Teoría de Sistemas y Control Automático
Linealización de un sistema no lineal

Dr. Antonio Ferramosca - e-mail: *ferramosca@santafe-conicet.gob.ar*
Ing. Ivan Talijancic - e-mail: *italijancic@outlook.com*

4º y 5º Ing. Electromecánica
UTN - Facultad Regional Reconquista

Linealización

- El procedimiento de linealización consiste en describir el comportamiento de un sistema no lineal en torno a un punto de equilibrio (PE) concreto, mediante un sistema lineal especifico.
- Es sólo una aproximación del sistema original en el PE: si el sistema se aleja mucho de este punto de equilibrio el error de aproximación será alto.
- Es un procedimiento muy útil para tratar muchos problemas concretos, a los que se pueden aplicar métodos de análisis y síntesis disponibles para sistemas lineales.
- Dado un PE $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$, se plantea el sistema en variables incrementales, es decir en incrementos con respeto al PE

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + \delta x(t) \\ u(t) &= \bar{u} + \delta u(t) \\ y(t) &= \bar{y} + \delta y(t) \end{aligned}$$

Linealización

- Dado un sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

por una entrada constante $u(t) = \bar{u}$, en el equilibrio tendremos

$$\begin{aligned} 0 &= f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} &= g(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$

- El objetivo de la linealización es encontrar un sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{\delta x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{aligned}$$

tal que

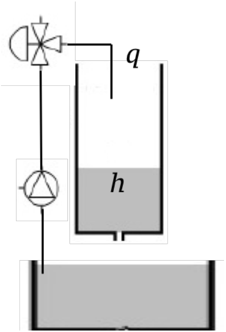
$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + \delta x(t) \\ u(t) &= \bar{u} + \delta u(t) \\ y(t) &= \bar{y} + \delta y(t) \end{aligned}$$

Tanque

Problema de la regulación del nivel de fluido en un tanque.

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q(t)}{A} - \frac{K}{A}\sqrt{gh(t)}$$

- h: nivel de fluido
- q: caudal en entrada
- A: sección del tanque
- K: coeficiente de perdidas
- g: aceleración de gravedad



Tomando $x = h$ y $u = q$ podemos escribir la ecuación de estado:

$$\dot{x} = \frac{u}{A} - \frac{K}{A}\sqrt{gx}$$

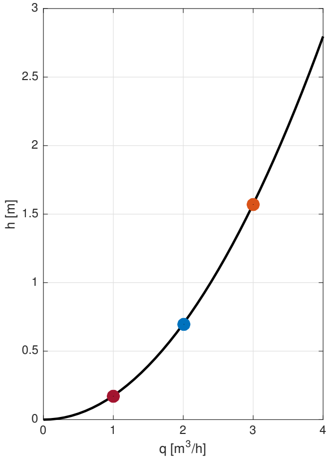
Para encontrar el punto de equilibrio se asume que no haya variación de nivel ($\dot{x}$):

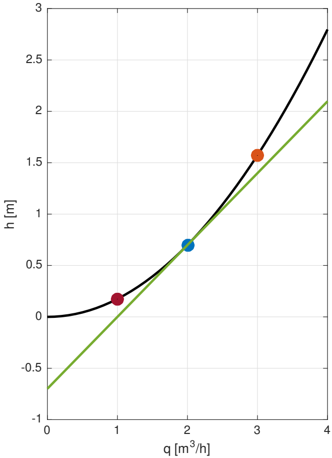
$$\frac{u}{A} - \frac{K}{A}\sqrt{gx} = 0$$

Tanque

Para encontrar el punto de equilibrio se asume que no haya variación de nivel:

$$\frac{u}{A} - \frac{K}{A}\sqrt{gx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{q^2}{gK^2}$$





