Tema 2: Características y representación de sistemas

Ecuaciones diferenciales y en diferencias

- **Ecuación diferencial:** modela los sistemas dinámicos lineales de parámetros concentrados en tiempo continuo

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$$\textit{Grado de la ecuación}: n$$

$$\textit{Modelos causales}: n > m$$

- **Ecuación en diferencias:** modela los sistemas dinámicos lineales en tiempo discreto

$$\alpha_n y_{k-n} + \alpha_{n-1} y_{k-n+1} + \ldots + \alpha_0 y_k = \beta_m u_{k-m} + \beta_{m-1} u_{k-m+1} + \ldots + \beta_1 u_k$$

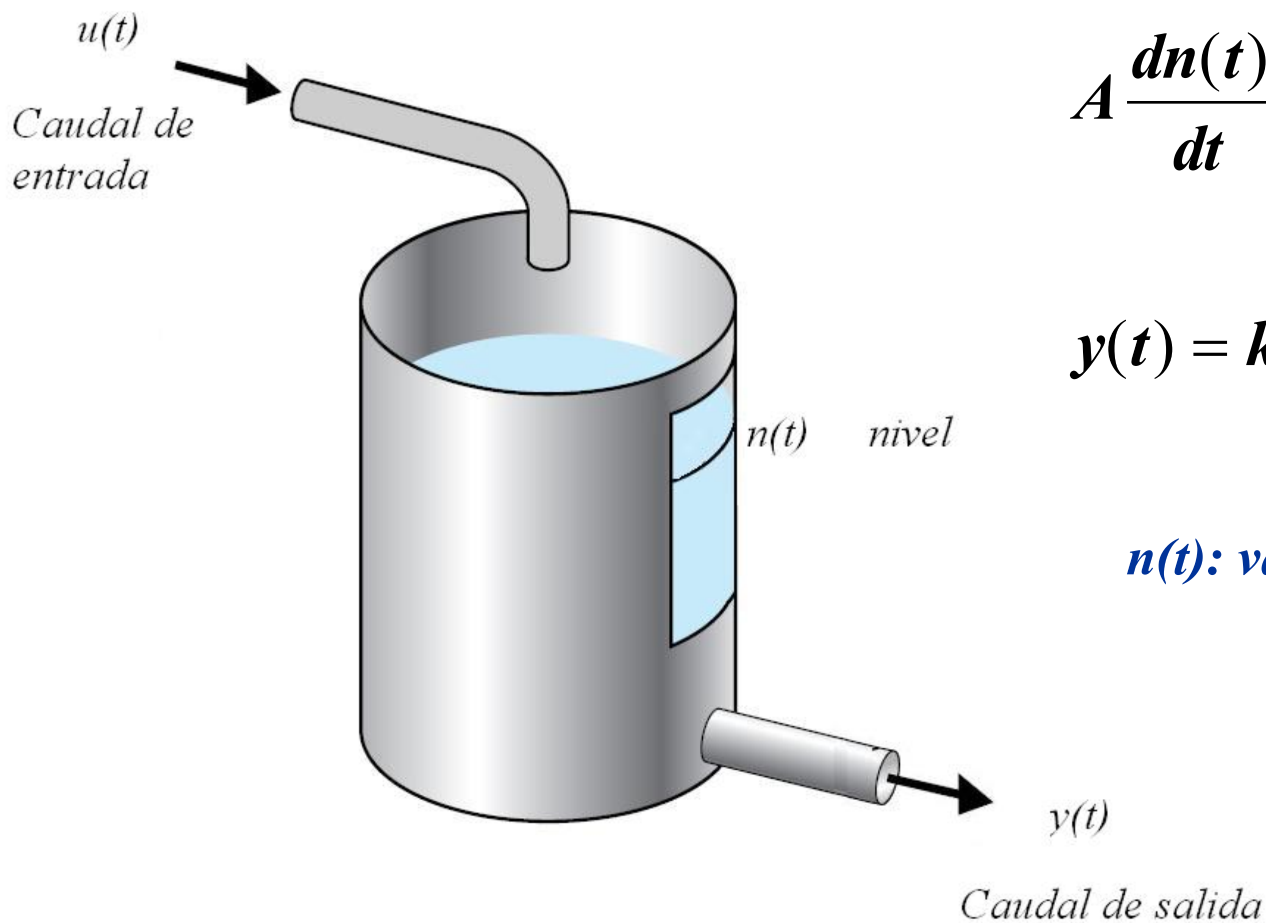
$$ej.: \; C_{k+1} = (1+i) C_k - L_k$$

C : capital pendiente

i : interés del préstamo

L : cuota pagada

Descripción interna y externa



$$A\frac{dn(t)}{dt} = u(t) - y(t)$$

$$y(t) = k\sqrt{n(t)}$$

n(t): variable interna

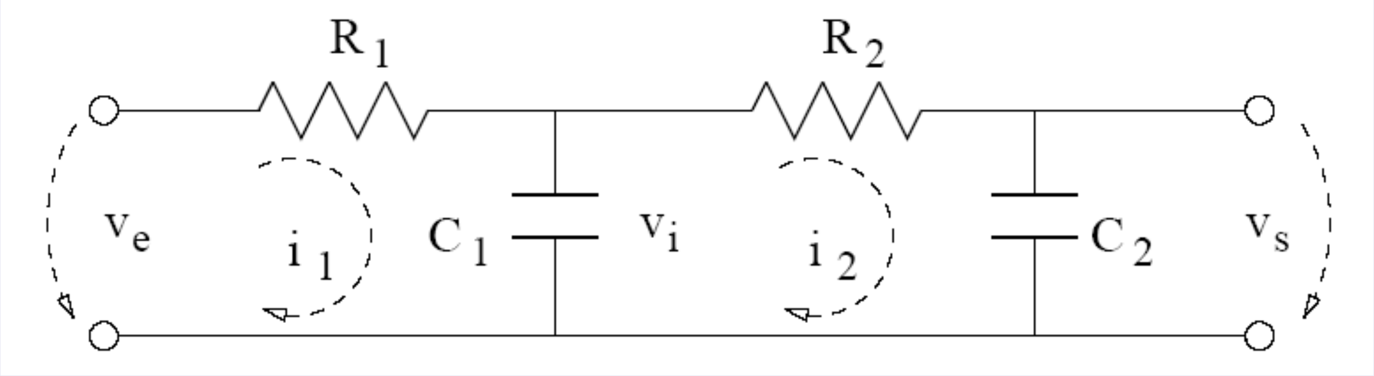
Descripción interna y externa

- Eliminado las variables internas de las ecuaciones se obtiene la descripción externa:

$$\frac{A}{k^2}\frac{d(y^2(t))}{dt} = u(t) - y(t)$$

Descripción interna y externa

- Circuito eléctrico:



$$v_e = i_1 R_1 + v_i$$

$$i_1 - i_2 = C_1 \frac{dv_i}{dt}$$

$$v_i = i_2 R_2 + v_s$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_s}{dt}$$

