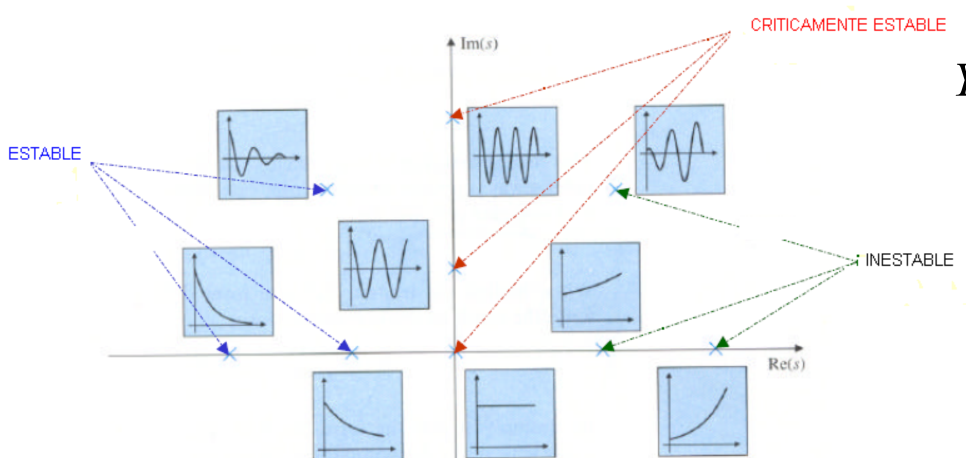
Tema 5: Introducción al análisis temporal de sistemas lineales

Introducción

- En este tema se analizará el comportamiento temporal de sistemas lineales simples ante señales de entrada de prueba, principalmente la entrada en escalón.
- Se analizarán los sistemas de primer y segundo orden. También se harán algunas consideraciones para sistemas de orden superior.
- A partir de modelos de Función de Transferencia se analizará el comportamiento obteniendo la respuesta temporal mediante al cálculo de la antitransformada y analizando el efecto de la posición de los polos con respecto al comportamiento del sistema

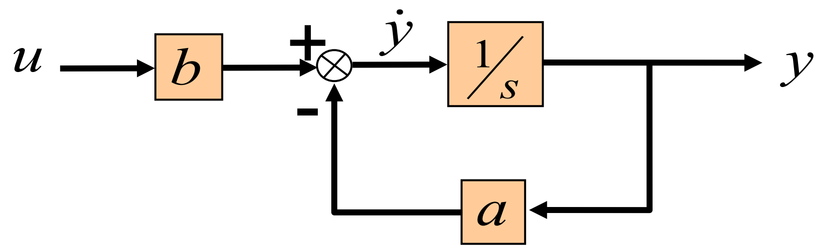


$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} + \frac{a_2}{s + p_2} + \ldots$$

$$y(t) = a_1 e^{-\sigma t}\,\mathrm{sen}(\omega t + b_2) + a_2 e^{-p_2 t} + \ldots$$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Se puede describir

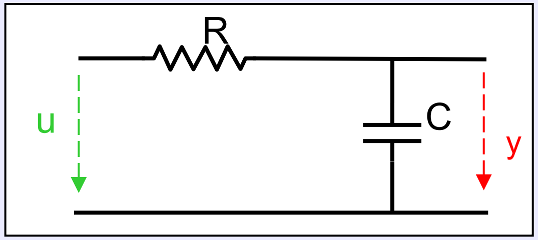


en forma ec. diferencial $\frac{dy}{dt} + ay = bu$

o en forma integral $y = \int (bu - ay)dt$

o si las condiciones iniciales nulas, en forma de función de transferencia :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{a+s}$$



$$RC\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

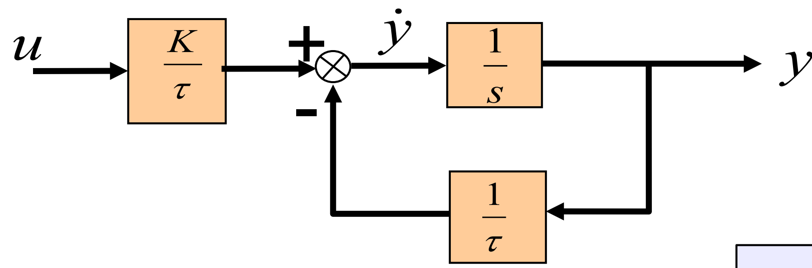
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/RC}{1/RC + s}$$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

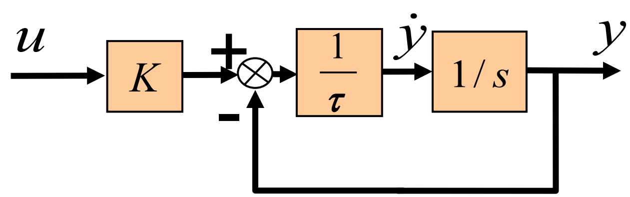
- Se suele expresar con parámetros con significado físico:

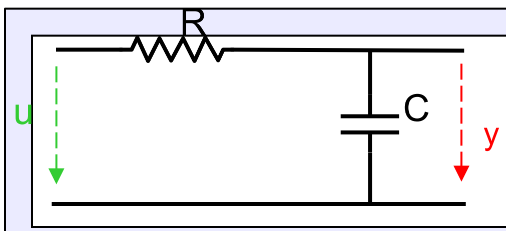
$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\tau}y=\frac{K}{\tau}u$$

$$\Downarrow$$



$$\tau\frac{dy}{dt}+y=K\,u$$





$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+RCs}$$

$$K=1$$

$$\tau=RC$$

con condiciones iniciales nulas:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{1+\tau s}$$

K: Ganancia estática $\frac{\Delta y_\infty}{\Delta u_\infty}$ (unidades conformes a las de entrada y salida)

τ: Constante de tiempo (medida en unidades de tiempo)

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

$$\text{K}: \text{ Ganancia estática } \frac{\Delta y_\infty}{\Delta u_\infty} \quad \textit{puede ser positiva o negativa}$$

$$|K| < 1 \text{ Atenúa}$$

$$|K| > 1 \text{ Amplifica}$$

$$|K| = 1 \text{ No modifica}$$

$$\tau: \text{ Constante de tiempo} \qquad \textit{siempre positiva}$$

$$\text{(sistemas estables)}$$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

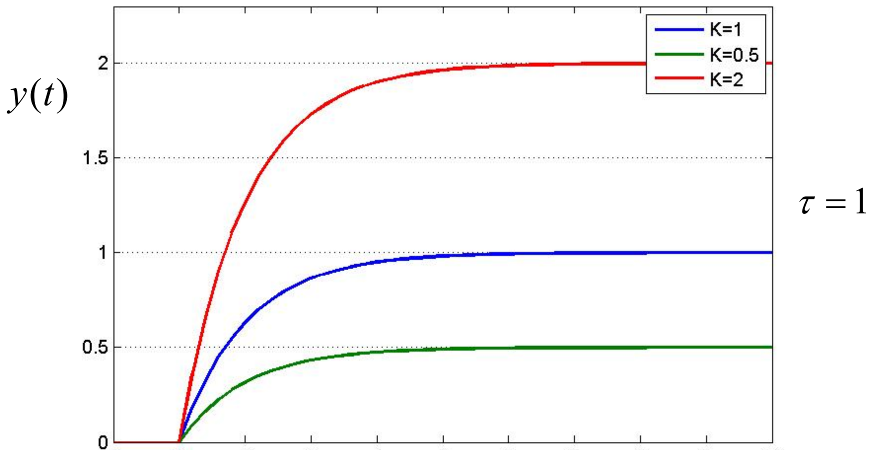
- Respuesta a un escalón unitario:

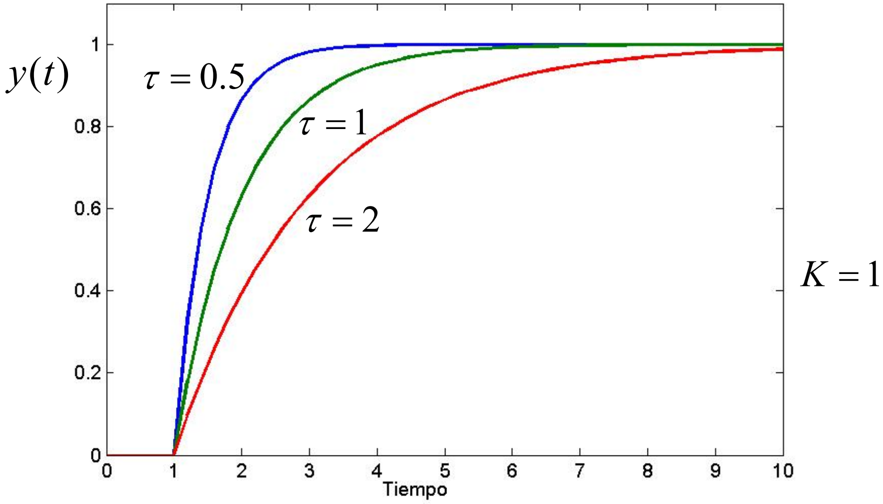
$$si\ \ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+\tau s}$$

con $u(t)$ un escalón unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y(t) = K\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \equiv \underbrace{y_\infty}_{\substack{\text{valor en} \\ \text{régimen} \\ \text{permanente}}} \underbrace{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{Tanto por uno}}$$





Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Respuesta a un escalón unitario:

$$y(t) = K\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \equiv \underbrace{y_\infty}_{\substack{\text{valor en} \\ \text{régimen} \\ \text{permanente}}} \; \underbrace{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{Tanto por uno}}$$

$$Para\ \ t = \tau \qquad (1 - e^{-1}) = 0.63$$

$$Para\ \ t = 2\tau \qquad (1 - e^{-2}) = 0.86$$

$$Para\ \ t = 3\tau \qquad (1 - e^{-3}) = 0.95$$

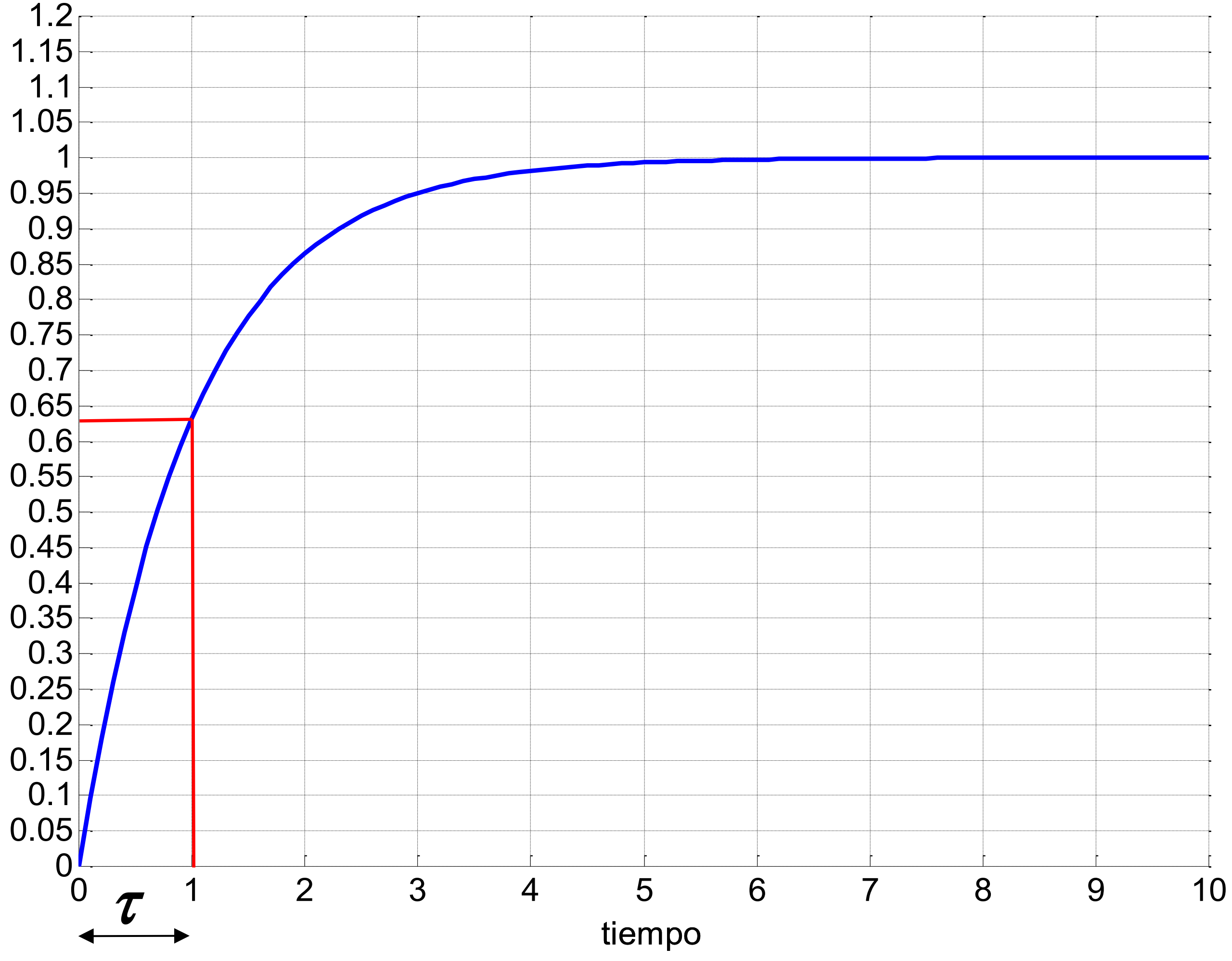
$$Para\ \ t = 4\tau \qquad (1 - e^{-4}) = 0.98$$

$$Para\ \ t = 5\tau \qquad (1 - e^{-5}) = 0.99$$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

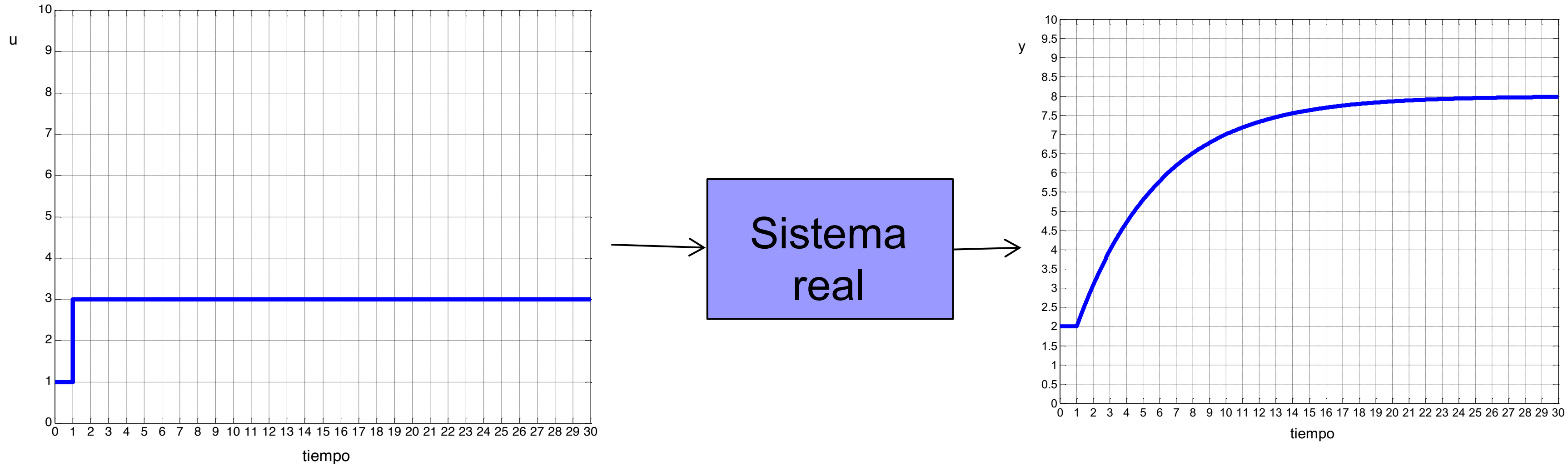
- Respuesta a un escalón unitario:

$$(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Identificación por respuesta a un escalón:
  - Queremos obtener el modelo de un sistema
  - Sometemos el sistema a una entrada en escalón y obtenemos la respuesta experimentalmente



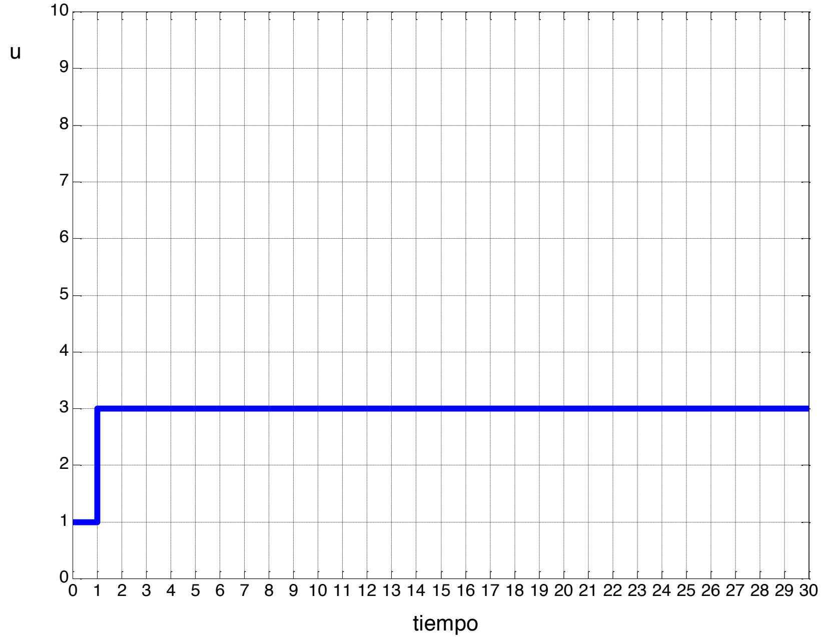
Entrada en escalón

Respuesta del sistema

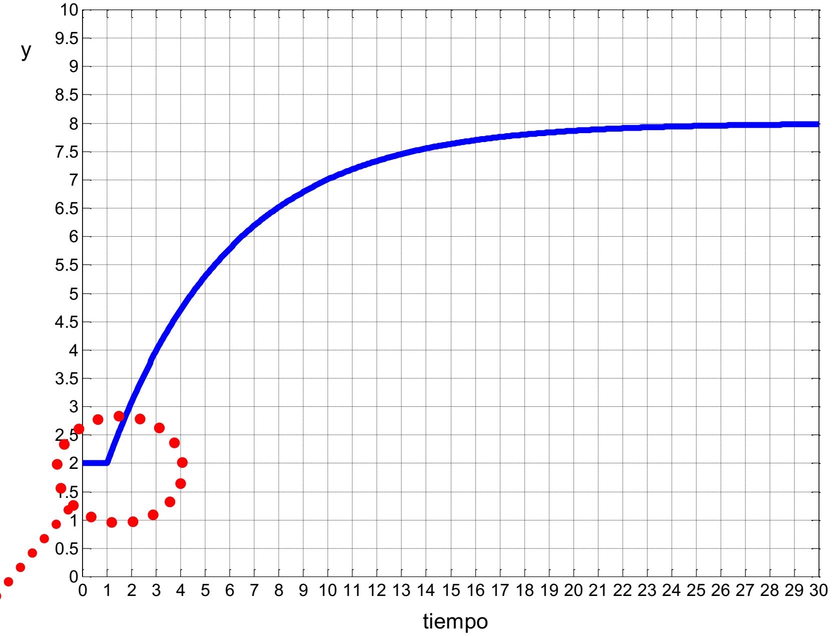
¿Cómo obtener el modelo G(s) del sistema?