Serie de Taylor

- El desarrollo en serie de Taylor permite aproximar una función en un punto como suma de una serie de potencias.
- Para una función monovariable $F(x)$, la serie de Taylor en un punto $x = a$ será

$$F(x) \simeq F(a) + \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=a} (x-a) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2F(x)}{d^2x}\right|_{x=a} (x-a)^2 + ...$$

- En el caso de la linealización de un sistema paramos el desarrollo en los términos de orden 1 (y por esa razón, cuanto más nos alejemos del PE mayor será el error de aproximación que cometemos).
- Para funciones multivariables $F(x_1, x_2)$, la serie de Taylor de orden 1 en un punto $x_1 = a$ y $x_2 = b$ será

$$F(x_1,x_2) \simeq F(a,b) + \left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=a,x_2=b} (x_1 - a) + \left.\frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=a,x_2=b} (x_2 - b)$$

Como linealizar

- Consideramos ahora la transformación de estados de nuestro sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0$$

- Definimos $F(\dot{x}, x, u)$ como

$$F(\dot{x}, x, u) = \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0$$

- Calculamos la serie de Taylor de orden 1 de $F(\dot{x}, x, u)$ en el punto de equilibrio $(0, \bar{x}, \bar{u})$

$$\begin{aligned} F(\dot{x}, x, u) \quad \simeq \quad & F(0, \bar{x}, \bar{u}) \\ & + \left.\frac{\partial F(\dot{x}, x, u)}{\partial \dot{x}}\right|_{(0,\bar{x},\bar{u})} (\dot{x} - 0) \\ & + \left.\frac{\partial F(\dot{x}, x, u)}{\partial x}\right|_{(0,\bar{x},\bar{u})} (x - \bar{x}) \\ & + \left.\frac{\partial F(\dot{x}, x, u)}{\partial u}\right|_{(0,\bar{x},\bar{u})} (x - \bar{u}) \end{aligned}$$

Como linealizar

- Recordemos la definición de las variables incrementales

$$x(t) = \bar{x} + \delta x(t), \quad \text{y} \quad u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$$

- Vamos a analizar los terminos de la aproximación de

$$F(\dot{x}, x, u) = \dot{x}(t) - f(x(t), u(t))$$

(recordemos que en el equilibrio $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$)

$$\begin{aligned}
F(0, \bar{x}, \bar{u}) &= 0 - f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \\
\left.\frac{\partial F(\dot{x}, x, u)}{\partial \dot{x}}\right|_{(0,\bar{x},\bar{u})} (\dot{x} - 0) &= \delta \dot{x} \\
\left.\frac{\partial F(\dot{x}, x, u)}{\partial x}\right|_{(0,\bar{x},\bar{u})} (x - \bar{x}) &= -\left.\frac{\partial f(x, u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta x \\
\left.\frac{\partial F(\dot{x}, x, u)}{\partial u}\right|_{(0,\bar{x},\bar{u})} (u - \bar{u}) &= -\left.\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta u
\end{aligned}$$

- Finalmente (recordemos que $F(\dot{x}, x, u) = \dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0$)

$$\delta \dot{x} - \left.\frac{\partial f(x, u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta x - \left.\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta u = 0$$

Sistema linealizado

- Haciendo el mismo razonamiento para la transformada de salida $y(t) = g(x, u)$, llegamos al sistema linealizado:

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x}(t) &= \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta u(t) \\
\delta y(t) &= \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \delta u(t)
\end{aligned}
$$

- De estas últimas ecuaciones se concluye que:

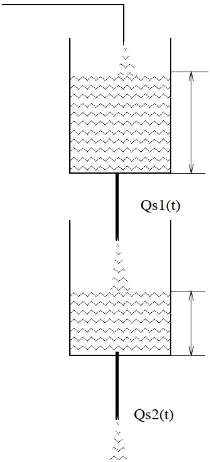
$$
\begin{aligned}
\dot{\delta x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\
\delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t)
\end{aligned}
$$

donde

$$
A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \quad B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \quad C = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \quad D = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}
$$

Ejemplo: 2 Tanques

Consideramos dos tanques de secciones A_1 y A_2 dispuestos verticalmente. Entrada al sistema: caudal que alimenta el tanque 1, $Q(t)$. Salida del sistema: caudal de salida $Q_{s2}(t)$.



