

Tema 6:

Respuesta frecuencial de sistemas lineales

Teoría de Sistemas
Y Control Automático

Índice

- Introducción
- Respuesta de un sistema lineal a señales sinusoidales
- Transformación de Fourier
- Representación gráfica de la respuesta frecuencial
 - Diagrama de Nyquist
 - Diagrama de Bode

Introducción

- Objetivo:

$$u(t) = U_o \text{sen}(wt)$$



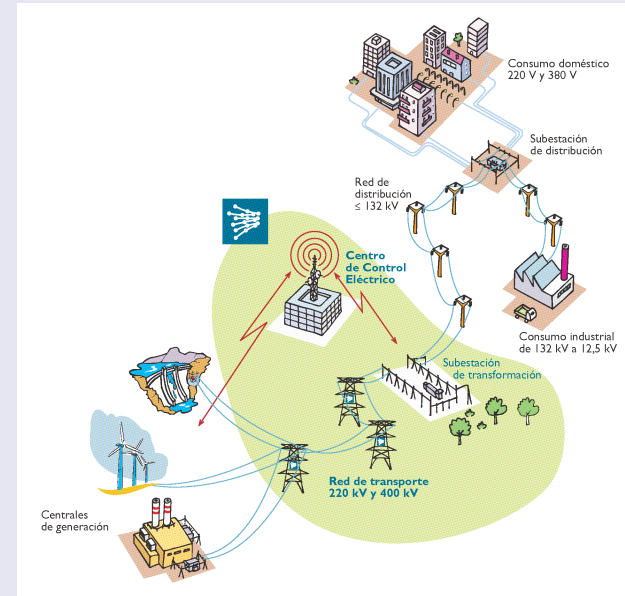
- Herramienta de análisis de sistemas (Análisis frecuencial)

- Desarrollo en series y transformada de Fourier

- Señal de entrada muy frecuente en ingeniería

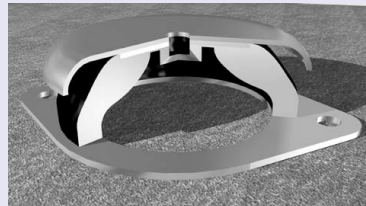
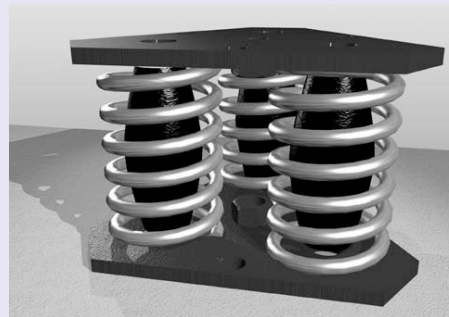
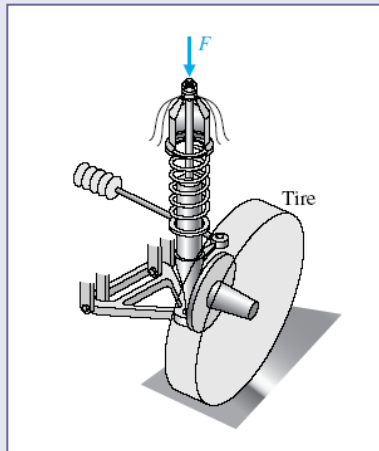
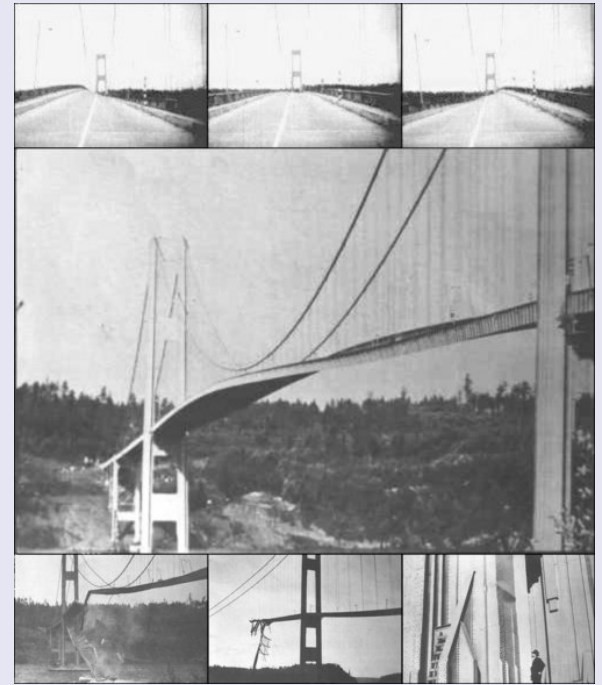
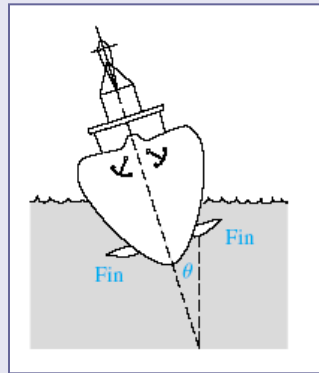
- Sistemas eléctricos

- Régimen senoidal permanente
- Transitorios
- Efectos de variaciones de carga
- Armónicos en red



