripción externa, y luego se hará el estudio para la descripción interna de los mismos.

### 7.2 Criterios de estabilidad relativos a la descripción externa

Una forma intuitiva de afrontar el problema de la estabilidad de un sistema es considerar que éste será estable si las distintas magnitudes que lo definen no alcanzan valores infinitos. Basados en esta idea intuitiva se puede dar la siguiente definición precisa de estabilidad.

#### Definición

Un sistema, inicialmente en reposo, se dice *estable* si ante cualquier señal de entrada acotada, es decir, que no alcanza valores infinitos, responde con una señal de salida acotada.

Formalmente se dice de una señal  $x(t)$ , definida en un cierto intervalo  $(t_0, t_1)$ , que

está acotada en dicho intervalo, si para todo  $t \in (t_0, t_1)$  existe un valor  $k < \infty$  tal que  $|x(t)| < k$ .

De una forma más compacta puede decirse que un sistema es estable si,

señal de entrada acotada  $\Rightarrow$  señal de salida acotada.

Desde un punto de vista intuitivo esta definición de estabilidad es satisfactoria; tiene, además, la ventaja adicional de que conduce a resultados matemáticos interesantes, según se verá en lo que sigue. Para el caso de sistemas multivariables esta definición es igualmente válida, sustituyendo las señales de entrada y de salida por los vectores de señales de entrada y de salida.

En los libros anglosajones a la estabilidad anteriormente definida se denomina "estabilidad BIBO" (*bounded-input bounded-output*).

Si se adopta la forma de descripción externa dada por la integral de convolución, es decir, si la relación entre la señal de entrada  $u(t)$  y la señal de salida  $y(t)$  está dada por una expresión de la forma,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau \quad (7.1)$$

entonces el criterio de estabilidad de un sistema viene dado por el siguiente teorema.

### Teorema

Un sistema, inicialmente en reposo, representado por una expresión de la forma (7.1) es estable si y sólo si existe un número finito  $k$  tal que para todo  $t$ ,

$$\int_{-\infty}^t |h(t, \tau)| d\tau \leq k < \infty \quad (7.2)$$

### Demostración

#### 1. Suficiencia

Se trata de demostrar que si se cumple la condición (7.2), entonces ante una señal de entrada acotada,  $|u(t)| < k_1$  para todo  $t$ , la señal de salida  $y(t)$  es también acotada. En efecto, se tiene:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^t |h(t, \tau)| |u(\tau)| d\tau \leq k_1 \int_{-\infty}^t |h(t, \tau)| d\tau \leq k k_1$$

2. Necesidad

Se trata de demostrar que si las señales de entrada  $u(t)$  y de salida  $y(t)$  son acotadas, entonces siempre se cumple la expresión (7.2). Ello es equivalente a demostrar que si no se cumple dicha expresión entonces pueden existir señales de salida  $y(t)$  que no estén acotadas aunque lo esté la señal de entrada  $u(t)$ .

Supóngase que la expresión (7.2) no se cumple, es decir

$$\int_{-\infty}^t |h(t_1, \tau)| d\tau = \infty$$

Si a este sistema se le aplica la siguiente señal de entrada acotada se tiene una salida no acotada. En efecto, sea

$$u(t) = \text{sgn}[h(t_1, \tau)]$$

en donde,

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es claro que  $u(t)$  es acotada. Sin embargo la señal de salida del sistema no lo es,

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t_1} |h(t_1, \tau)| d\tau = \infty$$

Queda demostrado la necesidad de que se cumpla la expresión (7.2) para que el sistema sea estable.

Para sistemas multivariables el anterior resultado se generaliza diciendo que un sistema será estable si la propiedad de la expresión (7.2) se cumple para cada uno de los elementos de la matriz  $H(t, \tau)$ .

Para sistemas invariantes en el tiempo la expresión (7.1) se convierte en

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (7.3)$$

Y la expresión (7.2) se convierte en,

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)| d\tau < k < \infty \quad (7.4)$$

Para sistemas invariantes en el tiempo, la forma de descripción externa usualmente empleada es la función de transferencia. Interesa enunciar un criterio de estabilidad en términos de dicha función de transferencia. Es lo que se hace en el siguiente teorema.

### Teorema

Un sistema lineal y estacionario, representado por una función racional propia  $G(s)$  es estable si y sólo si, todos los polos de  $G(s)$  están situados en el semiplano izquierdo abierto del plano  $s$ .

Una forma equivalente de expresar lo anterior es decir que los polos de  $G(s)$  tienen la parte real negativa.

En el semiplano izquierdo abierto, a que se alude en el anterior teorema, se excluye el eje imaginario. Si se incluye este eje imaginario se habla del semiplano izquierdo cerrado.

### Demostración

Si  $G(s)$  es una función racional propia entonces puede desarrollarse en fracciones parciales, de manera que se descompone en la suma de un número finito de términos de la forma

$$\frac{K}{(s - p_i)^l}$$

donde  $p_i$  denota un polo de  $G(s)$ , y además posiblemente una constante.

Al hallar la antitransformada de Laplace de  $G(s)$  se tiene que  $g(t)$  es la suma de un número finito de términos de la forma  $t^{\ell-1} e^{p_i t}$  y, además, una posible función  $\delta$  de Dirac. Es fácil demostrar que el producto de los términos  $t^{\ell-1} e^{p_i t}$  por cualquier entrada acotada es absolutamente integrable si y sólo si  $p_i$  tiene la parte real negativa. Por lo tanto la salida  $y(t)$  calculada como la integral de convolución de  $g(t)$  y cualquier  $u(t)$  acotada será estable y en consecuencia el sistema  $G(s)$  será estable si y sólo si todos los polos de  $G(s)$  tienen la parte real negativa.

