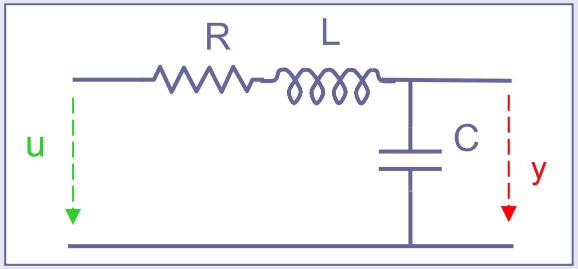
Tema 4: Sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo

- Introducción
- Transformada de Laplace
- Cálculo de antitransformadas
- Descripción externa de los sistemas dinámicos
- Descripción interna de los sistemas dinámicos
- Álgebra de bloques
- Evolución temporal y transformada Laplace

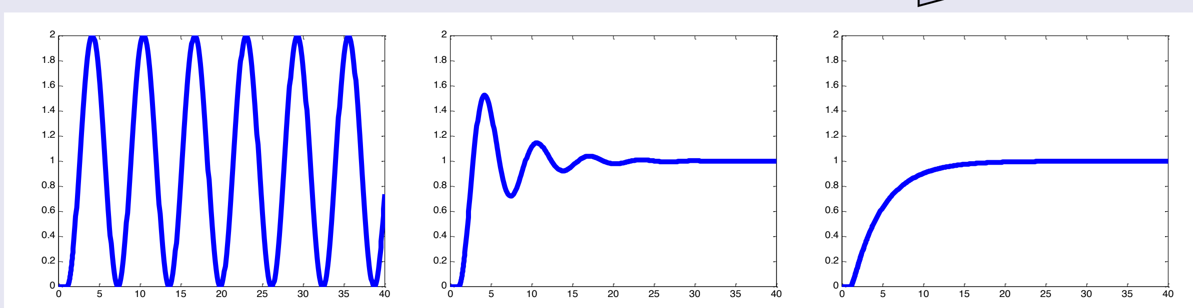
Introducción



$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

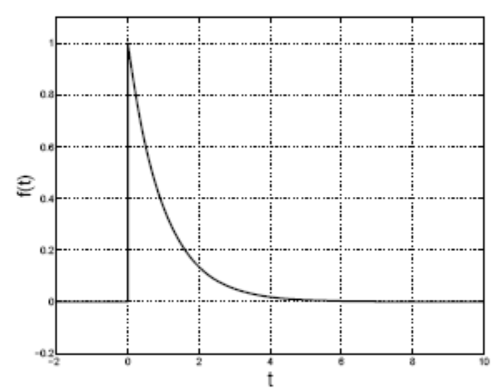
¿Cómo se puede estudiar el efecto de la resistencia en el comportamiento del sistema?

$\uparrow$ R



Transformada de Laplace

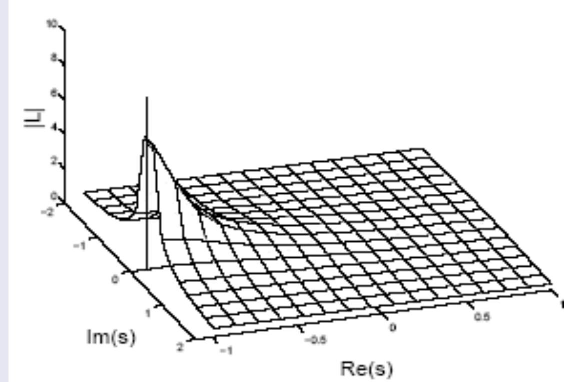
- Transformación de una señal
  - Sea f(t) a derechas: f(t)=0, para todo t<0



$f(t) = e^{-t}, \; t \geq 0$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$



$\mid \mathcal{L}[f(t)] \mid = \mid \frac{1}{s+1} \mid$

Dominio del tiempo

Dominio de Laplace

Transformadas de algunas señales

Señal	$f(t)$	$F(s)$
Impulso	$\delta(t)$	1
Escalón	$1 \ (t \geq 0)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	$t(t \geq 0)$	$\frac{1}{s^2}$
Parábola	$t^2(t \geq 0)$	$\frac{2}{s^3}$
Rampa de orden n	$t^n(t \geq 0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)}$
Onda sinusoidal	$\mathrm{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$
Onda cosenoidal	$\cos\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$
Sinusoide con decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}\mathrm{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{((s+\alpha)^2+\omega^2)}$
Cosenoide con decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{((s+\alpha)^2+\omega^2)}$
Rampa de orden n con decrecimiento exponencial	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$

Propiedades de la transformada Laplace

- **Linealidad**

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot \mathcal{L}[f(t)] + b \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

- **Transformación de la derivada**

$$\text{Sea } g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{df(t)}{dt} & t \geq 0 \end{cases},$$
$$\text{entonces } \mathcal{L}\left[g(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

- **Transformación de la integral**

$$\text{Sea } I(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau, \text{ entonces } \mathcal{L}\left[I(t)\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{I(0)}{s}$$

Propiedades de la transformada Laplace

- **Transformada de la señal modulada por una exponencial**

$$\text{Sea } g(t) = e^{-at} f(t), \text{ entonces } \mathcal{L}[g(t)] = F(s+a)$$

- **Transformada de la señal retardada**

$$\text{Sea } g(t) = f(t - t_0), \text{ entonces } \mathcal{L}[g(t)] = F(s)e^{-t_0 s}$$

- **Teorema del Valor Final**

Sea $f(t)$ tal que $\lim_{t\to\infty} f(t) < \infty$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- **Teorema del Valor Inicial**