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Identificación por respuesta a un escalón:



Entrada en escalón



Respuesta del sistema

Respuesta típica de sistema de primer orden:
evolución exponencial con pendiente no nula en el instante de cambio del escalón

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Identificación por respuesta a un escalón:

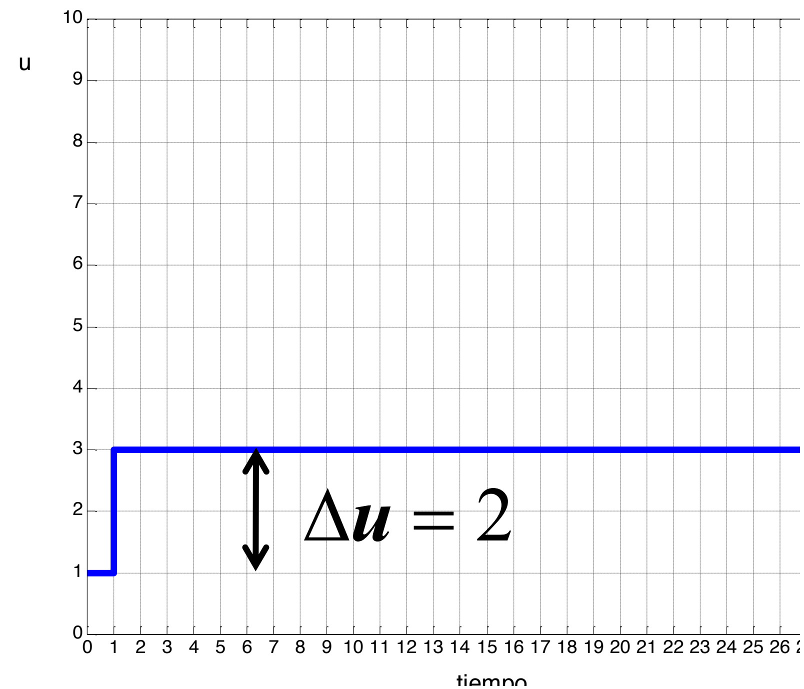
Función de transferencia candidata

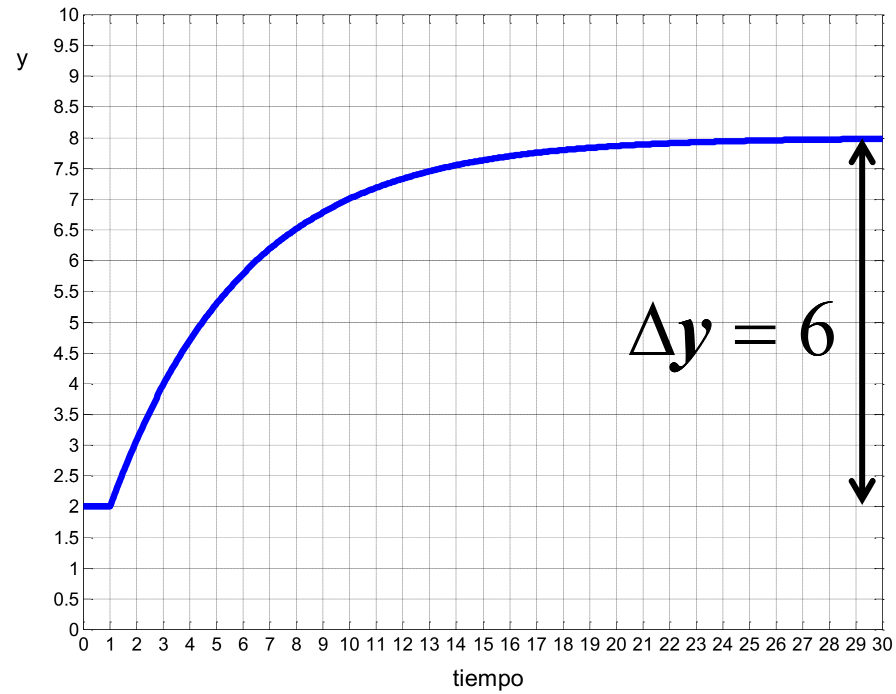
$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Dos parámetros:
¿K?
¿τ?

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Identificación por respuesta a un escalón:



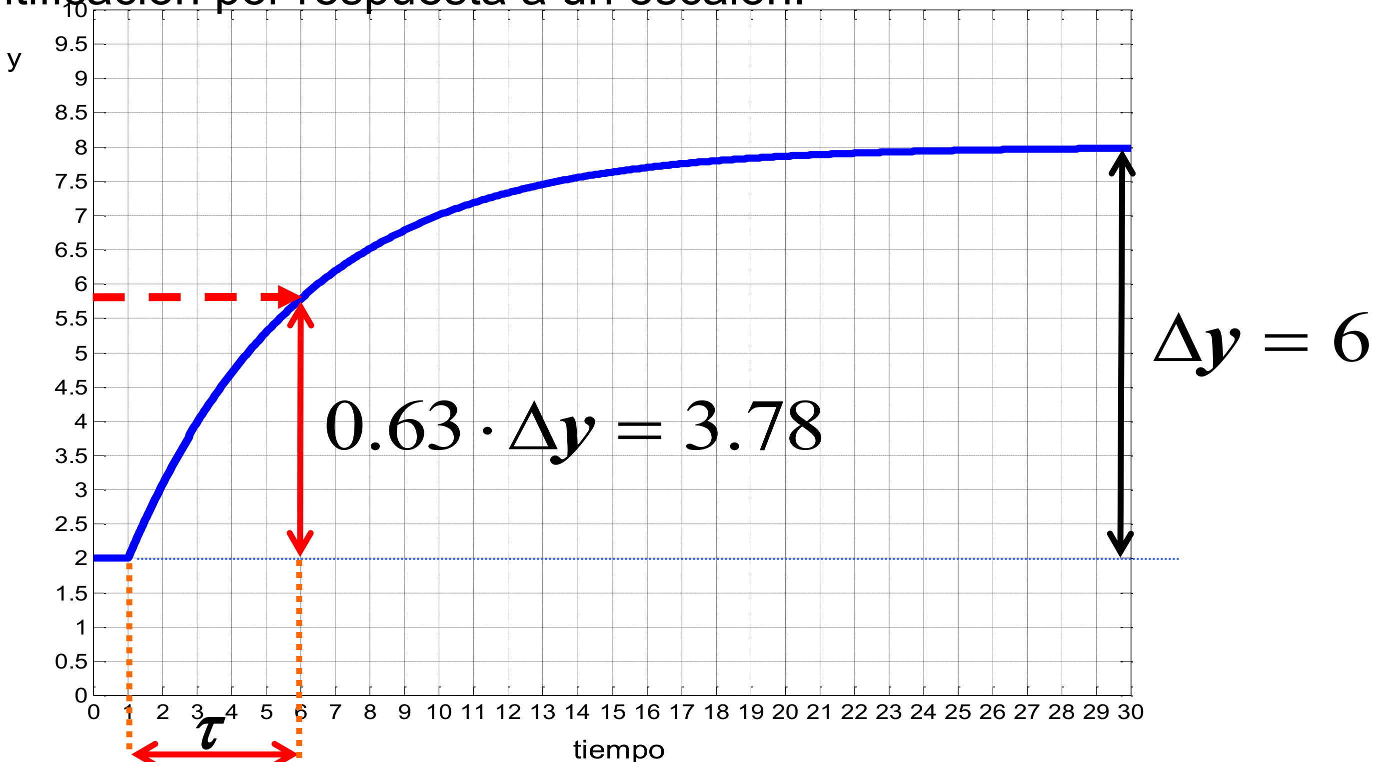


K: se obtiene observando el régimen permanente

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Identificación por respuesta a un escalón:



τ: se obtiene observando el régimen transitorio

el 63% del incremento final de la salida es $0.63\Delta y = 0.63 \cdot 6 = 3.78$
sumado al valor que tenía antes del escalón $2 + 3.78 = 5{,}78$
que llevado a la gráfica permite obtener el tiempo en el que se alcanza este valor que es a los 6 segundos. Finalmente $\tau = 6 - 1 = 5$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

- Identificación por respuesta a un escalón:

Función de transferencia obtenida:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \frac{\boldsymbol{K}}{1+\boldsymbol{\tau}\,\boldsymbol{s}} = \frac{3}{1+5\boldsymbol{s}}$$

RECUERDE: Para definir el modelo se han utilizado variables incrementales, por lo que para obtener los valores reales hay que tener en cuenta el punto de funcionamiento.

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema real}} \longrightarrow y(t)$$

$$\beta(t) = u(t) - u_0 \longrightarrow \boxed{\text{Modelo } G(s)} \longrightarrow \alpha(t) = y(t) - y_0$$

Punto de funcionamiento:

$u_0 = 1$

$y_0 = 2$

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

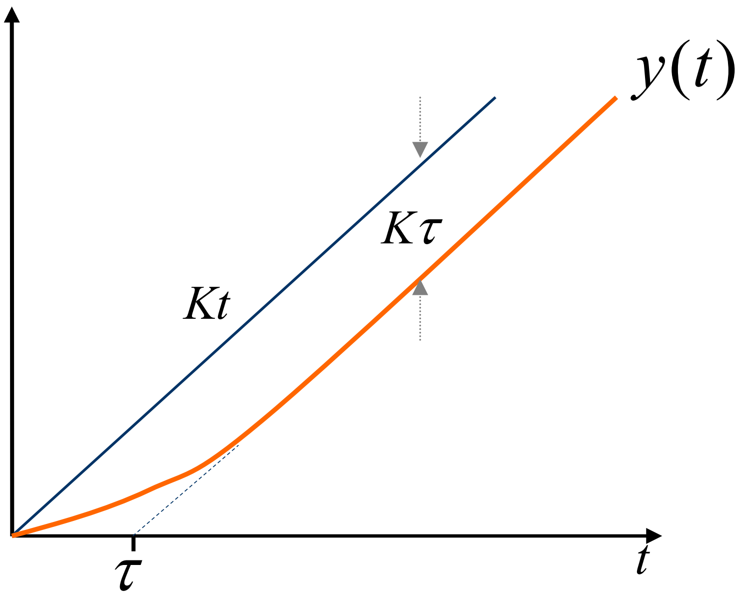
- Respuesta a una entrada en rampa

$$u(t) = t,\, t \ge 0 \Rightarrow U(s) = \frac{K}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{1+\tau s}\frac{K}{s^2}$$

calculando la antitransformada

$$y(t) = Kt - K\tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \quad t \ge 0$$



Sistema de primer orden: entrada senoidal

$$G(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

$$u(t) = sen(\omega t)$$

$$y_{rp(t)} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} sen(\omega t + \phi)$$

Sistema de primer orden: entrada senoidal

$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$

$$u(t) = sen(\omega t)$$

$f(t)$	$F(s)$
$\mathrm{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$

$$y(t) = e^{-at}\left[\frac{\omega b}{a^2+\omega^2}\right] + \frac{b}{a^2+\omega^2}\left(a\ \mathrm{sen}\omega\, t - \omega\ \mathrm{cos}\omega t\right)$$

Si t tiende a infinito

$$y_{rp}(t) = \frac{b}{a^2+\omega^2}\left(a\ \mathrm{sen}\omega t - \omega\ \mathrm{cos}\omega t\right)$$

Sistema de primer orden: entrada senoidal

$$y_{rp}(t) = \frac{b}{a^2 + \omega^2} \left(a \text{ sen}\omega t - \omega \cos\omega t\right)$$

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

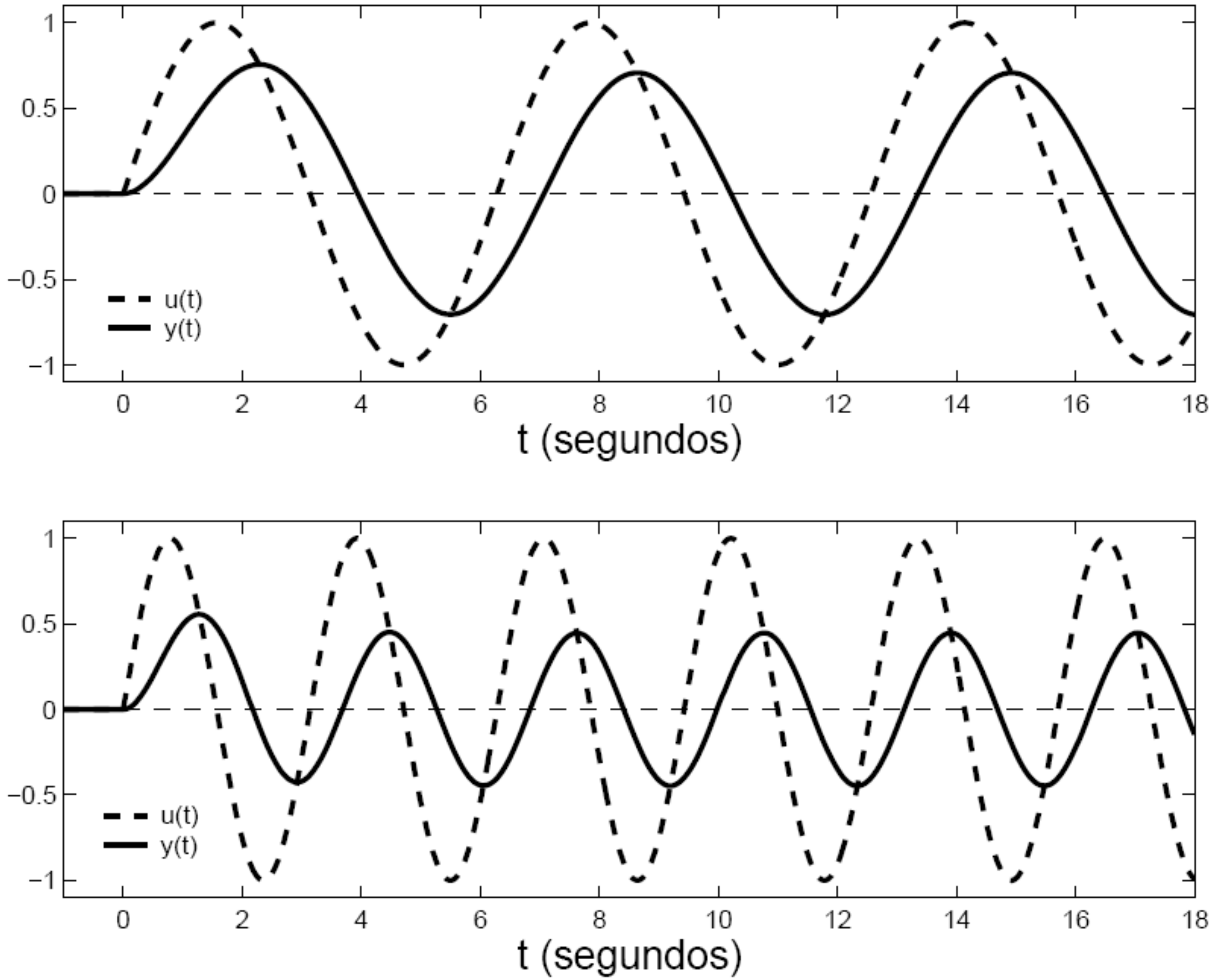
$$\text{sen}\phi = -\frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\tan\phi = -\omega/a = -\omega\tau$$

$$Y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\,\omega^2}}$$

$$y_{rp}(t) = Y \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Sistema de primer orden: entrada senoidal

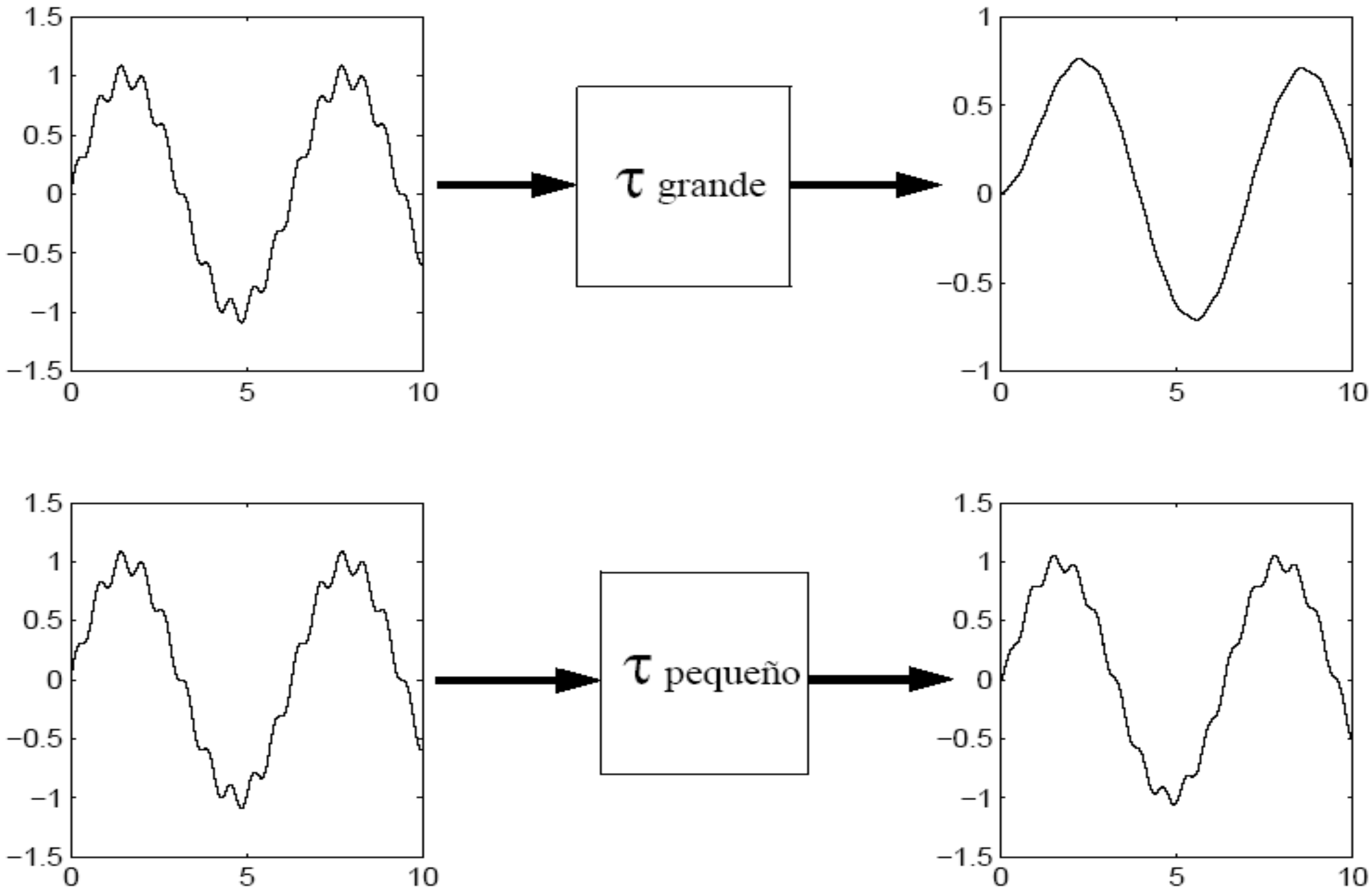


$$\phi = \Delta t \omega$$

Figura 5.9: Respuesta armónica para $u = \mathrm{sen} 0.5t$ y para $u = \mathrm{sen} 1.5t$.