- *Ejemplo 1*

Sea el sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/s$ . Este sistema no es estable, de acuerdo con las anteriores definiciones. En efecto, considérese una señal de entrada en escalón  $U(s) = 1/s$ . Se tendrá que la señal de salida será  $Y(s) = 1/s^2$ . Por lo tanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(1/s^2) = t$$

la señal de salida  $y(t)$  no es acotada y por lo tanto el sistema no es estable.

- *Ejemplo 2*

Según la definición anterior un oscilador simple, dado por  $G(s) = \frac{1}{1+s^2}$  y que tiene los polos en  $s = \pm j$  es un sistema inestable. A primera vista podría pensarse que

el sistema es estable, ya que ante un escalón la salida sería una onda senoidal y por tanto acotada.

Sin embargo, se puede comprobar que la salida se hace inestable ante cierta señal acotada, ya que si se excita al sistema con  $u(t) = \text{sent}$ , cuya transformada es  $U(s) = \frac{1}{1+s^2}$ , se obtiene que la salida del sistema viene dada por  $Y(s) = \frac{1}{(1+s^2)^2}$ . La antitransformada de la salida se puede calcular, obteniendo que  $y(t) = \frac{1}{2}(\text{sent} - t\text{cost})$ , que se hace inestable debido al término en  $t$  que multiplica al coseno. Nótese que si se excita al sistema con  $u(t) = \text{sen}2t$  la salida es estable, pero por la propia definición de estabilidad, el sistema es estable cuando la salida permanece acotada ante *cualquier* entrada acotada.

Para sistemas multivariantes se generalizan inmediatamente los anteriores resultados diciendo que un sistema multivariable definido por una matriz de transferencia  $G(s)$  será estable si cada uno de sus elementos satisface el anterior teorema.

Sea la función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (7.5)$$

Para determinar si  $G(s)$  corresponde a un sistema estable o no, es necesario determinar si las raíces de  $a(s)$  están situadas en el semiplano abierto negativo.

Para comprobar si las raíces de un determinado polinomio se encuentran en el semiplano abierto negativo, se aplica el criterio de Routh-Hurwitz que se estudia en el apartado siguiente.

### 7.2.1 Criterio de Routh-Hurwitz

Una función de transferencia representa a un sistema estable si sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo abierto. Por lo tanto el problema del análisis de la estabilidad de un sistema se reduce al del análisis de los ceros del polinomio del denominador.

Un polinomio se denomina un *polinomio de Hurwitz* si todas sus raíces tienen la parte real negativa. Por lo tanto el problema de la estabilidad se reduce al de determinar si el polinomio del denominador es, o no, un polinomio de Hurwitz.

El método directo de comprobar si un determinado polinomio es o no un polinomio de Hurwitz consiste en determinar todas las raíces de dicho polinomio. Este procedimiento puede ser, además de excesivamente laborioso, inútil por cuanto que suministra una información superior a la que se requiere. No se trata de saber cuáles son las raíces, sino, simplemente, si su parte real será negativa o no.

El método de Routh-Hurwitz, permite determinar si las partes reales de las raíces

serán negativas o no sin necesidad de determinarlas. Considérese un polinomio como el siguiente:

$$s^{n+1} + a_1 s^n + \cdots + a_{n+1} \quad (7.6)$$

Para determinar si el anterior polinomio tiene raíces con parte real negativa se procede como sigue:

1. Si algún coeficiente del polinomio es negativo o cero, entonces existe al menos una raíz en el semiplano cerrado derecho. El sistema es, por lo tanto, inestable.
2. En el caso de que no se cumplan los supuestos de 1), se procede a construir la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|cccc}
 n+1 & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
 n & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
 n-1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\
 n-2 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \\
 \cdots & \cdots & & & \\
 0 & \rho_1 & & & 
 \end{array} \quad (7.7)$$

en donde la generación de las distintas filas se hace como sigue, a partir de los elementos de las dos anteriores

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_3 \cdot 1}{a_1} \\
 \beta_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_5 \cdot 1}{a_1} \\
 \beta_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_7 \cdot 1}{a_1}
 \end{aligned}$$

La tabla anterior recibe la denominación de tabla de Routh, y el algoritmo que permite su construcción se denomina algoritmo de Routh. Independientemente de los trabajos de Routh, que publicó originalmente el algoritmo que conduce a la construcción de la tabla anterior, Hurwitz publicó un criterio de estabilidad que esencialmente coincide con el de Routh. Por ello el criterio lleva conjuntamente el nombre de los dos autores.

Toda fila depende de las dos filas precedentes. Se procede sucesivamente a determinar filas, sabiendo que para un polinomio de orden  $n$  se determinan  $n + 2$  filas.

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz dice que el polinomio tiene sus raíces en el semiplano abierto negativo si todos los elementos de la primera columna son positivos y no nulos.

Una característica importante de este criterio es que se puede emplear con polinomios que dependan de algún parámetro, permitiendo estudiar la estabilidad del sistema según las variaciones de dicho parámetro.



*Ejemplo 1*

Sea el polinomio  $s^4 + 5s^3 + 3s^2 + s + 2 = 0$ . Para determinar el número de raíces en el semiplano positivo, se construye la tabla de Routh y se tiene,

4	1	3	2
3	5	1	0
2	14/5	2	
1	-36/14	0	
0	2		

como hay dos cambios de signo en la primera columna existirán dos raíces en el semiplano derecho. Por consiguiente el sistema es inestable. Se puede comprobar numéricamente que las raíces del polinomio están en  $s = -4.33$ ,  $s = -1$  y  $s = 0.168 \pm 0.657j$ , existiendo por tanto dos raíces en el semiplano derecho.

