

Tema 3: Modelado de Sistemas

Índice del tema

- Modelado de sistemas
- Modelado de sistemas mecánicos
- Modelado de sistemas hidráulicos
- Modelado de sistemas eléctricos
- Modelado de sistemas térmicos
- Linealización de modelos
- Simulación de sistemas

Modelado de Sistemas

- Modelo: representación de un sistema
 - Representación matemática: Ecuaciones diferenciales
 - Modelo bien planteado:
Nº Ecuaciones=Nº variables independientes implicadas
 - Modelado a escala
- Utilidad del modelo
 - Análisis del comportamiento
 - Simulación del comportamiento
- Identificación de un modelo
 - Determinación de los parámetros del modelo a partir de ensayos experimentales.
 - Muy importante en ingeniería

Modelado de Sistemas

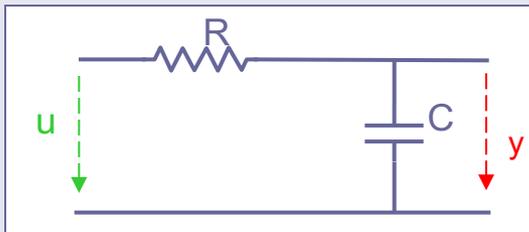
- Exactitud frente a sencillez del modelo
 - Compromiso



- Selección del modelo según su utilidad
 - Análisis:
 - Objetivo estudio cualitativo del comportamiento
 - El análisis es una tarea compleja
 - Preferiblemente sencillo recogiendo la dinámica
 - Simulación
 - Objetivo: reproducir con fiabilidad la evolución del sistema
 - Es una tarea más sencilla (integración numérica)
 - Preferiblemente modelos con errores pequeños

Modelado de Sistemas

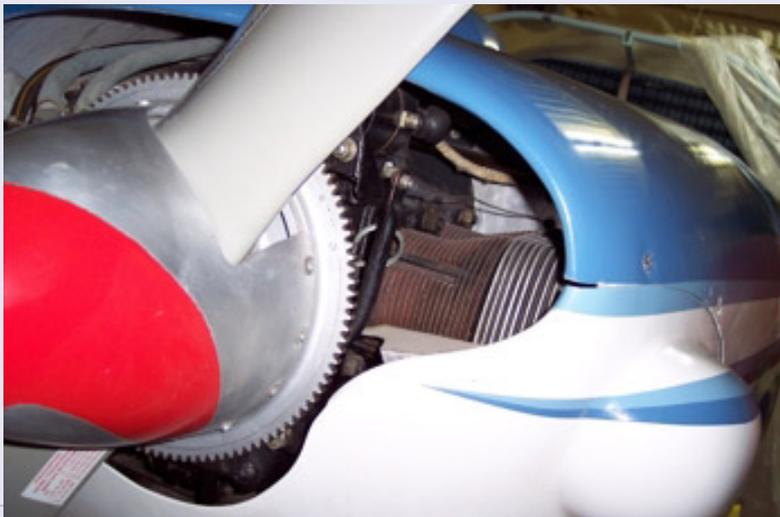
- Clasificación de los modelos
 - Deterministas y no deterministas
 - Paramétricos y no paramétricos
 - Modelado paramétrico se basa en
 - Modelo de fenómenos elementales
 - Ecuaciones de balance
 - Modelado no paramétrico o caja negra
 - El modelo se determina a partir de la respuesta del sistema
 - Parámetros concentrados y distribuidos



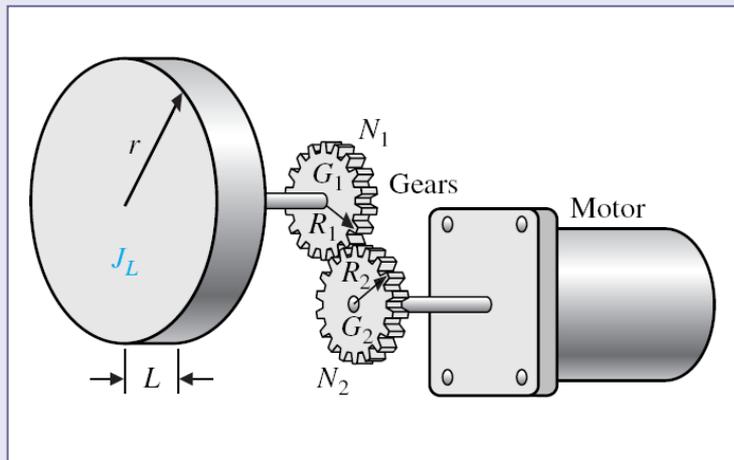
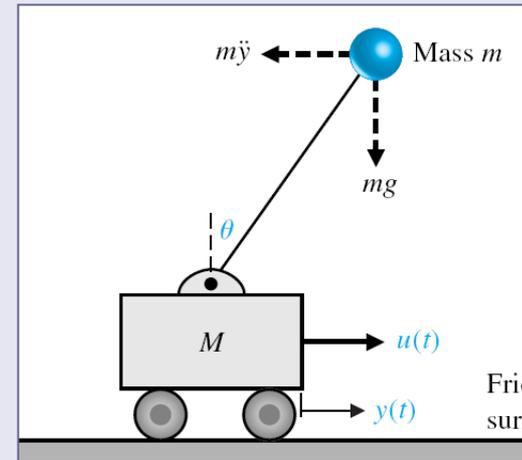
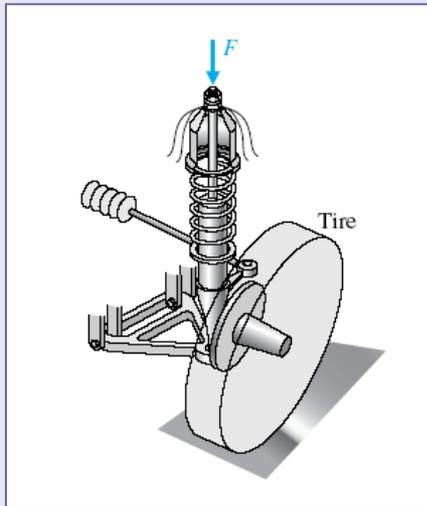
Índice del tema

- Modelado de sistemas
- **Modelado de sistemas mecánicos**
- Modelado de sistemas hidráulicos
- Modelado de sistemas eléctricos
- Modelado de sistemas térmicos
- Linealización de modelos
- Simulación de sistemas

Sistemas mecánicos



Elementos mecánicos: Masas y momentos de inercia



Elementos mecánicos: momentos de inercia

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{masas puntuales})$$

$$J = \int_V \rho r^2 dV \quad (\text{medio continuo})$$

Momentos de inercia de cuerpos simples	J
anillo delgado respecto al eje de revolución	mr^2
cilindro macizo respecto a su eje de revolución	$mr^2 / 2$
varilla respecto a un eje que pasa por su centro perpendicular a la misma	$mr^2 / 12$
anillo delgado respecto a un diámetro	$mr^2 / 2$
esfera respecto a un diámetro	$2mr^2 / 5$

Elementos mecánicos: resortes

Modela la deformación elástica



$$F_m = K(l - l_n)$$

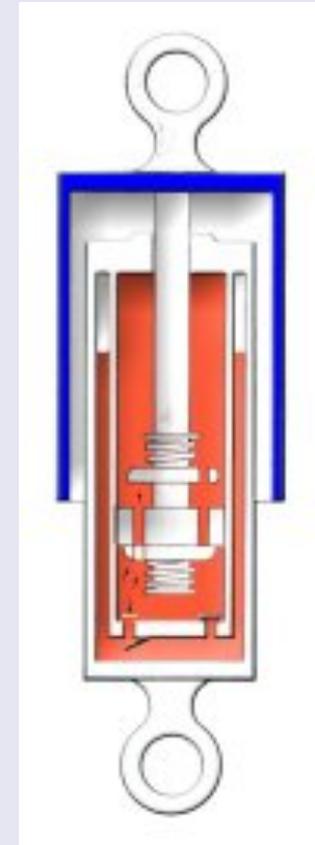


$$T_m = K(\theta - \theta_n)$$

Elemento: amortiguador

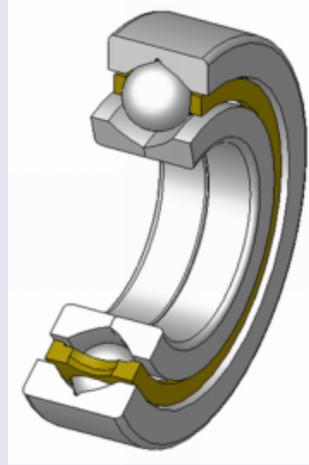
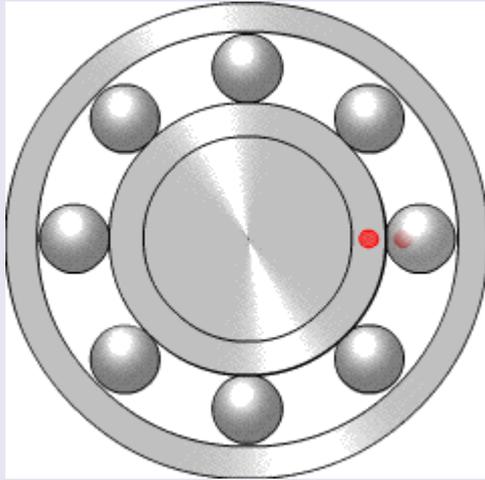