Sistema de primer orden: filtrado

$$u(t) = sen(\omega t) \qquad\qquad y_{rp(t)} = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\, sen(\omega t + \phi)$$



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

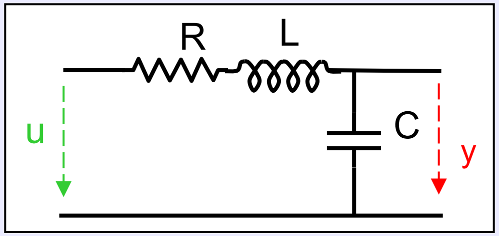
- Suele expresarse como

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1 u$$

- Parametrización habitual ($a_2 > 0$)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\,\delta\,\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2\, y = K\,\omega_n^2\, u$$

K : ganancia estática	[dim Y/dim U]
δ : Coeficiente de amortiguación	[adimensional]
ω_n : frecuencia natural	[rad/s]



$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{LC} u$$

$$K = 1$$

$$\omega_n = \sqrt{1/LC}$$

$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{1/LC}} \frac{R}{L}$$

- Considerando condiciones iniciales nulas:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n s + \omega_n^2}$$

Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Análisis del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{Polos}: \quad s^2 + 2\,\delta\,\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\delta\,\omega_n \pm \frac{\sqrt{4\delta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

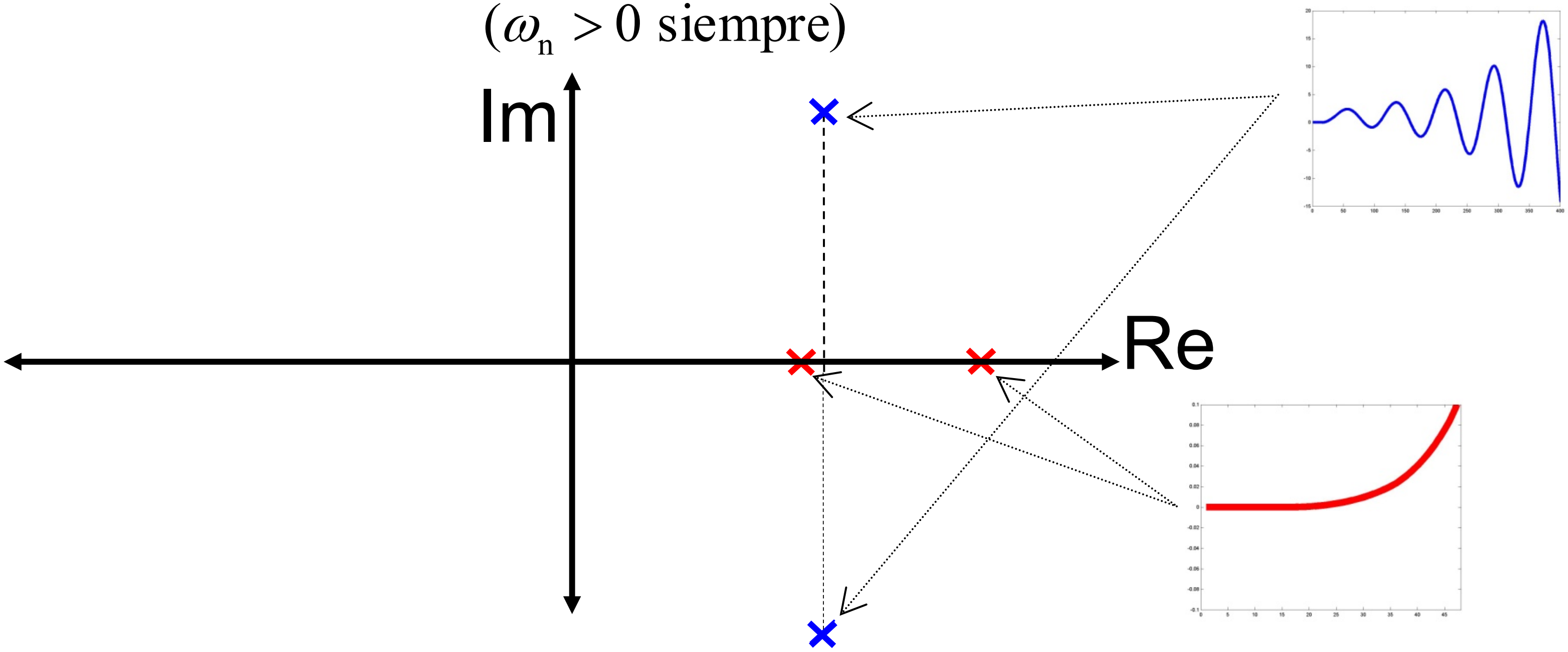
- Análisis del sistema

Caso 1: Sistema con amortiguamiento negativo o nulo

$$\text{Polos}: \underbrace{-\delta\,\omega_n}\pm\omega_n\sqrt{\delta^2-1}$$

$$\text{si }\ \delta\leq 0\Rightarrow\text{polos con parte real positiva o nula}\Rightarrow\text{sistema inestable}$$

$$(\omega_\text{n}>0\text{ siempre})$$



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Análisis del sistema

$$\text{Polos}: -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

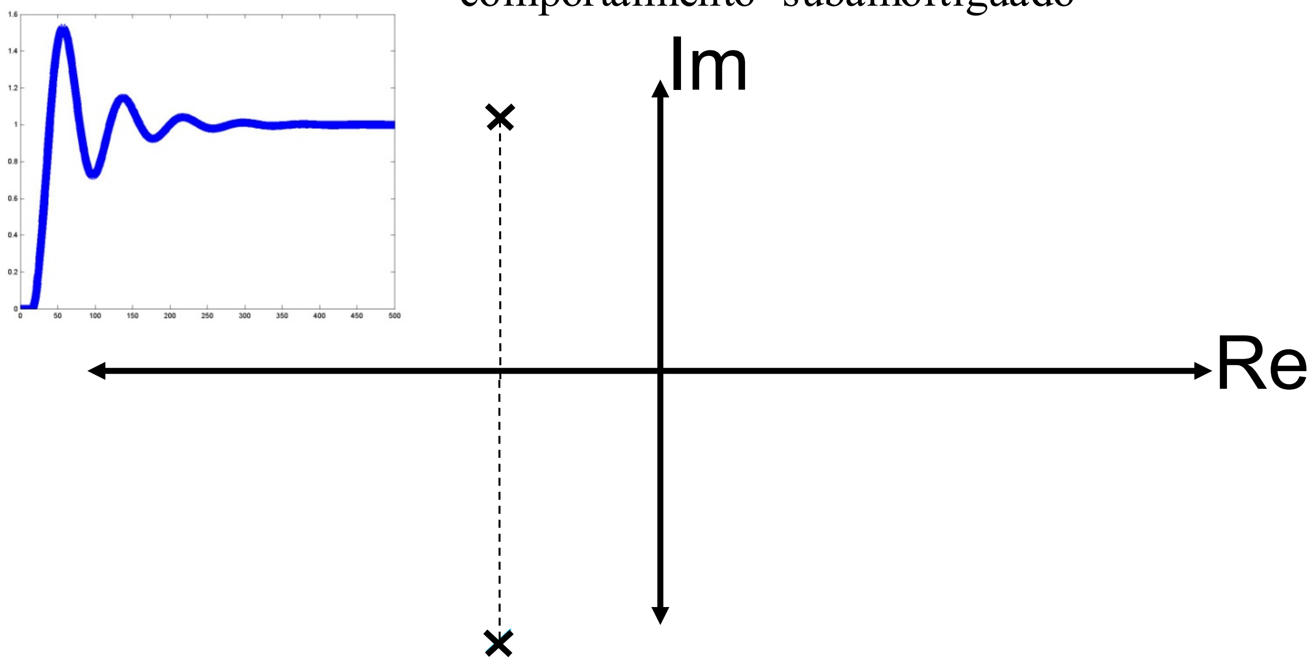
Caso 2: Sistema subamortiguado

si $0 < \delta < 1 \Rightarrow$ polos con complejos conjugados con parte real negativa $\Rightarrow$ sistema estable

$$\text{Polos}: -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\delta^2}\cdot j = -\delta\,\omega_n \pm \omega_d\, j$$

con ω_d *: frecuencia natural amortiguada*

comportamiento subamortiguado



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Análisis del sistema

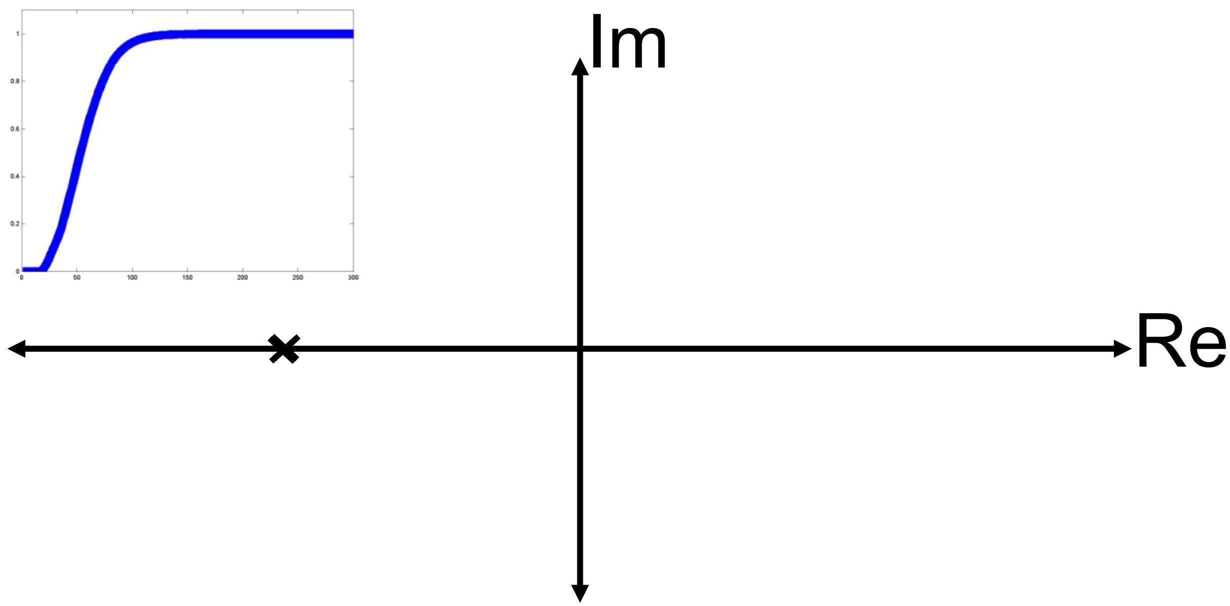
$$\text{Polos}: -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Caso 3: Sistema críticamente amortiguado

$$\text{si } \delta = 1 \Rightarrow \text{polos reales dobles negativos} \Rightarrow \text{sistema estable}$$

$$\text{Polos}: -\omega_n \quad (2)$$

$$\text{comportamiento} \quad \text{críticamente} \quad \text{amortiguado}$$



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Análisis del sistema

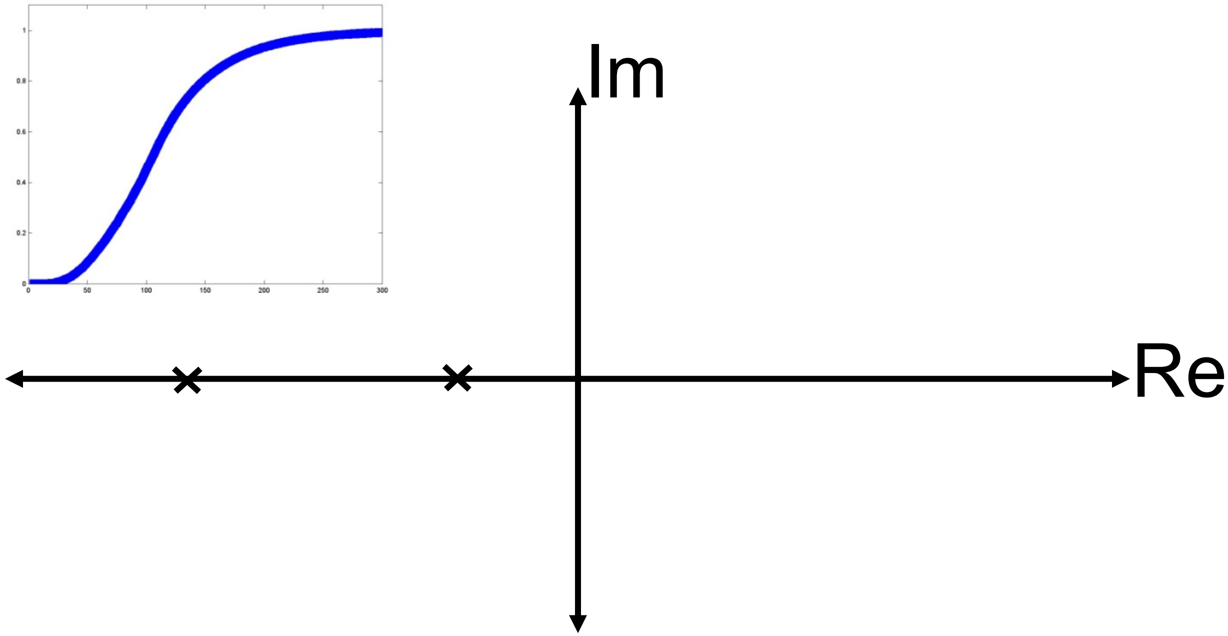
$$\text{Polos}: -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Caso 4: Sistema sobreamortiguado

$$\text{si } \delta > 1 \Rightarrow \text{polos reales negativos} \Rightarrow \text{sistema estable}$$

$$\text{Polos}: -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

$$\text{comportamiento sobreamortiguado}$$



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Respuesta a un escalón unitario

  Caso 2: Sistema subamortiguado $0 < \delta < 1$

$$\mathrm{U(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{calculando la antitransformada}$$

$$y(t) = K\ [1 - e^{-\delta\omega_n t}(\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t))]$$

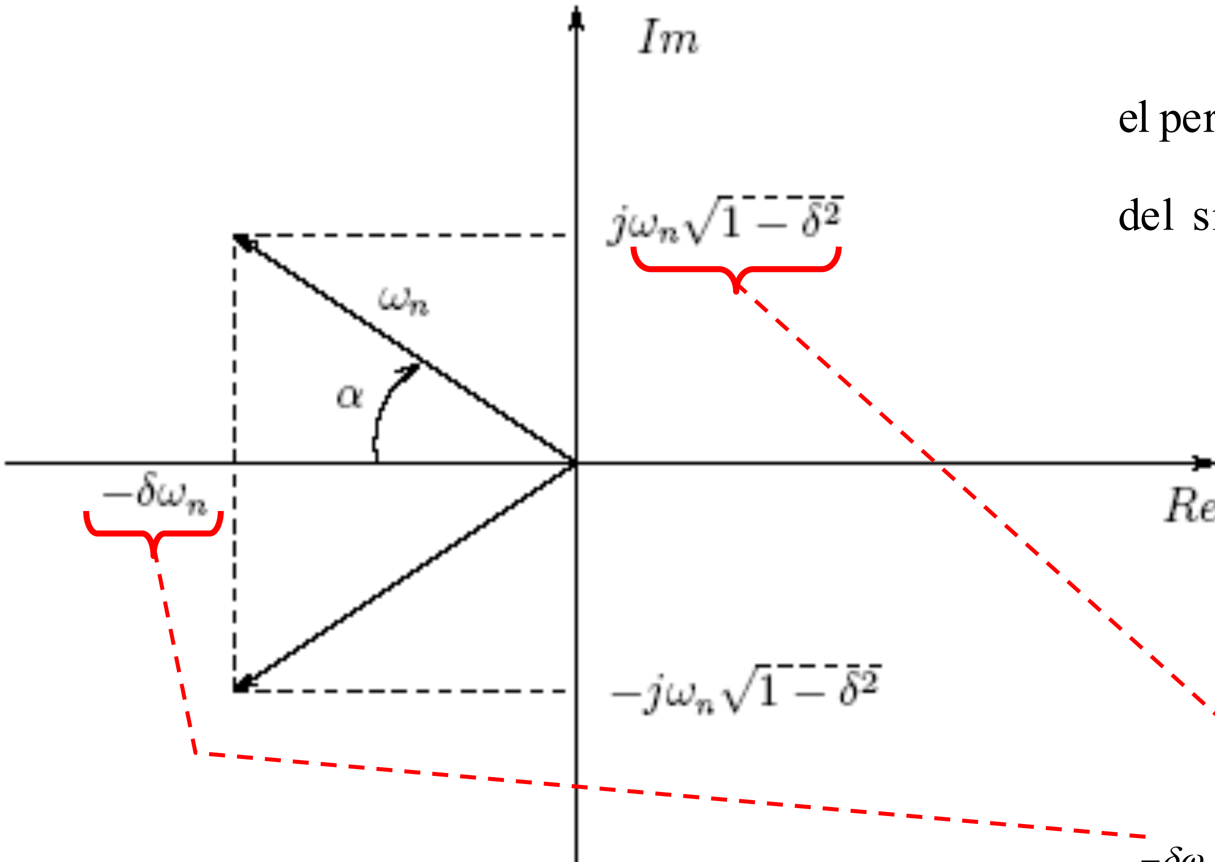
$$\text{como } \delta < 1 \text{ se puede hacer } \delta = \cos\alpha \qquad (sen\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\delta^2})$$

$$\boxed{y(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t + \alpha)\right]}$$

En adelante se supondrá $K = 1$ sin pérdida de generalidad

Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Respuesta a un escalón unitario: Sistema subamortiguado (caso 2)



el periodo de oscilación del sistema es $T_P = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$

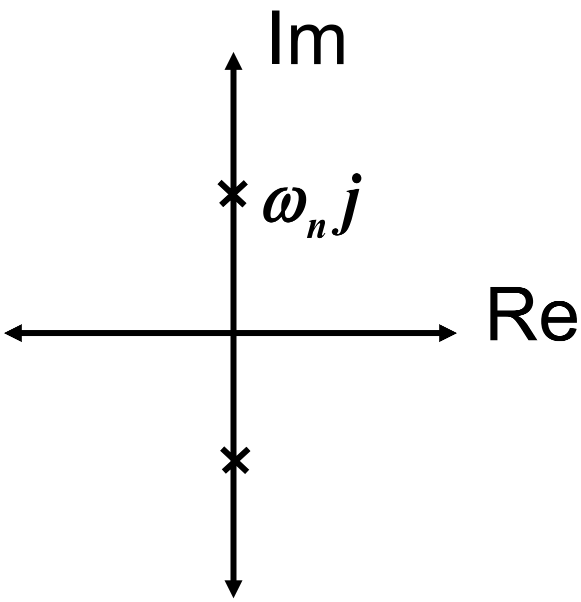
Polos: $-\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,j$