En la práctica el criterio de Routh-Hurwitz se aplica para determinar si el sistema es estable o no y, en general, no interesa saber el número de raíces en el semiplano positivo abierto. Por lo tanto, cuando lo único que interese sea conocer si el sistema será estable o no, se procederá a construir la tabla de Routh hasta encontrar un elemento de la primera columna que sea negativo o cero. Cuando aparezca un elemento negativo o nulo, se suspenderá la construcción de la tabla, y se dictaminará que el sistema es inestable.

En el caso de que interesase conocer cuantas raíces existirán en el semiplano positivo, o en el eje imaginario, se procede a construir la tabla de Routh completa. En la construcción de la tabla de Routh, para el caso en que interese completarla aún cuando aparezcan elementos nulos en la primera columna, se presentan los dos casos singulares siguientes :

1. Aparece un 0 en la primera columna, siendo no nulos los otros elementos de la misma fila.
2. Aparece una fila con todos los elementos nulos, antes de llegar a la fila  $n + 2$ .

En el primer caso se sustituye el 0 por un número arbitrariamente pequeño  $\varepsilon$ . Se completa la tabla y se calcula el límite de los elementos en los que aparezca haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La interpretación de la tabla cuando hay ceros en la primera columna es la siguiente:

- si el signo del elemento que hay encima del cero es igual al de debajo es que existen raíces imaginarias puras.
- si los signos de dichos elementos son distintos, existe una raíz del polinomio en el semiplano derecho.

*Ejemplo 2*

Considérese el polinomio:  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$

Al construir la tabla de Routh se encuentra un cero en la primera columna, en la fila dos. Se sustituye este cero por  $\varepsilon$  y se procede a completar la tabla, que resulta la siguiente:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \\ 2 & 0 \rightarrow \varepsilon & 3 & \\ 1 & \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} & & \\ 0 & 3 & & \end{array}$$

Una vez construida la tabla se determina el límite de aquellos elementos en la primera columna en los que aparezca  $\varepsilon$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . El elemento correspondiente a la fila 1 tiene el siguiente límite,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = -\infty$$

Por lo tanto, la primera columna queda como sigue:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\infty \\ 3 \end{array}$$

Se presentan dos cambios de signo en la primera columna (ya que el cero se trata como negativo) , y por consiguiente el sistema tiene dos raíces en el semiplano derecho, y es inestable.

El segundo caso particular más arriba enunciado, es decir, el caso en que se presente toda una fila de ceros, indica que el polinomio tiene, al menos, un factor par. Es decir, que existe un par de raíces reales simétricas con respecto al eje imaginario, que existen dos raíces imaginarias puras conjugadas, o que existen cuatro raíces complejas situadas simétricamente con relación al origen. Cuando esto sucede se procede a formar una ecuación subsidiaria a partir de los coeficientes de la fila anterior a aquélla en la que todos los elementos sean nulos. La expresión así obtenida resulta ser el factor par del polinomio. Para obtener la fila siguiente, en la tabla de Routh, se procede a derivar esta expresión una vez con respecto a  $s$  y situar sus coeficientes en la fila cuyos elementos se habían anulado. A partir de esta sustitución se prosigue la construcción de la tabla de Routh normalmente. Un ejemplo ayudará a fijar ideas.

### *Ejemplo 3*

Considérese el siguiente polinomio:  $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$

Si se construye la tabla de Routh correspondiente al llegar a la fila 1, se encuentra que todos los elementos son ceros. En efecto

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

La ecuación subsidiaria que se obtiene empleando los coeficientes de la segunda fila es la siguiente:

$$2s^2 + 2 = 0$$

que corresponde al factor par  $s^2 + 1$ . La derivada de la ecuación subsidiaria es  $4s$ . Por lo tanto la tabla se completa como sigue

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 4 & 0 & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

Para extraer conclusiones de la tabla, hay que recordar que realmente la fila 1 está llena de ceros, aunque se hayan sustituido para poder seguir operando. Existe por tanto en la primera columna un 0 que tiene arriba y abajo elementos del mismo signo, lo que indica un par de raíces imaginarias. La factorización del polinomio anterior conduce a,

$$(s^2 + 1) (s + 2) (s + 1)$$

## 7.3 Criterio de Nyquist

El criterio de Routh permite analizar la estabilidad de un sistema lineal a partir de los coeficientes de la ecuación característica. El criterio de Nyquist permite realizar un análisis de la misma naturaleza a partir de la representación gráfica de la función de transferencia. La principal característica del criterio de Nyquist es que permite analizar la estabilidad del bucle cerrado (es decir, del sistema con una realimentación unitaria) en función de la estabilidad del sistema en bucle abierto. Es por tanto un criterio de gran interés para el estudio del efecto de la realimentación sobre la estabilidad. Recuérdese que la realimentación puede estabilizar sistemas inestables en bucle abierto pero también puede producir el efecto contrario.

Al estar basado el criterio en la representación gráfica de la función de transferencia, resulta más intuitivo que el anterior y además ofrece información sobre lo *cerca* que se encuentra el sistema del límite de estabilidad, como se verá más adelante.

Este criterio está basado en un teorema de Cauchy. Considérese una función racional  $F(s)$  (formada por un cociente de polinomios en  $s$ ). Si  $s$  representa a la variable compleja  $s = \sigma + j\omega$  entonces  $F(s)$  aplica el plano complejo  $s$  sobre un plano complejo definido por las partes reales e imaginaria de  $F(s)$  (figura 7.1), de modo que a cada vector de  $s$  se corresponde un vector de  $F(s)$ .