  Sea $f(t)$ tal que $\lim_{t \to 0} f(t) < \infty$

  entonces

  $$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- **Transformada de la convolución**

  Convolución de dos señales:

  $$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$$

  entonces

  $$G(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Cálculo de antitransformadas

- Objetivo: $F(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ $\qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

- Procedimiento: descomposición en factores simples

$$\boxed{F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots} \qquad \boxed{f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots}$$

$$f_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_i(s)]$$

- Ceros y polos
  - Ceros: valores que anulan F(s) $\qquad F(s_c) = 0 \Leftrightarrow n(s_c) = 0$
  - Polos: valores singulares de F(s) $\qquad F(s_p) = \infty \Leftrightarrow d(s_p) = 0$

Caso1: polos reales

- Denominador $d(s) = (s+p_1)(s+p_2)\cdots$
- Procedimiento

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots$$

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_i}{s+p_i}\right] = a_i e^{-p_i t}$$

- Cálculo de los residuos

$$a_i = [F(s)(s+p_i)]_{s=-p_i}$$

Ejemplo

Ejemplo. Sea la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

se tiene que los residuos resultan ser

$$a_1 = \left[\frac{(s+3)}{(s+2)}\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[\frac{(s+3)}{(s+1)}\right]_{s=-2} = -1$$

luego

$$f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Caso 2: polos complejos

- Denominador $s_p = -\sigma \pm \omega j$

$$d(s) = [(s+\sigma)^2 + \omega^2](s+p_2)\cdots$$

- Procedimiento

$$\boxed{F(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+\sigma)^2+\omega^2} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots}$$

$$\left\langle \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+\sigma)^2+\omega^2} = \alpha_1 \frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1\sigma}{\omega}\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+\sigma)^2+\omega^2}\right] &= \alpha_1 e^{-\sigma t}\cos(\omega t) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1\sigma}{\omega} e^{-\sigma t}\mathrm{sen}(\omega t) \\ &= a_1 e^{-\sigma t}\mathrm{sen}(\omega t + b_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(t) = a_1 e^{-\sigma t}\mathrm{sen}(\omega t + b_2) + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots}$$

Caso 2: polos complejos

- Cálculo de los residuos

$$[\alpha_1 s + \alpha_2]_{s=-\sigma+\omega j} = [F(s)((s+\sigma)^2+\omega^2)]_{s=-\sigma+\omega j}$$

  - Igualdad compleja=2 ecuaciones (Parte real y parte imaginaria)
  - 2 incógnitas

Ejemplo

$$F(s) = \frac{(s+1)}{s(s^2+2s+2)} = \frac{(s+1)}{s((s+1)^2+1)}$$

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{(\alpha_1 s + \alpha_2)}{(s+1)^2+1}$$

$$a_1 = \left[\frac{(s+1)}{(s^2+2s+2)}\right]_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$[\alpha_1 s + \alpha_2]_{s=-1+j} = \left[\tfrac{s+1}{s}\right]_{s=-1+j} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-t}\cos(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t}\mathrm{sen}(t), \qquad t \geq 0$$

Caso 3: polos reales múltiples

- Denominador $$d(s) = (s+p_1)^r (s+p_2)\cdots$$
- Procedimiento

$$\boxed{F(s) = \left[\frac{b_r}{(s+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{s+p_1}\right] + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b_j}{(s+p_1)^j}\right] = b_j \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{-p_1 t}$$

$$\boxed{f(t) = \left[\frac{b_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{b_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + b_1\right] e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots}$$

Caso 3: polos reales múltiples

- Cálculo de los residuos

$$\boxed{b_{r-j} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}\left[(s+p_1)^r F(s)\right]_{s=-p_1}}$$

- Justificación

$$b_r = \left[\frac{n(s)(s+p_1)^r}{d(s)}\right]_{s=-p_1}$$

$$(s+p_1)^r F(s) = b_r + b_{r-1}(s+p_1) + \ldots + b_1(s+p_1)^{r-1} + \frac{a_2(s+p_1)^r}{s+p_2} + \cdots$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+p_1)^r F(s)\right] = b_{r-1} + 2b_{r-2}(s+p_1)\ldots + (r-1)b_1(s+p_1)^{r-2} + \frac{d}{ds}\left[\frac{a_2(s+p_1)^r}{s+p_2}\right] + \cdots$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+p_1)^r F(s)\right]_{s=-p_1} = b_{r-1}$$

Ejemplo

Sea

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 2}{(s+1)^3}$$

que se descompone

$$F(s) = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{(s+1)}$$

Se tendrá

$$\begin{aligned} b_3 &= [s^2 + s + 2]_{s=-1} = 2 \\ b_2 &= [2s + 1]_{s=-1} = -1 \\ b_1 &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)}$$