Introducción

□ Sistemas mecánicos

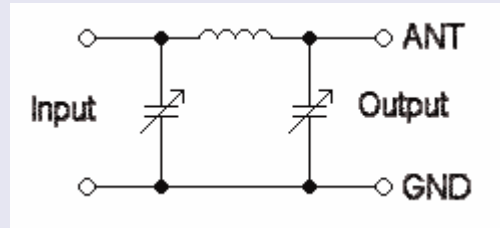


Introducción

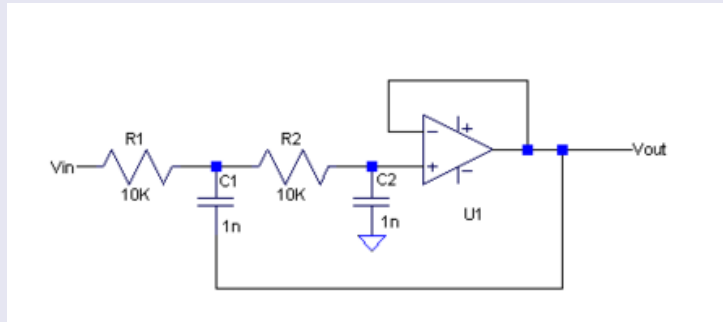
■ Sistemas electrónicos

□ Filtros

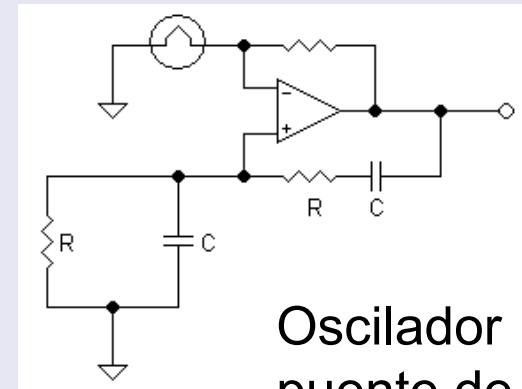
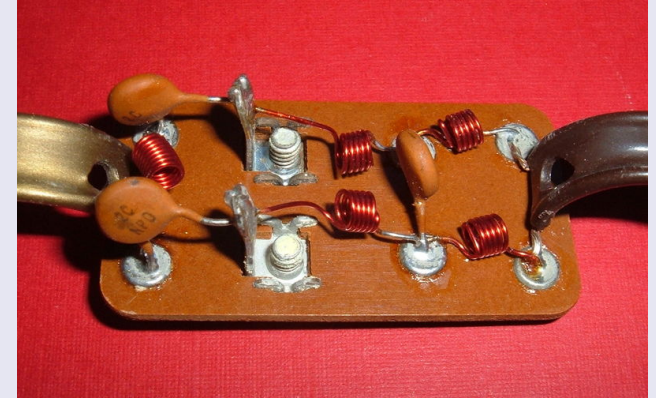
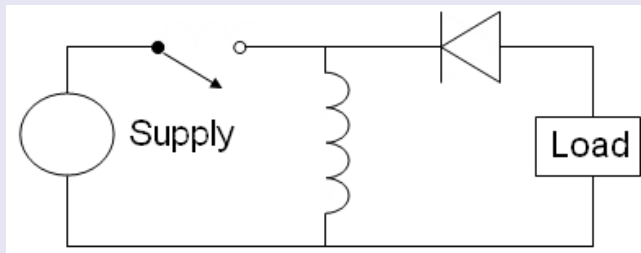
Filtro π



Filtro
Butterworth



Conversor
AC/DC
Buck-boost



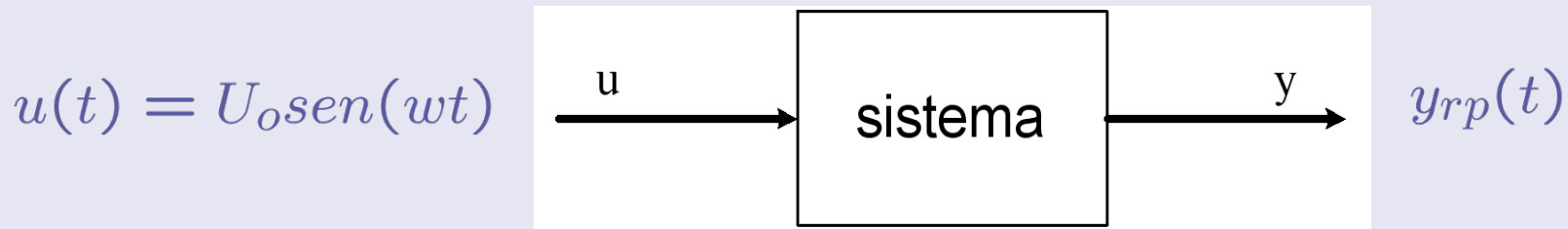
Oscilador en
puente de Wien

Índice

- Introducción
- Respuesta de un sistema lineal a señales sinusoidales
- Transformación de Fourier
- Representación gráfica de la respuesta frecuencial
 - Diagrama de Nyquist
 - Diagrama de Bode

Respuesta frecuencial de sistemas lineales

- Salida en **régimen permanente** ante una entrada sinusoidal



$$U(s) = U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{a_i}{s + p_{Gi}} \right)}_{G(s)} + \underbrace{\frac{b_1 s + b_2}{s^2 + \omega^2}}_{U(s)}$$

Respuesta frecuencial de sistemas lineales

- Antitransformando

$$y(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-p_{G_i} t} + b_1 \cos(\omega t) + \frac{b_2}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

- Asumiendo que el sistema alcanza un régimen permanente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-p_{G_i} t} = 0$$

$$y_{rp}(t) = b_1 \cos(\omega t) + \frac{b_2}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

Respuesta frecuencial de sistemas lineales

- Calculando los coeficientes se tiene

$$(b_1 s + b_2)|_{s=j\omega} = Y(s)(s^2 + \omega^2)|_{s=j\omega}$$

$$\begin{aligned} b_1 j\omega + b_2 &= G(s) \frac{U_0 \omega}{(s^2 + \omega^2)} (s^2 + \omega^2)|_{s=j\omega} \\ &= G(j\omega) U_0 \omega \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$b_1 = U_0 \operatorname{Im}(G(j\omega))$$

$$b_2 = U_0 \omega \operatorname{Re}(G(j\omega))$$

Respuesta frecuencial de sistemas lineales

- Sustituyendo se llega a

$$\begin{aligned}y_{rp}(t) &= \underbrace{U_o \text{Im}(G(\omega j))}_{b_1} \cos(\omega t) + \underbrace{U_o \text{Re}(G(\omega j))}_{\frac{b_2}{\omega}} \text{sen}(\omega t) \\ &= U_o |G(\omega j)| [\sin(\angle G(\omega j)) \cos(\omega t) + \cos(\angle G(\omega j)) \text{sen}(\omega t)]\end{aligned}$$