- Modelo del tanque 1:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= Q(t) - Q_{s1}(t), \quad V_1(t) = A_1 H_1(t) \\ Q_{s1}(t) &= K_1 \sqrt{p_1(t) - p_{s1}(t)}, \quad p_1(t) = p_a + \rho g H_1(t) \end{aligned}$$

- Tomando $p_{s1}(t) = p_a$ y $\rho = 1$ (agua), entonces:

$$Q_{s1}(t) = K_1 \sqrt{p_1(t) - p_a} = K_1 \sqrt{p_a + \rho g H_1(t)} = K_1 \sqrt{g H_1(t)}$$

con lo cual el modelo dinámico del tanque 1 queda:

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{A_1} - \frac{K_1}{A_1} \sqrt{g H_1(t)}$$

Ejemplo: 2 Tanques

Consideramos dos tanques de secciones A_1 y A_2 dispuestos verticalmente. Entrada al sistema: caudal que alimenta el tanque 1, $Q(t)$. Salida del sistema: caudal de salida $Q_{s2}(t)$.

- Modelo del tanque 2:

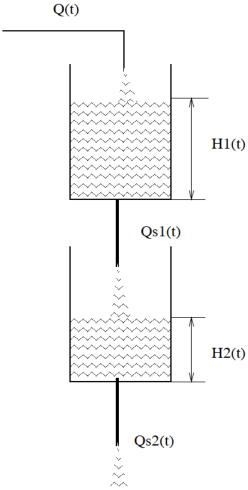
$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} &= Q_{s1}(t) - Q_{s2}(t),\ V_2(t) = A_2 H_2(t) \\ Q_{s1}(t) &= K_1\sqrt{gH_1(t)} \\ Q_{s2}(t) &= K_2\sqrt{gH_2(t)} \end{aligned}$$

con lo cual el modelo dinámico del tanque 2 queda:

$$\frac{dH_2(t)}{dt} = \frac{K_1}{A_2}\sqrt{gH_1(t)} - \frac{K_2}{A_2}\sqrt{gH_2(t)}$$

- Modelo completo:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(t)}{dt} &= \frac{Q(t)}{A_1} - \frac{K_1}{A_1}\sqrt{gH_1(t)} \\ \frac{dH_2(t)}{dt} &= \frac{K_1}{A_2}\sqrt{gH_1(t)} - \frac{K_2}{A_2}\sqrt{gH_2(t)} \end{aligned}$$



Ejemplo: 2 Tanques

- Sean: $x = (x_1, x_2) = (H_1, H_2)$, $u = Q$, $y = Q_{s2}$. Entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x_1}(t) & = & \dfrac{u(t)}{A_1} - \dfrac{K_1}{A_1}\sqrt{gx_1(t)} \\[2ex] \dot{x_2}(t) & = & \dfrac{K_1}{A_2}\sqrt{gx_1(t)} - \dfrac{K_2}{A_2}\sqrt{gx_2(t)} \\[2ex] y(t) & = & K_2\sqrt{gx_2(t)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{array}$$

Ejemplo: 2 Tanques

- Sean: $x = (x_1, x_2) = (H_1, H_2)$, $u = Q$, $y = Q_{s2}$. Entonces

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{u(t)}{A_1} - \frac{K_1}{A_1}\sqrt{gx_1(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{K_1}{A_2}\sqrt{gx_1(t)} - \frac{K_2}{A_2}\sqrt{gx_2(t)} \\ y(t) &= K_2\sqrt{gx_2(t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

- Cual es la expresión del punto de equilibrio del sistema $\bar{x} = (H_1^o, H_2^o)$, para una entrada constante $u(t) = \bar{u} = Q^o$?