De donde se tiene,

$$f(t) = (t^2 - t + 1)e^{-t}$$

Descripción externa

- Objetivo: Encontrar una relación directa

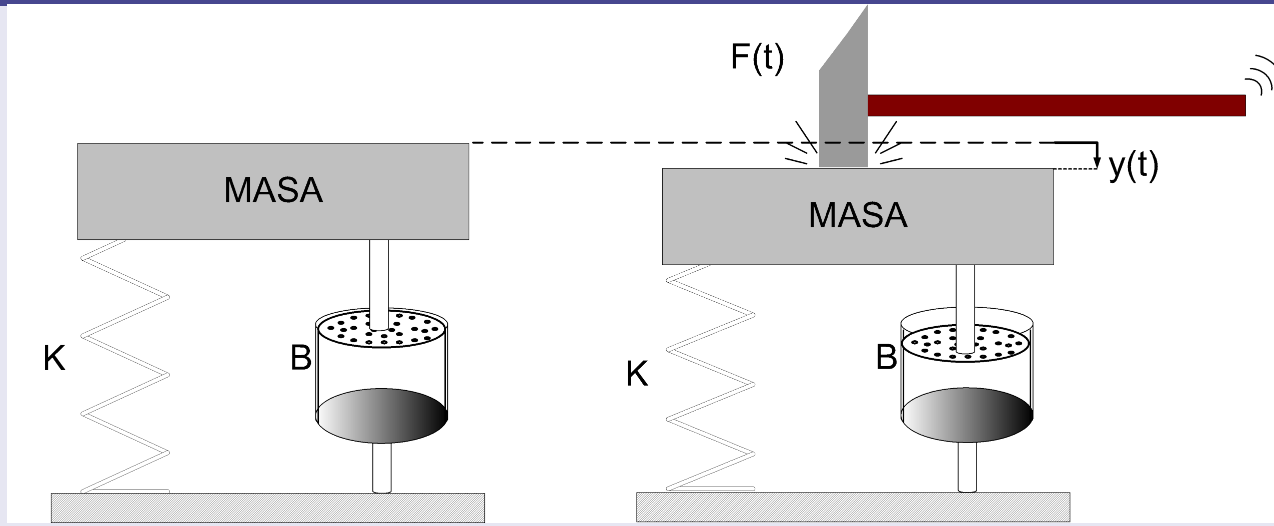
$$u(\tau) : \tau \in [0, t] \longrightarrow y(t)$$

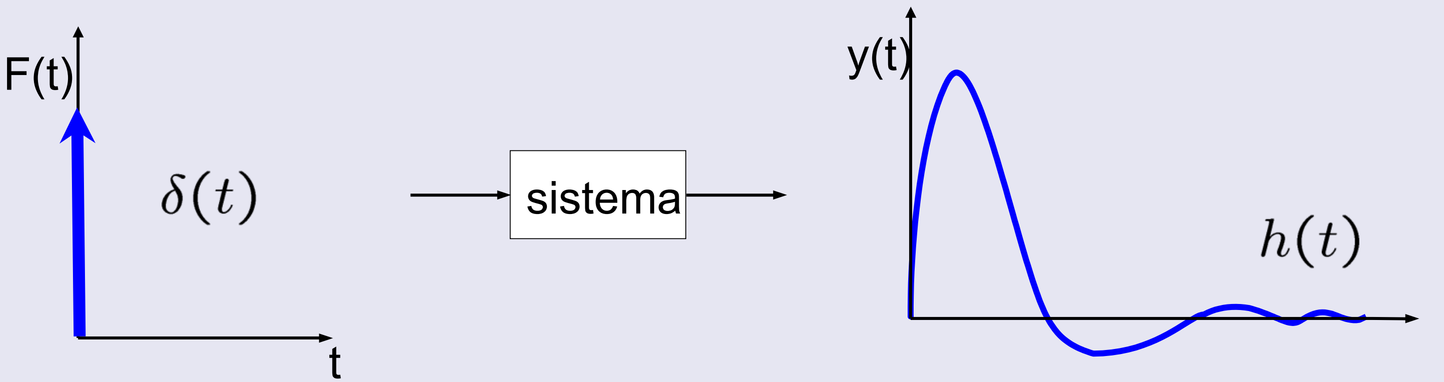
  - Implícitamente dado por el modelo

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_m u$$

- Dos formas
  - Dominio del tiempo: Respuesta impulsional
  - Dominio de Laplace: Función de transferencia

Respuesta impulsional





Respuesta impulsional: es la salida que se produce en un sistema cuando se aplica en su entrada un impulso unitario

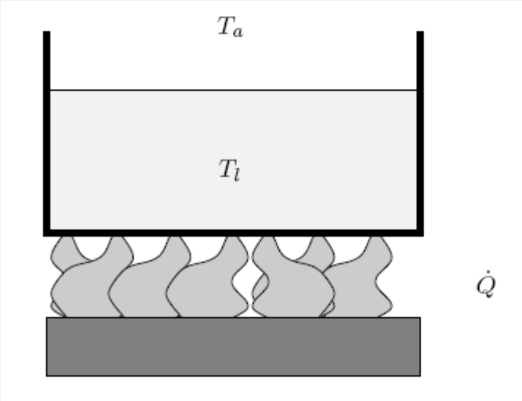
Respuesta impulsional

$$\left.\begin{array}{r} \delta(t-\tau) \\ \\ u(\tau)\delta(t-\tau) \\ \\ \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h(t-\tau) \\ \\ u(\tau)h(t-\tau) \\ \\ \int_{-\infty}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{array}\right.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\underbrace{\delta(t-\tau)}_{=0,(\tau\neq t)}d\tau = \mathbf{u(t)}} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \mathbf{y(t)}}$$

Conocida la respuesta impulsional se puede calcular la salida del sistema ante cualquier entrada

Sistemas multivariables



- Entradas: 2
  - Calor aportado
  - Temperatura ambiente
- Salida: 1
  - Temperatura del líquido

$$mC_e\frac{dT(t)}{dt} = \dot{Q}(t) - K_{conv}A(T(t) - T_a(t))$$

Sea $T_1(t)$ la temperatura del líquido al hacer $T_a(t) = 0$.

$$T_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{Q}(\tau)h_1(t-\tau)d\tau$$

Siendo $h_1(t)$ la respuesta de un impulso en $\dot{Q}(t)$ con $T_a(t) = 0$.