$$F_a = B \frac{dl}{dt}$$



Modela la fricción viscosa

Elementos mecánicos: cojinetes



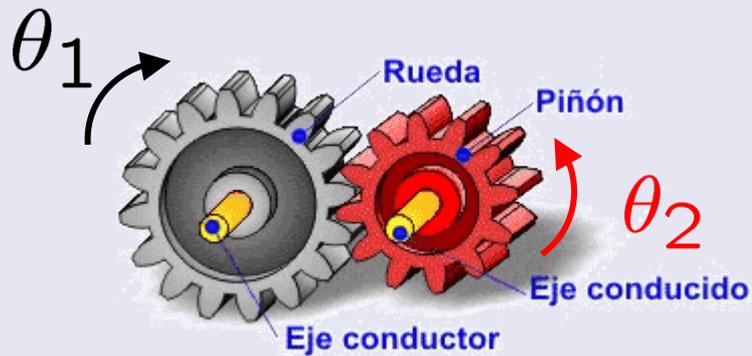
Elementos de sustentación de los ejes

Modelo: Fricción

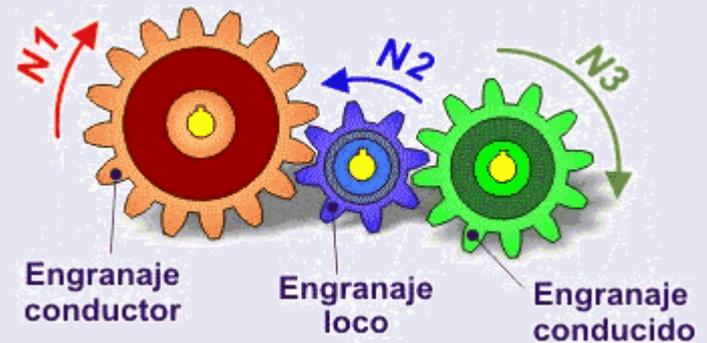
$$T_a = B \frac{d\theta}{dt}$$



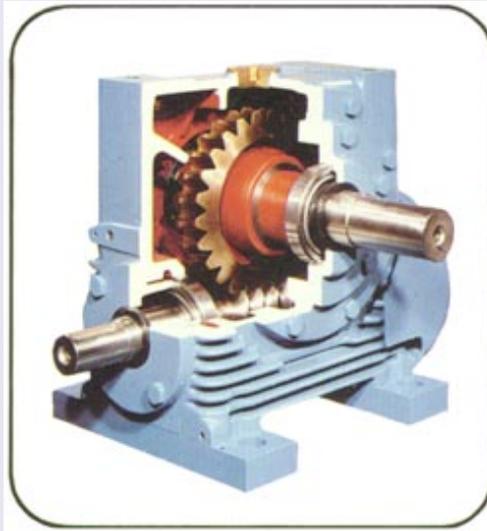
Elementos mecánicos: engranajes



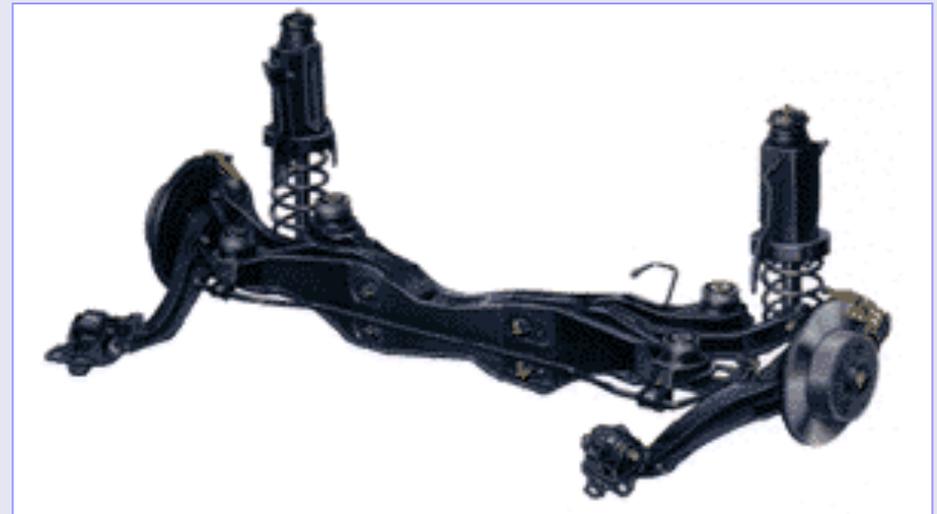
$$\theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \cdot \theta_1$$
$$T_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot T_1$$