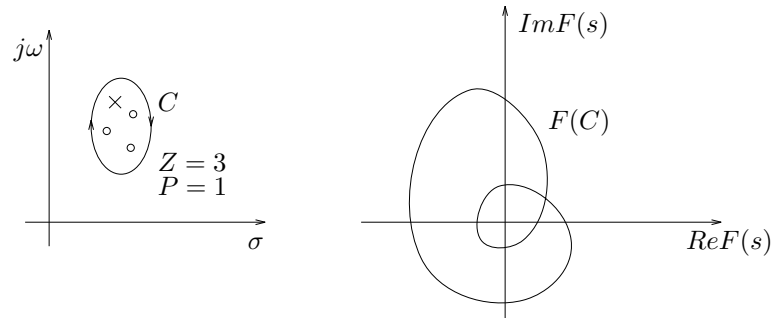


Figura 7.1: Teorema de Cauchy

Supóngase ahora que se define una curva cerrada  $C$  en el plano  $s$  y la correspondiente curva imagen  $F(C)$  en el plano  $F(s)$ . Supóngase, además, que la curva  $C$  se recorre en un determinado sentido (por ejemplo, el de las agujas del reloj). A la curva imagen  $F(C)$  se asociará también un sentido.

El teorema de Cauchy establece que el número de veces que la curva  $F(C)$  rodea al origen (tomando el sentido positivo el de las agujas del reloj) es igual a la diferencia entre el número de ceros y el de polos de  $F$  que encierra la curva  $C$  en el plano  $s$ . Es decir,

$$N = Z - P$$

en donde  $N$  es el número de veces que la curva  $F(C)$  rodea al origen, y  $Z$  y  $P$  representan, respectivamente, el número de ceros y de polos contenidos en la curva  $C$  en el plano  $s$ .

Nyquist basó su criterio en una aplicación muy ingeniosa del teorema de Cauchy. Consideró un sistema realimentado con realimentación unitaria, como el de la figura 7.2. La función de transferencia del sistema en bucle cerrado correspondiente viene dada por la expresión

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

de esta expresión resulta claro que los polos de  $T(s)$  son los ceros de  $1 + G(s)$ .

Para estudiar la estabilidad de un sistema en bucle cerrado Nyquist propuso definir en el plano  $s$  la curva cerrada  $C$  que se muestra en la figura 7.3, y que recibe la denominación

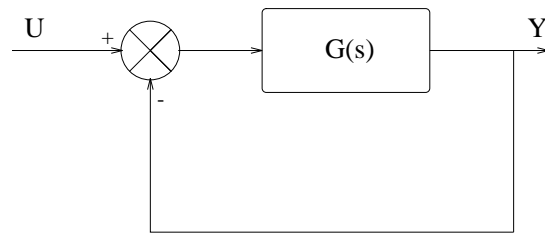
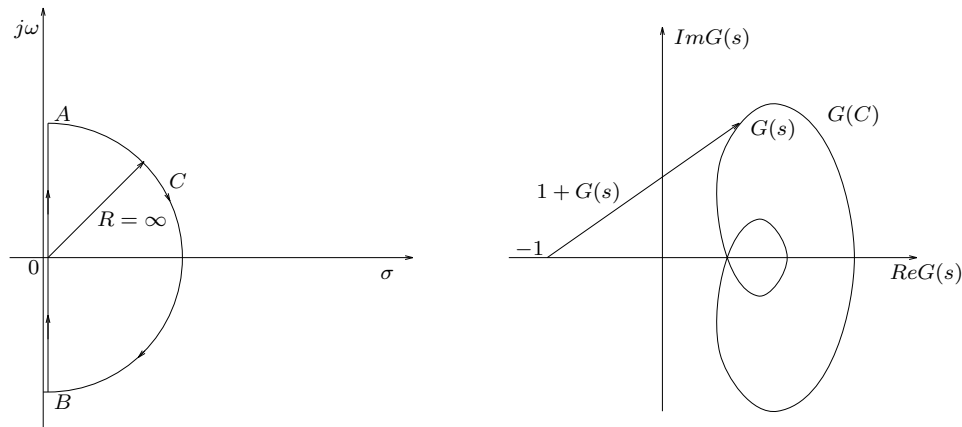


Figura 7.2: Sistema con realimentación unitaria

de *contorno de Nyquist*. Este contorno rodea el semiplano de parte real positiva del plano complejo. Es decir, la región del plano complejo en la que *no* debe haber polos de la función de transferencia en bucle cerrado, si se quiere que el sistema sea estable.

Figura 7.3: Contorno de Nyquist  $C$  para estudiar la estabilidad

Se ha visto que los polos de la función de transferencia en bucle cerrado  $T(s)$  son los ceros de  $1 + G(s)$ . Por tanto, la estabilidad del sistema en bucle cerrado estará garantizada si no existen ceros de  $1 + G(s)$  en el interior del contorno de Nyquist. Por ello se va a tomar la transformada de dicho contorno según la función  $F = 1 + G$ , cuyos polos son los mismos que los de  $G(s)$ , ya que por definición los polos de  $1 + G$  son los puntos donde la función se hace infinita y si se hace infinita  $G$ , también se hace  $1 + G$ . Por ello, empleando el teorema de Cauchy, el número de polos de la función de transferencia en bucle cerrado se puede calcular a partir de los de bucle abierto y del número de vueltas de la curva  $1 + G(C)$  al origen.