Sea $T_2(t)$ la temperatura del líquido al hacer $\dot{Q}(t) = 0$

$$T_2(t) = \int_{-\infty}^{t} T_a(\tau) h_2(t-\tau) d\tau$$

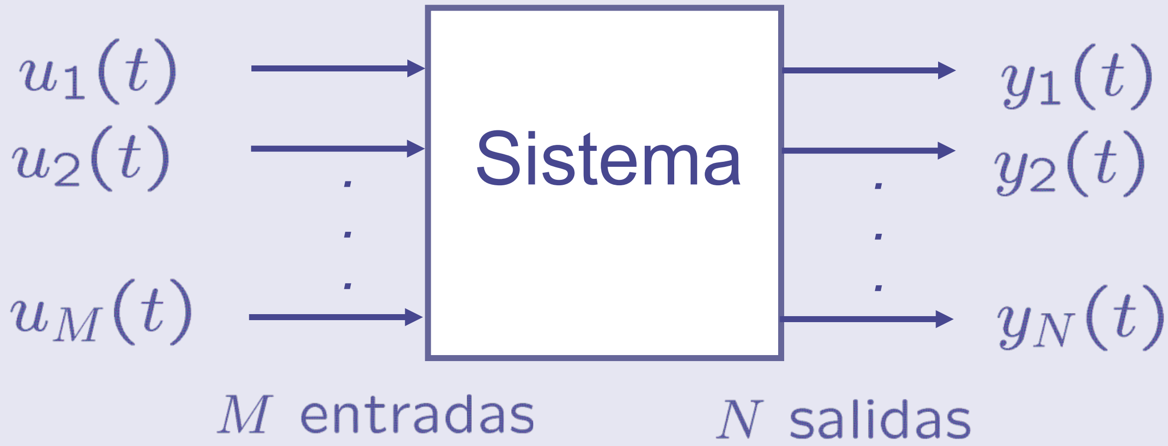
Siendo $h_2(t)$ la respuesta de un impulso en $T_a(t)$ con $\dot{Q}(t) = 0$.

Principio de Superposición

$$\boxed{T(t) = T_1(t) + T_2(t)}$$

$$\boxed{T(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{Q}(\tau) h_1(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t} T_a(\tau) h_2(t-\tau) d\tau}$$

Sistemas multivariables



Sea $h_{ij}(t)$ la respuesta de la salida $y_i(t)$ ante un impulso en $u_j(t)$ (con el resto de entradas nulas)

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{M} \int_{-\infty}^{t} u_j(\tau_j) h_{ij}(t-\tau_j) d\tau_j, \qquad i = 1, \cdots, N$$

Función de transferencia

- Dominio del tiempo
  - Si u(t)=0 para t<0, entonces y(t)=0 para t<0

    Condiciones iniciales nulas (Respuesta forzada)

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * u(t)$$

- Dominio de Laplace

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Función de transferencia

$$\boxed{H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{Y(s)}{U(s)}}$$

Ejemplo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = bu$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

Laplace

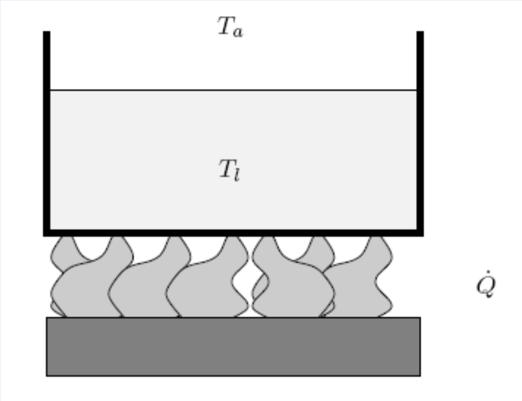
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + a_1 sY(s) - a_1 y(0) + a_2 Y(s) = bU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}U(s)}_{\text{Respuesta forzada}} + \underbrace{\frac{sy(0) + \dot{y}(0) + a_1 y(0)}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{\text{Respuesta libre}}$$

$$\text{Cond. Inic. nulas} \Rightarrow Y(s) = \left(\frac{b}{s^2+a_1s+a_2}\right)U(s) = H(s)U(s)$$

Sistemas multivariables



$$mC_e\frac{dT(t)}{dt} = \dot{Q} - K_{conv}A(T(t) - T_a(t))$$

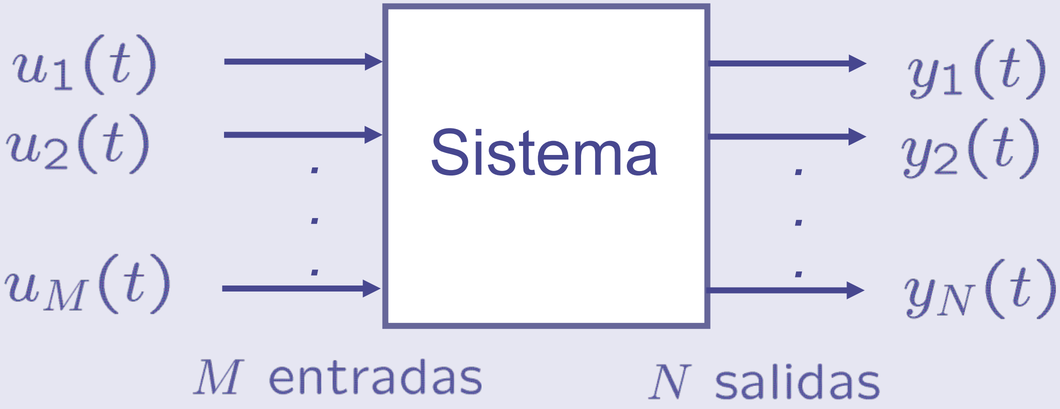
Condiciones iniciales nulas: $T(0) = 0$.