Elementos mecánicos: engranajes



Sistemas mecánicos

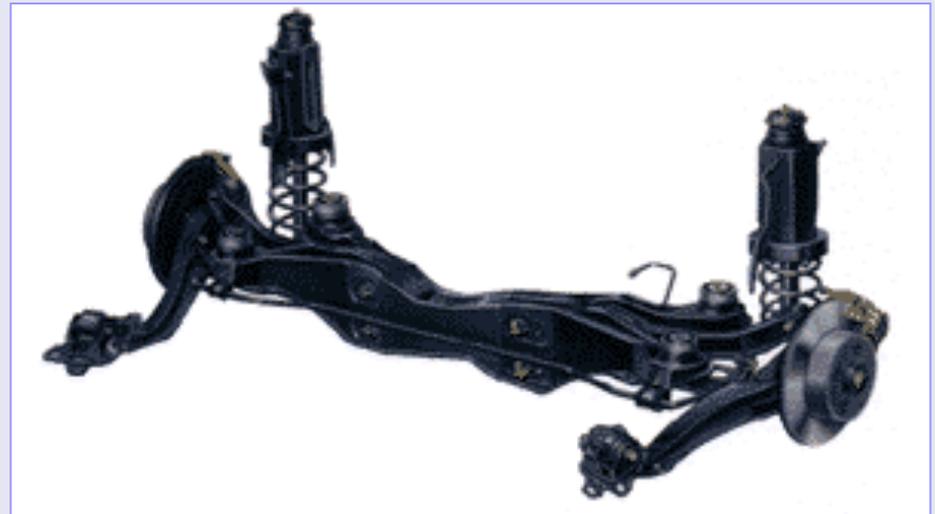


Sistemas mecánicos



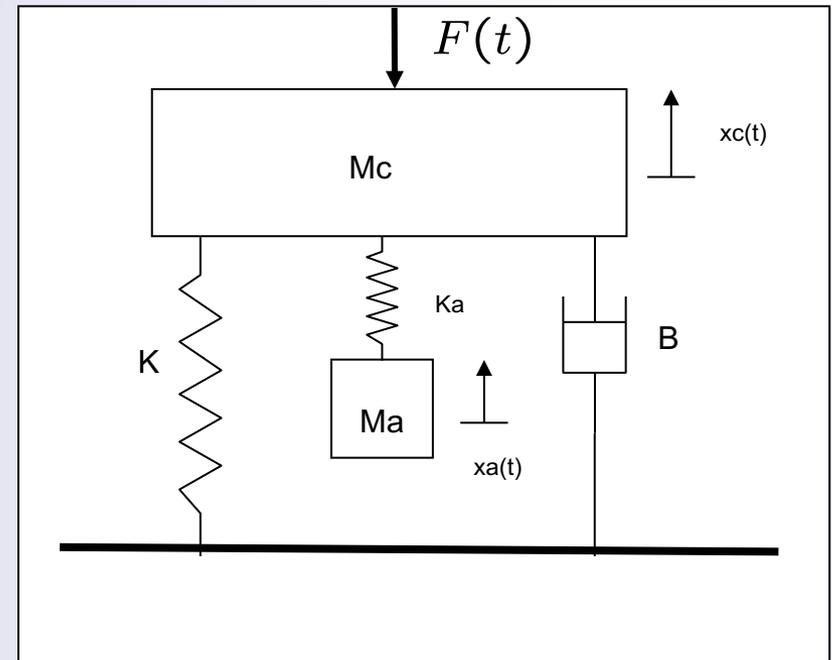
Traslación $\Sigma F = 0$

Rotación $\Sigma T = 0$



Sistemas mecánicos

- Ejemplo de sistema traslacional



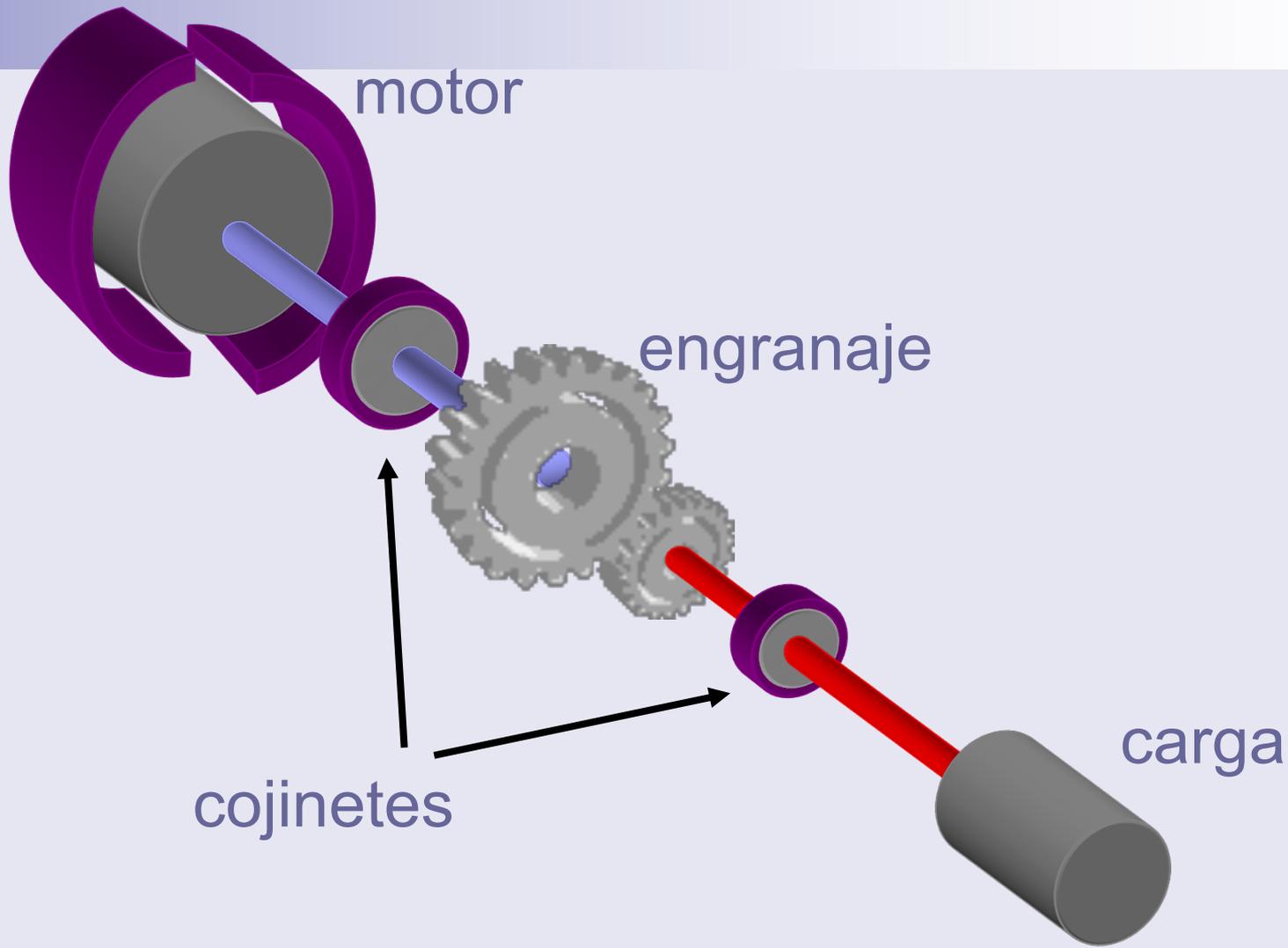
- Balance al cuerpo de masa M_c

$$M_c \ddot{x}_c(t) + K x_c(t) + B \dot{x}_c(t) + K_a (x_c(t) - x_a(t)) - F(t) = 0$$

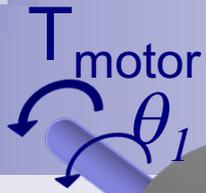
- Balance al cuerpo de masa M_a

$$M_a \ddot{x}_a(t) - K_a (x_c(t) - x_a(t)) = 0$$

Sistema mecánico rotacional:



Sistema mecánico rotacional:



T_{motor} : Par motor responsable del movimiento del eje 1

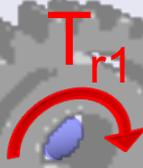
T_{i1} : Par de inercia del eje 1. Par resistente (contrario al mov.)



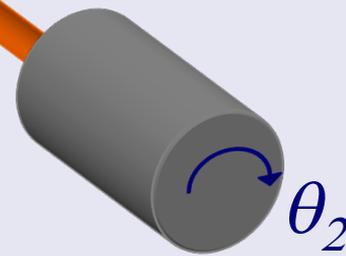
T_{B1} : Par de fricción viscosa del eje 1.
Par resistente (contrario al mov.)



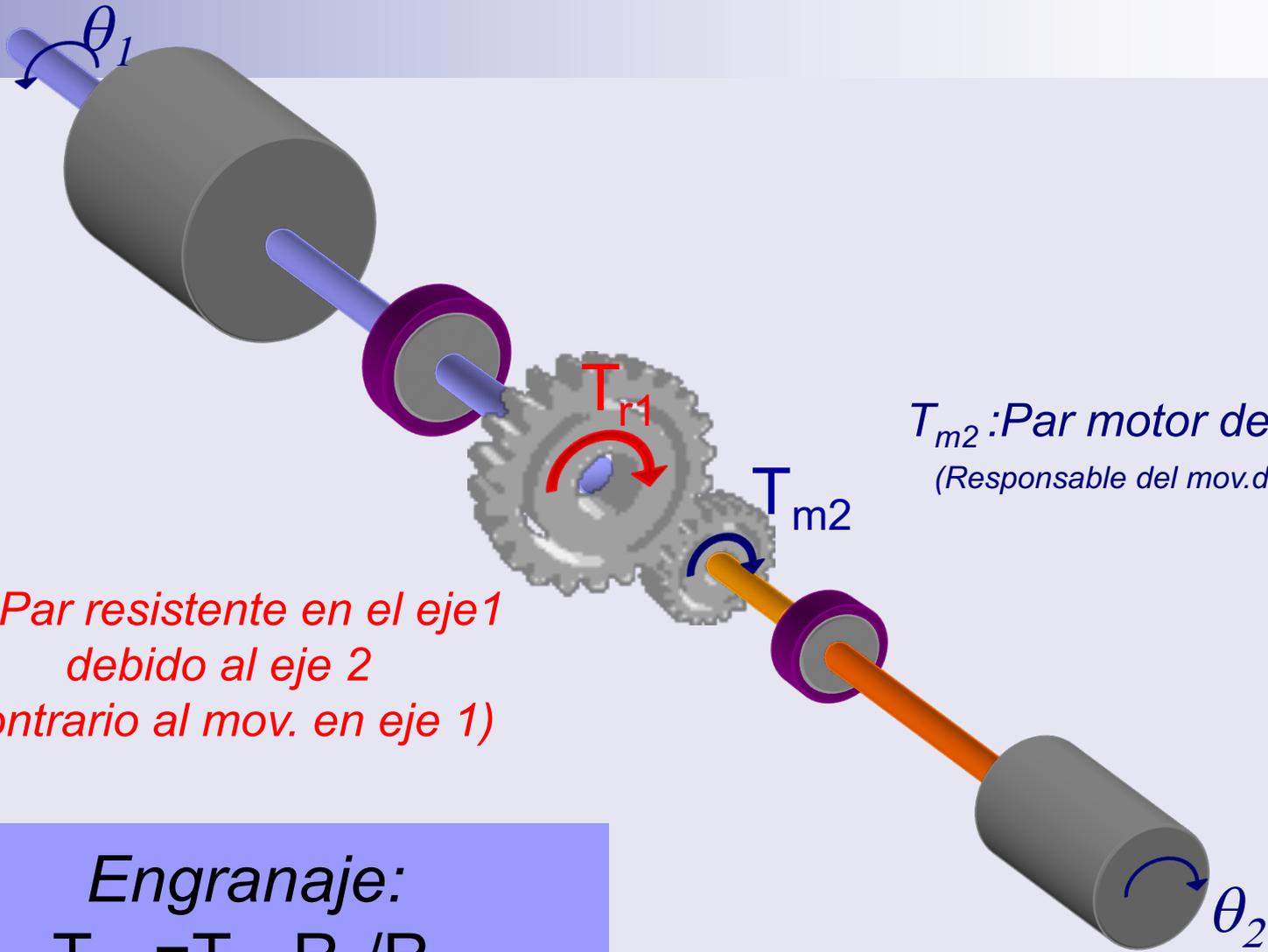
T_{r1} : Par resistente en el eje 1
debido al eje 2
(contrario al mov.)