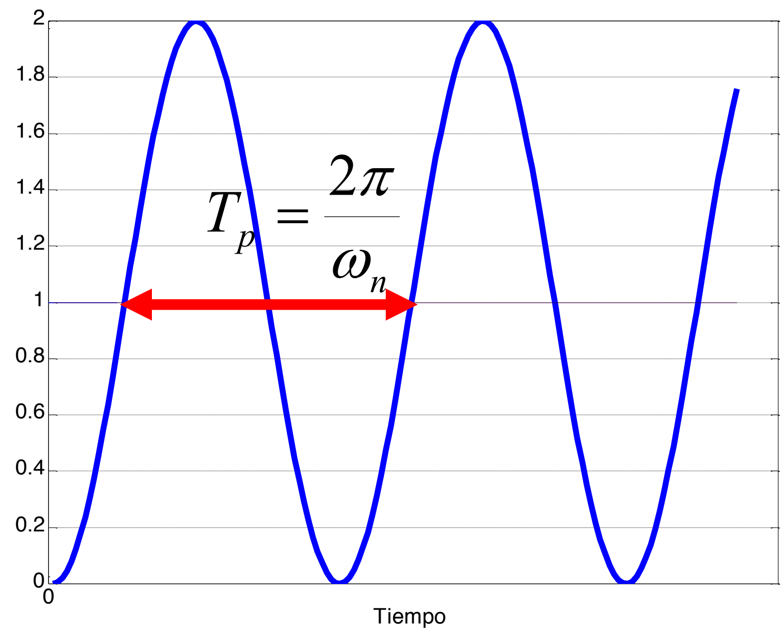
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\,sen(\omega_d t + \alpha)$$

Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Respuesta a un escalón unitario
  Límite entre los casos 1 y 2 $\delta = 0$

$$y(t) = 1 - e^{-\delta\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\,sen(\omega_d t)\right] = 1 - \cos(\omega_n t)$$





Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Respuesta a un escalón unitario

  Caso 3: Sistema críticamente amortiguado $\delta = 1$

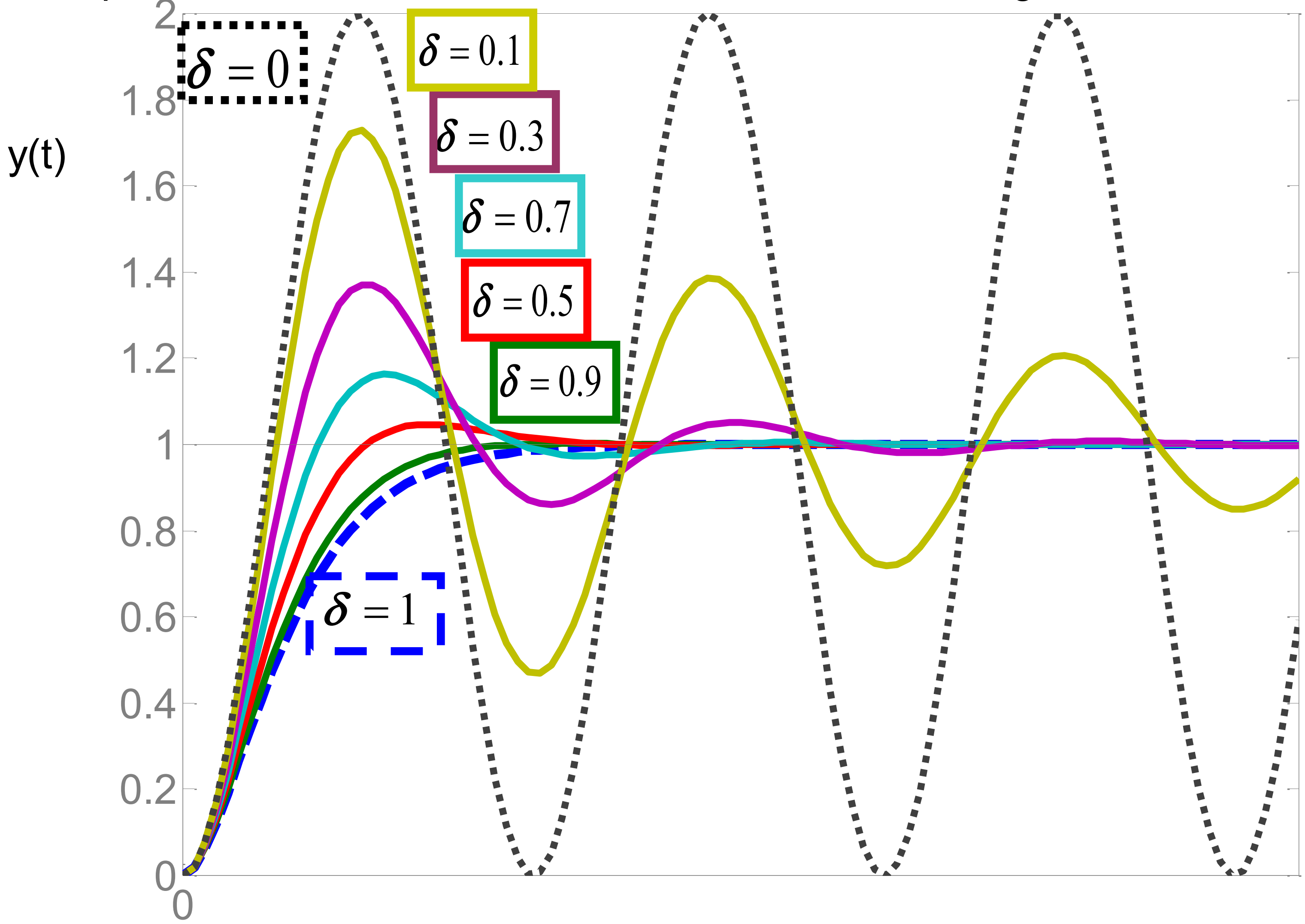
$$\mathrm{U(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{-\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \frac{1}{(s+\omega_n)} + \frac{1}{s}$$

calculando antitransformada

$$\boxed{y(t) = 1 - (t+\omega_n)e^{-\omega_n t}}$$

Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Respuesta a un escalón unitario: Sistemas con amortiguamientos entre 0 y 1



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

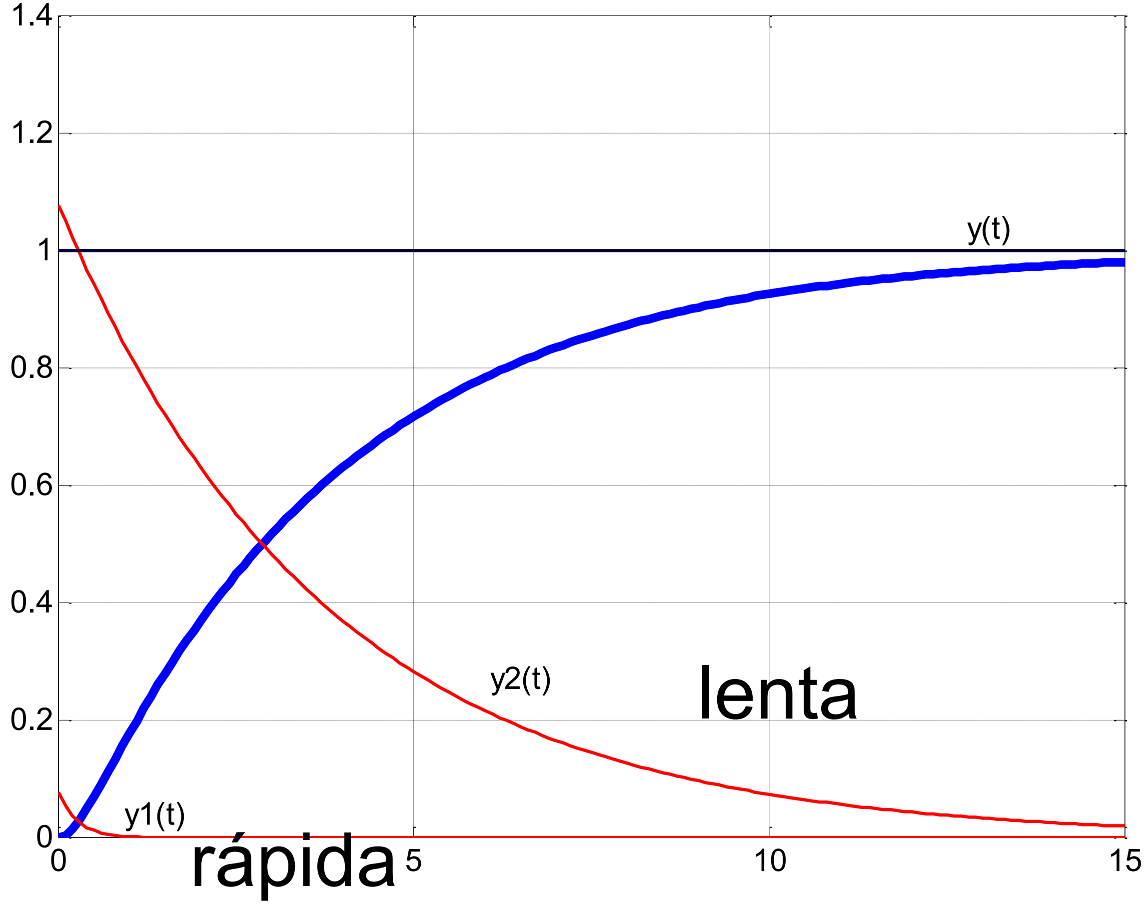
- Respuesta a un escalón unitario
  Caso 4: Sistema sobreamortiguado $\delta > 0$

$$\mathrm{U(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}} \qquad Y(s) = G(s)U(s) \text{ calculando antitransformada}$$

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - 1}}\left[\underbrace{\frac{e^{-\left(\delta+\sqrt{\delta^2-1}\right)\omega_n t}}{\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}}}_{\substack{\textit{Exponencial} \\ \textit{rápida} \;\; y_1}} - \underbrace{\frac{e^{-\left(\delta-\sqrt{\delta^2-1}\right)\omega_n t}}{\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}}}_{\substack{\textit{Exponencial} \\ \textit{lenta} \;\; y_2}}\right]$$

Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

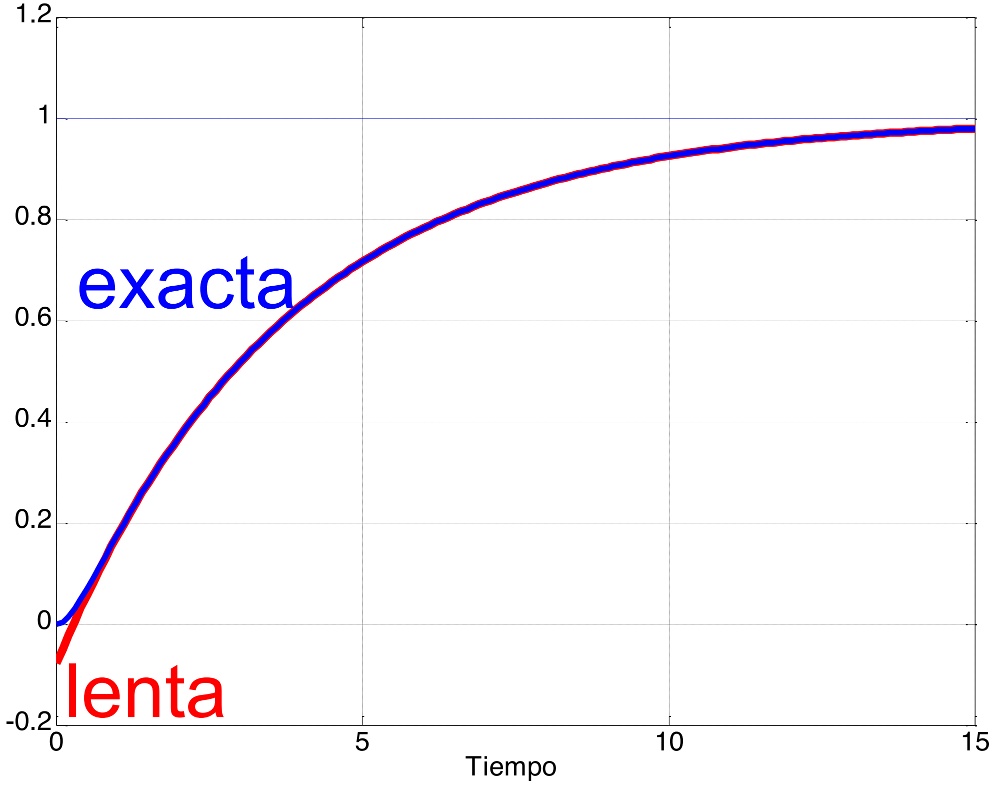
- Respuesta a un escalón unitario: sistema sobreamortiguado
  por ejemplo para $\delta = 2$ y $\omega_n = 1$



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

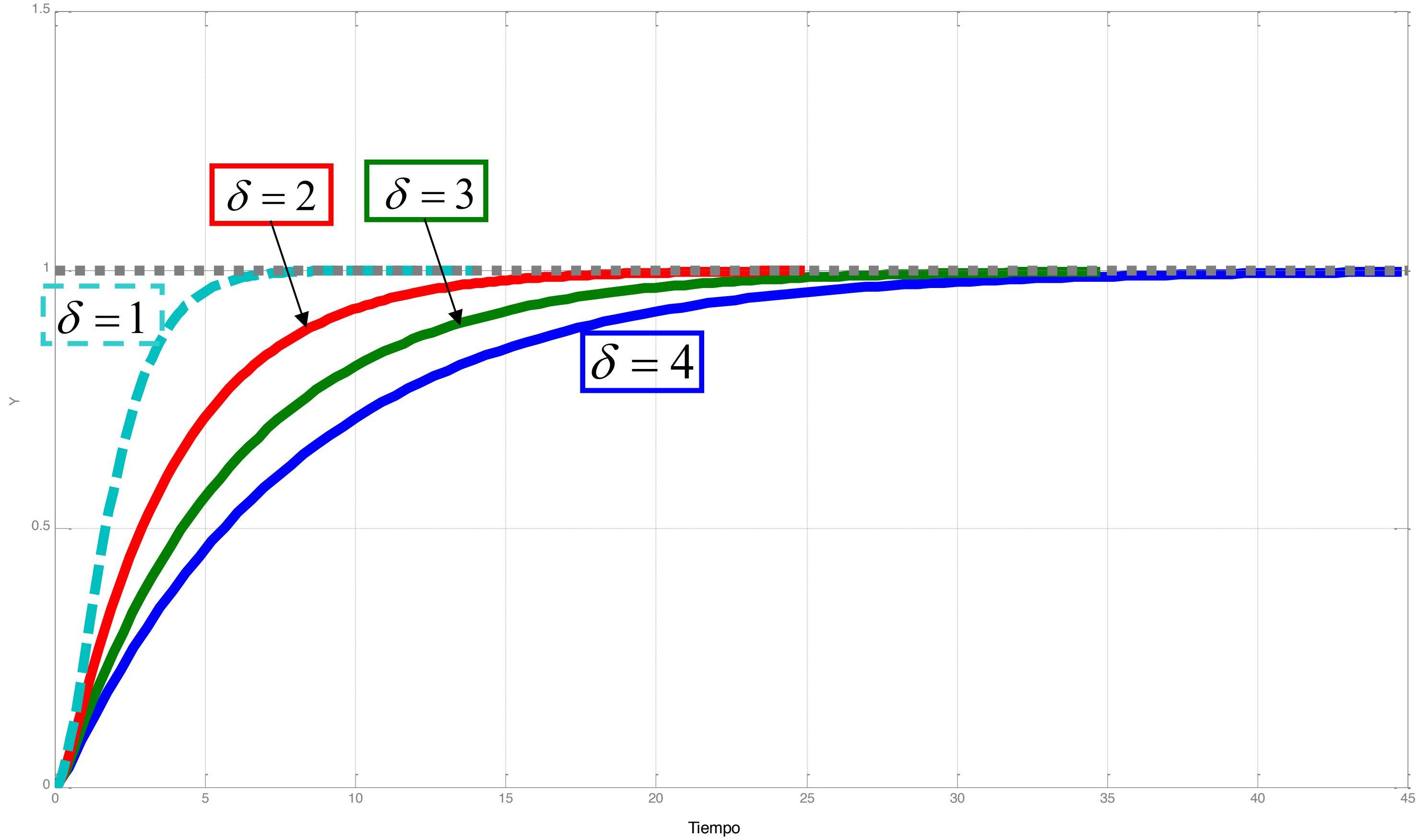
- Respuesta a un escalón unitario: sistema sobreamortiguado

$$\delta = 2 \text{ y } \omega_n = 1$$



Respuesta temporal de sistemas de 2º orden

- Respuesta a un escalón unitario: respuesta de un sistema sobreamortiguado en función del amortiguamiento



Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

  - **Tiempo de subida** (t_s):Es el tiempo necesario para que la señal de salida pase de un porcentaje inicial a uno final de su valor en régimen permanente. Normalmente se usan del 0 al 100%, 5 al 95% o 10 al 90%
    - Lo más habitual es (10-90%) o (0-100%) en sistemas subamortiguados

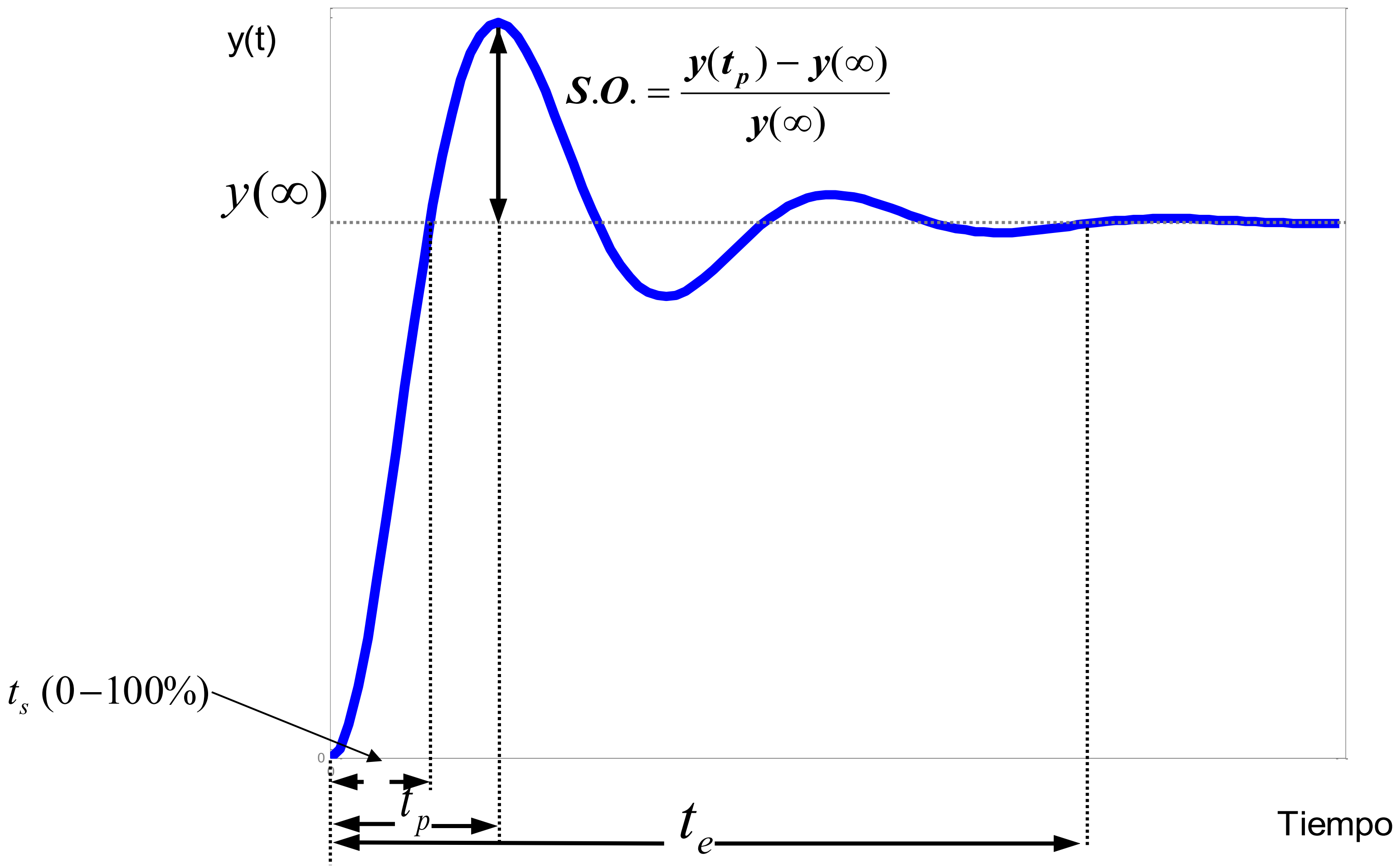
  - **Tiempo de pico** (t_p): Intervalo de tiempo hasta que se produce el primer pico en la señal de salida.
    - No está definido en sistemas de primer orden y sistemas de segundo orden sobreamortiguados

  - **Tiempo de establecimiento** (t_e): Tiempo que tarda la señal de salida en establecerse en una banda alrededor del valor en régimen permanente. Los valores más usados son ± 2% y ± 5%

  - **Sobreoscilación** (SO): Amplitud de la primera oscilación en tanto por ciento con respecto al valor de la señal en régimen permanente.