$$(mC_e s + K_{conv}A)T(s) = \dot{Q}(s) + K_{conv}AT_a(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{mC_e s + K_{conv}A}\dot{Q}(s) + \frac{K_{conv}A}{mC_e s + K_{conv}A}T_a(s)$$

$$T(s) = H_1(s)\dot{Q}(s) + H_2(s)T_a(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1(s) = \left.\dfrac{T(s)}{\dot{Q}(s)}\right]_{T_a=0} \\ \\ H_2(s) = \left.\dfrac{T(s)}{T_a(s)}\right]_{\dot{Q}=0} \end{array} \right.$$

Sistemas multivariables



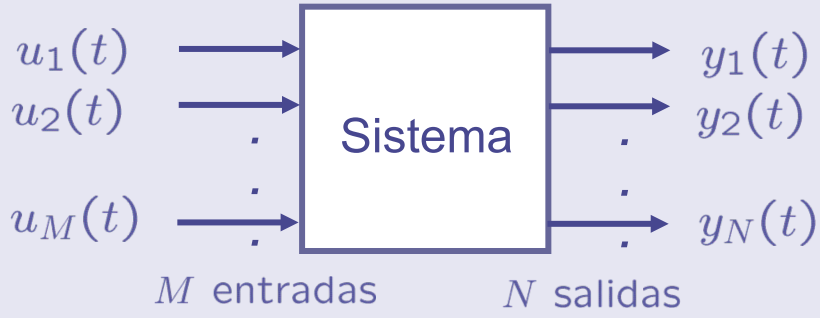
Sea $H_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$ **(con el resto de entradas nulas)**

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{M} H_{ij}(s) U_j(s), \qquad i = 1, \cdots, N$$

Relación con la respuesta impulsional: $\mathcal{L}[h_{ij}(t)] = H_{ij}(s)$

Sistemas multivariables

$$\mathbb{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_M(s) \end{bmatrix}$$



$$\mathbb{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_N(s) \end{bmatrix}$$

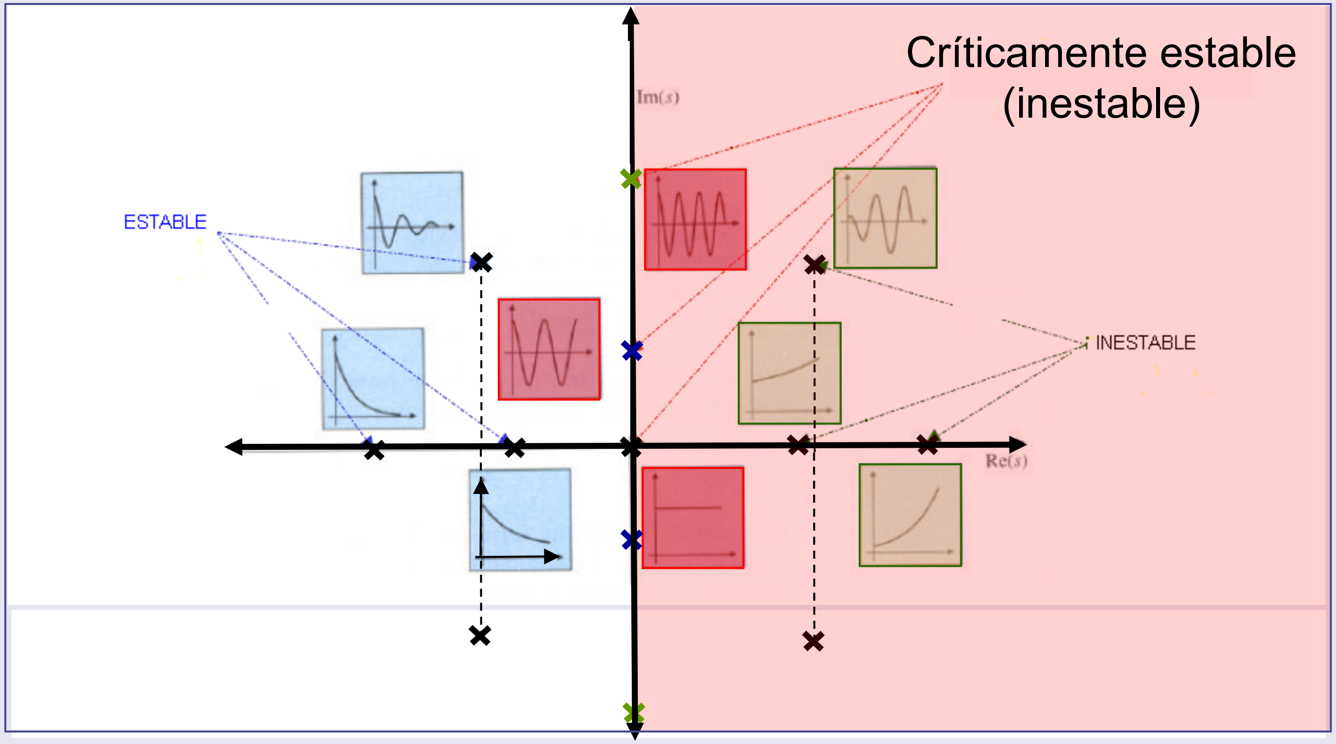
$$\mathbb{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & \cdots & H_{1M}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(s) & \cdots & H_{NM}(s) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{Y}(s) = \mathbb{H}(s)\mathbb{U}(s)}$$

Relación de H(s) y la respuesta impulsional

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Los polos de H(s) determinan la forma de h(t)



Descripción interna

- Estado: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $n =$ orden del sistema
  - Conocido $x(t)$ puedo conocer $x(\tau)$, para $\tau \geq t$
  - Toda señal del sistema es función del estado y/o de la entrada