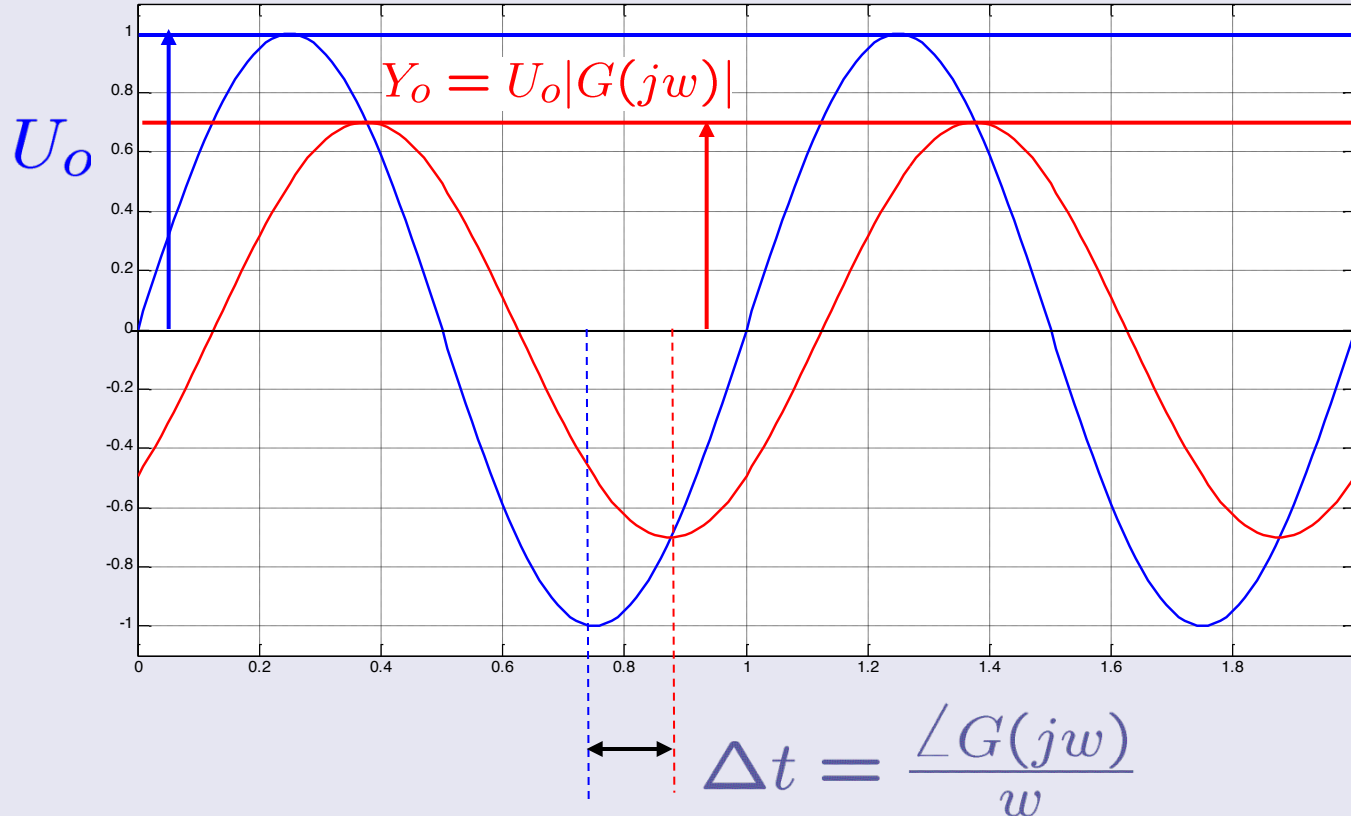
- De donde se obtiene que

$$y_{rp}(t) = U_o |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$G(\omega j)$ caracteriza la respuesta frecuencial

Respuesta temporal

$$y_{rp}(t) = Y_o \text{sen}(w(t + \Delta t))$$



Ejemplo

- Sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$G(\omega j) = \frac{K}{\tau \omega j + 1} \Rightarrow \begin{cases} |G(\omega j)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \\ \angle G(\omega j) = -\text{atan}(\omega \tau) \end{cases}$$

$$y_{rp}(t) = \frac{U_0 K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \text{sen}(\omega t - \text{atan}(\omega \tau))$$

Ejemplo

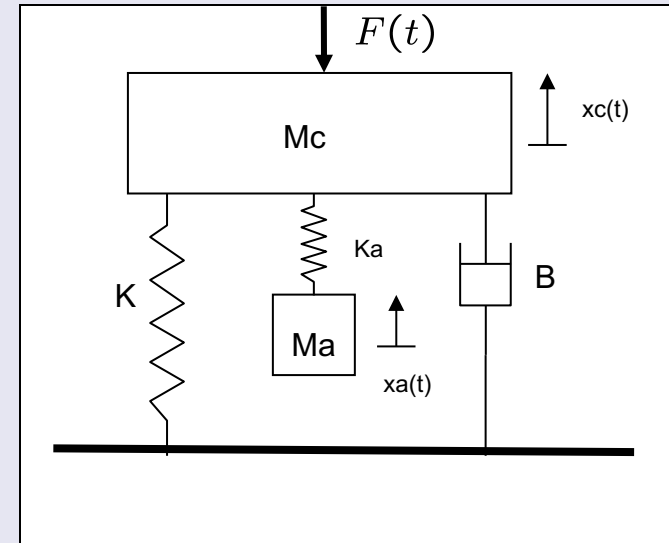
■ Aborsor de vibraciones

- Balance al cuerpo de masa M_c

$$M_c \ddot{x}_c(t) + K x_c(t) + B \dot{x}_c(t) + K_a (x_c(t) - x_a(t)) = F(t)$$

- Balance al cuerpo de masa M_a

$$M_a \ddot{x}_a(t) - K_a (x_c(t) - x_a(t)) = 0$$



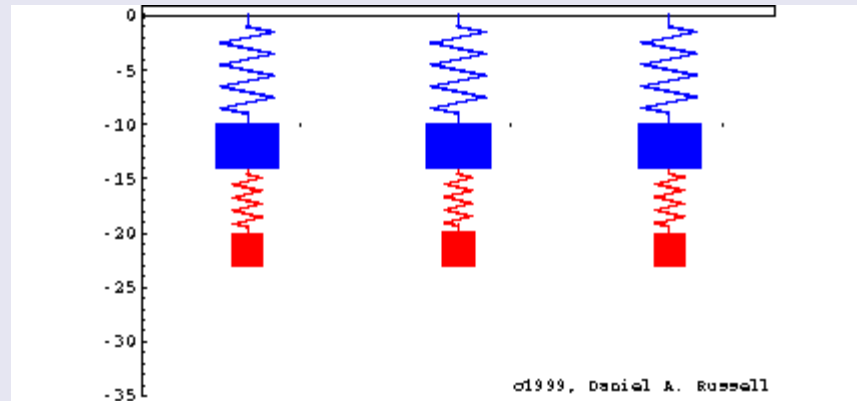
$$G(s) = \frac{X_c(s)}{F(s)} = \frac{M_a s^2 + K_a}{(M_a s^2 + K_a)(M_c s^2 + B s + K_a + K) - K_a^2}$$

Ejemplo

$$G(j\omega) = \frac{K_a - M_a\omega^2}{(K_a - M_a\omega^2)(B\omega j + K_a + K - M_c\omega^2) - K_a^2}$$

- Para una vibración de frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{K_a}{M_a}} \Rightarrow G(j\omega) = 0$

- El cuerpo auxiliar hace que para una cierta frecuencia el otro cuerpo no vibre.