Veamos ahora cómo se construye la imagen del contorno  $G(C)$ . Para ello basta observar que el contorno de Nyquist se compone de tres partes. La recta  $OA$  que corresponde al eje imaginario del plano complejo y que, por tanto, corresponde a la función de transferencia  $G(j\omega)$  para valores positivos de  $\omega$ . La recta  $BO$  correspondiente a la parte negativa del eje imaginario. Y, por último, a la curva que une  $AB$ , que se encuentra situada en el infinito del semiplano positivo del plano  $s$ . Por tanto, al recorrer  $OA$ , se está recorriendo  $G(j\omega)$  para valores de  $\omega$  de cero a infinito. Análogamente, al recorrer  $BO$  se está recorriendo  $G(j\omega)$  desde menos infinito a cero. Por último, al recorrer de  $A$  a  $B$  se está en valores de

$s$  con módulo infinito. En este último caso, si  $G(j\omega)$  es tal que el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador (lo que ocurre en los sistemas reales), esta función tomará el valor cero.

Como es lo mismo calcular las vueltas de  $1 + G$  al origen que de  $G$  al punto  $-1$ , aplicando el teorema de Cauchy, para el caso  $F(s) = 1 + G(s)$ , se puede decir que:

un sistema realimentado, con realimentación unitaria, es estable si y sólo si  $G(C)$  rodea al *punto crítico*  $s = -1$ , en el sentido de las agujas del reloj, un número de veces igual al número de polos inestables de la función de transferencia  $G(s)$  contenidos en  $C$  cambiado de signo.

Conviene observar que la parte de  $G(C)$  correspondiente al semieje imaginario  $[0, j\infty]$  es, en realidad, la representación polar de la función de transferencia  $G(s)$ . Así mismo, la parte correspondiente al semieje imaginario negativo  $[-j\infty, 0]$  es simétrica con relación a esa representación polar. Por lo que respecta a la parte correspondiente al semicírculo de radio infinito (y eventualmente a un semicírculo infinitesimal que rodee al origen) es evidente que si la función de transferencia es tal que el grado del numerador es inferior al del denominador, se reduce a un punto. Por todo ello, el trazado de  $G(C)$  es inmediato conociendo la representación polar de la función de transferencia  $G(j\omega)$ .

### Ejemplo 1

Para el sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)}$$

se puede calcular la representación gráfica de  $G(C)$  a partir de su diagrama de Bode, que tiene la forma que se indica en la figura 7.4, según se vio con detalle en el tema anterior. Aplicando el criterio de Nyquist se tiene que este sistema al ser realimentado es estable (lo que sucede para todos los sistemas de primer orden cuya función de transferencia sea de esta forma).

### Ejemplo 2

El sistema dado por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + \tau s)}$$

tiene la particularidad de que presenta un polo en el origen. En los casos en que existan singularidades en el propio contorno de Nyquist, no se puede aplicar el teorema de Cauchy, sino que hay que modificar ligeramente el contorno para evitar esta circunstancia. Lo que se hace es rodear el polo, añadiendo el contorno infinitesimal  $C_0$  que se muestra en la figura 7.5. Es fácil ver que la adición de este contorno no modifica el planteamiento anterior, simplemente hay que añadir la transformada del rodeo infinitesimal al origen. Para calcular esta transformada, se tiene en cuenta que los puntos de ese rodeo se pueden escribir como:

$$s = \varepsilon e^{j\theta} \text{ con } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ y } \varepsilon \rightarrow 0$$

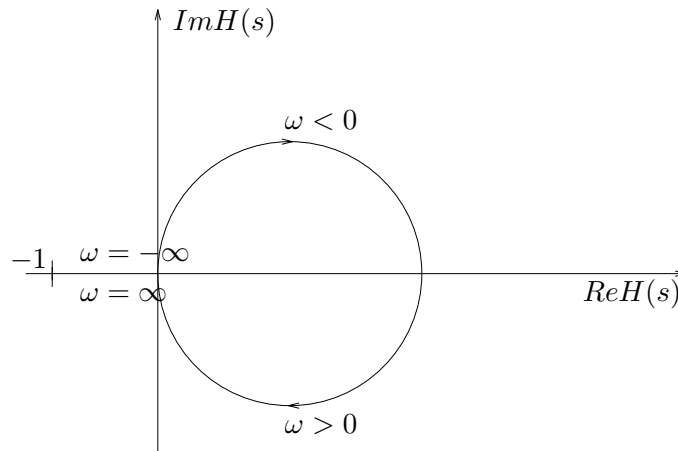


Figura 7.4: Diagrama polar y contorno  $G(C)$  para un sistema de primer orden

sustituyendo en la función de transferencia:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon e^{\theta j} (1 + \varepsilon e^{\theta j})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon e^{\theta j}}$$

Está claro que el valor de este límite es  $\infty$ , pero lo que interesa saber es por qué lado del  $\infty$  da la vuelta. Para ello se ve que, recorriendo el contorno desde  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  hasta  $\theta = \frac{\pi}{2}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \theta = -\pi/2 : G(j\omega) &\rightarrow \pi/2 \\ \theta = 0 : G(j\omega) &\rightarrow 0 \\ \theta = \pi/2 : G(j\omega) &\rightarrow -\pi/2 \end{aligned}$$

de donde se deduce que la vuelta al  $\infty$  se da por la derecha, y por tanto la transformada del contorno de Nyquist no rodea al punto  $-1$ , según se dibuja en la figura 7.5.