Eje 1 : $T_{\text{motor}} - T_{i1} - T_{B1} - T_{r1} = 0$
 $\Sigma T = 0$



Sistema mecánico rotacional:



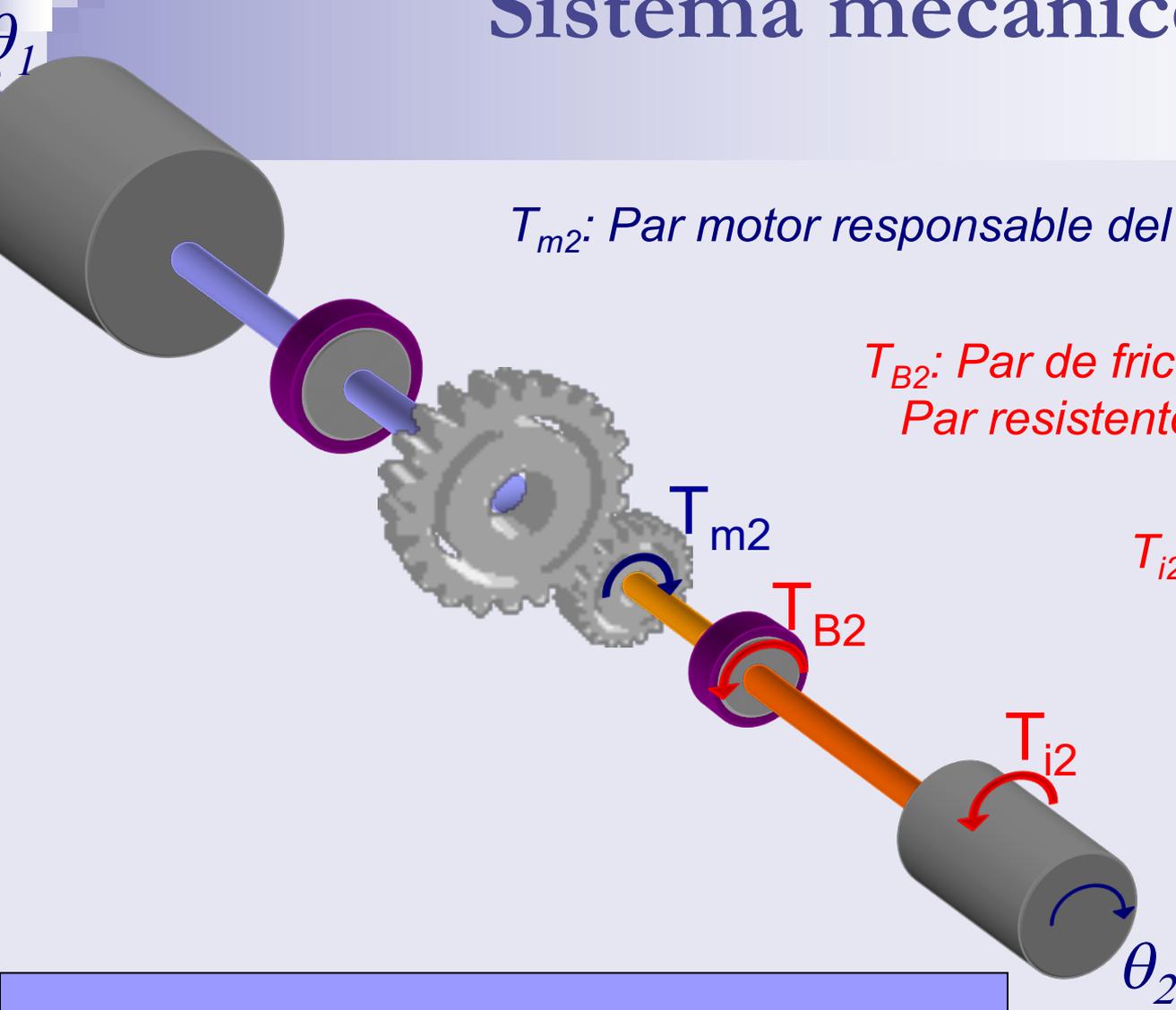
T_{m2} : Par motor del eje 2
(Responsable del mov. del eje 2)

T_{r1} : Par resistente en el eje 1
debido al eje 2
(contrario al mov. en eje 1)

Engranaje:

$$T_{m2} = T_{r1} R_2 / R_1$$

Sistema mecánico rotacional:



T_{m2} : Par motor responsable del movimiento del eje 2

T_{B2} : Par de fricción viscosa del eje 2
Par resistente (contrario al mov.)

T_{i2} : Par de inercia del eje 2
Par resistente (contrario al mov.)

Eje 2 : $T_{m2} - T_{B2} - T_{i2} = 0$
 $\Sigma T = 0$

Sistema mecánico rotacional

$$T_{motor} - J_1 \ddot{\theta}_1 - B_1 \dot{\theta}_1 - T_{r1} = 0$$

$$T_{m2} - J_2 \ddot{\theta}_2 - B_2 \dot{\theta}_2 = 0$$

$$T_{m2} = \frac{R_2}{R_1} T_{r1}$$

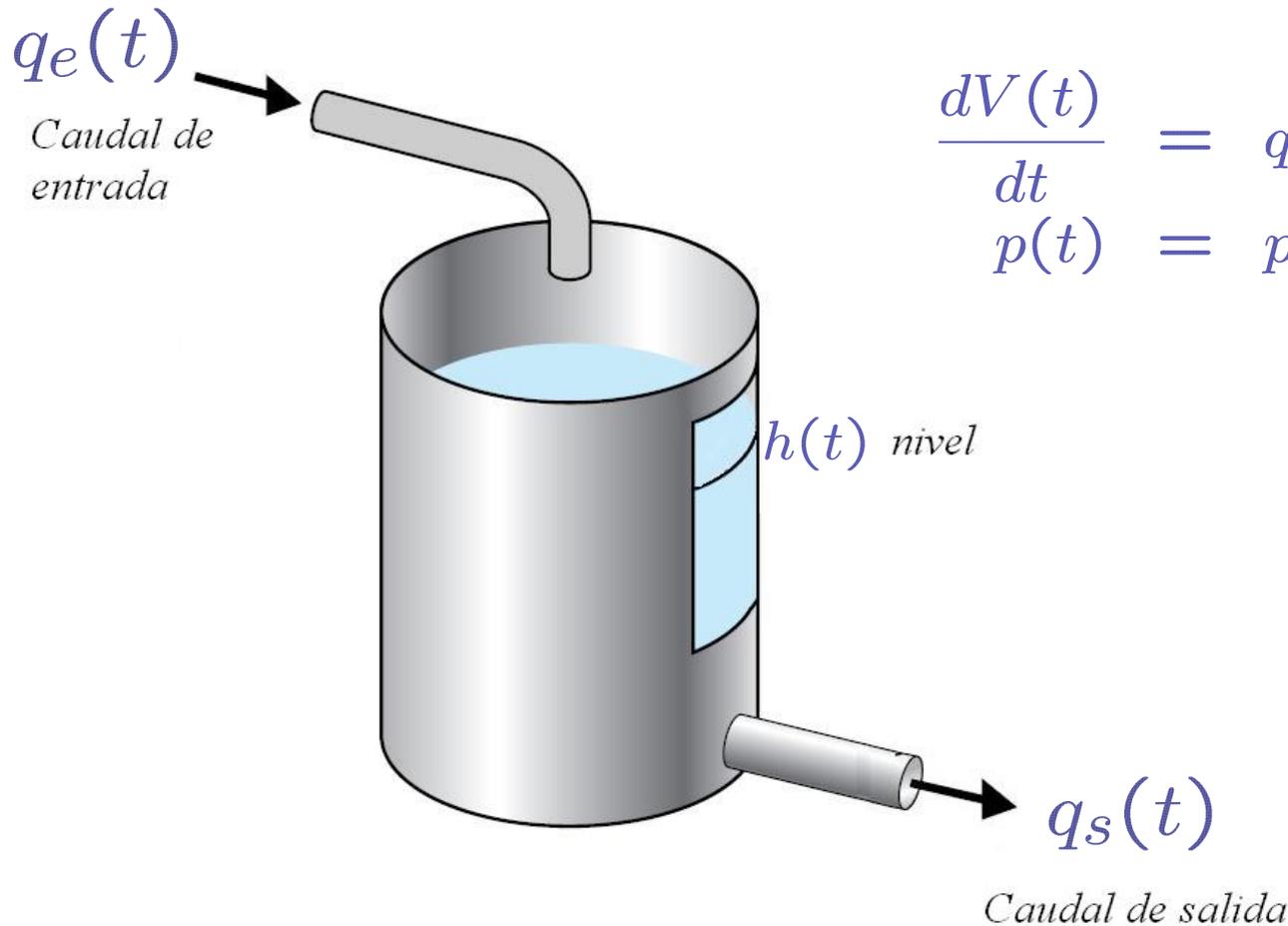
$$\theta_2 = \frac{R_1}{R_2} \theta_1$$

$$T_{motor} = \left\{ J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 \right\} \ddot{\theta}_1 + \left\{ B_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 B_2 \right\} \dot{\theta}_1$$

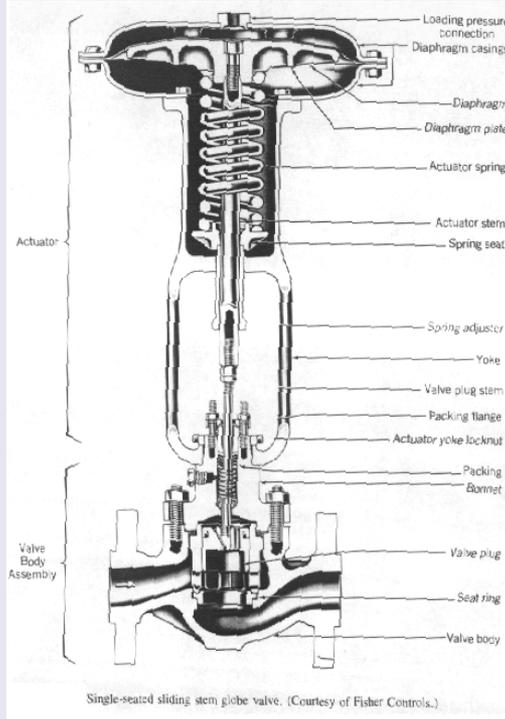
Índice del tema

- Modelado de sistemas
- Modelado de sistemas mecánicos
- **Modelado de sistemas hidráulicos**
- Modelado de sistemas eléctricos
- Modelado de sistemas térmicos
- Linealización de modelos
- Simulación de sistemas