Índice

- Introducción
- Respuesta de un sistema lineal a señales sinusoidales
- Transformación de Fourier
- Representación gráfica de la respuesta frecuencial
 - Diagrama de Nyquist
 - Diagrama de Bode

Transformación de Fourier

- Sea una **señal periódica de período T** , entonces se puede descomponer en suma de señales sinusoidales (*armónicos*)

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \text{sen}(\omega_i t + \phi_i)$$

siendo $\omega_i = \frac{2\pi}{T} i$

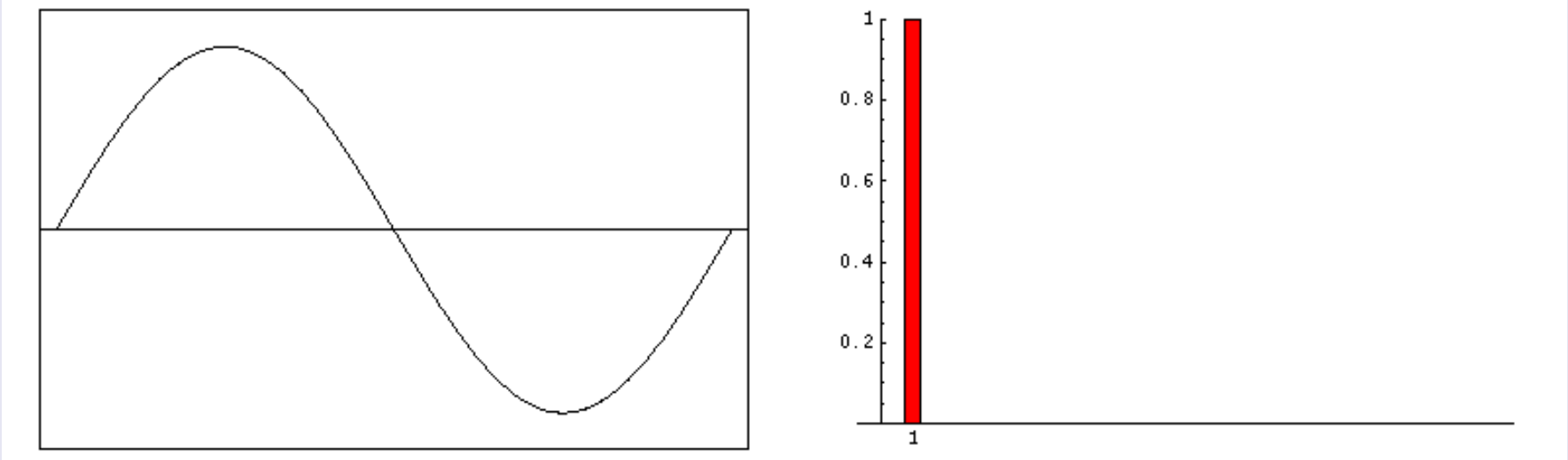
$$a_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(\omega_i t) dt$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \text{sen}(\omega_i t) dt$$

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$
$$\phi_i = \arctan\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$$

Ejemplo 1

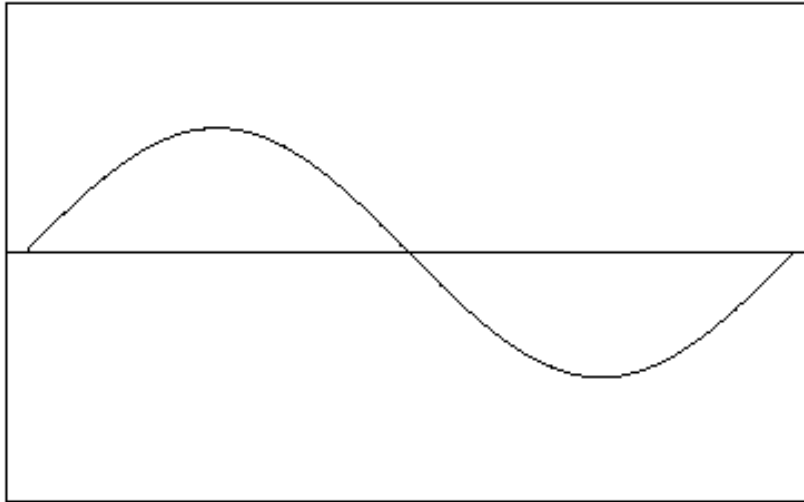
- Señal en escalón unitario



<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Ejemplo 2

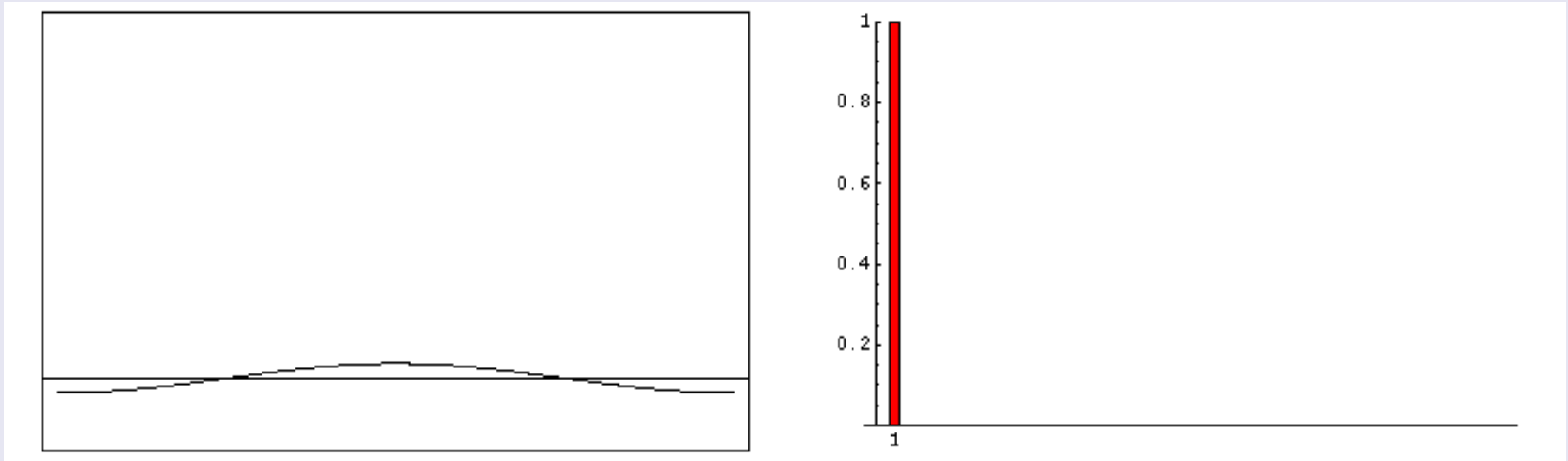
- Señal en rampa de pendiente 1



<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Ejemplo 3

- Señal impulsional de amplitud 1



<http://www.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Interpretación frecuencial de la respuesta de sistemas lineales