Descripción interna y externa

- Circuito eléctrico: entrada v_e y salida v_s

- Descripción externa (única): eq. diff. 2º orden

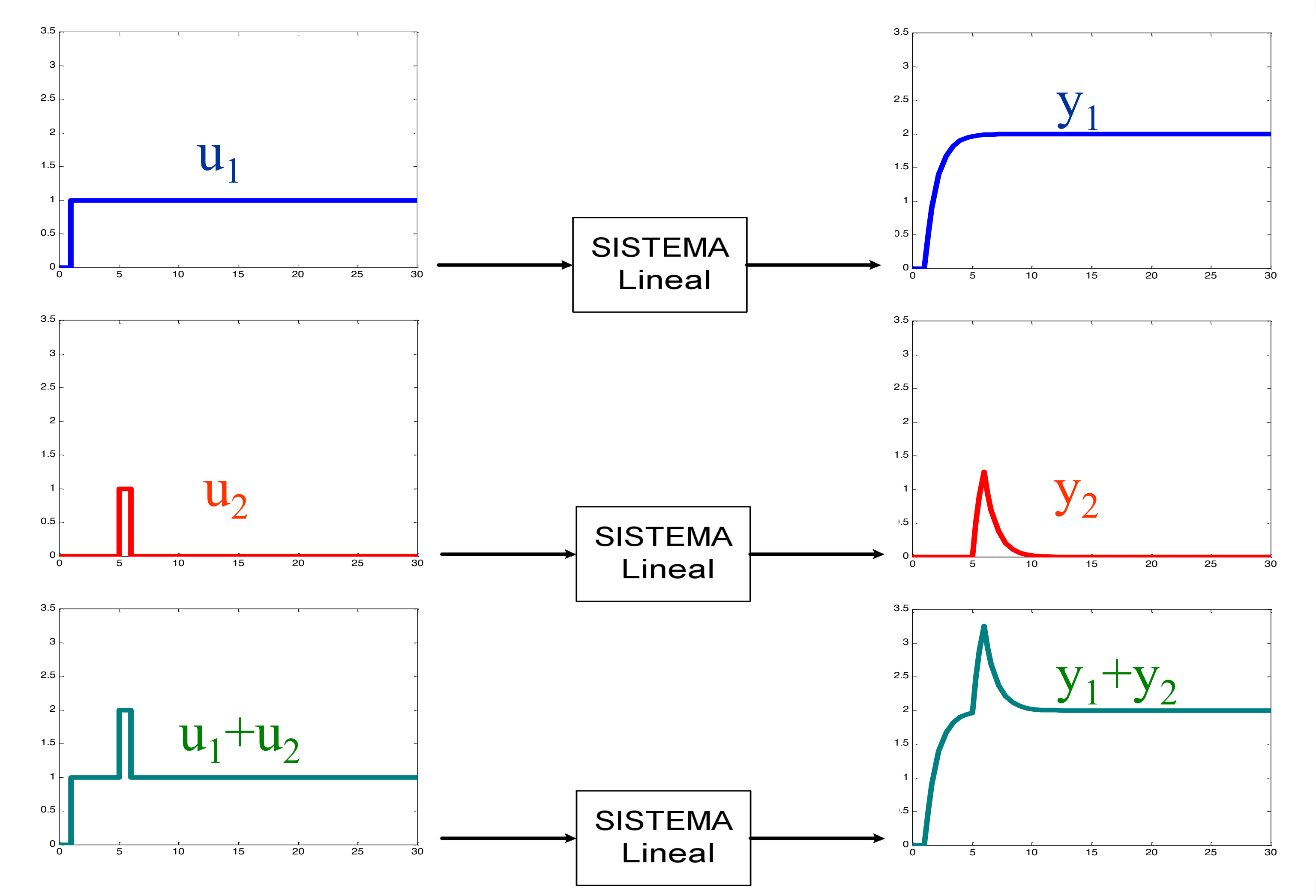
$$v_e = R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + (R_1(C_1 + C_2) + R_2 C_2)\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

- Descripción interna (una de las múltiples): 2 estados v_i y v_s

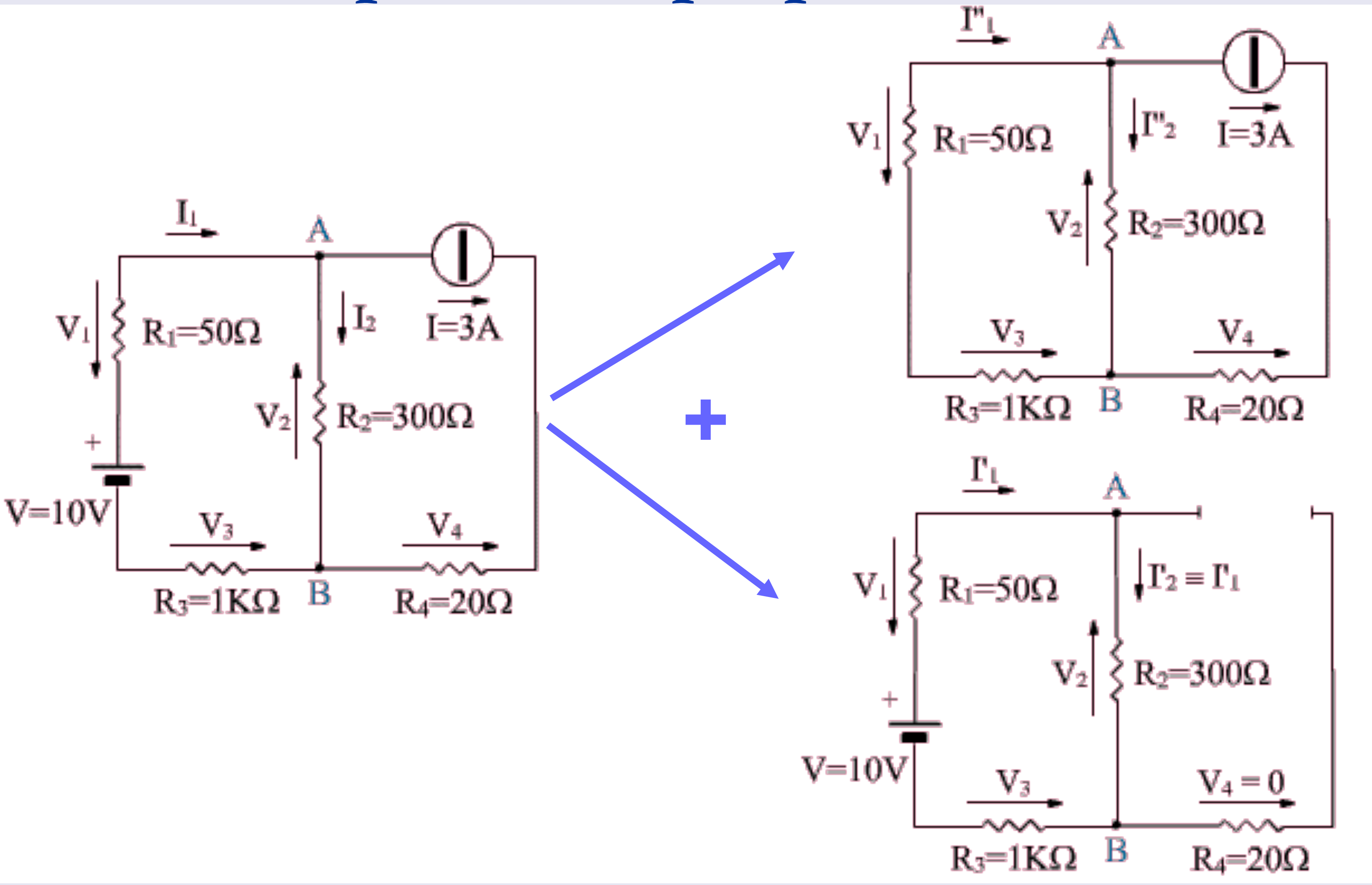
$$v_e = R_1(C_1 \frac{dv_i}{dt} + C_2 \frac{dv_s}{dt}) + v_i$$

$$v_i = R_2 C_2 \frac{dv_s}{dt} + v_s$$

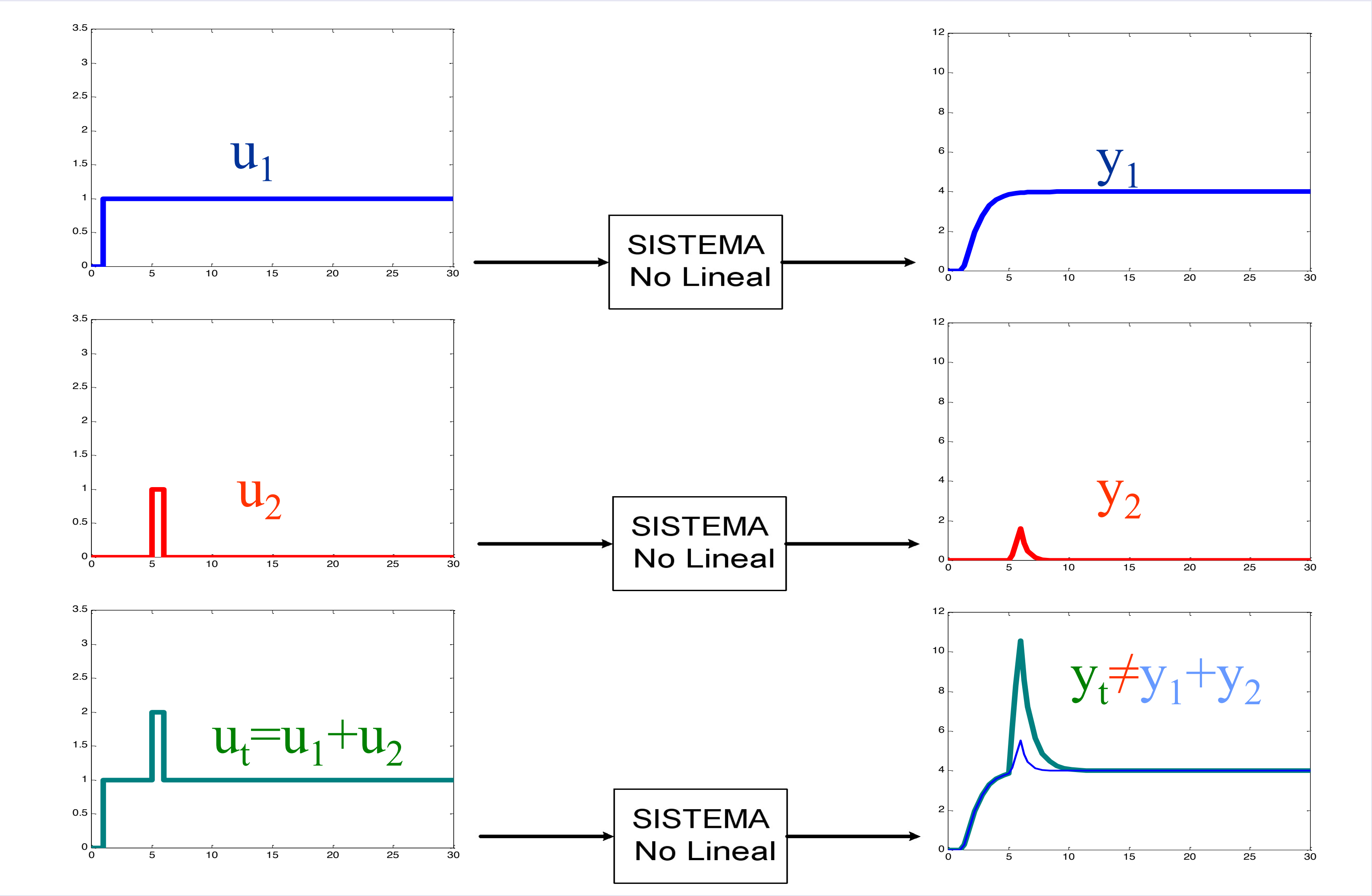
Linealidad en los sistemas dinámicos: Principio de Superposición