- Descripción interna

$u(t)$ → Ecuación transición → $x(t)$ → Ecuación lectura → $y(t)$

Descripción interna

- Descripción interna

$$\text{Ec. Transición:} \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$$

$$\text{Ec. Lectura:} \quad y(t) = g(x(t), u(t))$$

- Sistemas lineales

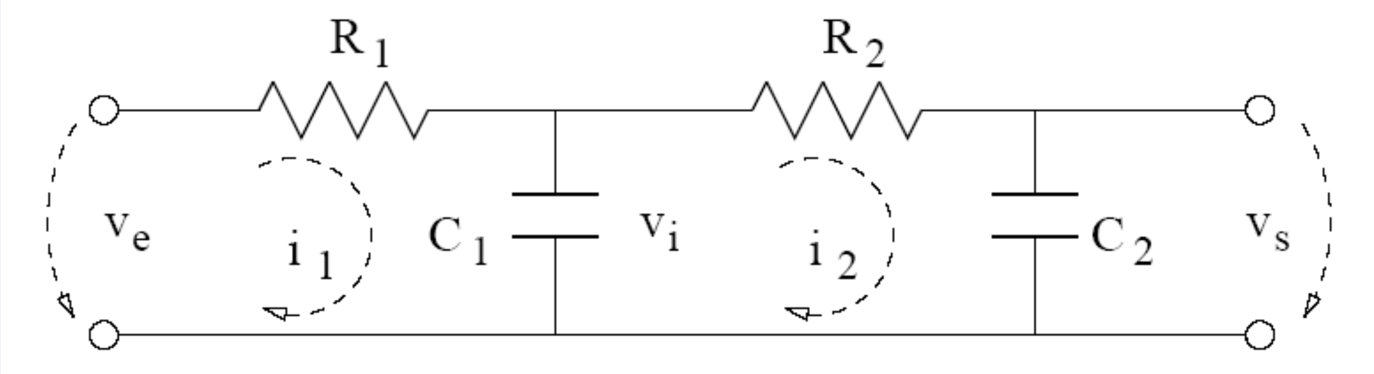
$$\text{Ec. Transición:} \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\text{Ec. Lectura:} \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times M}, \quad C \in \mathbb{R}^{N\times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{N\times M}$$

Ejemplo

- **Circuito eléctrico:**



$$v_e = i_1 R_1 + v_i$$

$$i_1 - i_2 = C_1 \frac{dv_i}{dt}$$

$$v_i = i_2 R_2 + v_s$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_s}{dt}$$

Ejemplo

- **Circuito eléctrico: entrada ve y salida vs**

- **Descripción interna (una de las múltiples)**

$$v_e = R_1\left(C_1 \frac{dv_i}{dt} + C_2 \frac{dv_s}{dt}\right) + v_i$$

$$v_i = R_2 C_2 \frac{dv_s}{dt} + v_s$$

- **Variables de estado (las que están derivadas respecto t)**

$$x_1 = v_i$$

$$x_2 = v_s$$

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} v_e &= R_1C_1\dot{v}_i + R_1C_2\dot{v}_s + v_i \\ v_i &= R_2C_2\dot{v}_s + v_s \end{aligned}\right\}$$

Se despejan dv_i/dt y dv_s/dt en función de v_i v_s y v_e

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_i &= \left(-\frac{1}{R_2C_1} - \frac{1}{R_1C_1}\right)v_i + \frac{1}{R_2C_1}v_s + \frac{1}{R_1C_1}v_e \\ \dot{v}_s &= \frac{1}{R_2C_2}v_i - \frac{1}{R_2C_2}v_s \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = v_i$$

$$x_2 = v_s$$

$$y = v_s$$

$$u = v_e$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2C_1}-\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{pmatrix} v_e$$

$$v_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_s \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = v_i$$

$$x_2 = v_s$$

$$y = v_s$$

$$u = v_e$$

Típicamente D=0

(sistemas estríctamente propios: n>m)

Relación D. Interna y D. Externa

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \quad \mathcal{L}[u(t)] = U(s)$$

Condiciones iniciales nulas: $x(0) = 0$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s)$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$\mathcal{L}$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = (C(sI - A)^{-}1B + D)U(s)$$

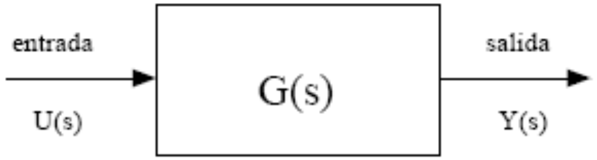
$$\boxed{H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

Álgebra de Bloques

- Objetivo:

  Representar los sistemas como subsistemas interconectados
  - Cada subsistema se representa por un bloque funcional
  - Las señales se representan mediante arcos
  - Interconexiones son uniones de bloques mediante arcos