- Sea un sistema lineal excitado con una entrada periódica

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^u \operatorname{sen}(\omega_i t + \phi_i^u)$$



- La respuesta será

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{c_i^u |G(\omega_i j)|}_{c_i^y} \operatorname{sen}(\omega_i t + \underbrace{\phi_i^u + \angle G(\omega_i j)}_{\phi_i^y}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i^y \operatorname{sen}(\omega_i t + \phi_i^y) \end{aligned}$$

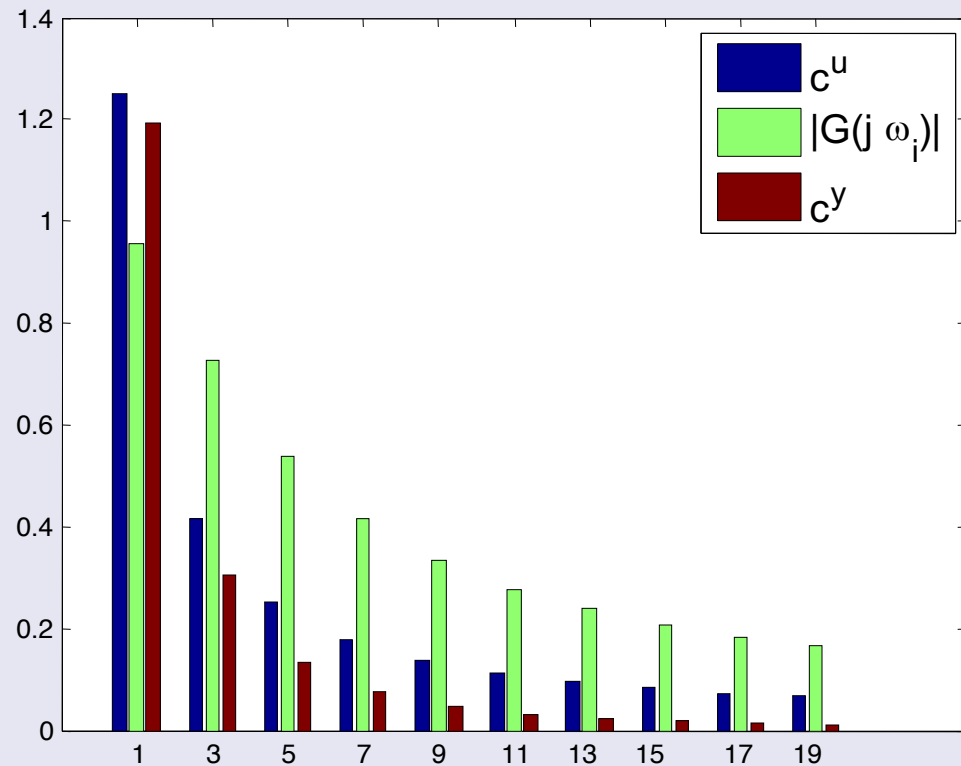
Ejemplo

- Respuesta en escalón de período 20 de un sistema de primer orden

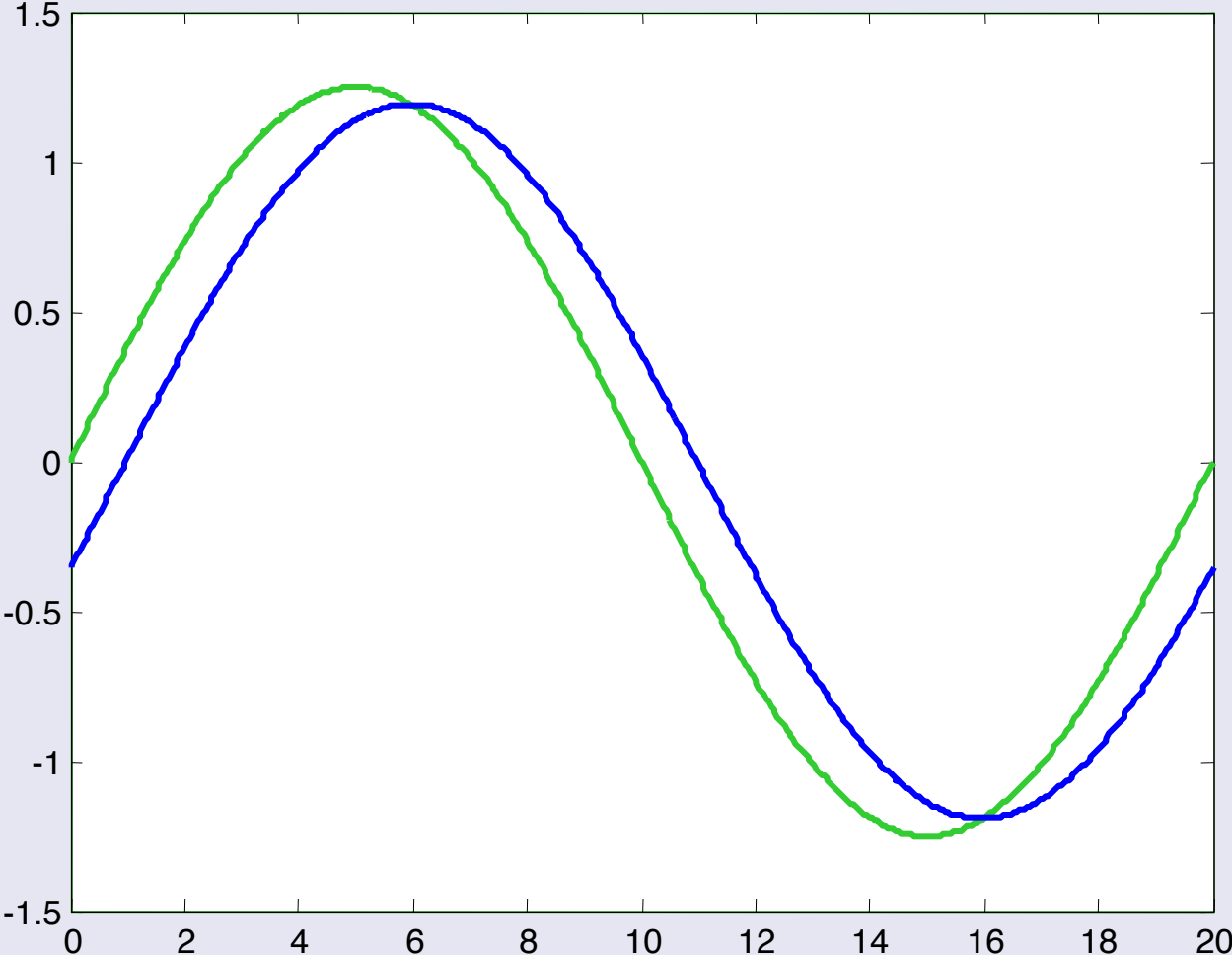
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{10} i$$