Sistemas hidráulicos: depósito



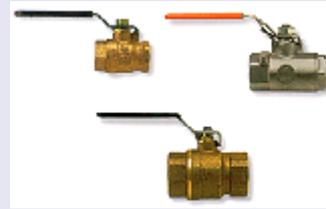
Sistemas hidráulicos: válvulas y tuberías



Asiento



Mariposa

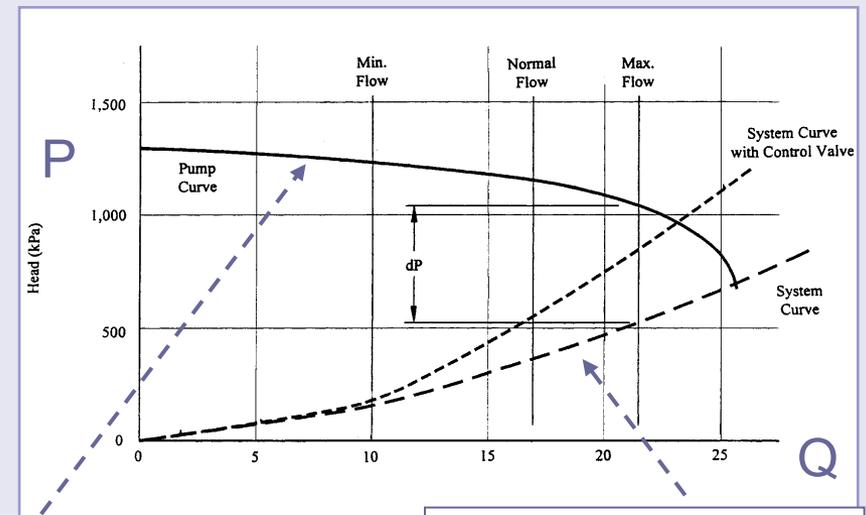
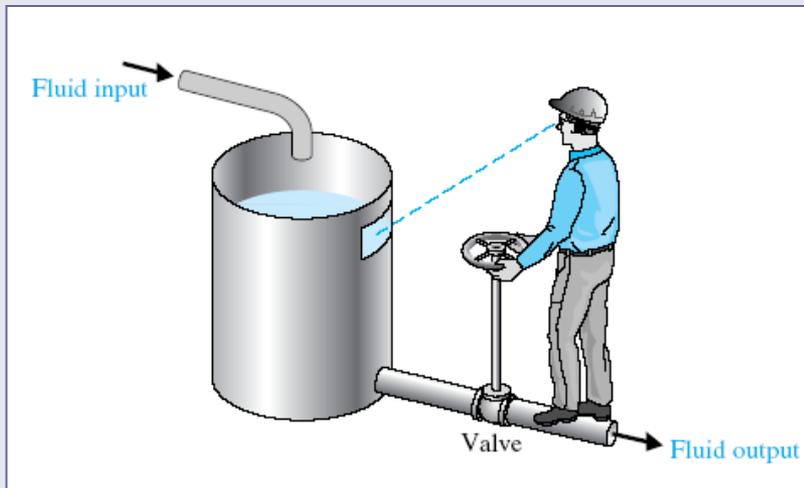


Bola



Sistemas hidráulicos: válvulas y tuberías

El fluido circula impulsado por la diferencia de presión



Presión de impulsión

Caída de presión en
instalación

Cerrando la válvula (o añadiendo más tubería)
se aumentan las pérdidas



Menor caudal

Sistemas hidráulicos: válvulas y tuberías

Ec. Bernouilli

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \text{Pérdidas}$$
$$q = S \cdot v$$

Típicamente $h_1 = h_2$, $v_1 = v_2$

$$\text{Pérdidas} = p_1 - p_2$$

■ Tubería

$$\text{Pérdidas} = K \frac{1}{2} v^2$$

K = Coef. pérdidas

- Material
- Longitud
- Geometría
- Condiciones del flujo

Para una misma diferencia de presión:

$$\uparrow K \rightarrow \downarrow v \rightarrow \downarrow q$$

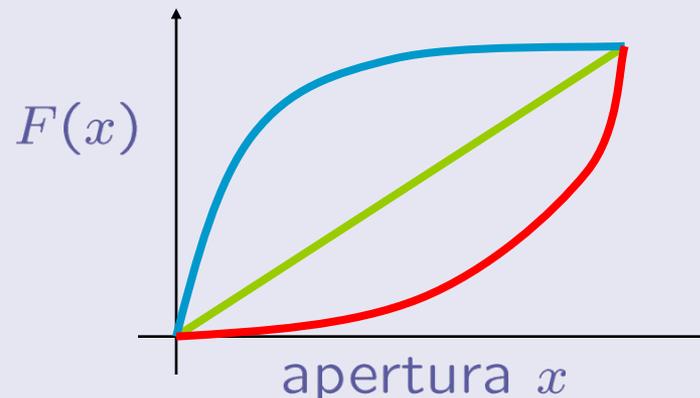
Sistemas hidráulicos: válvulas y tuberías

■ Válvulas

$$q = K_v \sqrt{\Delta p_v}$$

K_v varía con la apertura de la válvula $x \in [0, 1]$

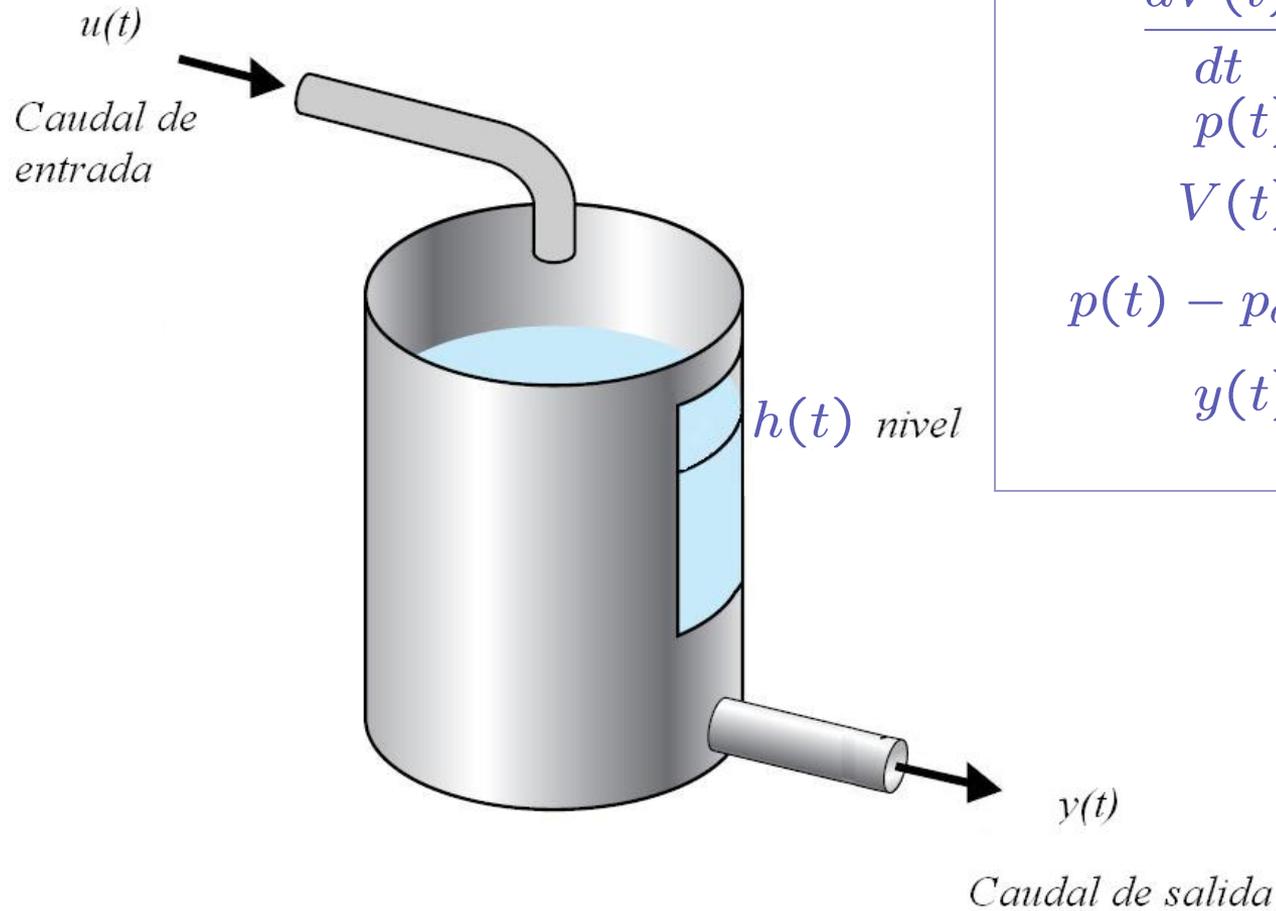
$$K_v = K_{vs} F(x)$$



Apertura rápida
Lineal
Isoporcentual

$F(x)$ Característica de la válvula

Sistemas hidráulicos



$$\frac{dV(t)}{dt} = u(t) - y(t)$$

$$p(t) = p_a + \rho g h(t)$$

$$V(t) = A h(t)$$

$$p(t) - p_a = \frac{1}{2} K v^2$$

$$y(t) = S v(t)$$

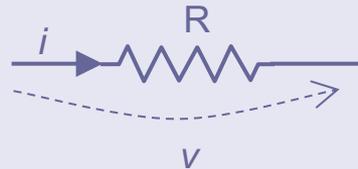
Índice del tema

- Modelado de sistemas
- Modelado de sistemas mecánicos
- Modelado de sistemas hidráulicos
- **Modelado de sistemas eléctricos**
- Modelado de sistemas térmicos
- Linealización de modelos
- Simulación de sistemas