Respuesta temporal

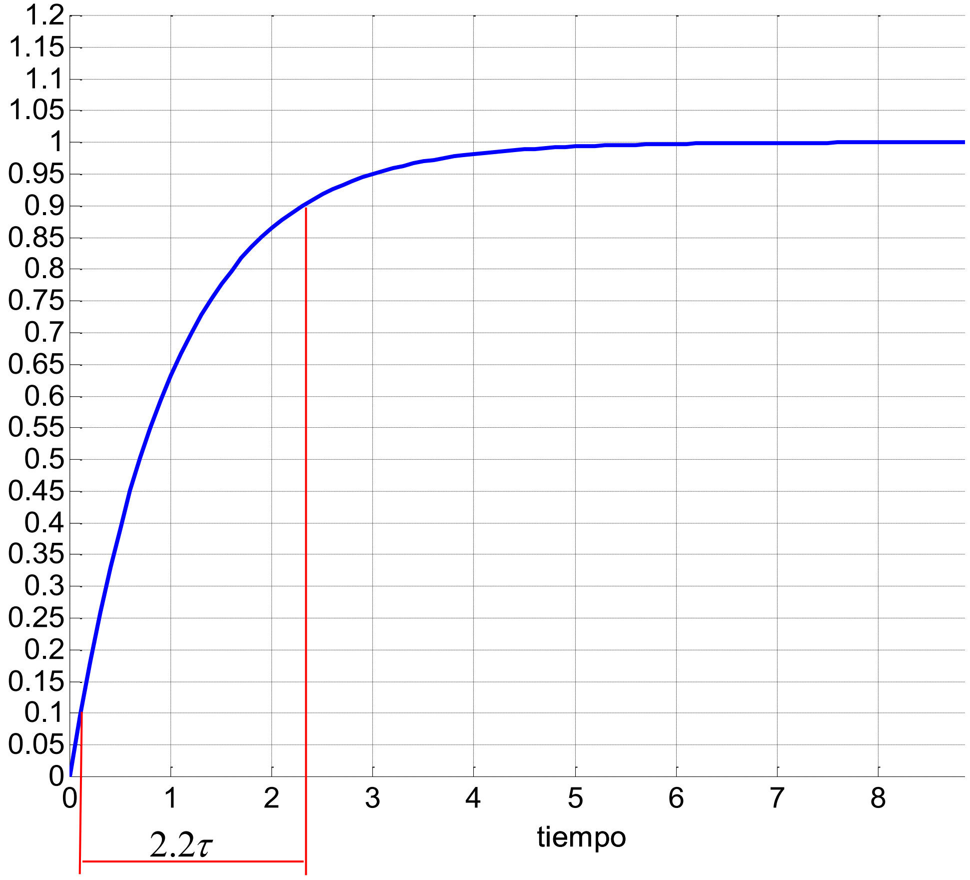
- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):



Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Tiempo de subida (10-90%) Sistema de 1º Orden



$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

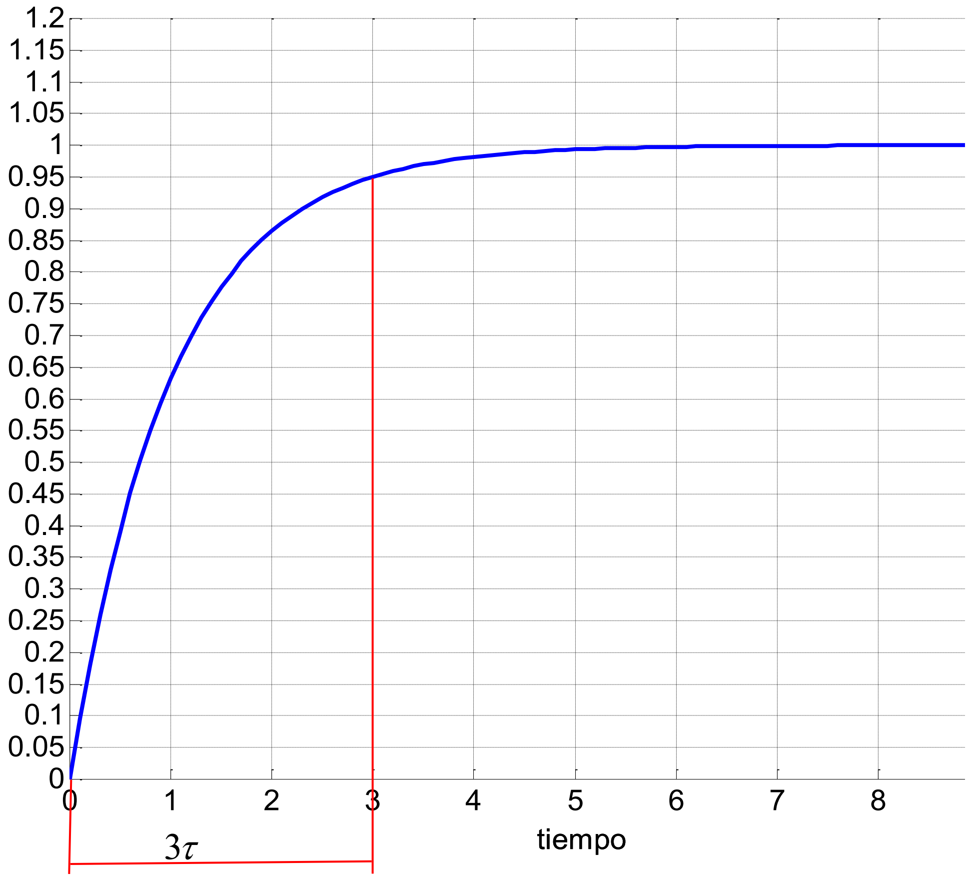
$$t_s = t_{90} - t_{10} = -\tau \ln 0.9 + \tau \ln 0.1$$

$$\boxed{t_s \approx 2.2\tau}$$

Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Tiempo de establecimiento t_e (5%) Sistema de 1º Orden



$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$t_e = -\tau \ln(0.05)$$

$$\boxed{t_e \approx 3\tau}$$

Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Tiempo de subida (0-100%) (t_s): Sistema de 2º orden subamortiguado

$$\left.\begin{aligned} &y(t) = 1 - e^{-\delta\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\,sen(\omega_d t)\right] \\ &y(t_s) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{-\delta\omega_n t_s}\left[\cos(\omega_d t_s) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\,sen(\omega_d t_s)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\omega_d t_s) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\,sen(\omega_d t_s) = 0 \Rightarrow \frac{\cos(\omega_d t_s)}{sen(\omega_d t_s)} = -\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \qquad si\ \delta = \cos\alpha$$

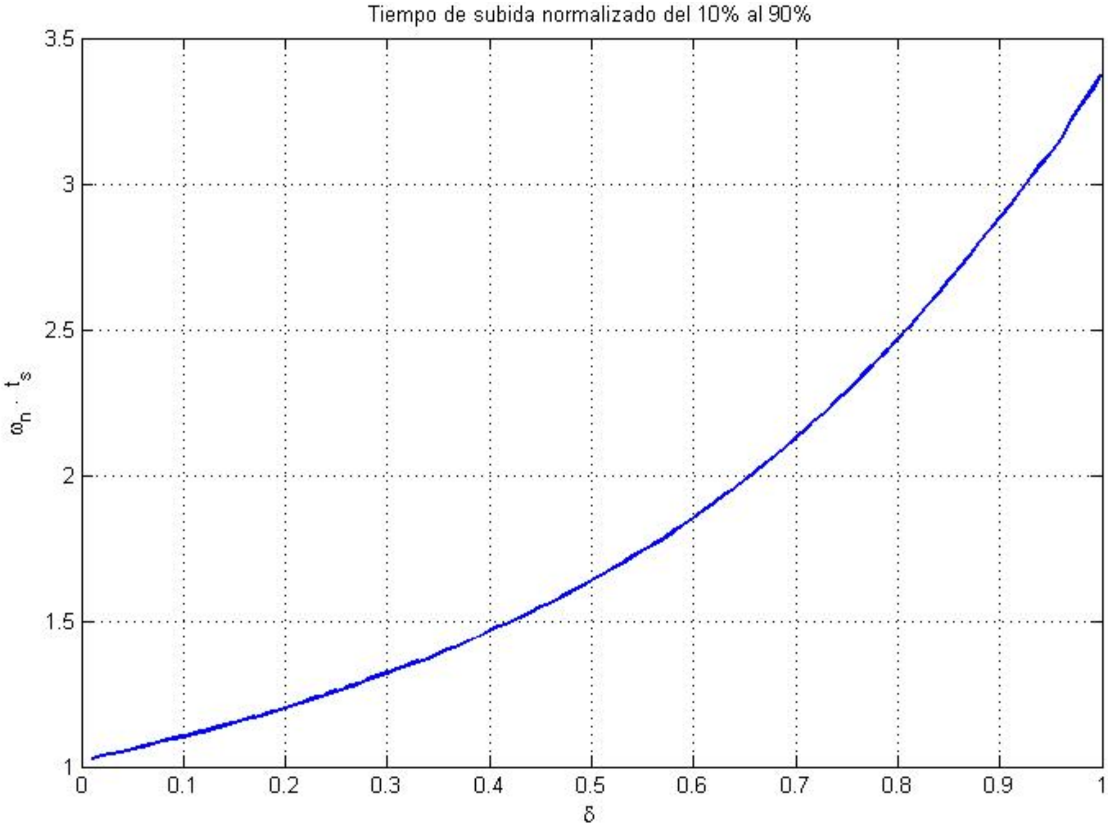
$$\Rightarrow \frac{\cos(\omega_d t_s)}{sen(\omega_d t_s)} = -\frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} \Rightarrow \quad tg(\omega_d t_s) = -tg\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega_d t_s = \pi - \alpha \ \Rightarrow \ t_s = \frac{\pi-\alpha}{\omega_d}$$

$$\boxed{t_s = \frac{\pi-\alpha}{\omega_d} = \frac{\pi-\alpha}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Tiempo de subida (10-90%) Sistema de 2º orden subamortiguado



Se puede obtener de la gráfica, en la que se representa:

$$\omega_n \cdot t_{s(10-90)} = f(\delta)$$

Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Tiempo de pico (t_p): Sistema de 2º orden subamortiguado

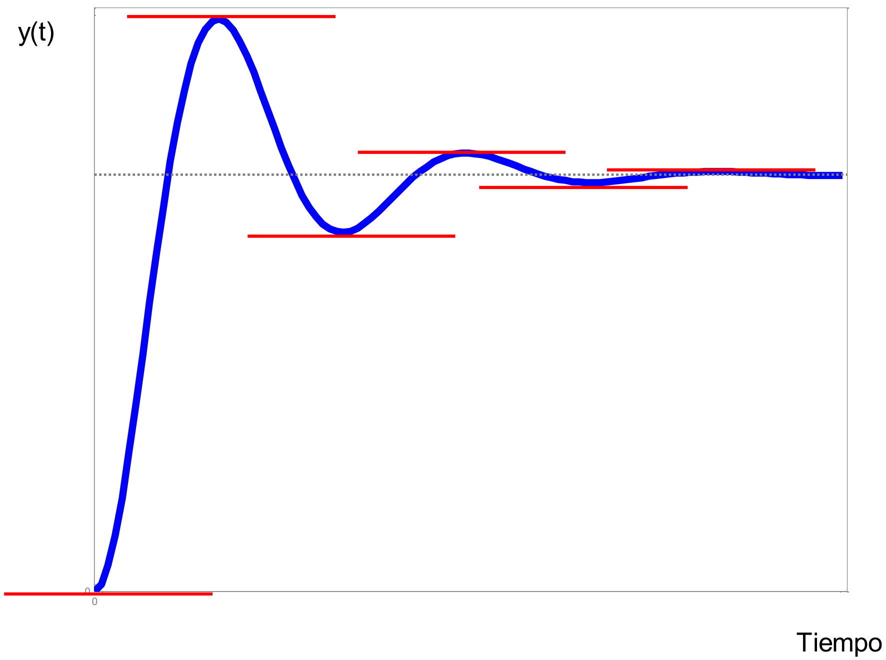
$$\frac{dy(t)}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy(t)}{dt}=\omega_n \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t)=0 \Rightarrow sen(\omega_d t)=0 \Rightarrow \omega_d t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

instantes donde se hace cero la derivada de la

$$\mathrm{t}=0, \frac{\pi}{\omega_d}, \frac{2\pi}{\omega_d}, \frac{3\pi}{\omega_d}, \ldots$$

el primer pico se produce en $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}}$$



Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Tiempo de establecimiento (t_e): Sistema de 2º orden subamortiguado

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t + \alpha) \quad \text{las curvas envolventes de esta señal son:} \quad 1 \pm \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

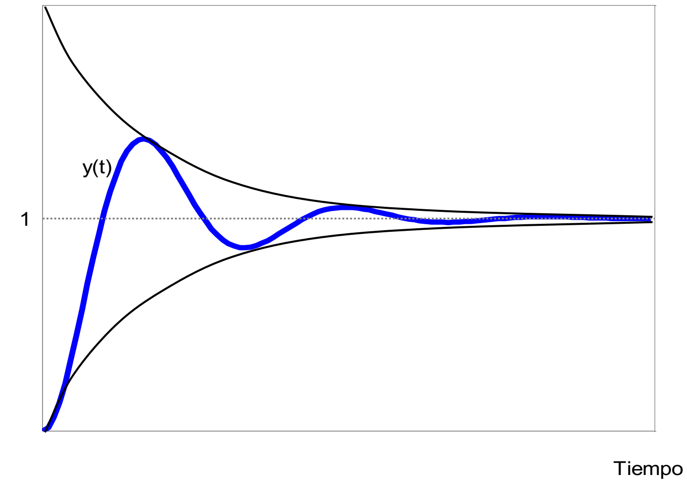
Las envolventes quedan dentro de una franja del 5% del valor final (supuesto $y(\infty) = 1$) en el instante t tal que:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} &= 1.05 \\ 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} &= 0.95 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} = 0.05 \Rightarrow t_e = -\frac{1}{\delta\omega_n}\ln(\sqrt{1-\delta^2}\cdot 0.05)$$

Simplificaciones:

$$franja\ del\ 5\% \Rightarrow t_e \approx \frac{3}{\delta\omega_n}$$

$$franja\ del\ 2\% \Rightarrow t_e \approx \frac{4}{\delta\omega_n}$$



Respuesta temporal

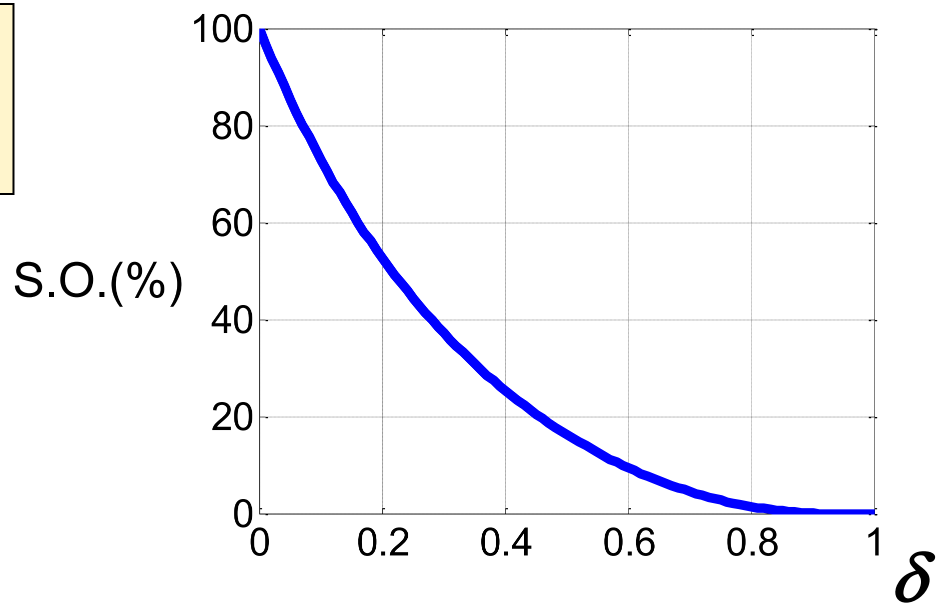
- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):

Sobreoscilación (S.O.)
Sistema de 2º orden subamortiguado

$$S.O.(\%) = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100$$

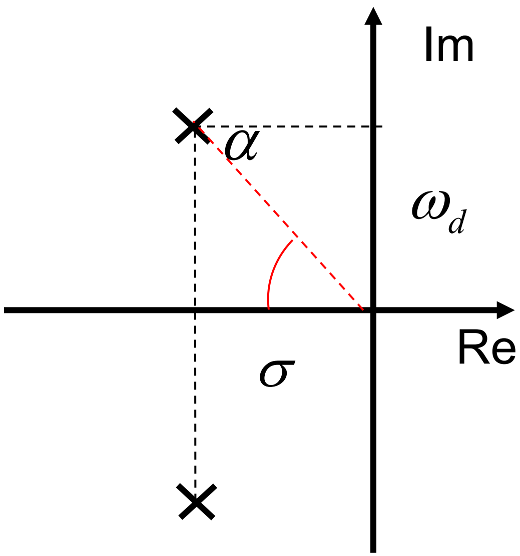
$$\text{si } y(\infty) = 1 \qquad y(t_p) = 1 - e^{-\frac{\delta \omega_n \pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}} [\cos\pi + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} sen\pi] = 1 + e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$\text{luego } \boxed{S.O.(\%) = 100 \cdot e^{\frac{-\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}}$$



Respuesta temporal

- Caracterización del transitorio (Respuesta a escalón):
  Sistema de 2º orden subamortiguado