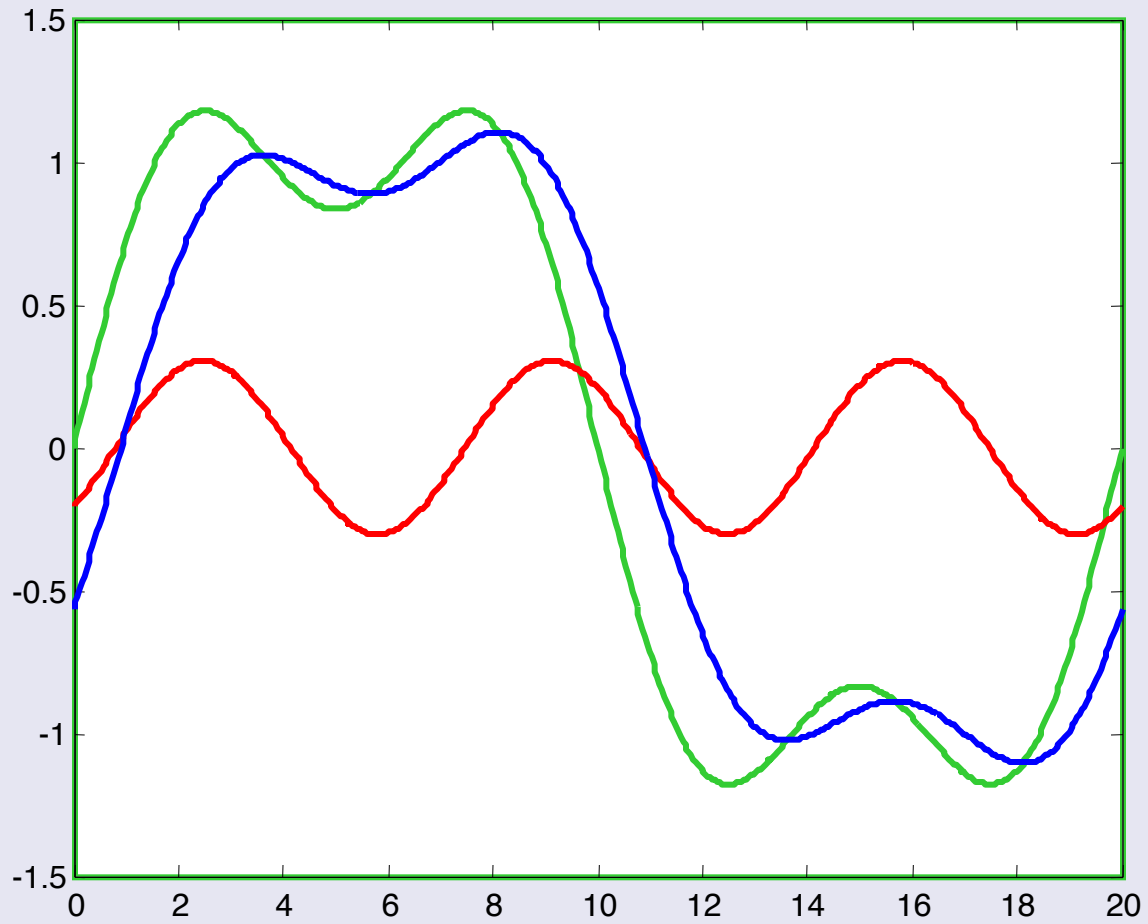
$$\omega_i = \frac{2\pi}{T} i$$



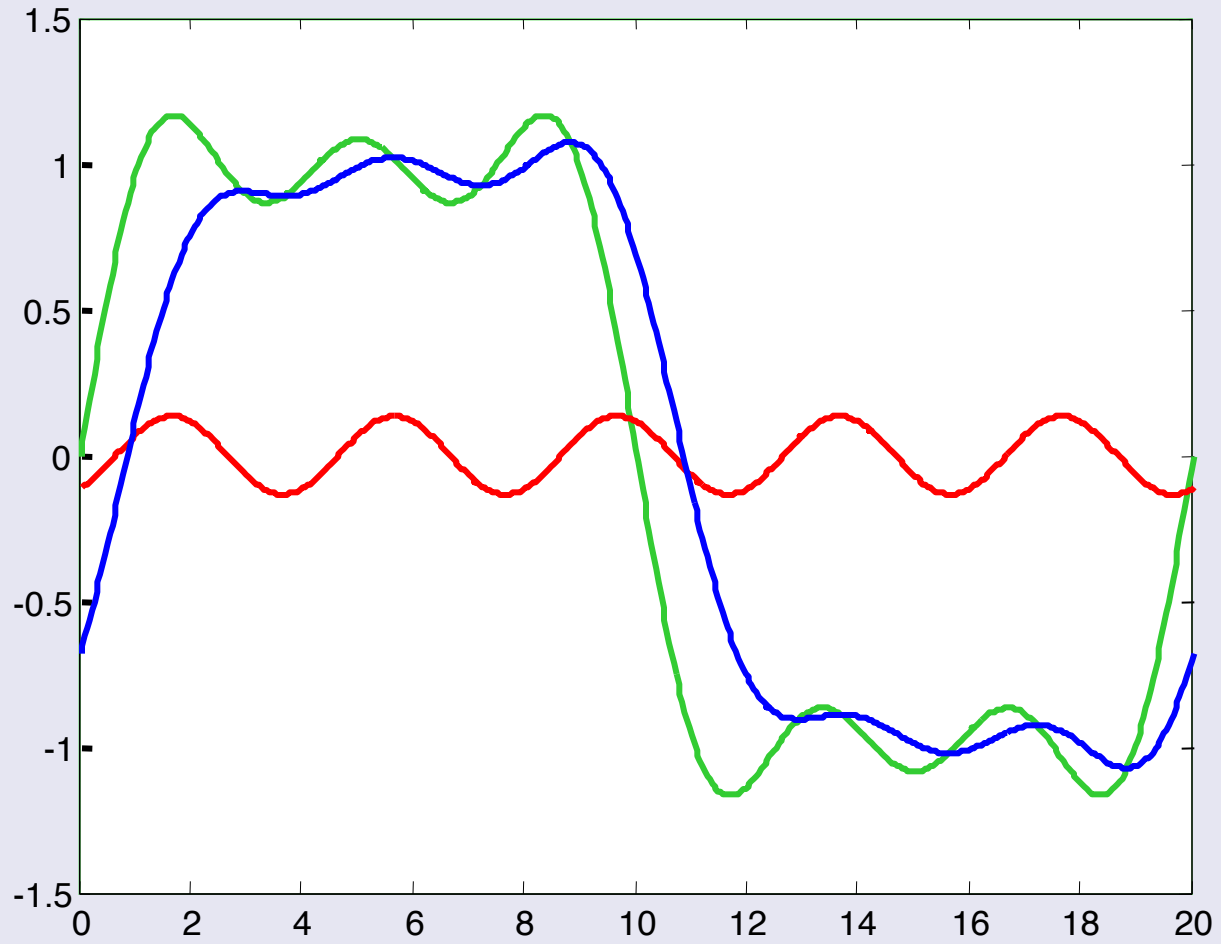