Linealidad en los sistemas dinámicos: Principio de Superposición



Principio de Superposición
(NO se cumple en un sistema no lineal)



Principio de Superposición
(NO se cumple en un sistema no lineal)

- Aditividad: *f(x+y) = f(x) + f(y)*
- Proporcionalidad: *f(a*x) = a * f(x)*

Sistemas lineales: f(x)=x

- *f(3+7) = f(10) = 10*
- *f(3)+f(7)= 3 + 7 = 10*

- *f(2*3) = f(6) =6*
- *2*f(3) = 6*

Sistemas lineales: f(x)=x^2

- *f(3+7) = f(10) = 100*
- *f(3)+f(7)= 9 + 49 = 58*

- *f(2*3) = f(6) = 36*
- *2*f(3) = 2*9 = 18*

Sistemas lineales invariantes con el tiempo

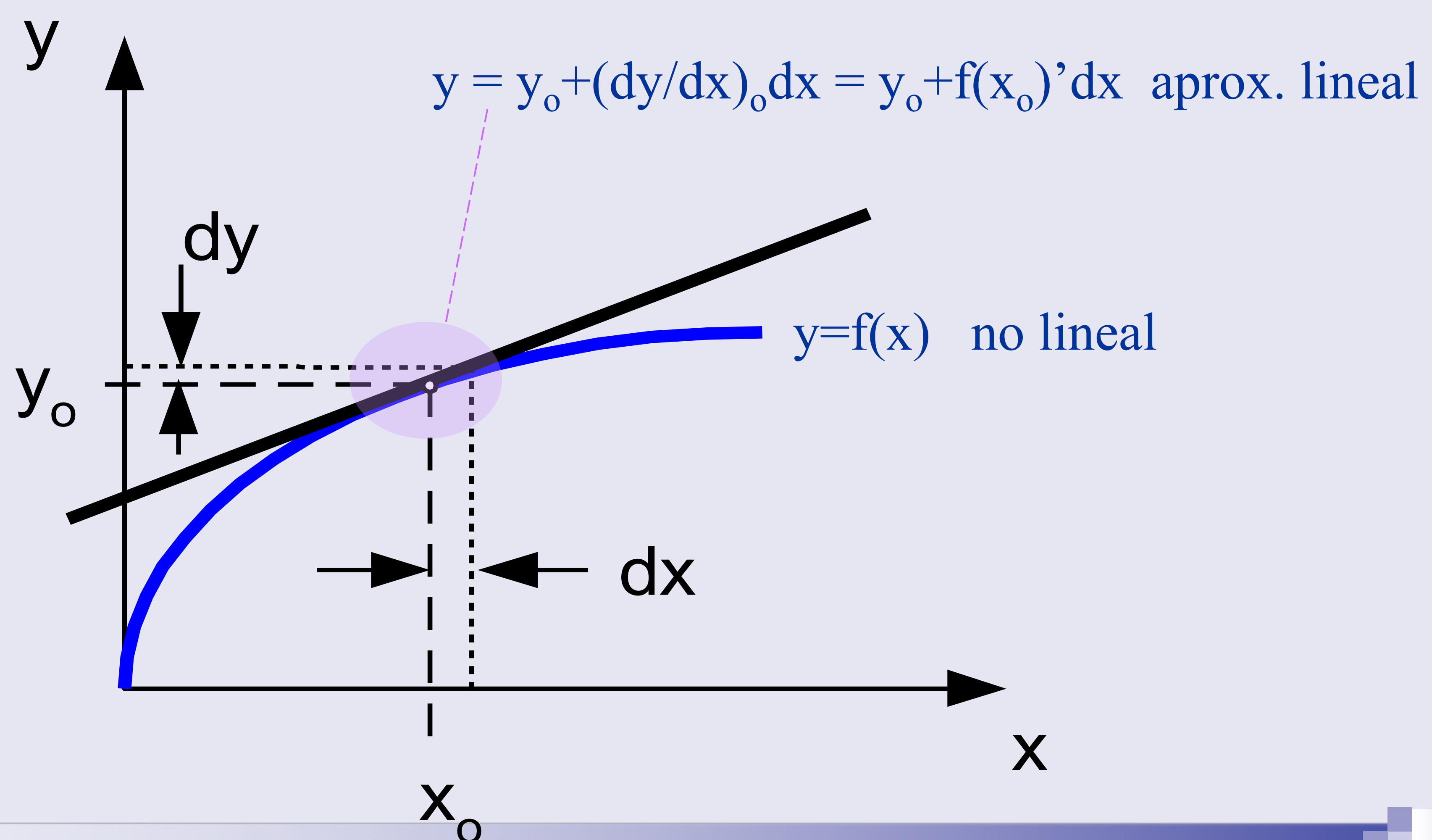
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1}\frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$Coeficientes\ a_i\ con\ i:1 \ldots n\ \ y\ \ b_j\ \ con\ \ j:0\ldots m$ **constantes**

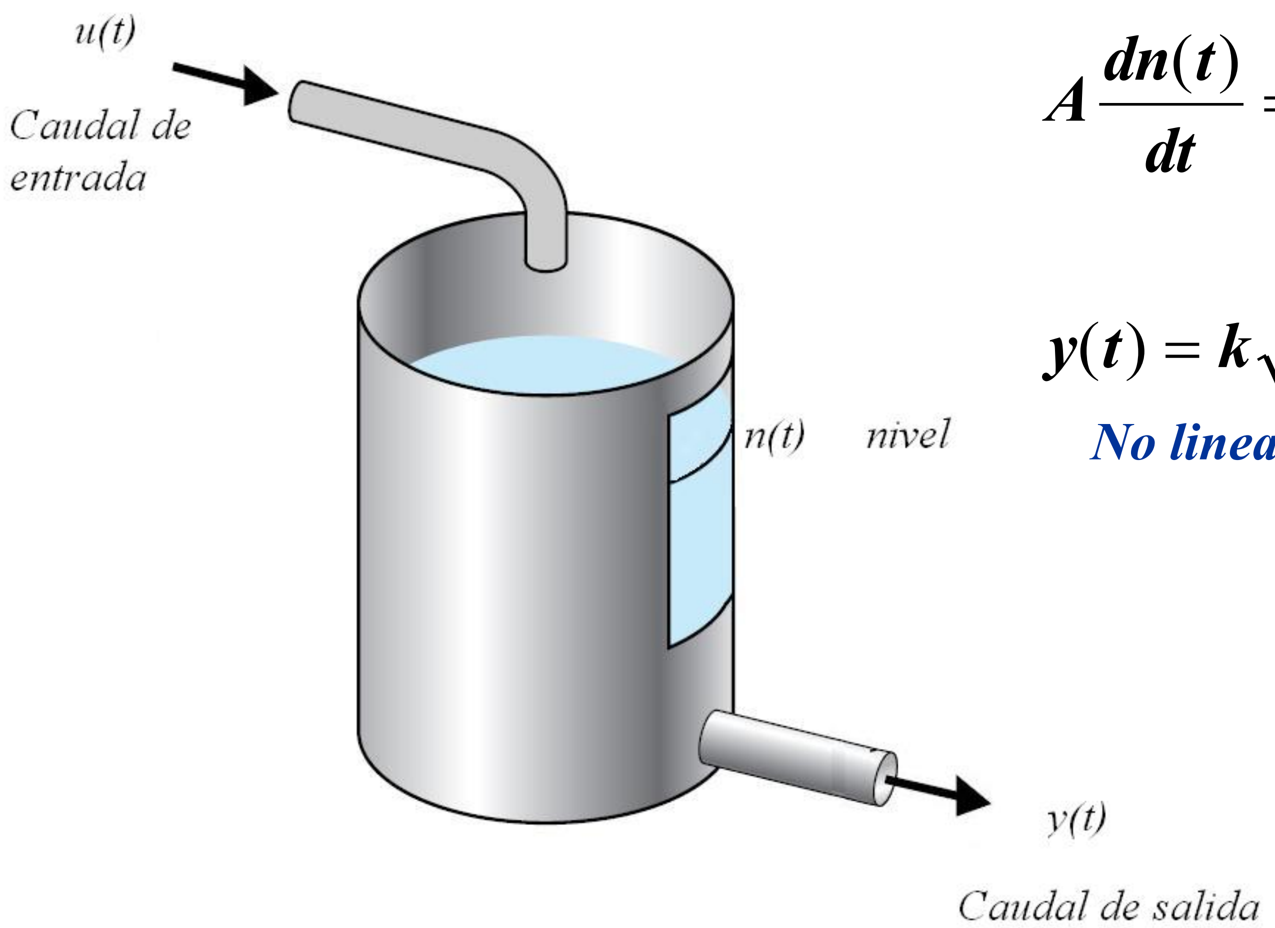
Ejemplo: $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 10\frac{d\theta(t)}{dt} + 4\theta = 2v(t)$ *donde* $\theta(t)$ *es la salida (ángulo de un eje)*