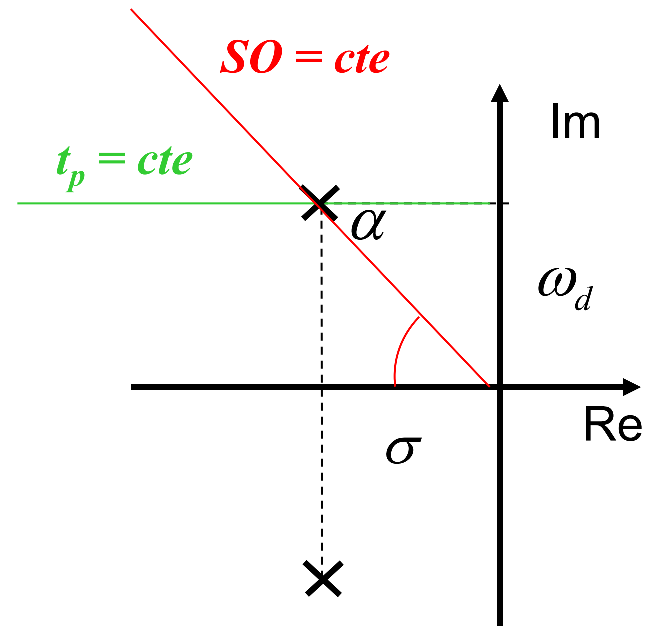
$$\alpha = \operatorname{acos}(\delta)$$

$$SO = SO(\alpha)$$

$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_e = \frac{3}{\sigma} \quad (95\%)$$



	α	σ	ω_d	SO	t_s	t_p	t_e
$\uparrow \delta$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$\uparrow \omega_n$	-	$\uparrow$	$\uparrow$	-	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

Sistema de orden superior

- Ecuación diferencial lineal de orden *n*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

Calculando antitransformada (C.I. nulas) $Y(s) = \dfrac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$

Sistema de orden superior

En general, los polos de $G(s)$ podrán ser o bien polos reales o bien complejos conjugados, por lo que la respuesta ante una entrada en escalón se puede calcular:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k' \prod_{i=1}^{m} (s + c_i)}{\prod_{j=1}^{t} (s + p_j) \prod_{k=1}^{r} (s^2 + 2\delta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

$$y(t) = K + \sum_{j=1}^{t} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} e^{-\delta_k \omega_k t} [b_k \, sen(\omega_k \sqrt{1-\delta^2} \cdot t) + c_k \cos(\omega_k \sqrt{1-\delta^2} \cdot t)]$$

siendo la ganancia estática

$K = \lim_{s \to 0} G(s)$ (* demostración a continuación)

Sólo si el sistema alcanza un régimen permanente

(Todos sus polos con parte real negativa)

Sistema de orden superior

*La demostración hace uso del Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot U(s)$$

en el caso en que u(t) sea un escalón unitario

$$U(s) = \frac{1}{s} \text{ y además } \lim_{t\to\infty} y(t) = K$$

$$\text{luego K} = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s)$$

Sistema de orden superior

- Polos dominantes:
  - En la práctica, se dan situaciones en que algunos polos tienen una influencia en la respuesta del sistema es muy superior a la del resto de polos, a estos polos se les denomina polos dominantes.
  - Esta situación ya se consideró en el estudio del sistema sobreamortiguado (exponencial rápida vs. exponencial lenta)
  - Los polos dominantes son los polos que dan la respuesta más lenta.
  - La rapidez de respuesta viene dada por el exponente de la exponencial (la parte real del polo), recuerde:

$$-\frac{1}{\tau} \text{ en sistemas de primer orden (polo real)}$$

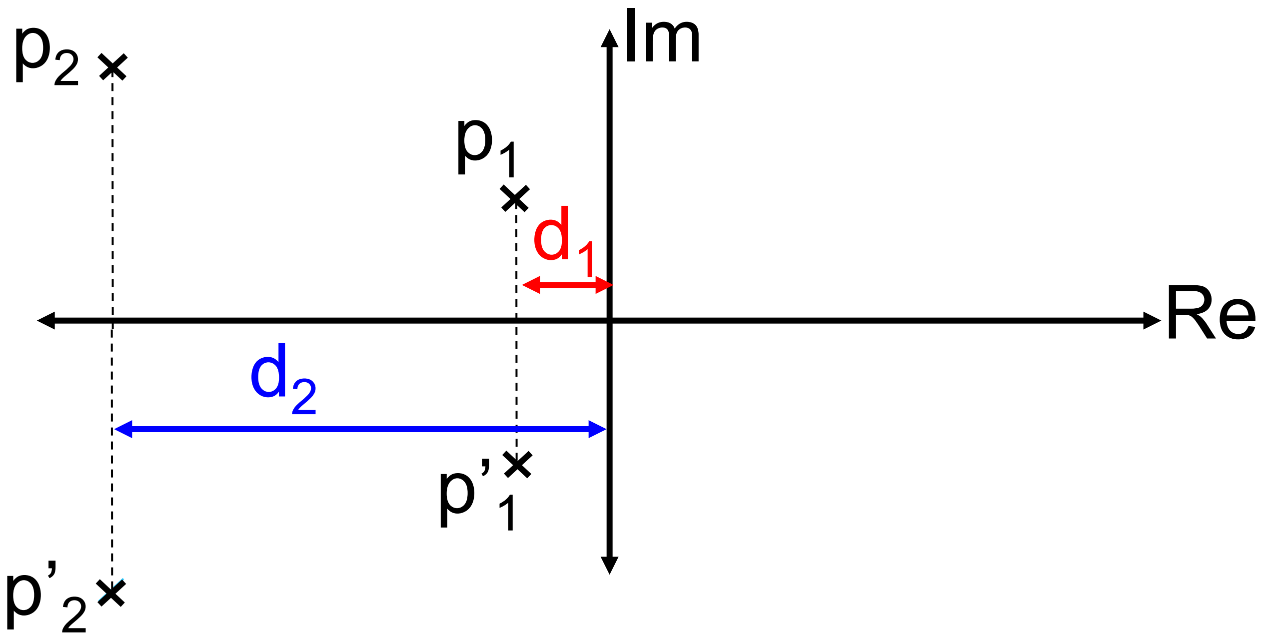
$$-\delta\omega_n \text{ en sistemas de segundo orden subamortiguado (polo complejo)}$$

$$\left.\begin{array}{l} -(\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n \quad lento \\ -(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})\omega_n \quad rápido \end{array}\right\} \text{en sistemas de segundo orden sobreamortiguado (polos reales)}$$

Sistema de orden superior

- Polos dominantes:

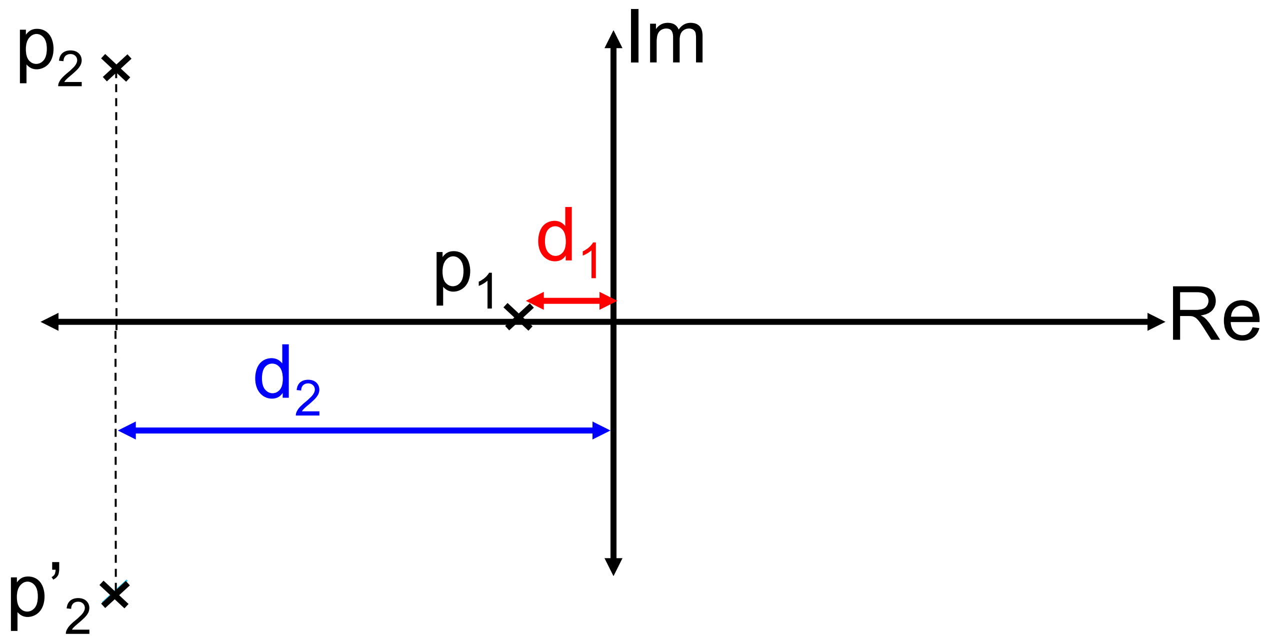
  - En la práctica, los polos dominantes se determinan por la distancia relativa de los mismos al eje imaginario



p_1, p'_1 se van a considerar dominantes si $d_2/d_1 > 5$

Sistema de orden superior

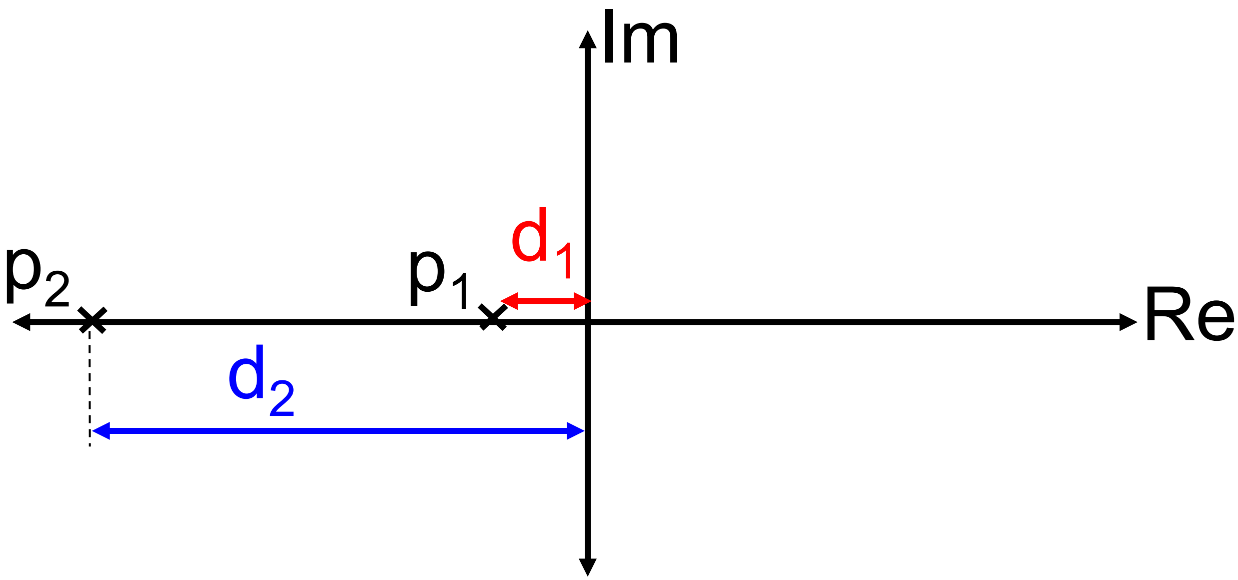
- Polos dominantes:



p_1 se va a considerar dominante si $d_2/d_1>5$

Sistema de orden superior

- Polos dominantes:

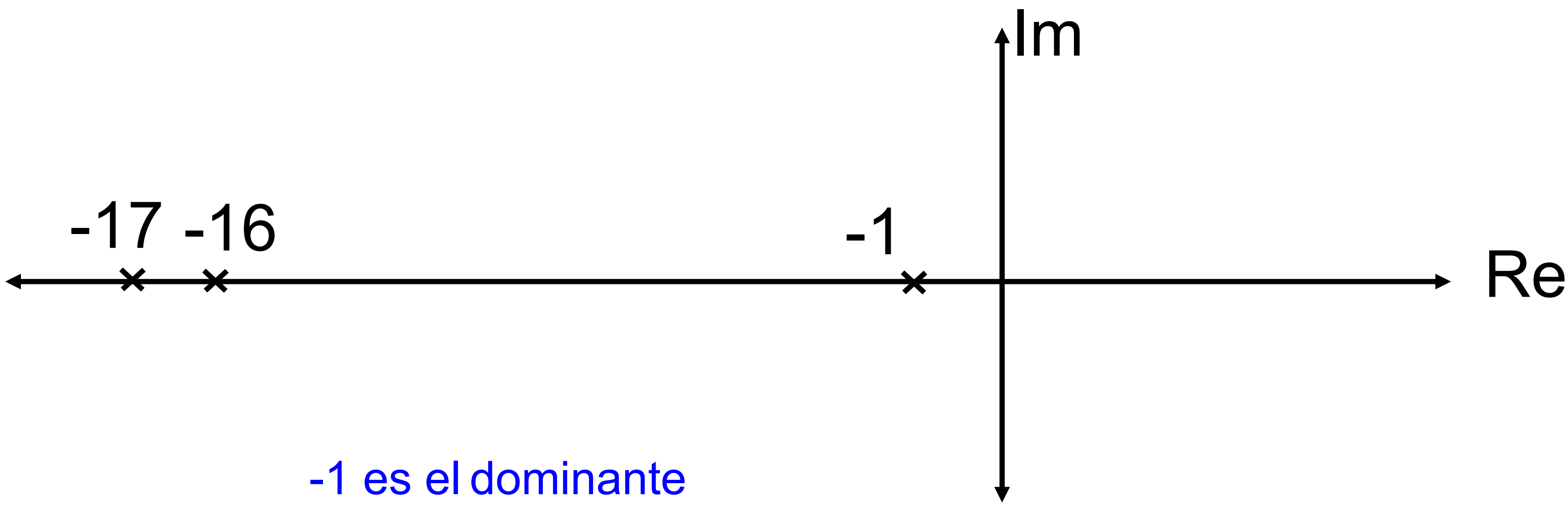


p_1 se va a considerar dominante si $d_2/d_1>5$

Sistema de orden superior

- Polos dominantes:
  - En la práctica, un sistema de orden superior puede ser reducido despreciando el efecto de los polos no dominantes (polos rápidos).
  - **IMPORTANTE:** al eliminar los polos no dominantes: LA GANANCIA ESTÁTICA DEBE QUEDAR INALTERADA

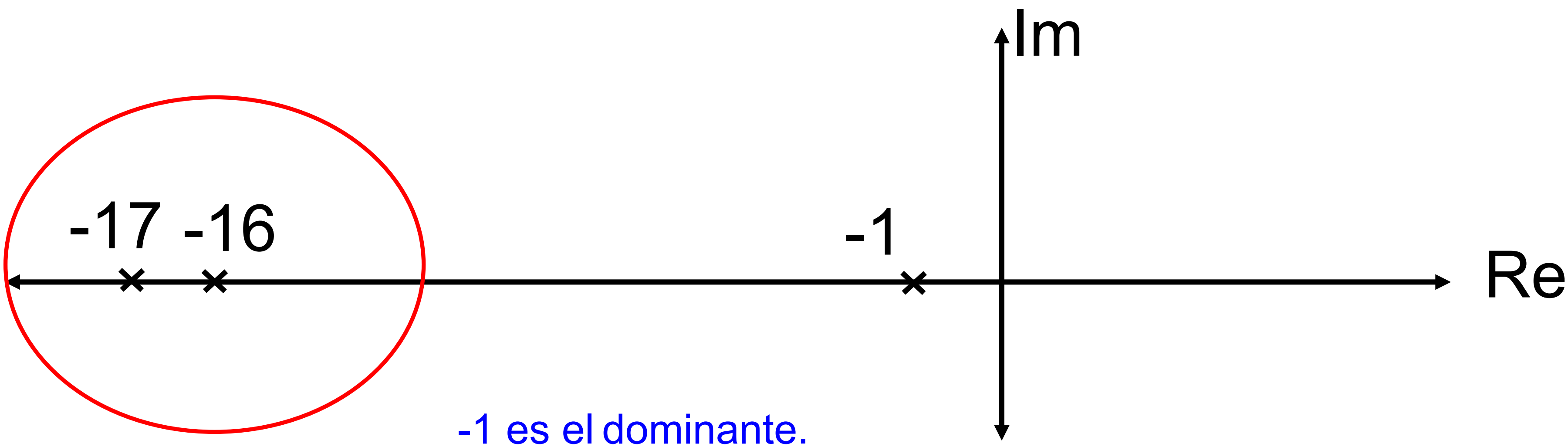
Ejemplo: $$G(s) = \frac{544}{(s+1)(s+16)(s+17)}$$



Sistema de orden superior

- Polos dominantes:

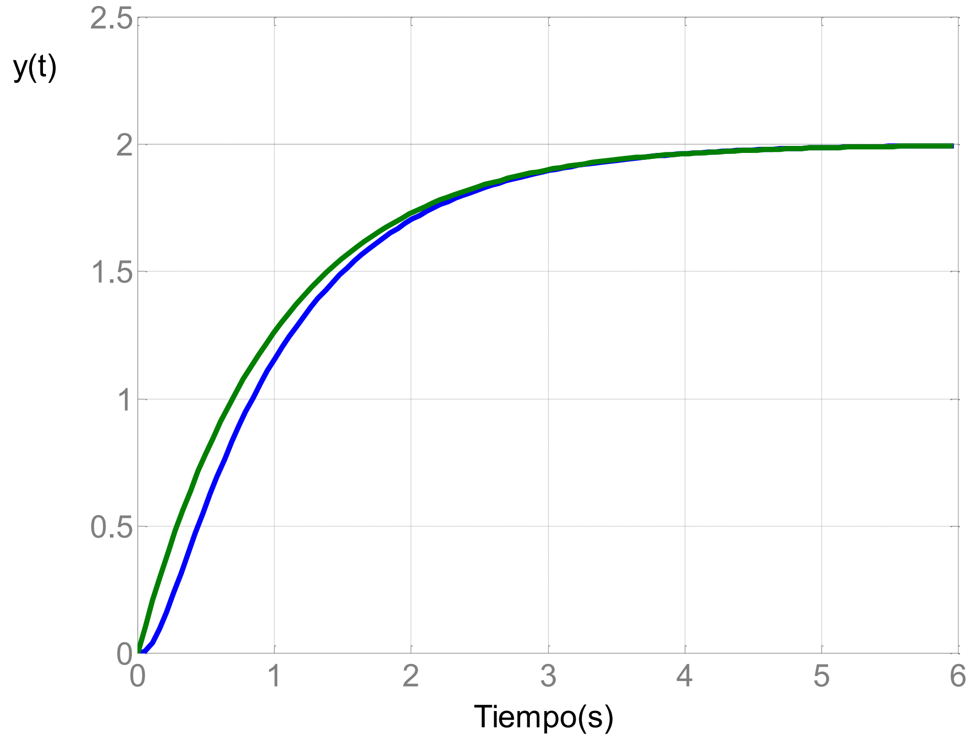
$$G(s) = \frac{544}{(s+1)(s+16)(s+17)} \approx \frac{544}{(s+1)(16)(17)} = \frac{2}{s+1}$$



-1 es el dominante.