Salida hasta el armónico 1



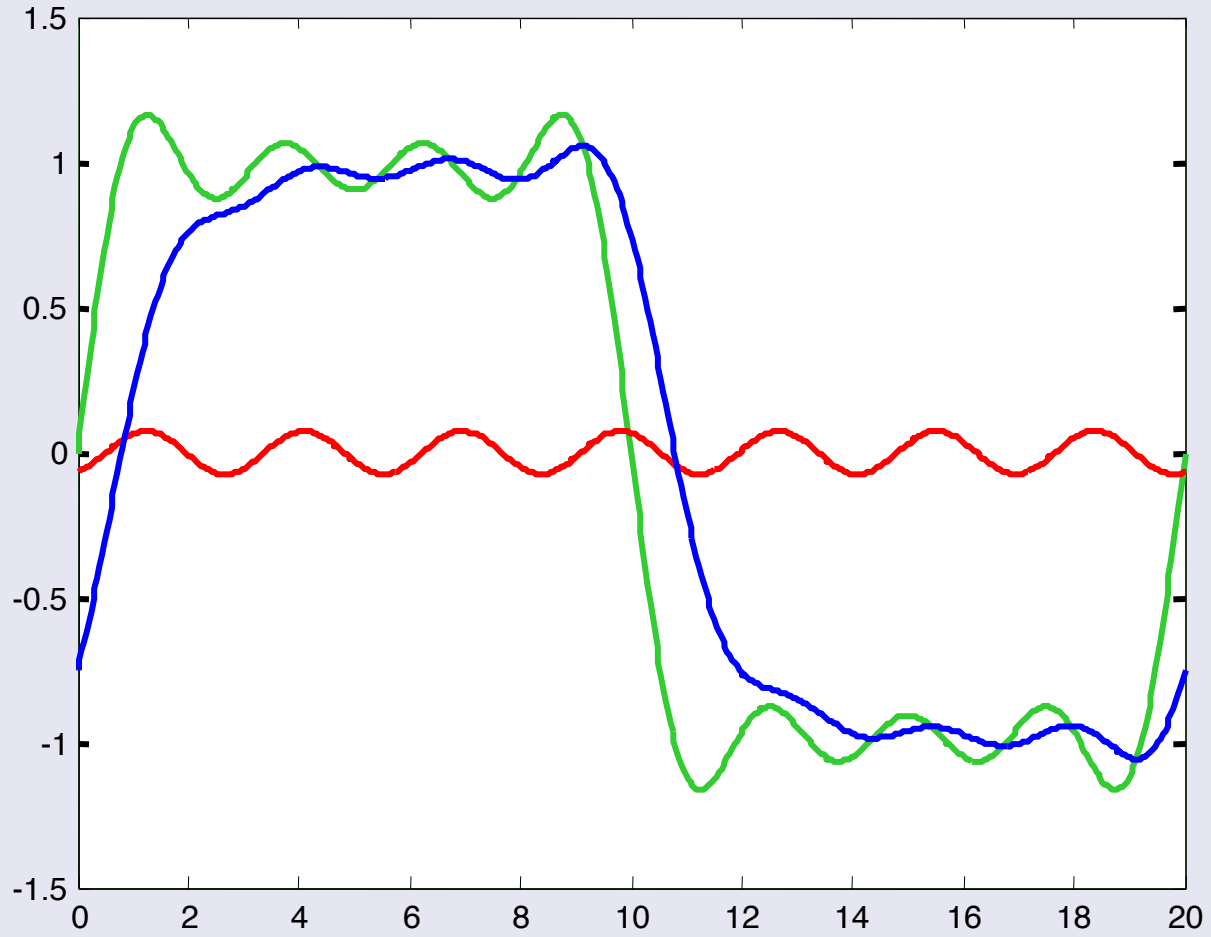
Salida hasta el armónico 2



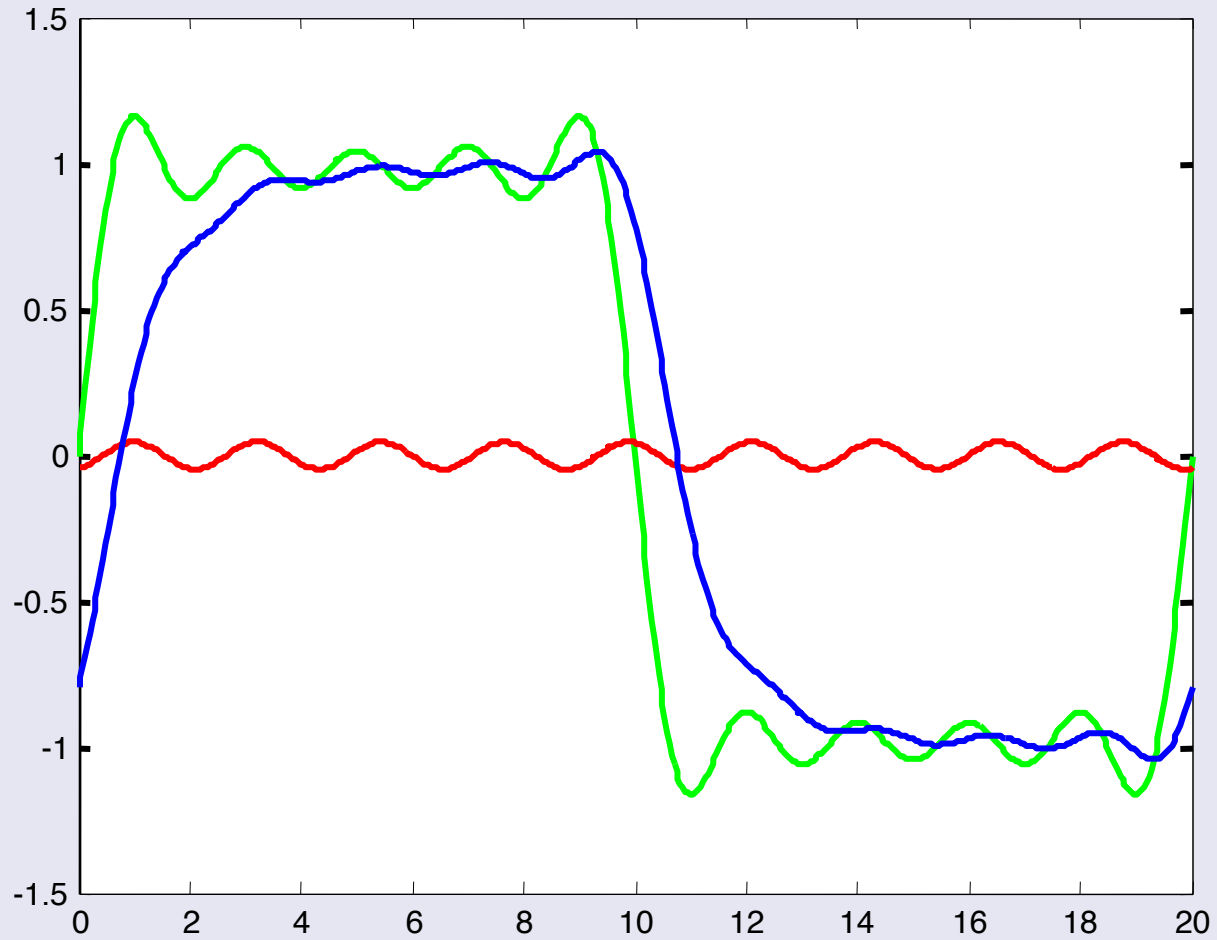