Ejemplo: 2 Tanques

- Sean: $x = (x_1, x_2) = (H_1, H_2)$, $u = Q$, $y = Q_{s2}$. Entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x_1}(t) & = & \dfrac{u(t)}{A_1} - \dfrac{K_1}{A_1}\sqrt{gx_1(t)} \\ \dot{x_2}(t) & = & \dfrac{K_1}{A_2}\sqrt{gx_1(t)} - \dfrac{K_2}{A_2}\sqrt{gx_2(t)} \\ y(t) & = & K_2\sqrt{gx_2(t)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{array}$$

- Cual es la expresión del punto de equilibrio del sistema $\bar{x} = (H_1^o, H_2^o)$, para una entrada constante $u(t) = \bar{u} = Q^o$?

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & Q^o - K_1\sqrt{gH_1^o} \\ 0 & = & K_1\sqrt{gH_1^o} - K_2\sqrt{gH_2^o} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} H_1^o & = & \dfrac{(Q^o)^2}{gK_1^2} \\ H_2^o & = & \dfrac{K_1^2}{K_2^2}H_1^o = \dfrac{(Q^o)^2}{gK_2^2} \end{array}\right.$$

Ejemplo: 2 Tanques

- Sean: $x = (x_1, x_2) = (H_1, H_2)$, $u = Q$, $y = Q_{s2}$. Entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x_1}(t) & = & \dfrac{u(t)}{A_1} - \dfrac{K_1}{A_1}\sqrt{gx_1(t)} \\[2ex] \dot{x_2}(t) & = & \dfrac{K_1}{A_2}\sqrt{gx_1(t)} - \dfrac{K_2}{A_2}\sqrt{gx_2(t)} \\[2ex] y(t) & = & K_2\sqrt{gx_2(t)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{array}$$

- Cual es la expresión del punto de equilibrio del sistema $\bar{x} = (H_1^o, H_2^o)$, para una entrada constante $u(t) = \bar{u} = Q^o$?

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & Q^o - K_1\sqrt{gH_1^o} \\[2ex] 0 & = & K_1\sqrt{gH_1^o} - K_2\sqrt{gH_2^o} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} H_1^o & = & \dfrac{(Q^o)^2}{gK_1^2} \\[3ex] H_2^o & = & \dfrac{K_1^2}{K_2^2}H_1^o = \dfrac{(Q^o)^2}{gK_2^2} \end{array}\right.$$

- La salida de equilibrio es: $\bar{y} = Q_{s2}^o = K_2\sqrt{gH_2^o}$

Ejemplo: 2 Tanques

- Vamos a calcular el sistema linealizado en el punto de equilibrio $\bar{x} = (H_1^o, H_2^o)$ y $\bar{u} = Q^o$, es decir, calculemos las matrices (A, B, C, D) tal que

$$\begin{aligned} \dot{\delta x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{aligned}$$

con $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$, $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$ y $\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$

Ejemplo: 2 Tanques

- Vamos a calcular el sistema linealizado en el punto de equilibrio $\bar{x} = (H_1^o, H_2^o)$ y $\bar{u} = Q^o$, es decir, calculemos las matrices (A, B, C, D) tal que

$$\begin{aligned} \dot{\delta x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{aligned}$$

  con $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$, $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$ y $\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$
- Empezamos por la ecuación diferencial de estado:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} & \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \\ \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} & \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \end{bmatrix}$$

  y

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \\ \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: 2 Tanques

- El sistema no lineal es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{u(t)}{A_1} - \frac{K_1}{A_1}\sqrt{g x_1(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{K_1}{A_2}\sqrt{g x_1(t)} - \frac{K_2}{A_2}\sqrt{g x_2(t)} \end{aligned}$$