y $v(t)$ *(tensión aplicada) es la entrada*

Linealización



Linealización



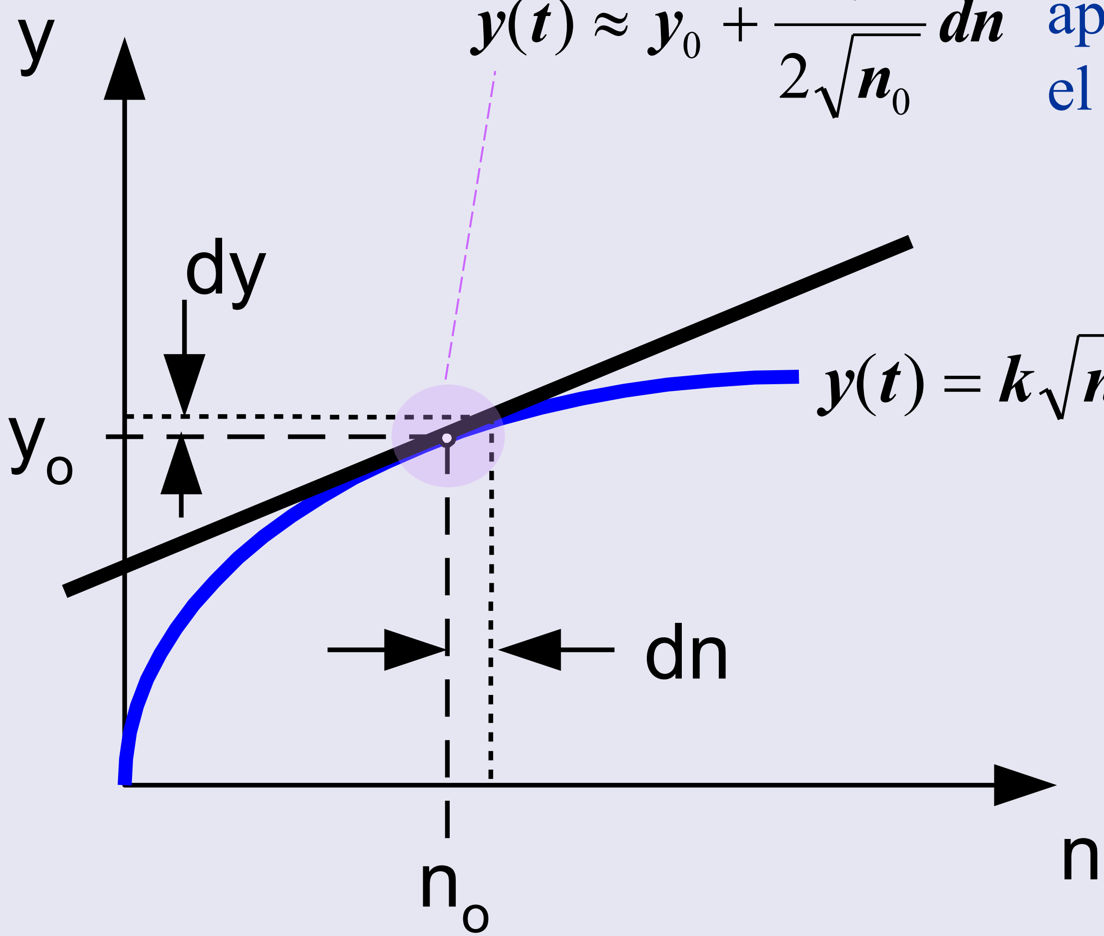
$$A\frac{dn(t)}{dt} = u(t) - y(t)$$

$$y(t) = k\sqrt{n(t)}$$

No lineal

Linealización

$$y(t) \approx y_0 + \frac{k}{2\sqrt{n_0}}\,dn$$ aprox. lineal válida en el entorno de (n_0, y_0)