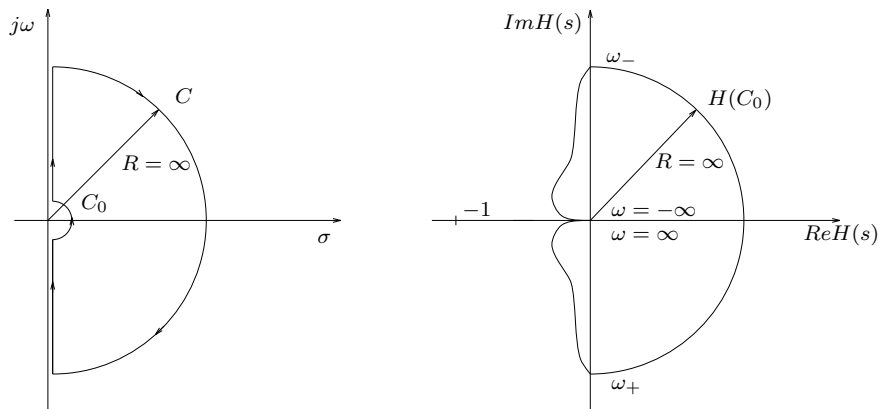


Figura 7.5: Contorno de Nyquist y  $G(C)$  para un sistema con un polo en el origen

Ejemplo 3

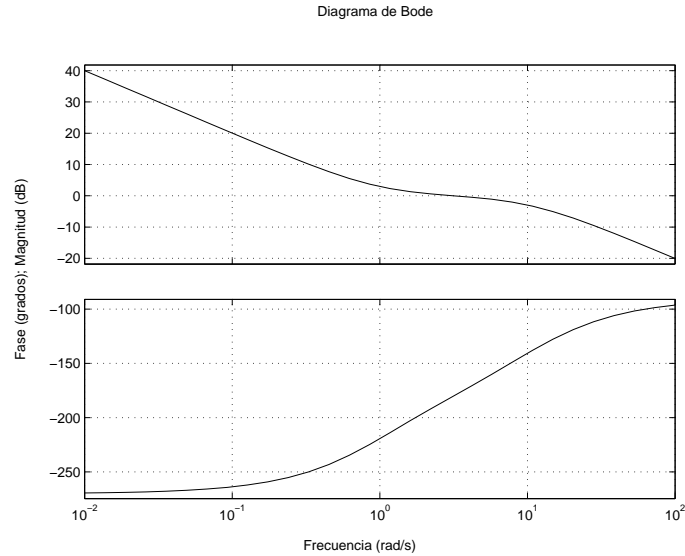


Figura 7.6: Diagrama de Bode del sistema del ejemplo

Un último ejemplo que se va a considerar es el siguiente

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s\left(\frac{s}{10} - 1\right)} \quad (7.8)$$

En este caso se tiene que el sistema presenta un polo inestable, cuya fase varía entre  $-180$  y  $-90$ . En la figura 7.6 se dibuja el diagrama de Bode para  $K = 1$ , que sirve para dibujar el diagrama de Nyquist correspondiente a frecuencias positivas; se observa que para frecuencias bajas el módulo se hace  $\infty$ . Esto es debido a la existencia del polo en  $s = 0$ , que debe ser evitado en el contorno de Nyquist al igual que en el ejemplo anterior.

En la figura 7.7 se tiene el trazado  $G(C)$  correspondiente, dibujado a partir del diagrama de Bode y teniendo en cuenta que hay una vuelta al  $\infty$ . Se observa que existe un punto de corte con el eje real, ya que la fase vale  $-180$  cuando el módulo vale  $K$ . Esto se obtiene del diagrama de Bode o calculando analíticamente el punto en el que la parte imaginaria de  $G(j\omega)$  vale 0.

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + 1)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{10} - 1\right)} = \frac{K}{\frac{\omega^4}{100} + \omega^2} \left( \frac{-11\omega^2}{10} + \left(\omega - \frac{\omega^3}{10}\right)j \right)$$

La parte imaginaria se anula por tanto para  $\omega - \frac{\omega^3}{10} = 0$ , es decir, en  $\omega = 0$  y en  $\omega = \sqrt{10}$ . En el primer caso se trata de la vuelta por el  $\infty$  y en el segundo:

$$G(j\sqrt{10}) = -K$$

En el diagrama de la figura 7.7 el punto crítico se ha representado en función de la ganancia  $K$ . Obsérvese que la pequeña desviación  $C_0$  alrededor del polo  $s = 0$  da lugar a un gran arco en el infinito. Este arco se sitúa en el semiplano izquierdo, ya que atraviesa



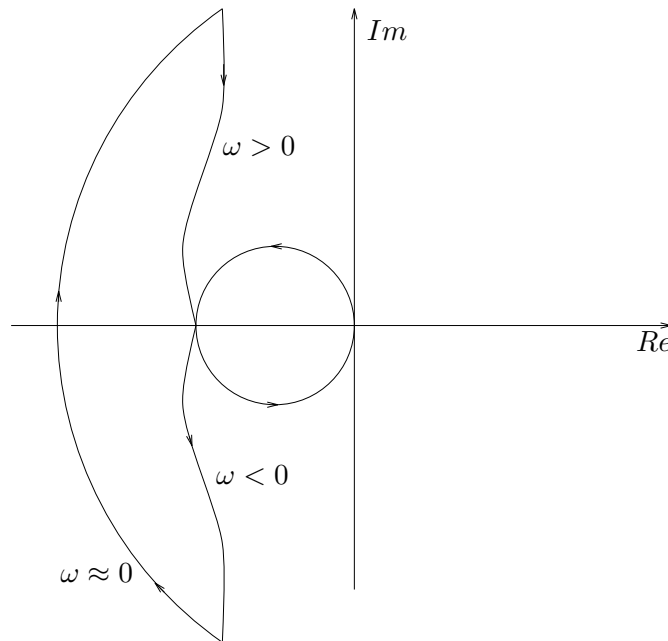


Figura 7.7: Diagrama de Nyquist del sistema del ejemplo

el eje real negativo debido a la contribución de fase de 180 grados del polo en el semiplano de la derecha.

Para valores de  $K$  mayores que 1 en la figura 7.7 se observa que  $G(C)$  rodea al punto crítico en el sentido contrario de las agujas del reloj; es decir,  $N = -1$ . Por otra parte  $P = 1$ , debido al polo en el semiplano de la derecha, por lo que

$$Z = N + P = 0$$

donde se concluye que no hay raíces inestables en el sistema.