Sistemas eléctricos

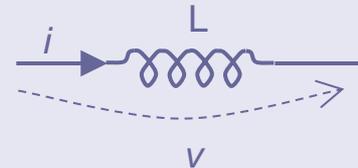
■ Elementos ideales

□ Resistencia



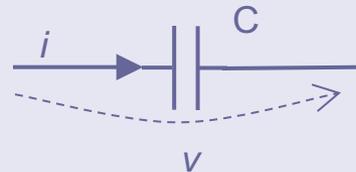
$$v(t) = R i(t)$$

□ Bobina



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

□ Condensador



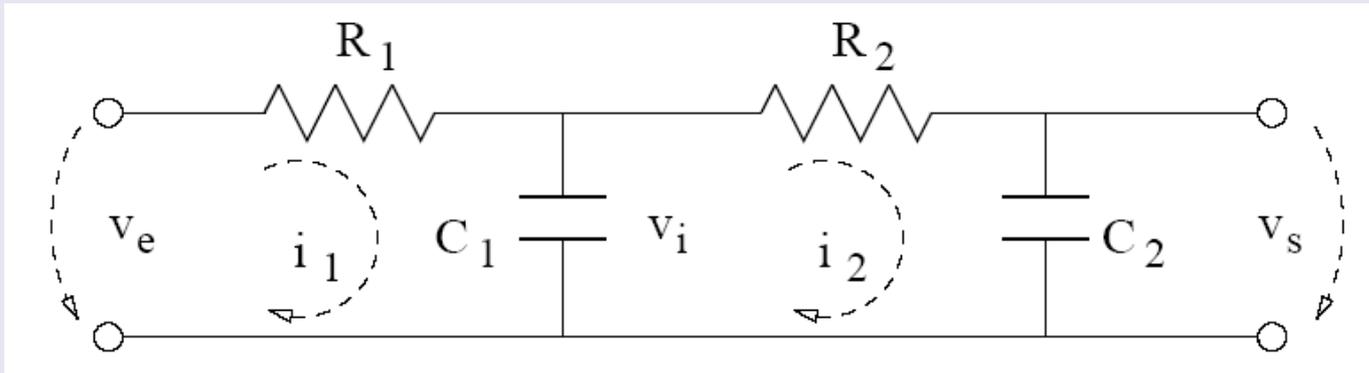
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

■ Ecuaciones de Kirchoff

$$\text{Nudo: } \sum_j i_j(t) = 0$$

$$\text{Bucle: } \sum_j v_j(t) = 0$$

Sistemas eléctricos



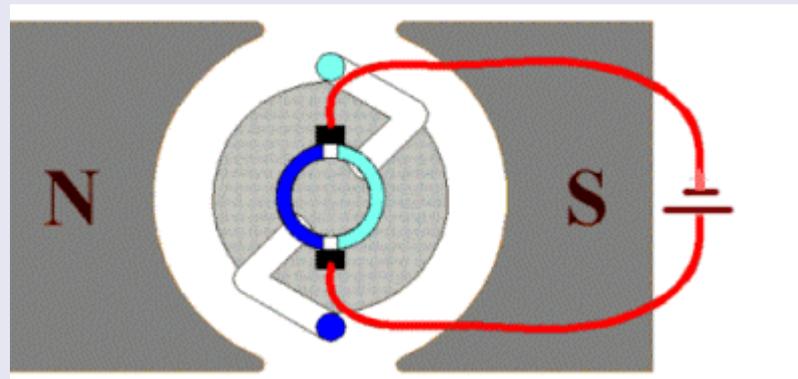
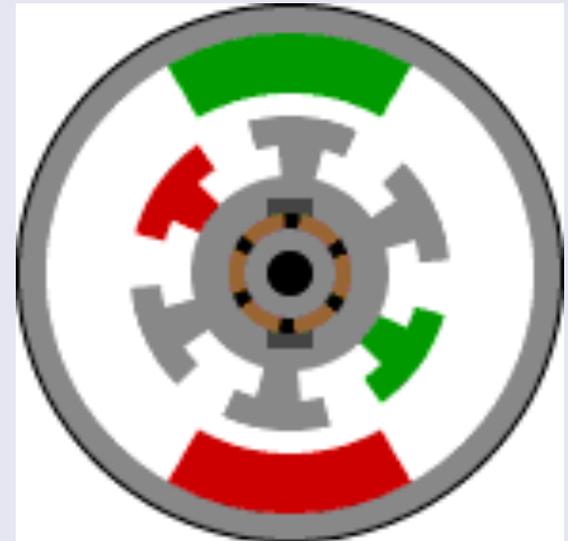
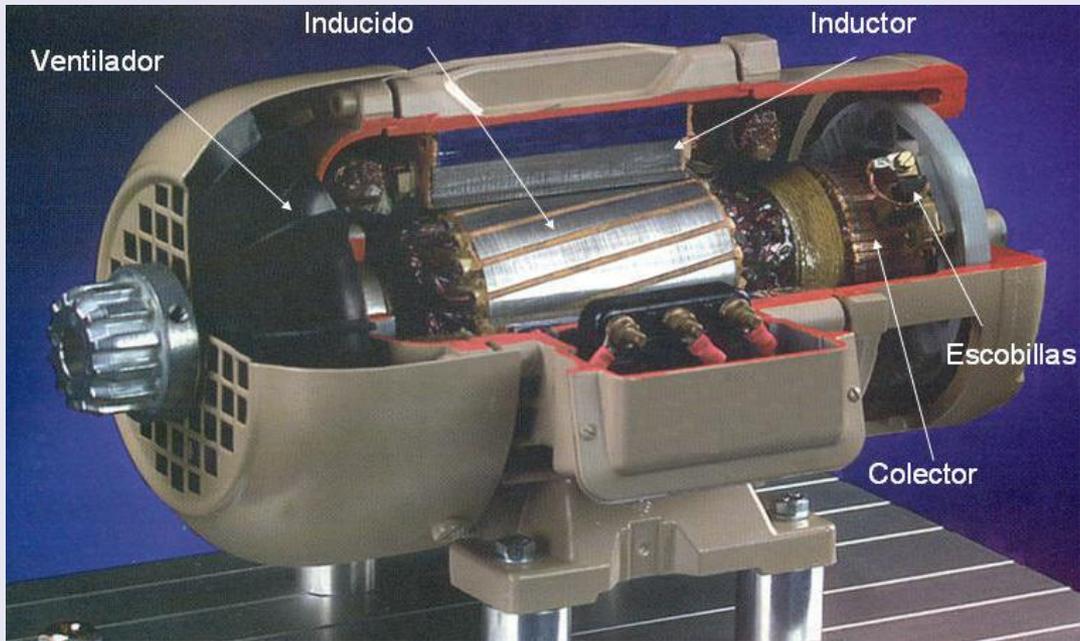
$$v_e = i_1 R_1 + v_i$$

$$i_1 - i_2 = C_1 \frac{dv_i}{dt}$$

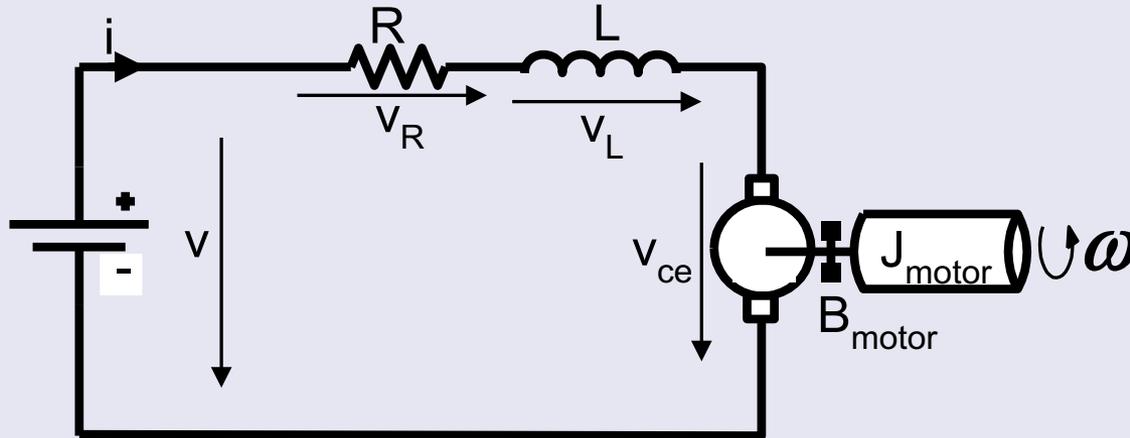
$$v_i = i_2 R_2 + v_s$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_s}{dt}$$