$$y(t) = k\sqrt{n(t)}$$ no lineal

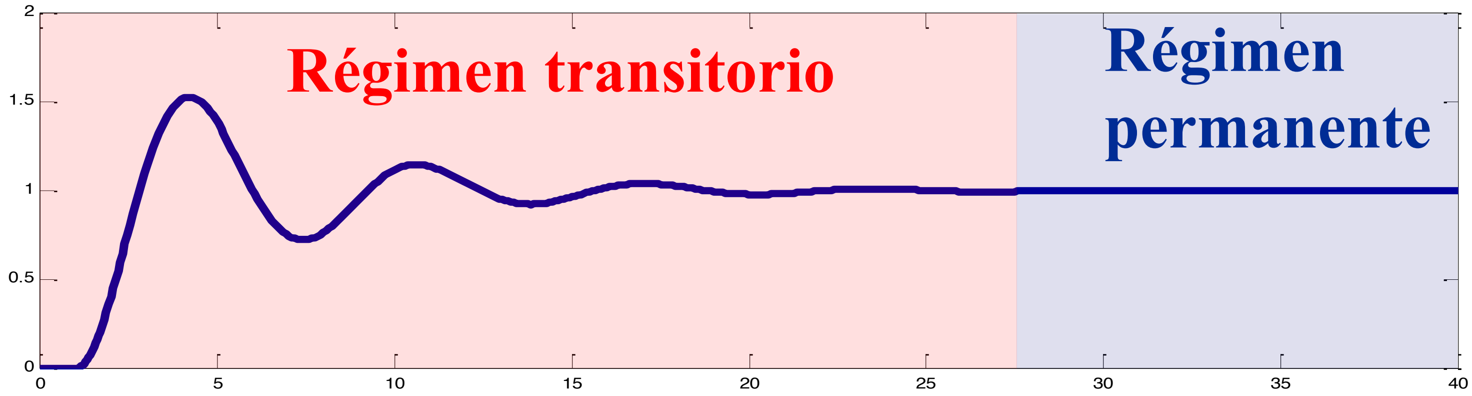
n: nivel

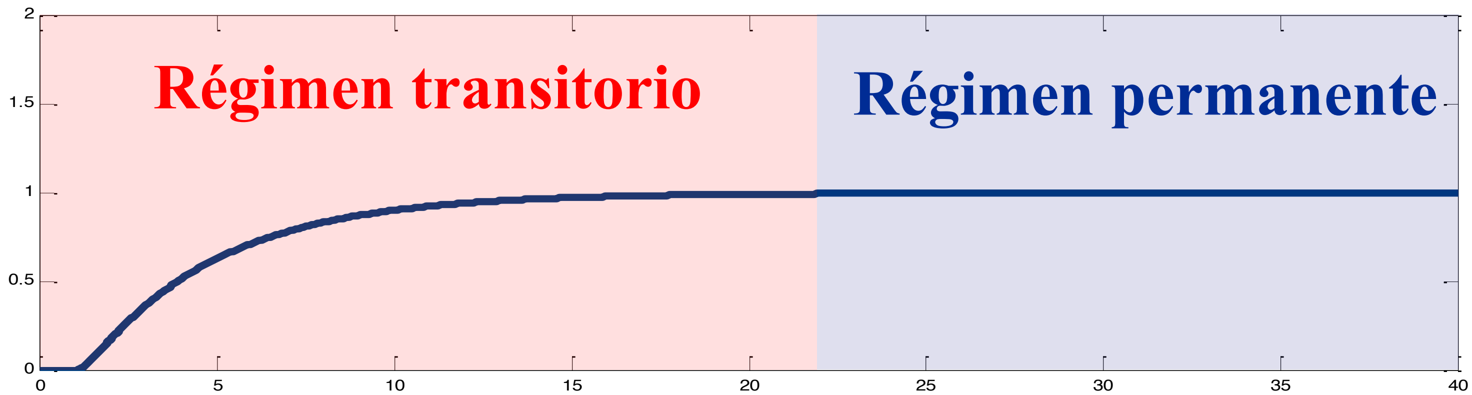
y: caudal de salida

Respuesta libre y forzada

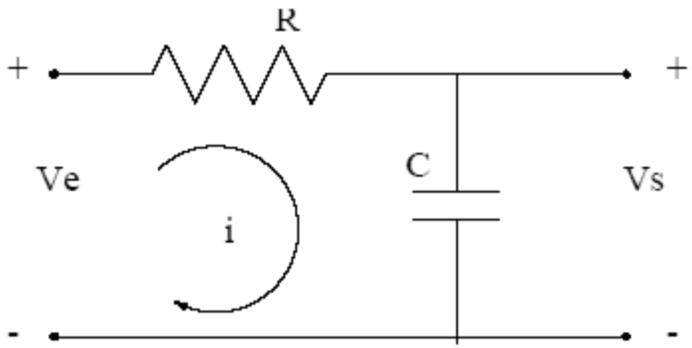
- Causas de evolución de un sistema
  - Condiciones de las que parte (Condiciones iniciales)
  - Entradas del sistema
- Tipos de respuesta
  - Respuesta **libre**: condiciones iniciales
  - Respuesta **forzada**: entradas
- En sistemas lineales
  - Respuesta= Respuesta libre + Respuesta forzada

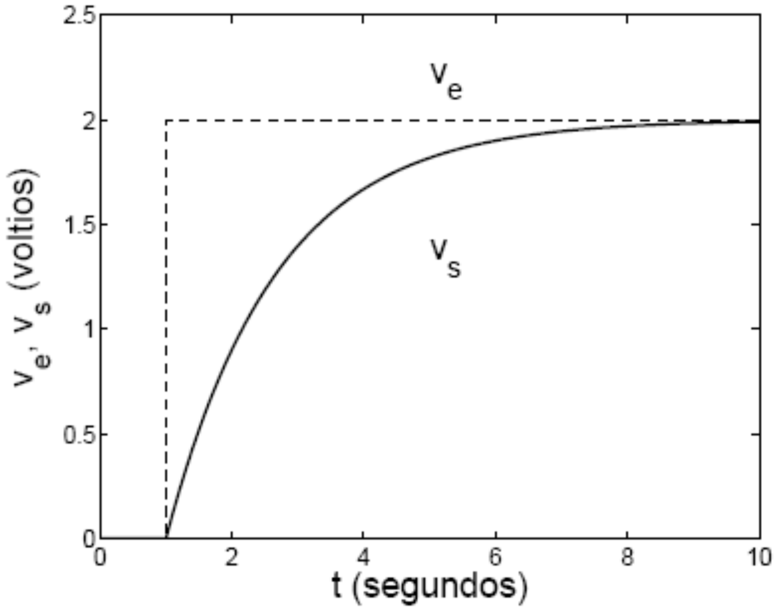
Regímenes transitorio y permanente





Punto de equilibrio





$$v_e = RC\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

está en equilibrio cuando la derivada de v_s es cero y por tanto cuando $v_e = v_s$

Punto de equilibrio

Unicidad del punto de equilibrio para sistemas lineales:

$$v_e = RC\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

- *Para una entrada dada, por ejemplo v_e= 1 voltio, el sistema evolucionará hasta alcanzar* ***un único punto de equilibrio*** *que corresponde a una salida v_s=1 voltio*

- *Si se aplican a la entrada, por ejemplo v_e= 2 voltios, el sistema evolucionará hasta conseguir* ***un punto de equilibrio*** *que corresponde a una salida v_s=2 voltios*

- *Para una entrada dada sólo existe un único punto de equilibrio*

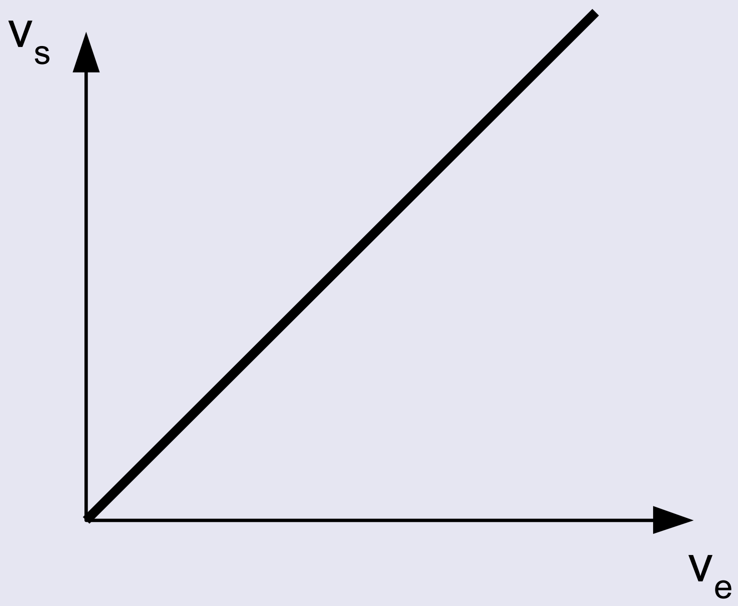
Característica estática

Relación entre la entrada y la salida en régimen permanente.

$$v_e = RC\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

en régimen permanente:

$$v_e = v_s$$



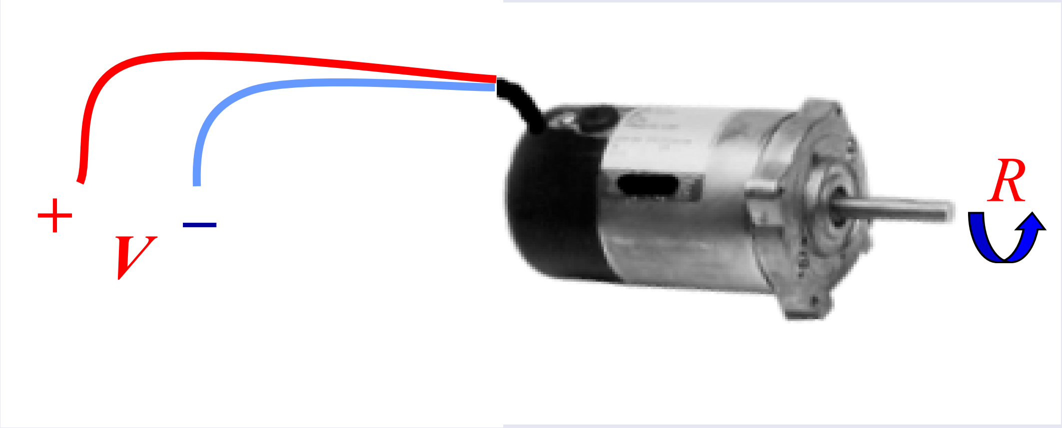
Característica estática

La característica estática en muchos casos se puede obtener de forma experimental:

Por ejemplo: Motor de corriente continua

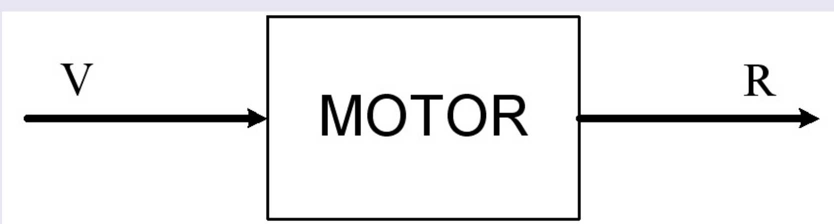
Entrada: Tensión aplicada V (voltios)