Para valores de  $K$  menores que 1, en la figura 7.7 la curva  $G(C)$  rodea al punto crítico en el sentido positivo de las agujas del reloj, por lo que  $N = +1$  y  $Z = 2$ , por lo que el sistema posee dos raíces con parte real positiva y es inestable.

De los anteriores ejemplos se desprende que en la aplicación del teorema de Nyquist hay que tener especial cuidado en los dos puntos siguientes:

- Tener en cuenta la posible presencia de polos inestables en bucle abierto;
- La evaluación del número de vueltas en torno al punto crítico -1 en el caso en el que haya ramas infinitas (ver el último ejemplo).

Sin embargo, para los sistemas estables (y para los estables que incluyan un integrador) llamados de fase mínima (aquéllos que no tienen ceros en el semiplano derecho), es posible enunciar la siguiente regla práctica:

### Regla práctica de Nyquist

Un sistema realimentado es estable en el caso en el que recorriendo el trazado polar de la función de transferencia en el sentido de las  $\omega$  crecientes el punto crítico  $-1$  quede a la izquierda.

#### 7.3.1 Grado de estabilidad. Márgenes de fase y ganancia.

Según se acaba de enunciar en la regla práctica del criterio de Nyquist se tiene que la estabilidad en bucle cerrado para sistemas que tengan todos sus polos y ceros en el semiplano izquierdo depende de la posición del punto crítico  $-1$  con relación al trazado polar de la función de transferencia (figura 7.8). Este hecho sugiere la conveniencia de introducir una medida de la distancia de  $G(C)$  a este punto crítico, por lo que se define *grado de estabilidad* del sistema realimentado por

- El *margen de ganancia*  $G_m = 20 \log_{10} \frac{1}{A}$ , siendo  $A$  el módulo correspondiente a la fase de  $-180$  grados;
- El *margen de fase*  $\Phi_m$ , que es  $180 + \vartheta$ , siendo  $\vartheta$  la fase del punto correspondiente al módulo unidad. Es decir, el margen de fase es lo que aún falta para llegar a  $-180$  grados.

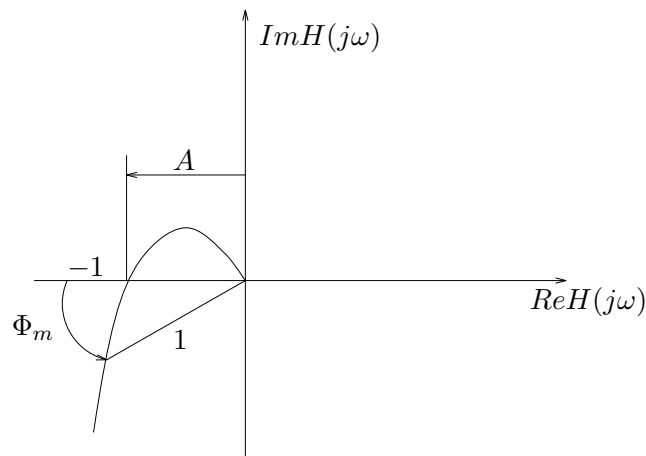


Figura 7.8: Grado de estabilidad

En la figura 7.8 se representan  $G_m$  y  $\Phi_m$ . Nótese que el margen de ganancia indica cuánto puede aumentar la ganancia para que no se llegue al punto  $-1$  si la fase no cambia y el margen de fase indica cuánto puede aumentar la fase para llegar al mismo punto si no cambia la ganancia.

La estabilidad en bucle cerrado para sistemas estables y de fase mínima en bucle abierto equivale entonces a una de las condiciones siguientes:

- Para el vector  $G(s)$  correspondiente a un módulo unidad la fase debe ser superior a  $-180$  grados.
- Para una fase de  $-180$  grados el módulo del vector de la función de transferencia en bucle abierto debe ser inferior a la unidad.

La estabilidad queda asegurada cuando estos dos valores son positivos.

De este modo, los márgenes de fase y de ganancia establecen las posibles variaciones de la función de transferencia  $G(s)$  debidas a perturbaciones eventuales que no afecten a la estabilidad del sistema. En la práctica se considera que un margen de fase de 50 grados y un margen de ganancia de 10 dB son satisfactorios. Un margen de fase por debajo de los 30 grados no suele ser aceptable.

Estos márgenes se pueden obtener fácilmente del diagrama de Bode de  $G$ , según se muestra en 7.9. Se tiene por tanto otra utilidad de este tipo de diagramas frecuenciales, como es obtener la estabilidad del sistema en bucle cerrado a partir de la representación del bucle abierto.