Ejemplo: 2 Tanques

- El sistema no lineal es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{u(t)}{A_1} - \frac{K_1}{A_1}\sqrt{gx_1(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{K_1}{A_2}\sqrt{gx_1(t)} - \frac{K_2}{A_2}\sqrt{gx_2(t)}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_1}{2A_1}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} \\ \left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0 \\ \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= \frac{K_1}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} \\ \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_2}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}}\end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned}\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= \frac{1}{A_1} \\ \left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo: 2 Tanques

- El sistema no lineal es:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{u(t)}{A_1} - \frac{K_1}{A_1}\sqrt{gx_1(t)} \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{K_1}{A_2}\sqrt{gx_1(t)} - \frac{K_2}{A_2}\sqrt{gx_2(t)}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_1}{2A_1}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} \\
\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0 \\
\left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= \frac{K_1}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} \\
\left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_2}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}}
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= \frac{1}{A_1} \\
\left.\frac{\partial f_2(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
A = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{2A_1}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} & 0 \\ \frac{K_1}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} & -\frac{K_2}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Ejemplo: 2 Tanques

- La ecuación de salida es $y(t) = K_2\sqrt{gx_2(t)}$, entonces:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0 \\ \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_2}{2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{aligned}, \quad \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 0$$

Ejemplo: 2 Tanques

- La ecuación de salida es $y(t) = K_2\sqrt{gx_2(t)}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0 \\
\left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_2}{2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}}
\end{aligned}
\quad , \quad
\left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 0
$$

con lo cual

$$
C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_2}{2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{bmatrix}, \quad D = 0
$$

Ejemplo: 2 Tanques

- La ecuación de salida es $y(t) = K_2\sqrt{gx_2(t)}$, entonces:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial x_1}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= 0 \\ \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial x_2}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} &= -\frac{K_2}{2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{aligned} \quad , \quad \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 0$$

con lo cual

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_2}{2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- El sistema linealizado completo es:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{2A_1}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} & 0 \\ \frac{K_1}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_1^o}} & -\frac{K_2}{2A_2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \delta u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_2}{2}\sqrt{\frac{g}{H_2^o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: 2 Tanques

- Sean $A_1 = 0.2[m^2]$, $A_2 = 0.5[m^2]$, $K_1 = 0.0032[\frac{m^3/s}{m^{1/2}}]$, $K_2 = 0.0036[\frac{m^3/s}{m^{1/2}}]$. Sea el caudal de entrada $Q^o = 0.01[m^3/s]$.
- Calculamos los niveles de equilibrio:

$$H_1^o = \frac{(Q^o)^2}{gK_1^2} = 1[m], \;\; H_2^o = \frac{(Q^o)^2}{gK_2^2} = 0.7874[m]$$

- Calculamos la salida de equilibrio:

$$\bar{y} = Q_{s2}^o = K_2\sqrt{gH_2^o} = 0.01[m^3/s]$$

Ejemplo: 2 Tanques

- Sean $A_1 = 0.2[m^2]$, $A_2 = 0.5[m^2]$, $K_1 = 0.0032[\frac{m^3/s}{m^{1/2}}]$, $K_2 = 0.0036[\frac{m^3/s}{m^{1/2}}]$. Sea el caudal de entrada $Q^o = 0.01[m^3/s]$.
- Calculamos los niveles de equilibrio:

$$H_1^o = \frac{(Q^o)^2}{gK_1^2} = 1[m], \; H_2^o = \frac{(Q^o)^2}{gK_2^2} = 0.7874[m]$$

- Calculamos la salida de equilibrio:

$$\bar{y} = Q_{s2}^o = K_2\sqrt{gH_2^o} = 0.01[m^3/s]$$

- Las matrices del sistema linealizado son:

$$A = \begin{bmatrix} -0.025 & 0 \\ 0.01 & -0.013 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0.0064 \end{bmatrix}, \; D = 0$$