Salida: Velocidad del eje R (r.p.s.) revoluciones por segundo



Característica estática

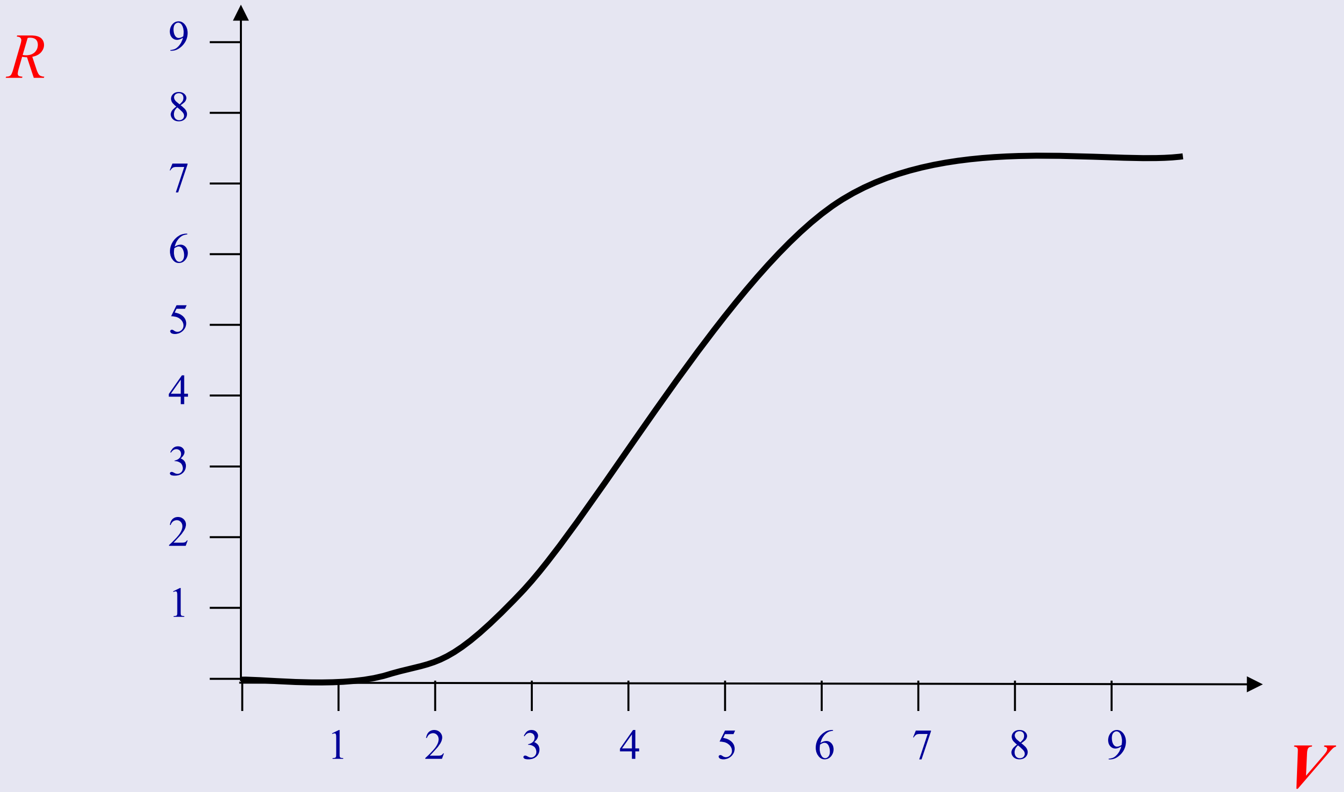
Ensayo aplicando distintas tensiones de entrada y midiendo las revoluciones en régimen permanente:



V(v)	R(r.p.s.)
0	0
1	0
2	0.2
3	1.3
4	3.2
5	5.1
6	6.5
7	7.2
8	7.4
9	7.4

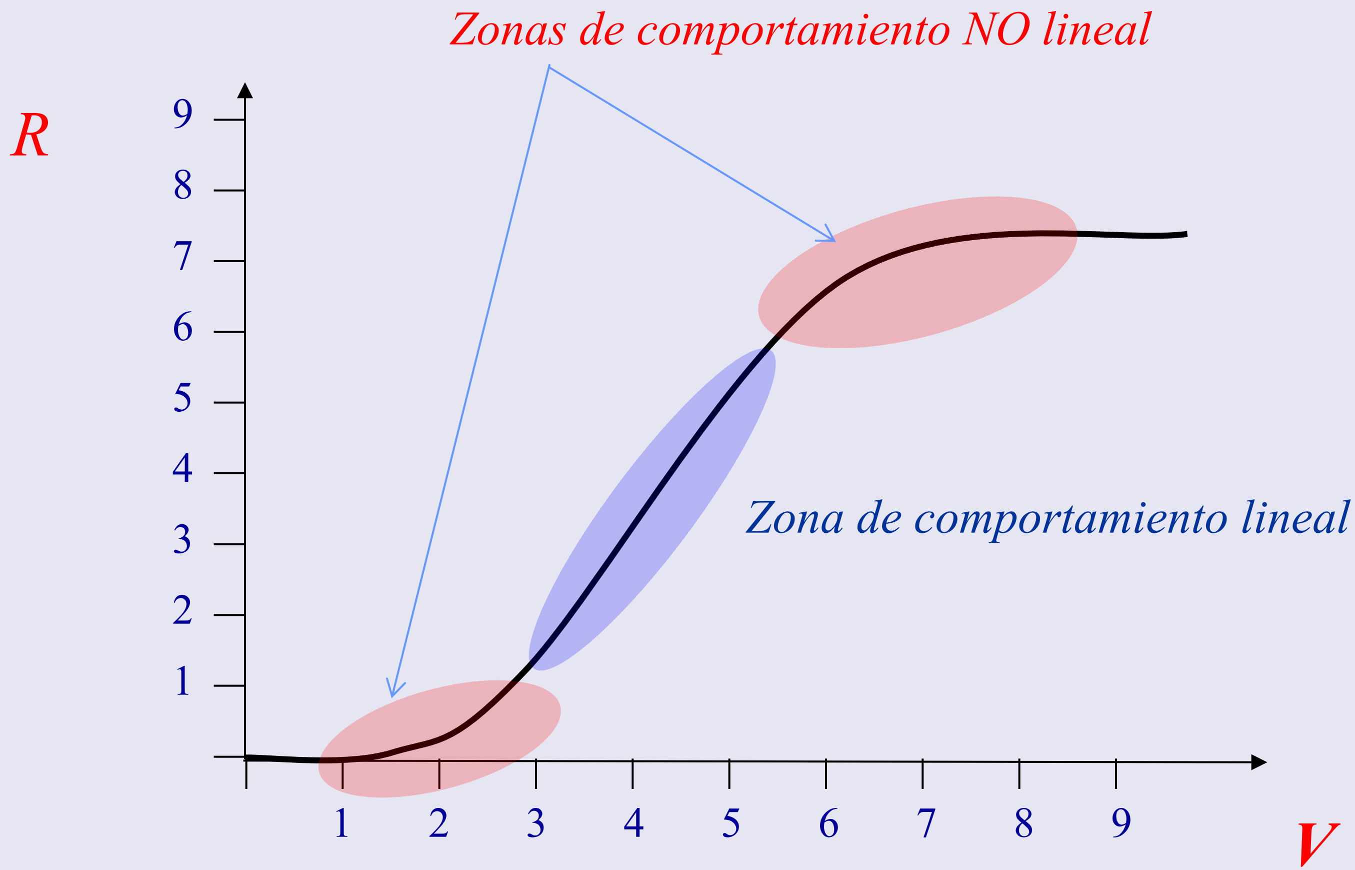
Característica estática

Representación gráfica de la característica estática.



Característica estática

Consideraciones sobre la característica estática



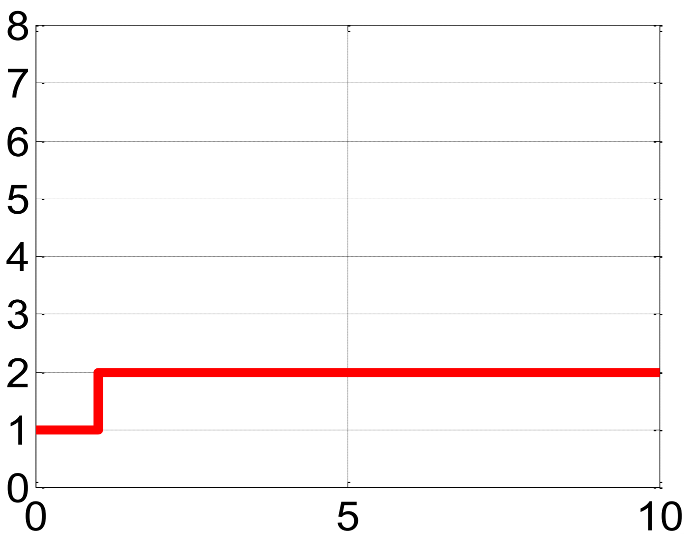
Ganancia estática

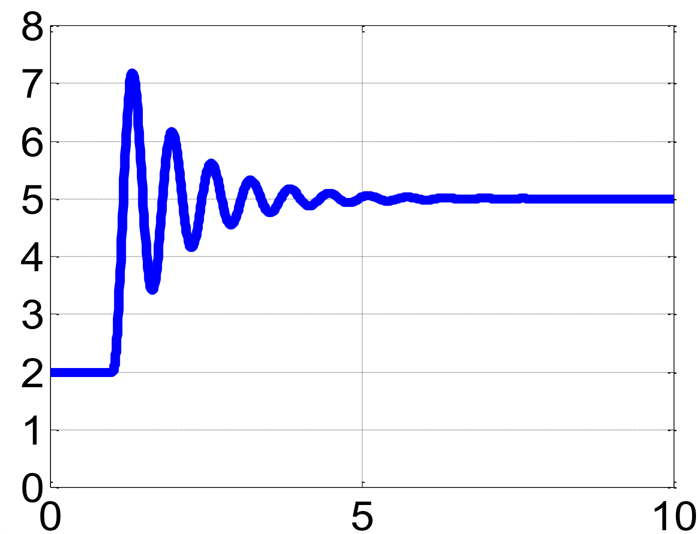
La ganancia estática *permite determinar qué incrementos finales se producirán en la salida de un sistema como consecuencia de incrementos dados en la entrada al mismo.*