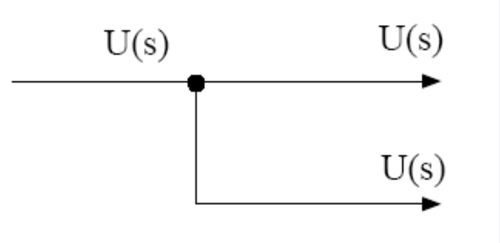
- Elementos:
  - Sistema lineal



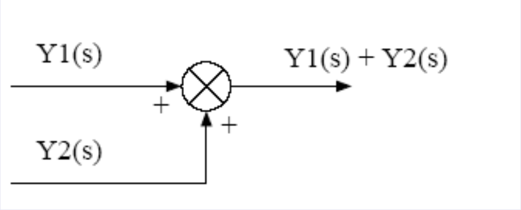
$$Y(s) \quad = \quad G(s)\cdot U(s)$$

Álgebra de bloques

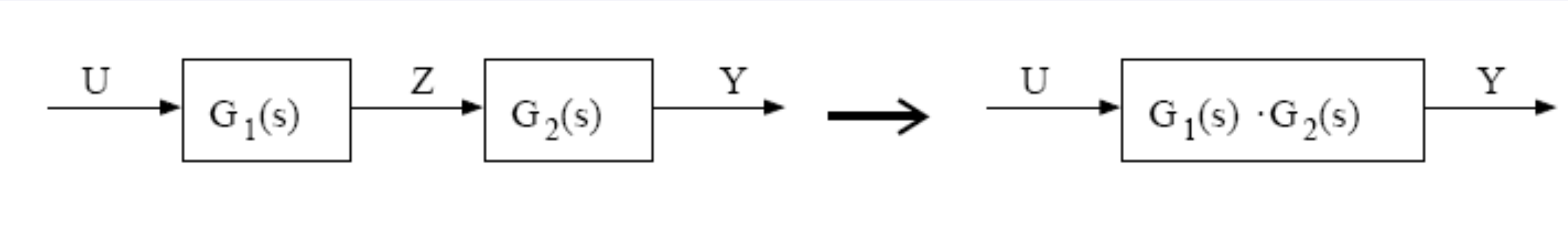
- Bifurcación



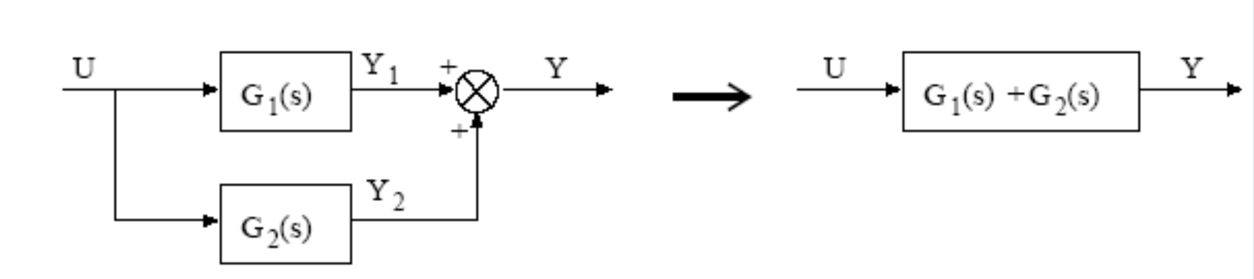
- Suma de señales



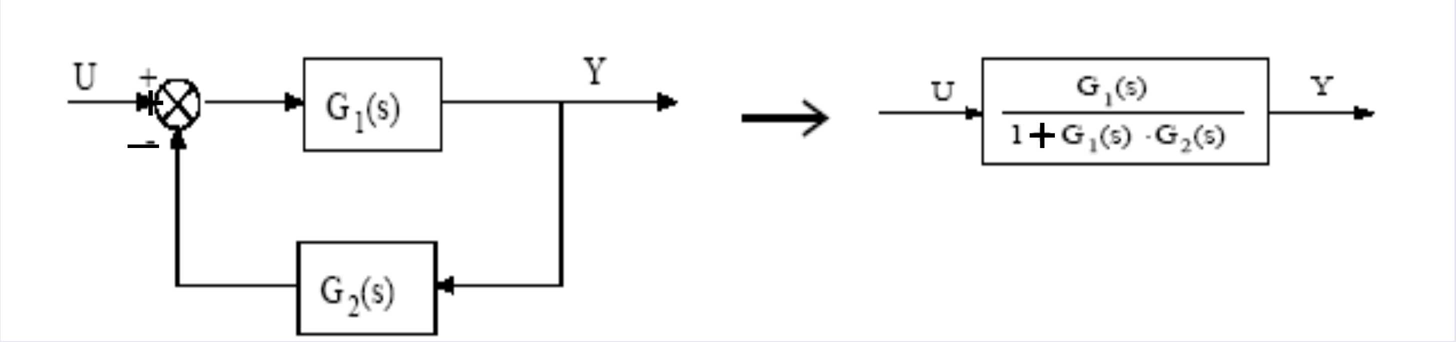
- Conexión en serie



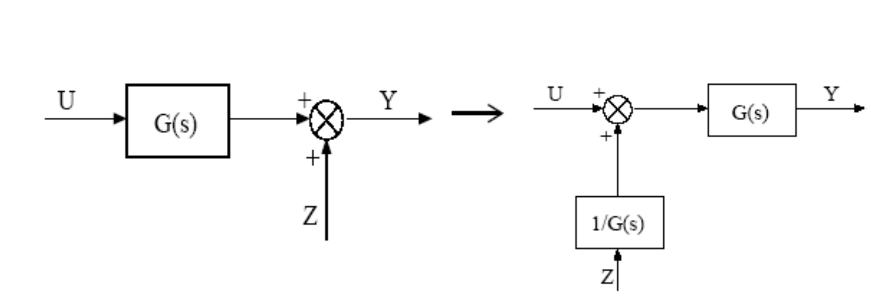
- Conexión en paralelo