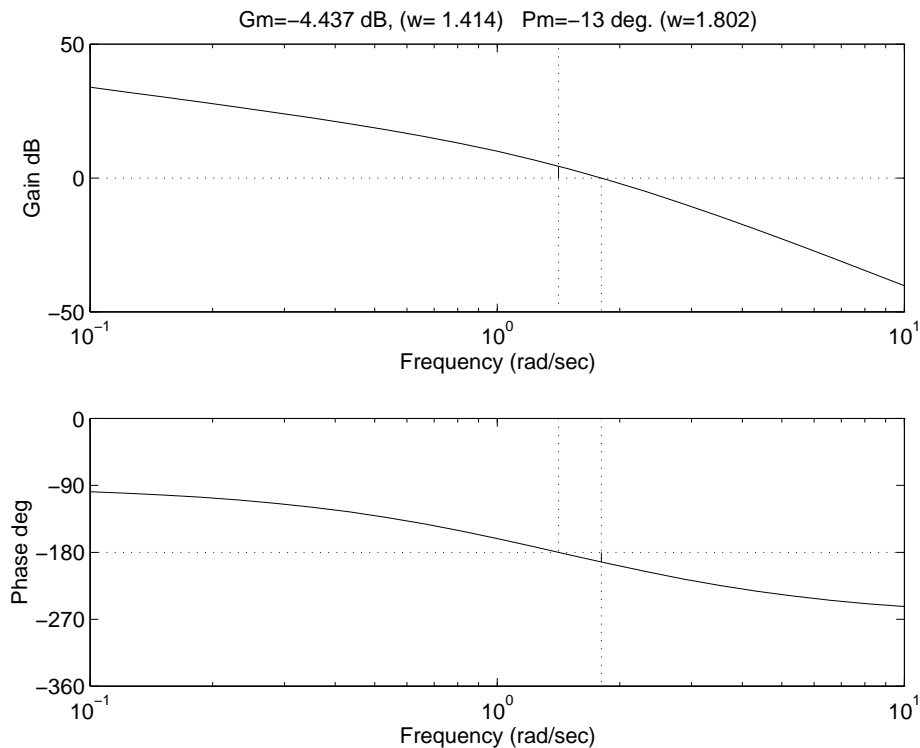


Figura 7.9: Márgenes de fase y de ganancia de un sistema inestable en bucle cerrado.

## 7.4 Criterios relativos a la descripción interna

Como se ha visto anteriormente, los sistemas lineales invariantes en el tiempo pueden representarse mediante una descripción interna de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7.9)$$

siendo  $x$  el vector de estados y  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices con las dimensiones apropiadas. Al ser estática la relación entre estado y salida, la estabilidad del sistema viene dada por la función de transición de estados.

A continuación se verá cuál es la función de transición de un sistema descrito por (7.9). Para ello se aplica transformada de Laplace en la ecuación de transición, obteniendo

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

de donde se puede despejar  $X(s)$ ,

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Llamando  $\phi(s) = (sI - A)^{-1}$  se tiene,

$$X(s) = \phi(s)x(0) + \phi(s)BU(s) \quad (7.10)$$

cuya antitransformada de Laplace es

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (7.11)$$

en donde  $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\phi(s)]$  es una función que recibe el nombre de *función de transición*. Se puede observar que el primer sumando del segundo término de la ecuación anterior corresponde a la respuesta libre del sistema (evolución a partir del estado inicial sin ninguna acción externa) y el segundo sumando es la respuesta forzada debida a la entrada  $u$ .

La expresión (7.11) representa la transición entre los estados  $x(0)$  y  $x(t)$  como consecuencia de la aplicación de una señal de entrada  $u$  en el intervalo  $(0, t)$ . Puede comprobarse fácilmente que dicha expresión cumple las propiedades de causalidad, consistencia y composición exigidas a la función de transición entre estados. Obsérvese que la función de lectura viene dada por la segunda de las expresiones (7.9).

Al pasar de la descripción externa a la interna lo que se hace es factorizar la función que representa la descripción externa en las funciones de lectura y de transición entre

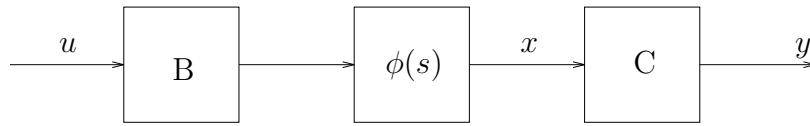
estados. Partiendo de condiciones iniciales nulas, la relación entre entrada y salida viene dada por:

$$Y(s) = CX(s) = C\phi(s)BU(s)$$

y por tanto la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\phi(s)B$$

Esto se puede interpretar con el diagrama de la figura 7.4.



La transformada de Laplace de la matriz de transición es

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

y por tanto el denominador de  $G(s)$  viene dado por  $\det(sI - A)$ , que es la ecuación característica del sistema. Por consiguiente el criterio de estabilidad equivale a que las raíces de la ecuación característica se encuentren en el semiplano izquierdo. Nótese que estas raíces son por definición los autovalores de la matriz  $A$ , por lo que el criterio de estabilidad para sistemas dados por su descripción interna puede enunciarse como:

### Teorema:

Un sistema lineal y estacionario, descrito mediante una representación interna de la forma (7.9) es estable si y sólo si, todos los autovalores de  $A$  están situados en el semiplano izquierdo abierto del plano  $s$ .

Ejemplo: La estabilidad del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

viene dada por la ecuación característica

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 8 & s + 6 \end{bmatrix}$$

es decir, por las raíces de:

$$s^3 + 6s^2 + 8s + 6 = 0$$

que son  $s = -4.52$  y  $s = -0.7374 \pm 0.8844j$  y al tener todas parte real negativa se deduce que el sistema es estable.

# Bibliografía

- Introducción a la Dinámica de Sistemas. J. Aracil. Alianza Editorial, 1992.
- Apuntes de Regulación Automática. J. Aracil. Universidad de Sevilla, 1990.
- Dinámica de Sistemas. J. Aracil y F. Gordillo. Alianza Universidad Textos, 1997.
- Control de sistemas dinámicos con retroalimentación. G. F. Franklin y otros. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- Sistemas de control automático. B.J. Kuo. Prentice-Hall, 1996.
- Sistemas de control en ingeniería. P.H. Lewis y C. Yang. Prentice-Hall, 1999.
- Dinámica de sistemas. K. Ogata. Prentice-Hall, 1987.
- Ingeniería de control moderna. K. Ogata. Prentice-Hall, 1998.
- Feedback Control Systems. C.L. Phillips y R.D. Harbor. Prentice Hall, 1996.
- Señales y sistemas continuos y discretos. S.S. Soliman y M.D. Srinath. Prentice-Hall, 1999.