Sistema de orden superior

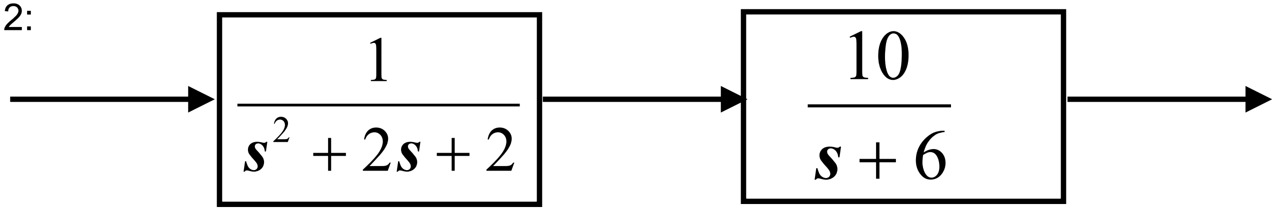
- Polos dominantes:
  - Se ha pasado de un sistema de orden 3 a uno de orden 1 eliminando los dos polos no dominantes.
  - En la figura se representa el error cometido en la respuesta del sistema ante un escalón al simplificar la función de transferencia

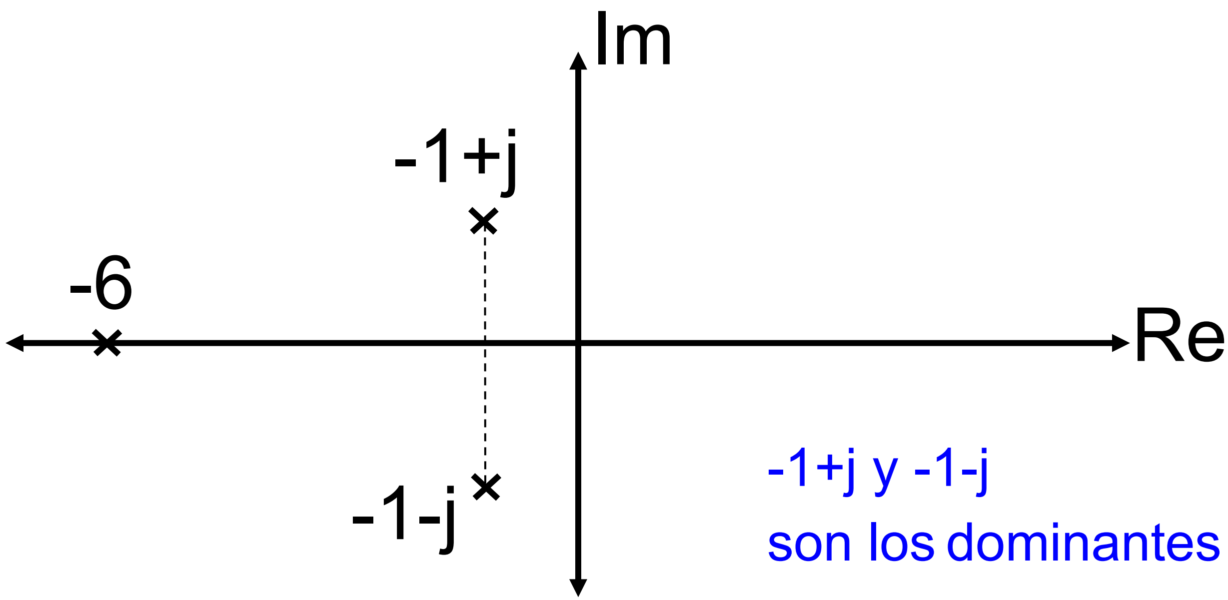


Sistema de orden superior

- Polos dominantes:

  - Ejemplo 2:



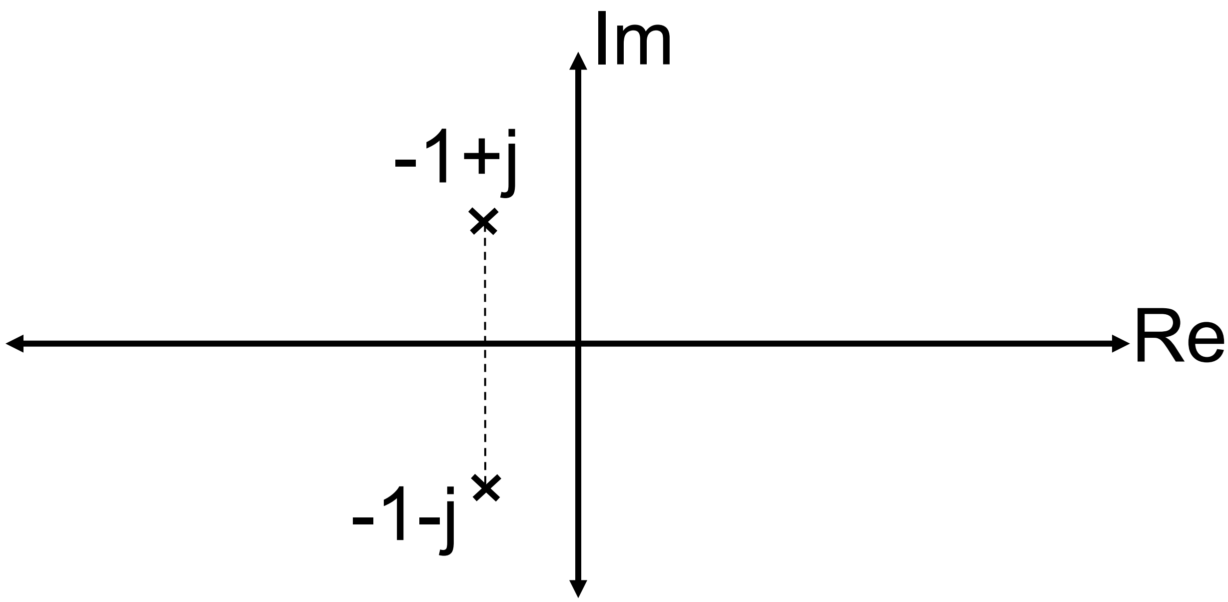


-1+j y -1-j
son los dominantes

Sistema de orden superior

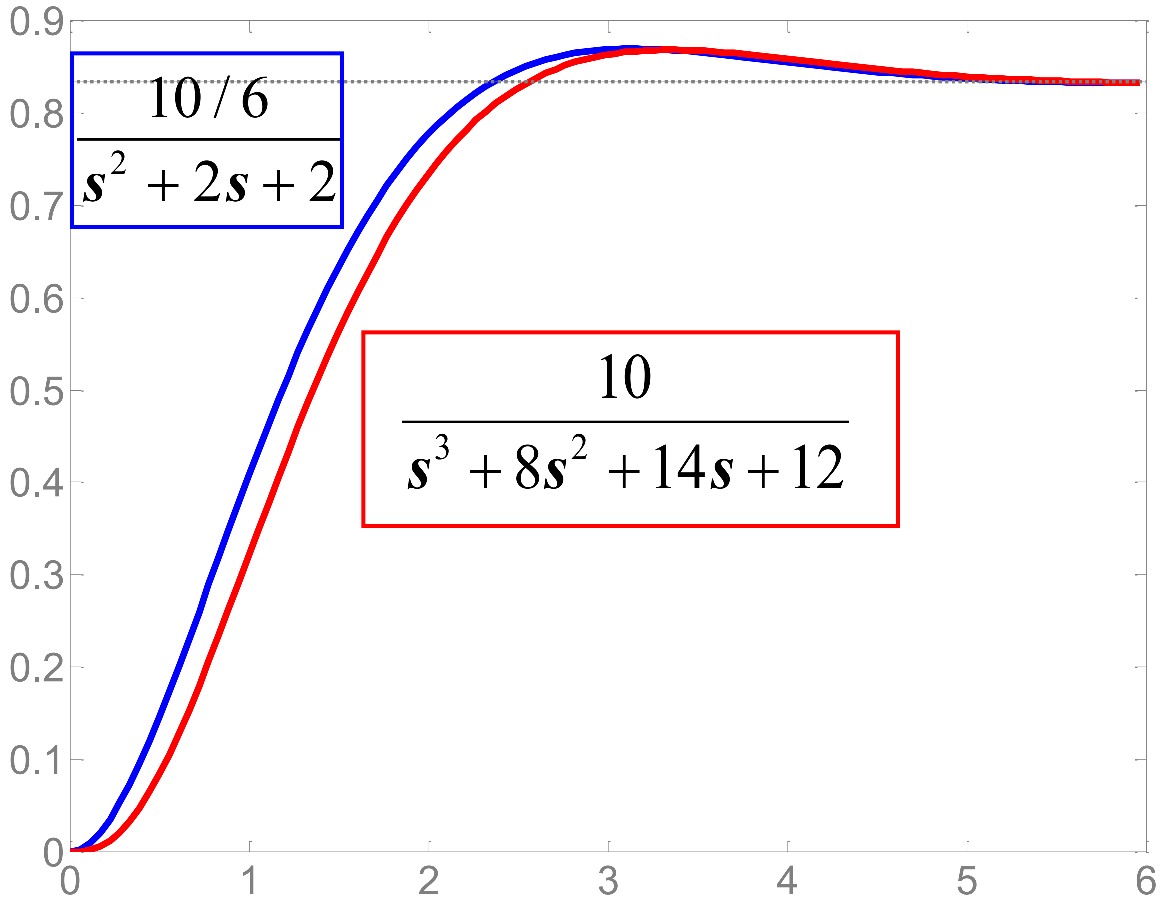
- Polos dominantes:
  - Se elimina el polo no dominante, (se mantiene su ganancia estática)

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+2s+2}} \rightarrow \boxed{\frac{10}{6}} \rightarrow$$



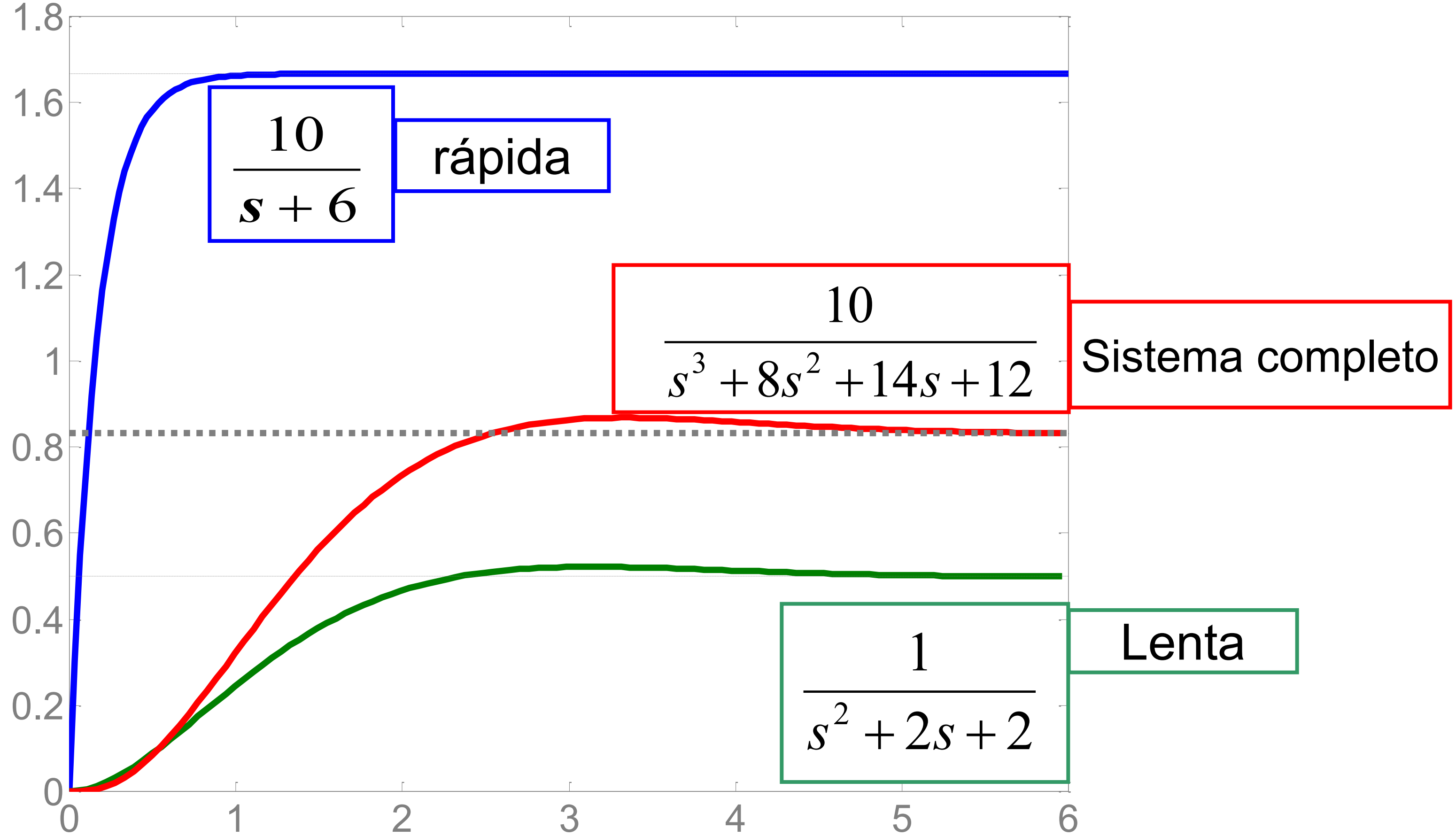
Sistema de orden superior

- Polos dominantes:
  - Comparación de las respuestas



Sistema de orden superior

- Polos dominantes:
  - Comparación de las respuestas



Sistema de orden superior

- Polos dominantes:
  - <u>Interpretación física:</u>

    Al considerar los polos dominantes se está simplificando el sistema sustituyendo la evolución de la respuesta correspondiente a los polos no dominantes por una evolución "instantánea".

Ejemplo:

Suponga una habitación que se pretende calentar con un calefactor de resistencias.

Estamos interesados en conocer el tiempo que debemos esperar desde que se conecta el calefactor hasta que se alcanzan unas condiciones estacionarias en la habitación.

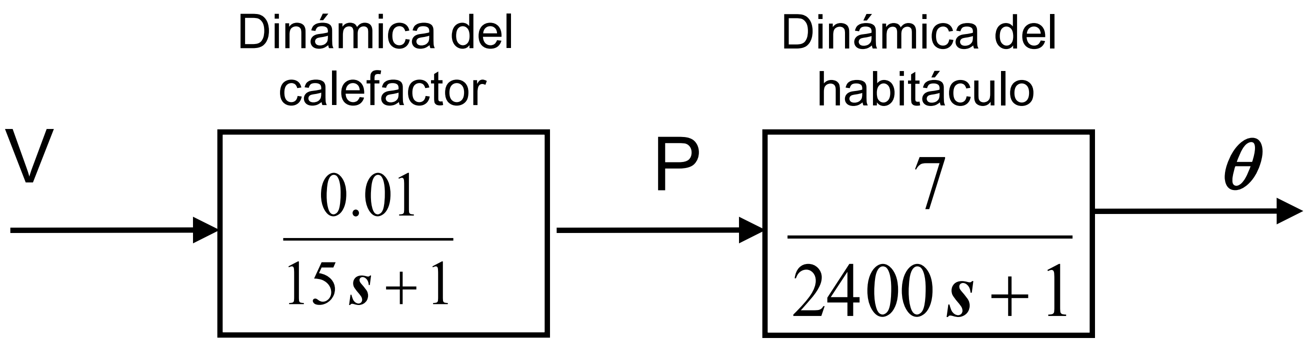
Para ello se modelan dos subsistemas:

- **El calefactor** - entrada: tensión aplicada (V), salida: potencia calorífica aportada (kW)
- **El habitáculo** - entrada: potencia calorífica recibida del calefactor (kW), salida: incremento de temperatura con respecto al exterior (ºC)

Sistema de orden superior

- Polos dominantes:

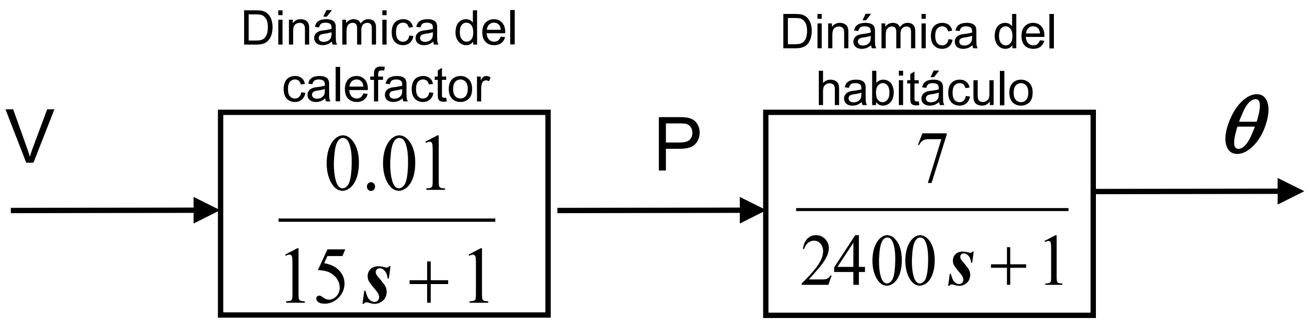
• Se tiene el modelo dado por el siguiente diagrama de bloques:



Sistema de orden superior

- Polos dominantes:

• Las ganancias estáticas determinan los valores de régimen permanente cuando se aplican 220V en la entrada:



$$\text{en condiciones estacionarias:}$$

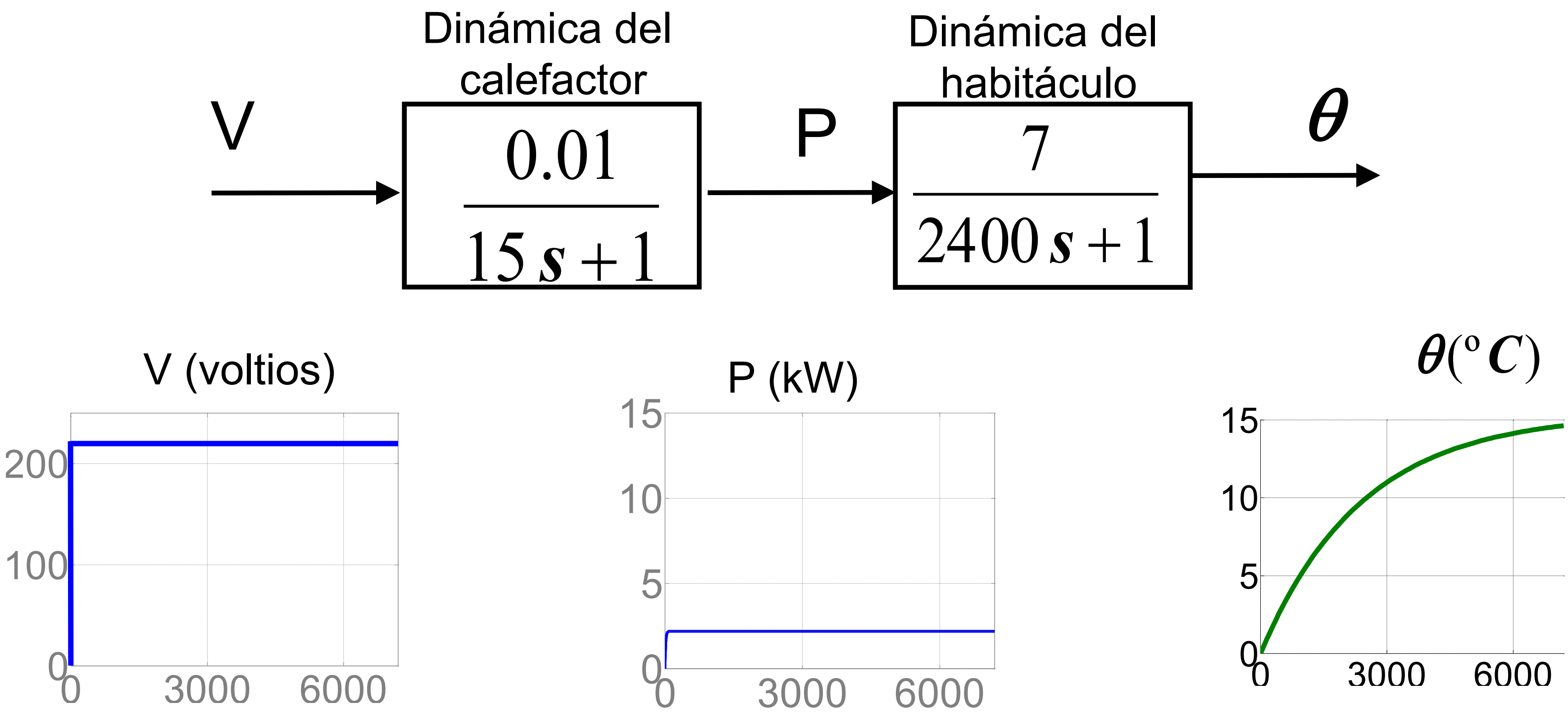
$$V(\infty) = 220\ V$$

$$P(\infty) = 2{,}2\ kW$$

$$\theta(\infty) = 15.4^{\circ} C$$

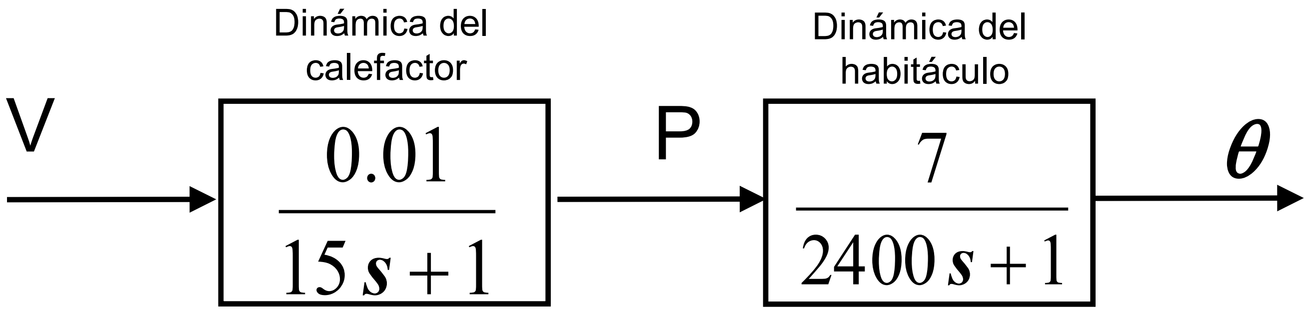
Sistema de orden superior

- Polos dominantes:
  - Si la entrada (V) es un escalón de 0 a 220 v., obtenemos:



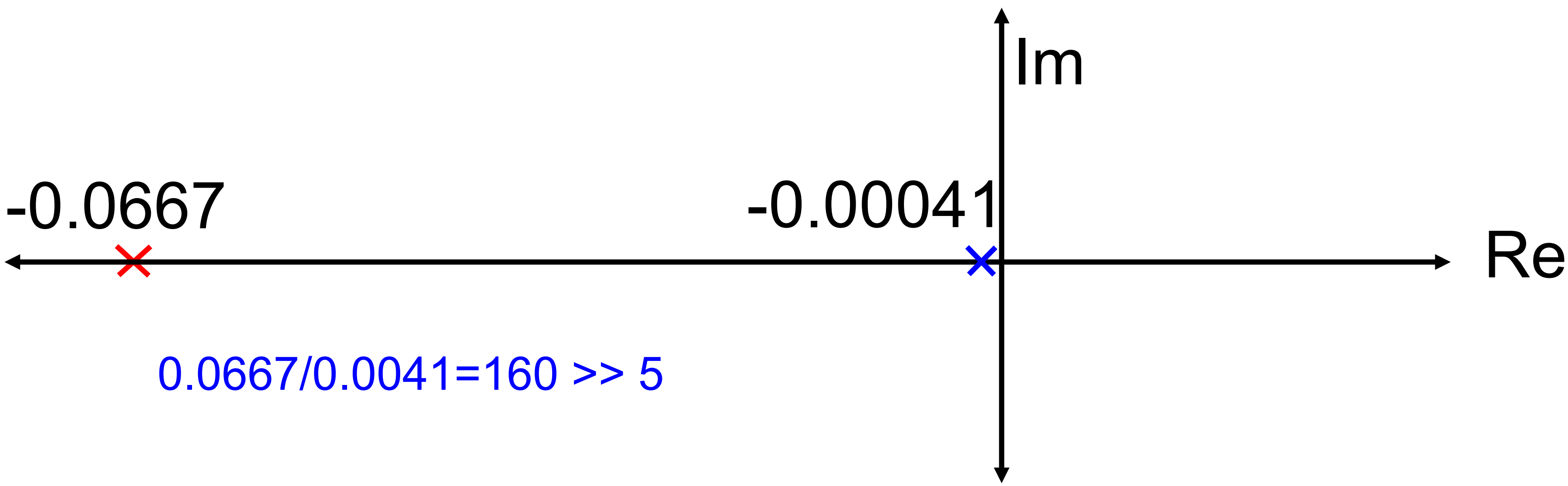
Sistema de orden superior

- Polos dominantes:



Dinámica rápida
Polo: -1/15 =-0.0667

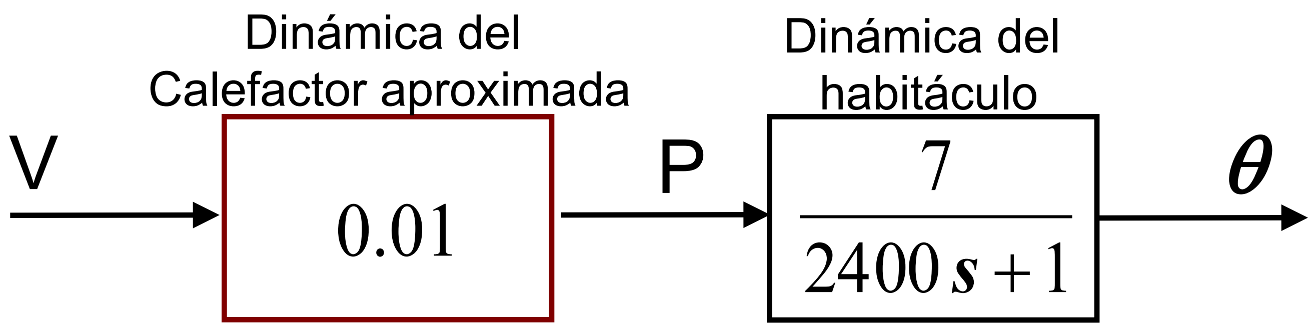
Dinámica Lenta
Polo: -1/2400=-0.00041 Dominante

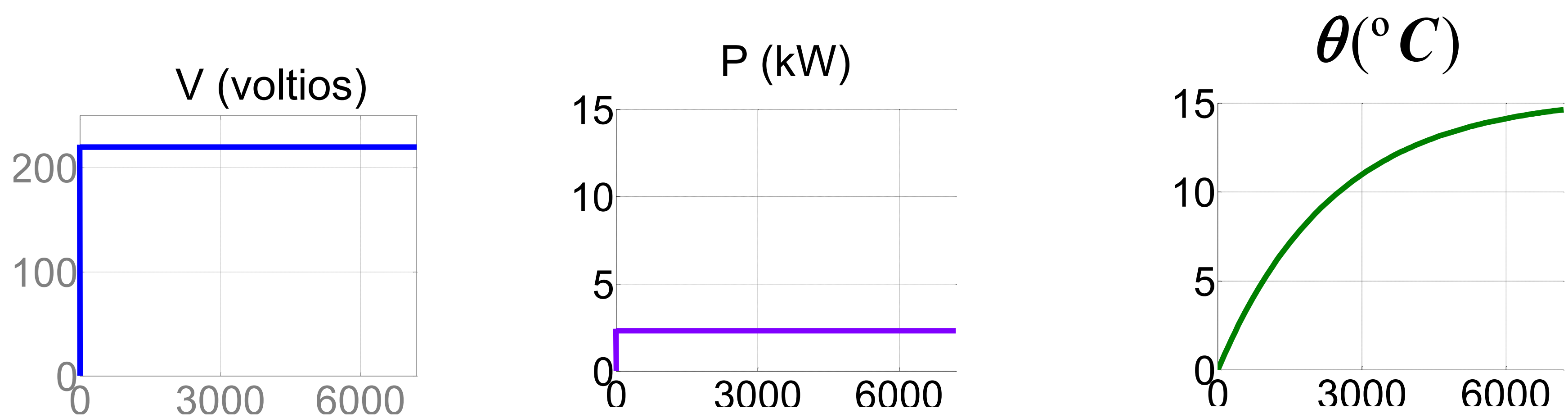


0.0667/0.0041=160 >> 5

Sistema de orden superior

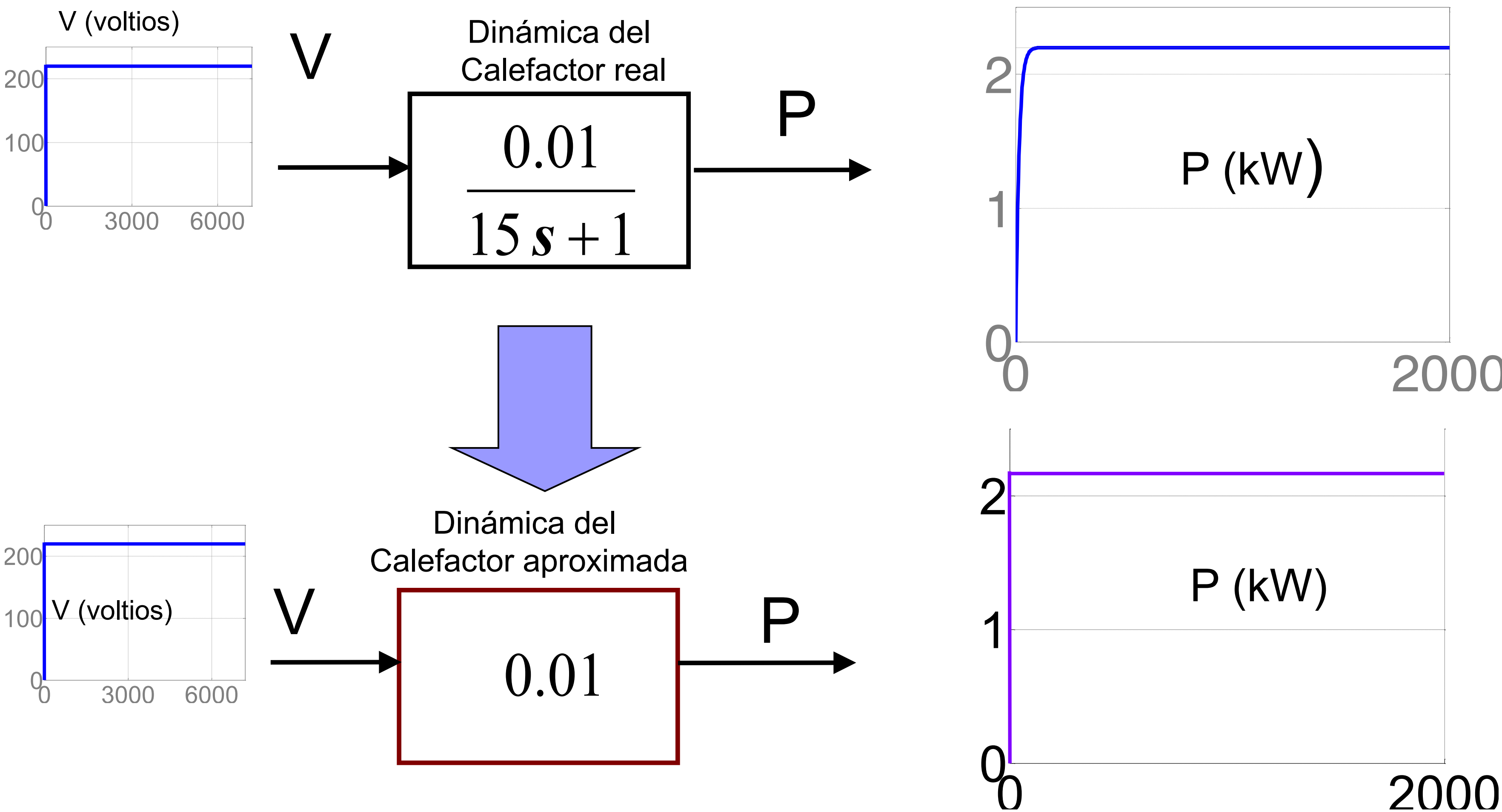
- Polos dominantes: Aplicando la dinámica del polo dominante





Sistema de orden superior

- Polos dominantes: Se ha sustituido la dinámica del polo rápido por una dinámica instantánea

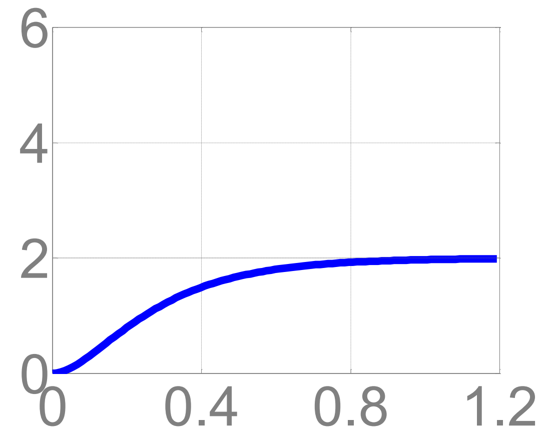


Efecto de los ceros en la respuesta

- Los ceros afectan al transitorio

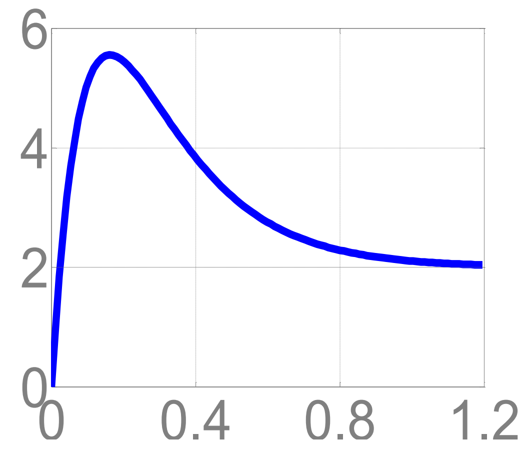
$$G(s) = \frac{100}{(s+5)(s+10)}$$

$$y(t) = 2 - 4e^{-5t} + 2e^{-10t}$$



$$G(s) = \frac{100(s+1)}{(s+5)(s+10)}$$

$$y(t) = 2 + 16e^{-5t} - 18e^{-10t}$$



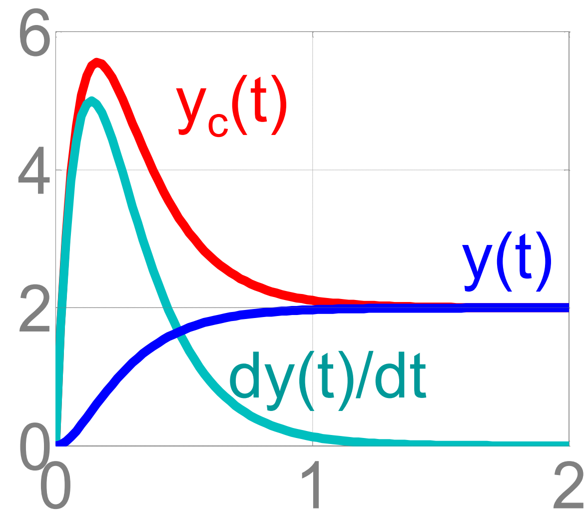
Efecto de los ceros en la respuesta

- Ceros de fase mínima: son ceros que se encuentran en el semiplano izquierdo

Dada una $G(s)$, sea $G_c(s) = (\frac{1}{c}s + 1)G(s)$

Si $y(t)$ es la respuesta del sistema dado por $G(s)$

La respuesta de $G_c(s)$ será $y_c(t) = \frac{1}{c}\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$

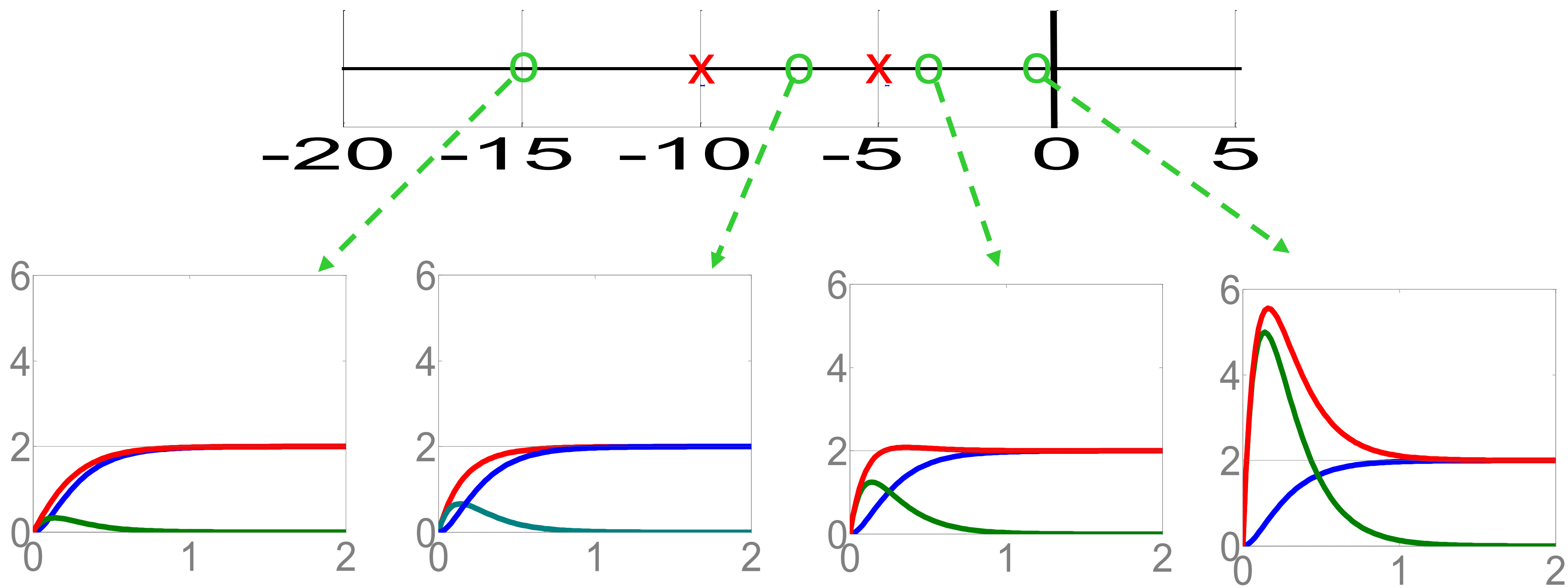


$$y_c(t) = 2 - 4e^{-5t} + 2e^{-10t} + 20e^{-5t} - 20e^{-10t} =$$
$$= 2 + 16e^{-5t} - 18e^{-10t}$$

Efecto de los ceros en la respuesta

- Ceros de fase mínima

  C>0 → la derivada *SUMA*. Mientras más lejos esté el cero del eje imaginario, menor será su influencia



Efecto de los ceros en la respuesta

- Ceros de fase no mínima: son ceros que se encuentran en el semiplano derecho

  C<0 → la derivada *RESTA* → *Respuesta inversa*