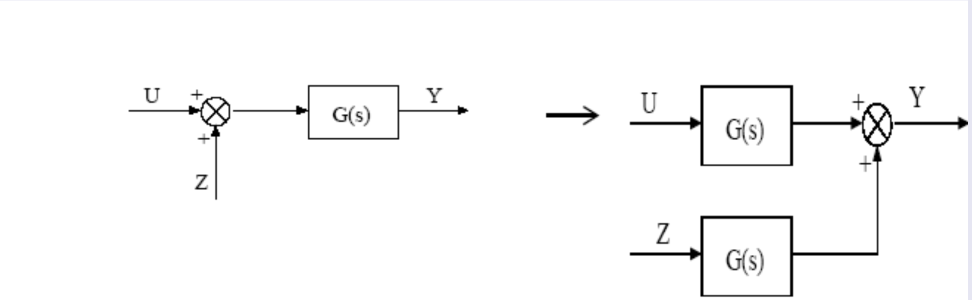


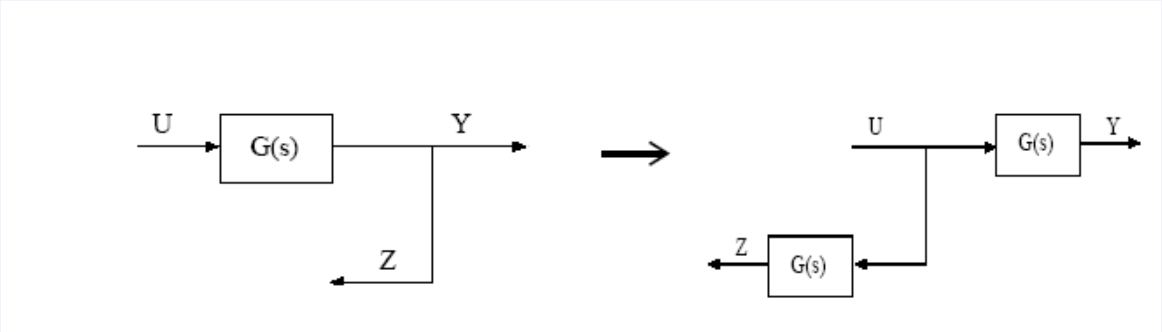
- Realimentación

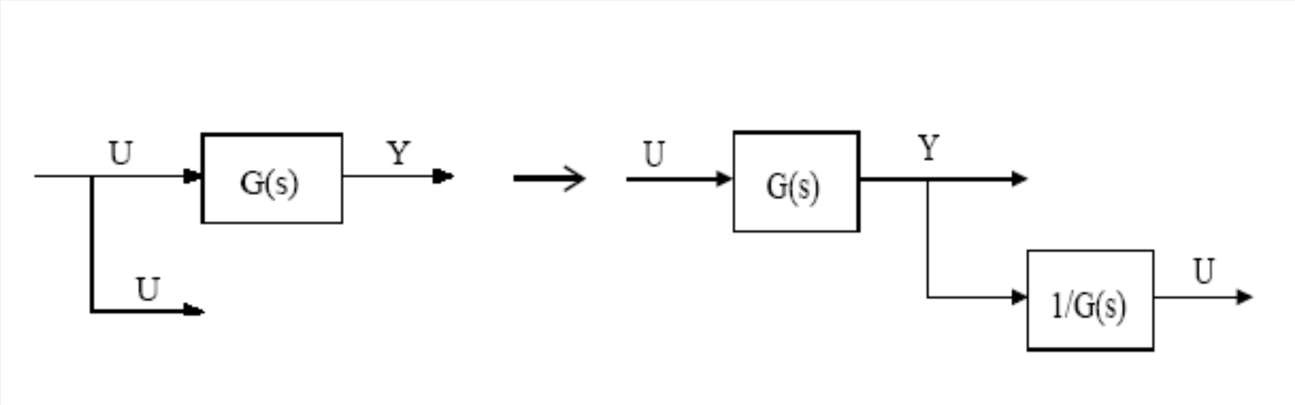


Álgebra de Bloques

- Operaciones de bloques
  - 

  - 

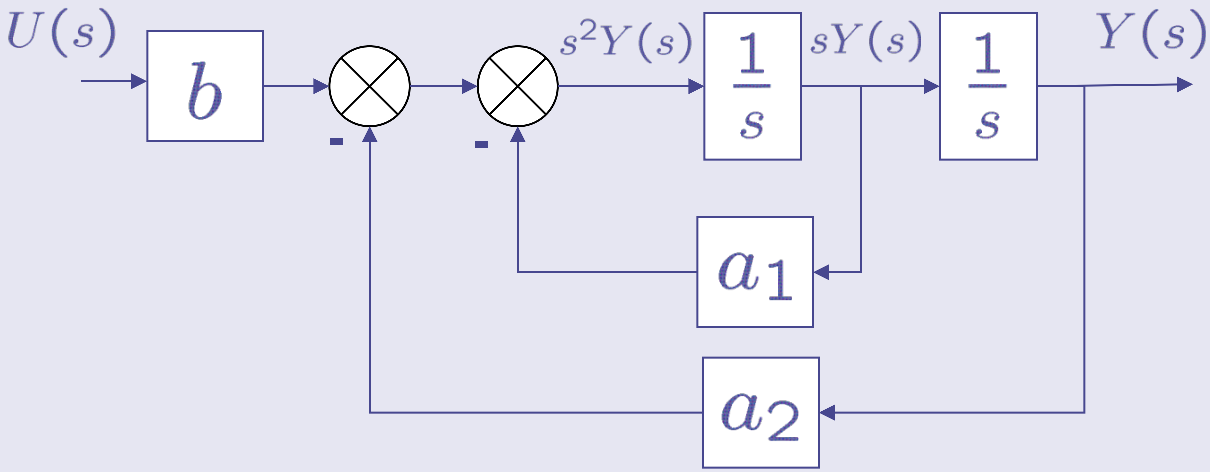
- Operaciones de bloques
  - 

  - 

Ejemplo

$$\boxed{\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = bu}$$

$$\ddot{y} = bu - a_1\dot{y} - a_2 y$$



Sólo se usan integradores y ganancias