Motor de corriente continua:



Motor de corriente continua:



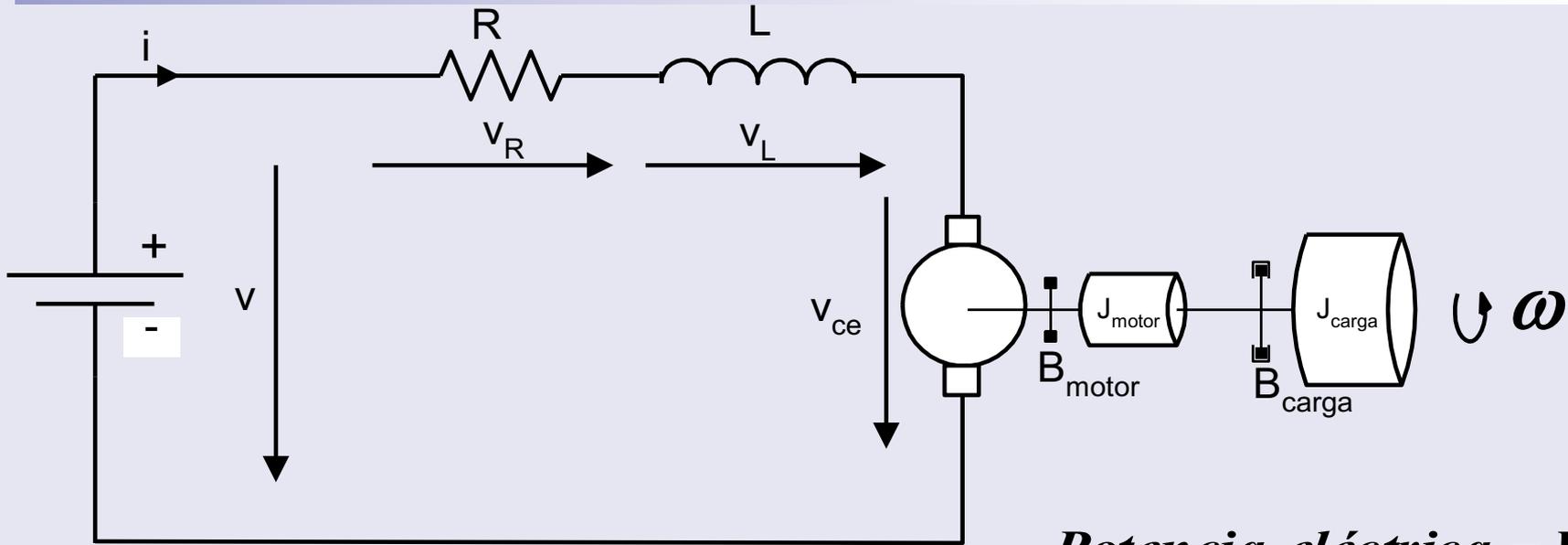
$$V = V_R + V_L + V_{ce} = R i + L \frac{di}{dt} + V_{ce}$$

$$V_{ce} = K_{ce} \omega$$

$$T = K_{par} i$$

$$T = J_{\text{motor}} \frac{d\omega}{dt} + B_{\text{motor}} \omega$$

Motor de corriente continua:



$$V = V_R + V_L + V_{ce} = R i + L \frac{di}{dt} + V_{ce}$$

$$V_{ce} = K_{ce} \omega$$

$$T = K_{par} i$$

$$T = (J_{motor} + J_{carga}) \frac{d\omega}{dt} + (B_{motor} + B_{carga}) \omega$$

Potencia eléctrica = $V i$

Potencia mecánica = $T \omega$

Índice del tema

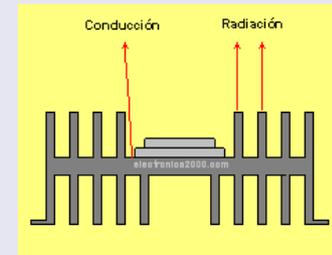
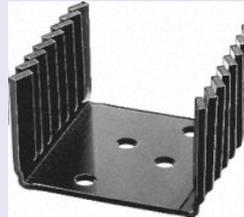
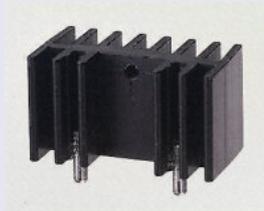
- Modelado de sistemas
- Modelado de sistemas mecánicos
- Modelado de sistemas hidráulicos
- Modelado de sistemas eléctricos
- **Modelado de sistemas térmicos**
- Linealización de modelos
- Simulación de sistemas

Sistemas térmicos

■ Mecanismos de transferencia de Calor

□ Conducción:

- Materiales en contacto a distintas temperaturas



$$\dot{Q} = K_{cond} A (T_1 - T_2)$$

$$K_{cond} \quad [W/^\circ K m^2]$$

Coeficiente de transferencia de calor por conducción

Sistemas térmicos

□ Convección

$$\dot{Q} = K_{conv} A (T_1 - T_2)$$

$$K_{cond} \quad [W/^\circ K m^2]$$

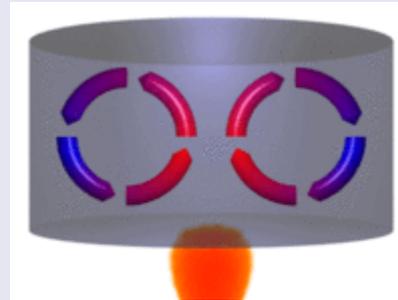
Coeficiente de transferencia de calor por convección

Depende de:

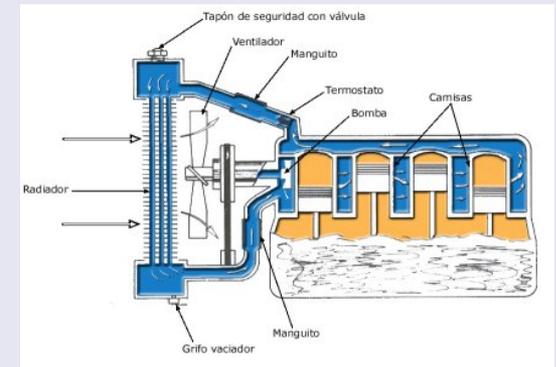
- Condiciones del flujo (Re)
- Velocidad del fluido
- Características del fluido

} Aproximación lineal

natural



forzada



Sistemas térmicos

□ Radiación

$$\dot{Q} = K_{rad}(T_1^4 - T_2^4)$$

K_{rad} Depende de

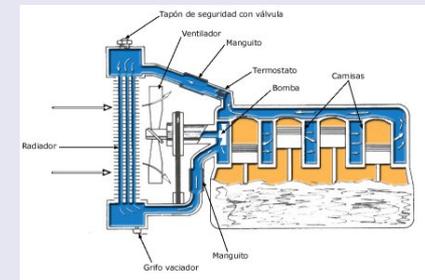
- Posición relativa (Factor de forma)
- Medio en el que se propaga



□ Mecanismos combinados

$$\dot{Q} = U A(T_1 - T_2)$$

U Coeficiente global de transferencia de calor

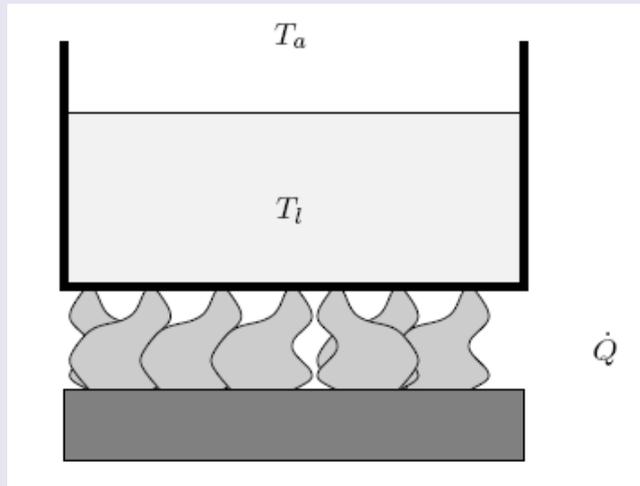


Sistemas térmicos

- Balance de Energía

C_e Calor específico

$$\frac{d(mC_e T)}{dt} = \dot{Q}_{aportado} - \dot{Q}_{cedido}$$



$$mC_e \frac{dT_l}{dt} = \dot{Q} - K_{conv} A (T_l - T_a)$$

(Simplificación)

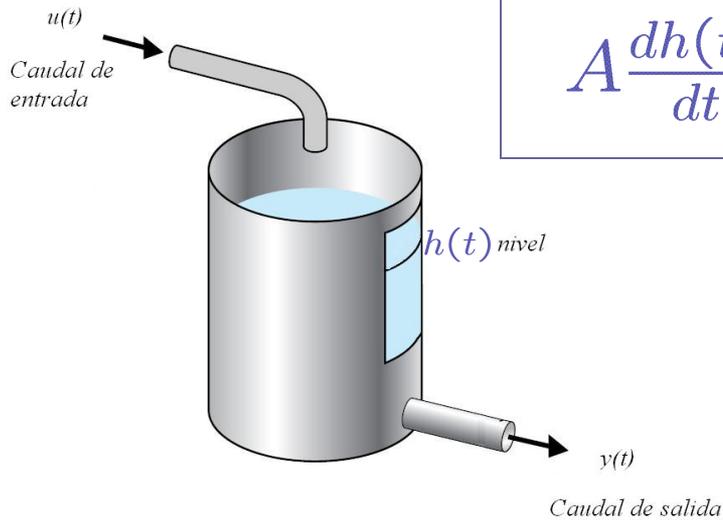
Índice del tema

- Modelado de sistemas
- Modelado de sistemas mecánicos
- Modelado de sistemas hidráulicos
- Modelado de sistemas eléctricos
- Modelado de sistemas térmicos
- **Linealización de modelos**
- Simulación de sistemas

Linealización de sistemas

- **Objetivo:**
 - obtener modelos lineales aproximados a partir de modelos no lineales
- **Punto de funcionamiento:**
 - Punto de equilibrio en torno al que se linealiza
- **Propiedades:**
 - Representa bien al sistema en una cierta zona en torno a un punto de equilibrio.
 - Fuera de la zona de validez, el modelo linealizado tiene un error demasiado grande.