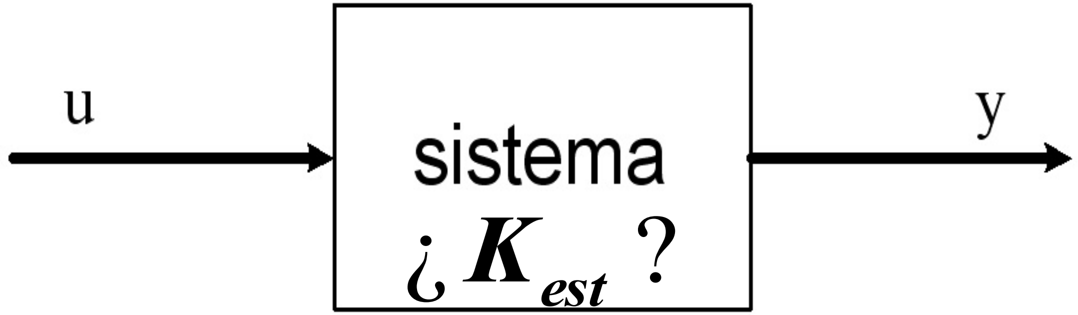
$$K_{estática} = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Ganancia estática

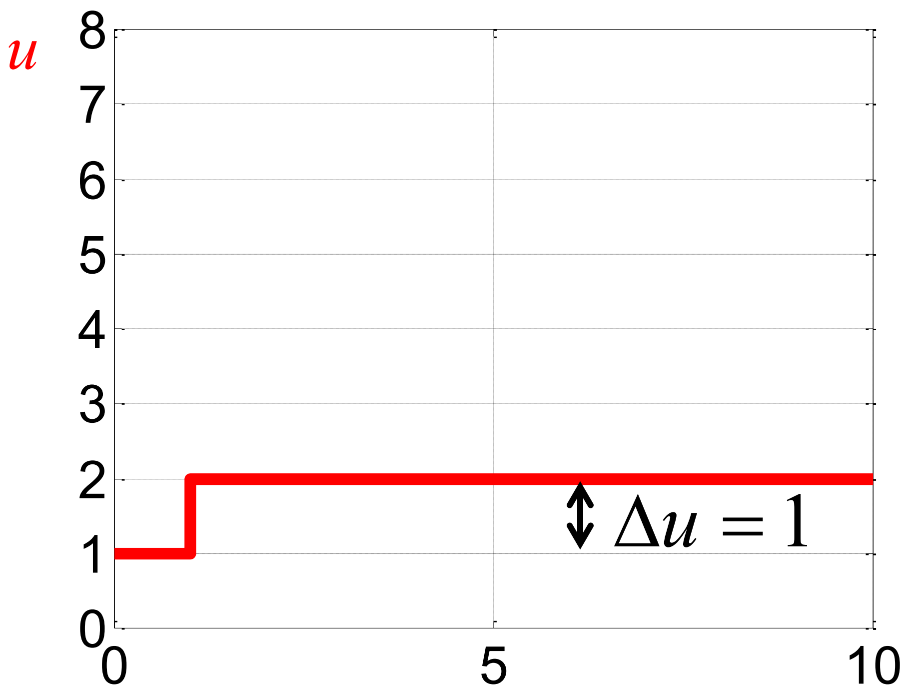
Partiendo de los datos obtenidos de un ensayo sobre un sistema, ¿cuál es su ganancia estática ?

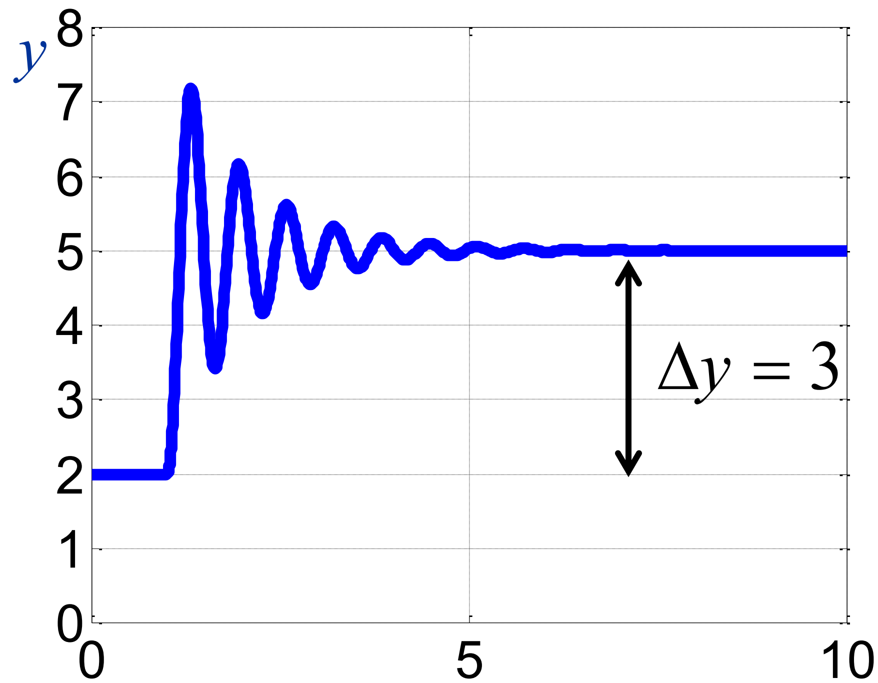






Ganancia estática





$$K_{est} = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{5-2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

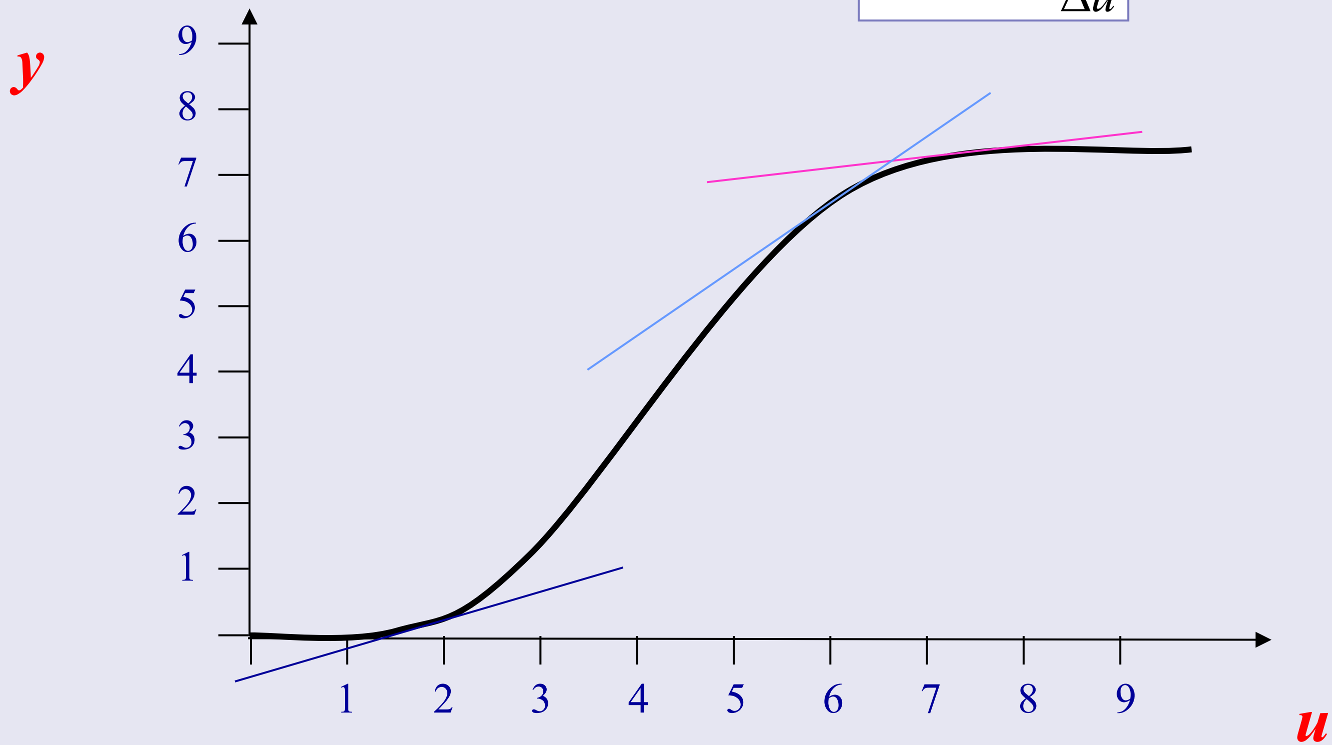
$$K_{est} \neq \frac{5}{2}$$

$$K_{est} \neq \frac{5}{1}$$

Ganancia estática

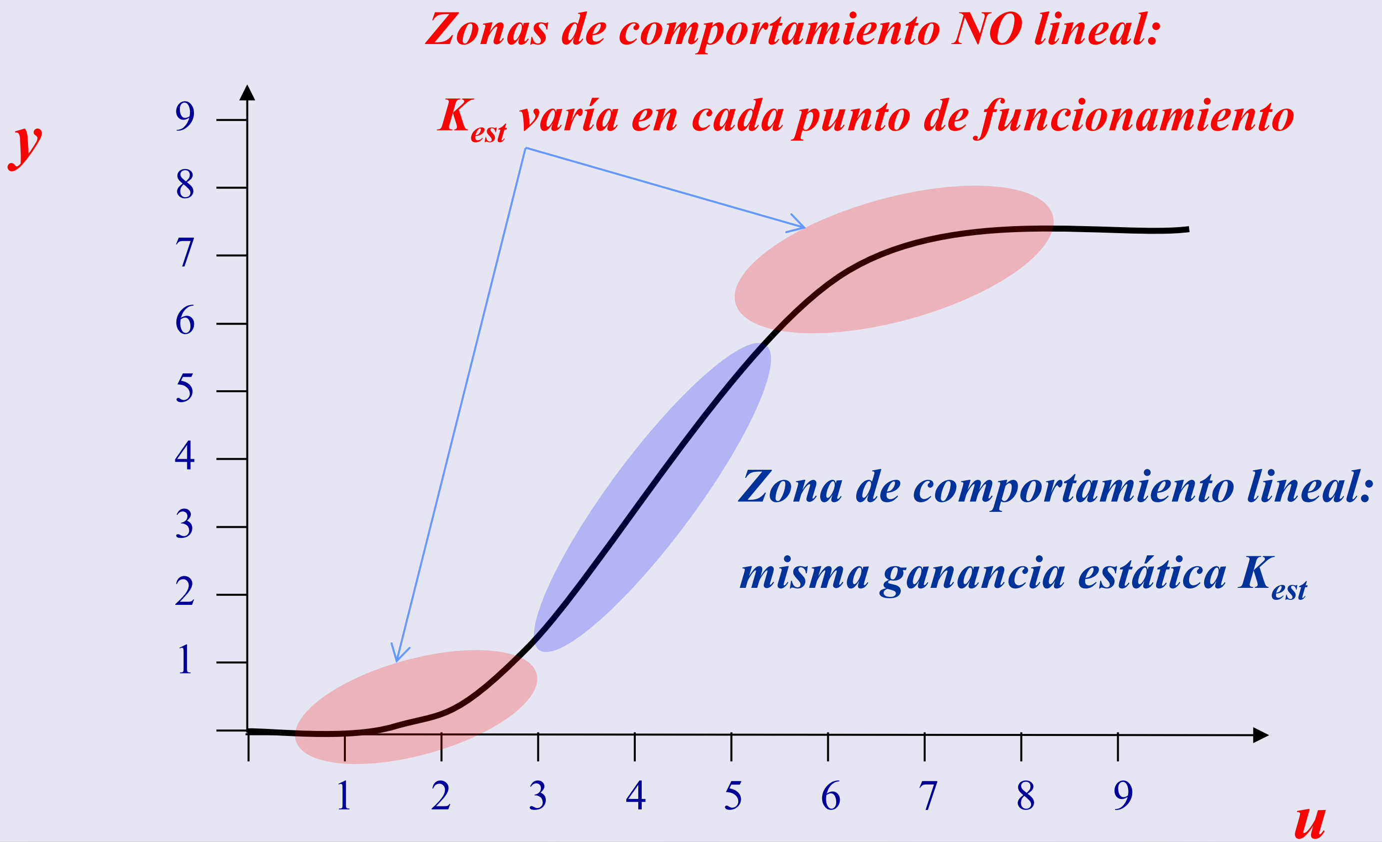
- *La característica estática de un sistema permite determinar cuál es su ganancia estática en cada punto de funcionamiento o equilibrio: es la pendiente de la tangente de la curva.*

$$K_{estática} = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

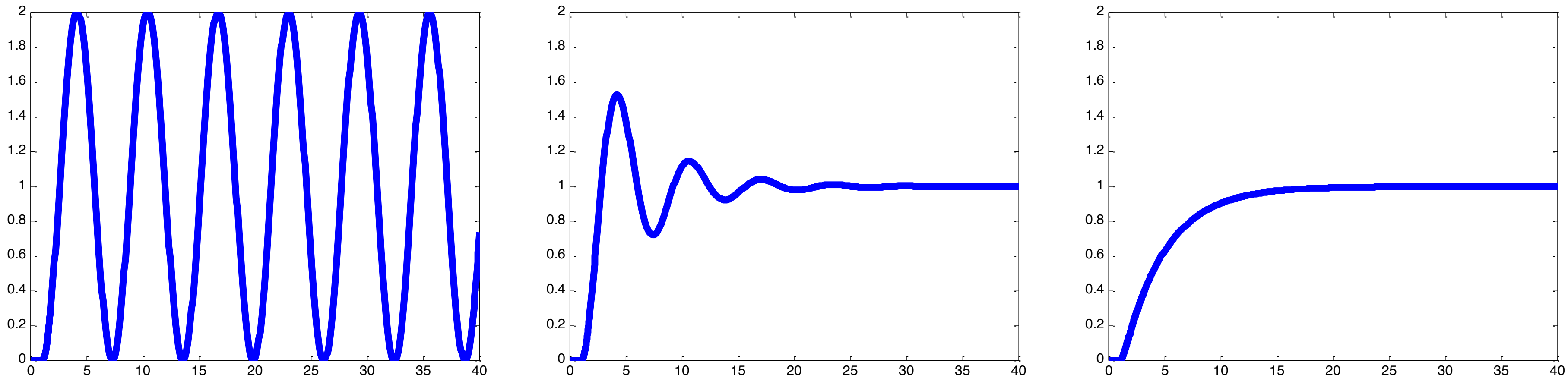


Ganancia estática

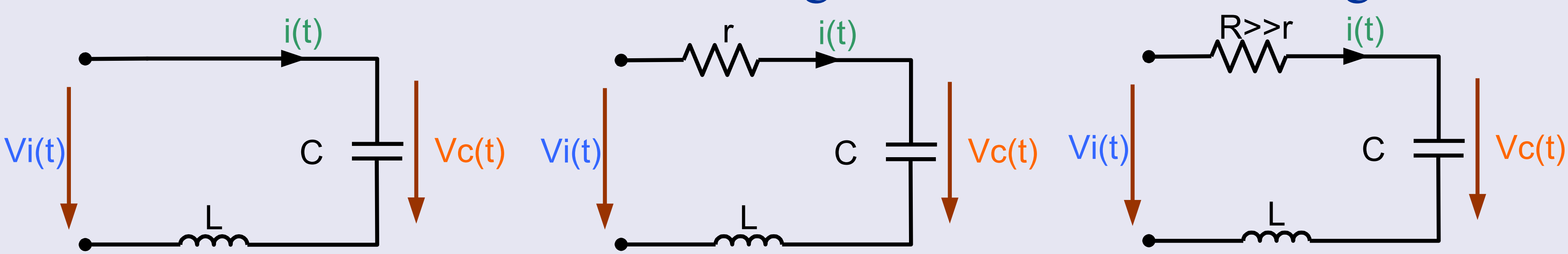
- *Las zonas lineales de la característica estática de un sistema tienen la misma pendiente, luego presenta la misma ganancia estática*



Sistemas lineales: comportamiento



Oscilatorio | Subamortiguado | Sobreamortiguado



(Ideal)