Ejemplo ilustrativo



$$A \frac{dh(t)}{dt} = q(t) - k\sqrt{h(t)}$$

Punto de Funcionamiento

$$0 = q_0 - k\sqrt{h_0}$$

Definiendo *variables incrementales*

$$q(t) = q_0 + \beta(t) \quad h(t) = h_0 + \alpha(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

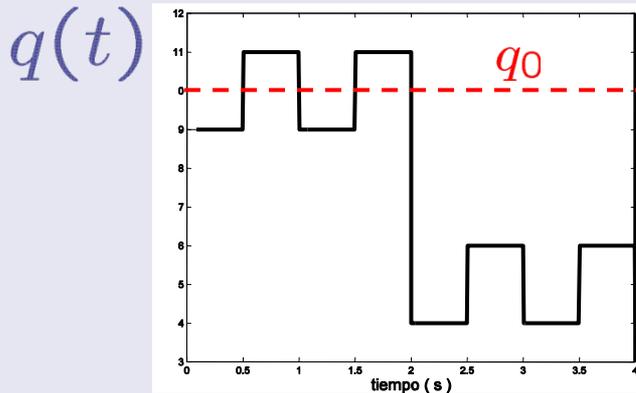
$$q(t) - q_0 = \beta(t)$$

$$\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} \simeq \frac{1}{2\sqrt{h_0}}\alpha(t)$$

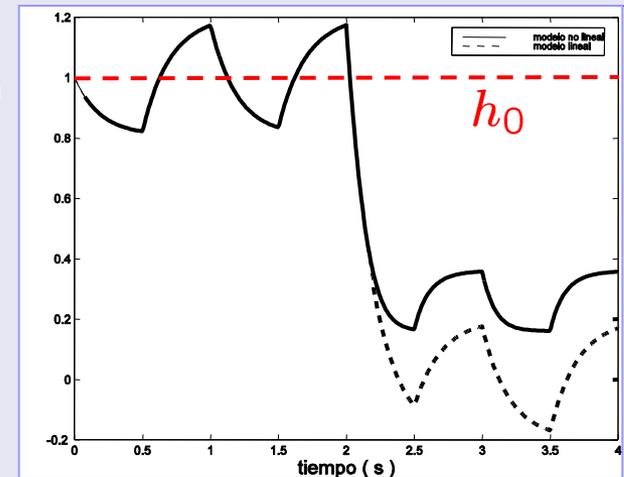
$$A \frac{dh(t)}{dt} = (q(t) - q_0) - k(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0})$$

$$A \frac{d\alpha(t)}{dt} = \beta(t) - \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\alpha(t)$$

Ejemplo ilustrativo

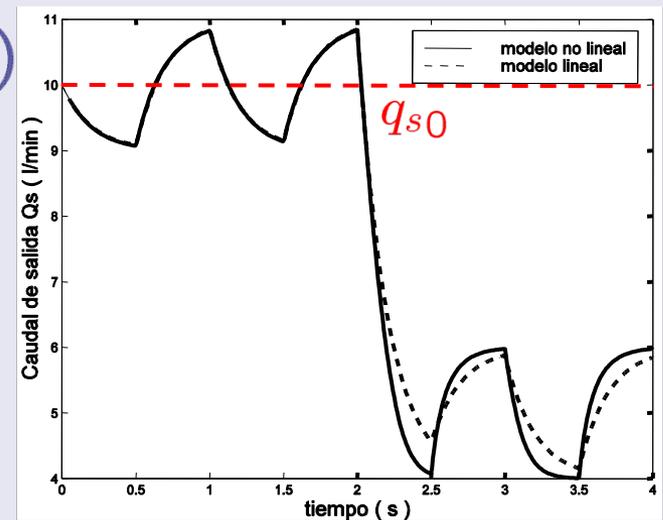


$h(t)$



- Buena aproximación en torno al punto de funcionamiento
- Para variaciones grandes, el modelo lineal puede ser erróneo
- Todas las señales del sistema evolucionan en torno a su valor en el punto de equilibrio

$q_s(t)$



Linealización de sistemas

Sea el modelo de un sistema no lineal de orden 2:

$$f(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u) = 0$$

El punto de equilibrio viene dado por:

$$f(0, 0, y_0, 0, u_0) = 0$$

Se definen las variables incrementales

$$\alpha(t) = y(t) - y_0, \quad \beta(t) = u(t) - u_0$$

Las variables incrementales dependen del punto de funcionamiento elegido

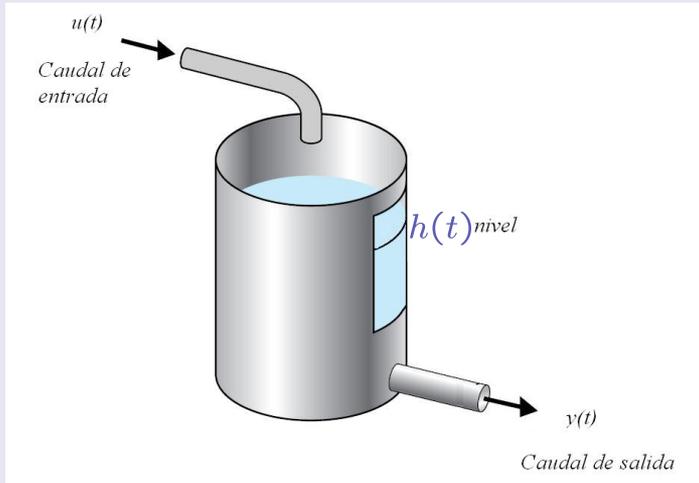
Linealización de sistemas

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor en torno al punto de funcionamiento ($\ddot{y} = 0, \dot{y} = 0, y = y_0, \dot{u} = 0, u = u_0$)

$$\begin{aligned} f(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{u}, u) &\simeq \underbrace{f(0, 0, y_0, 0, u_0)}_{=0} + \\ &\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right]_{pf} \ddot{\alpha} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{pf} \dot{\alpha} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{pf} \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right]_{pf} \dot{\beta} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{pf} \beta \\ &+ \underbrace{\mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2)}_{\text{Error de linealización}} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \right]_{pf} \ddot{\alpha} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{pf} \dot{\alpha} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{pf} \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right]_{pf} \dot{\beta} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{pf} \beta = 0$$

Ejemplo



$$A \frac{dh(t)}{dt} = u(t) - k\sqrt{h(t)}$$

$$f(\dot{h}, h, u) = A\dot{h} + k\sqrt{h} - u = 0$$

Punto de equilibrio:

$$f(0, h_0, u_0) = k\sqrt{h_0} - u_0 = 0$$

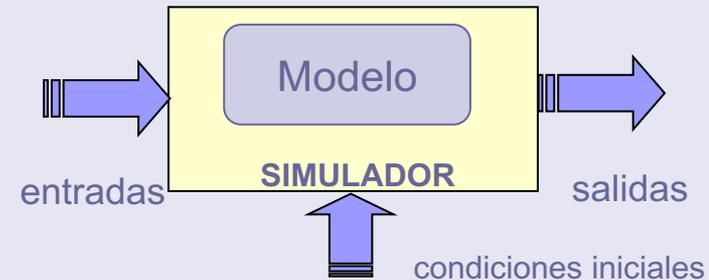
Variables incrementales: $\alpha(t) = h(t) - h_0$, $\beta(t) = u(t) - u_0$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{h}} \right]_{pf} \dot{\alpha} + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right]_{pf} \alpha + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right]_{pf} \beta = 0$$

$$A\dot{\alpha} + \frac{k}{2\sqrt{h_0}}\alpha - 1\beta = 0$$

Simulación de sistemas

- Integración numérica de las ecuaciones diferenciales
- Discretización del tiempo $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$
 - Paso de integración
- Determinación de las salidas $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$
- Ejemplo: método de Euler



- Inicio: $y_0 = y(0)$
- Para $k=1$ hasta N
 - $t_k = k h$
 - $y_k = y_{k-1} + h \left(\frac{1}{A} q_{k-1} - \frac{K_p}{A} \sqrt{y_{k-1}} \right)$
- Fin

$$\dot{y}(t) = \left(\frac{1}{A} q(t) - \frac{K_p}{A} \sqrt{y(t)} \right)$$