Salida hasta el armónico 3



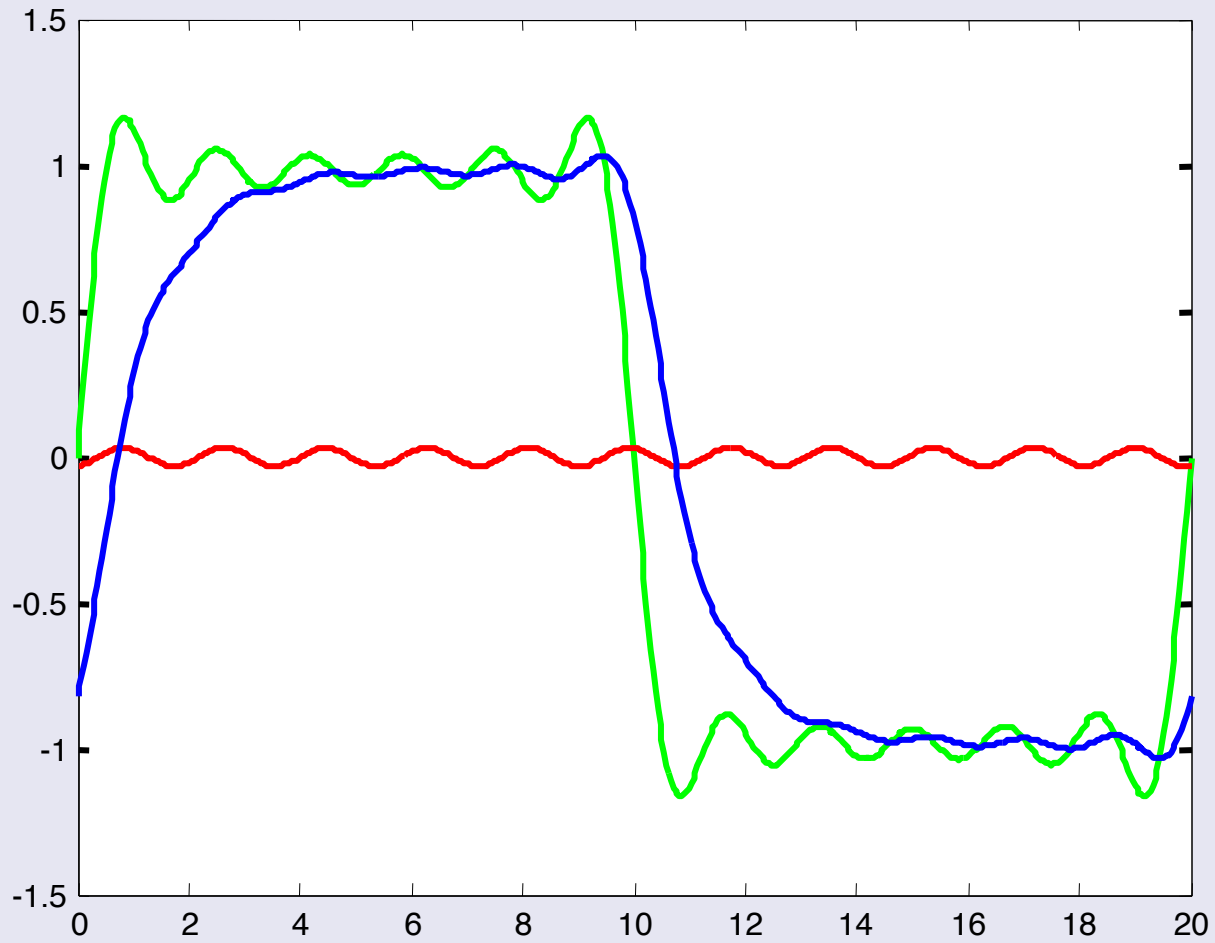
Salida hasta el armónico 4



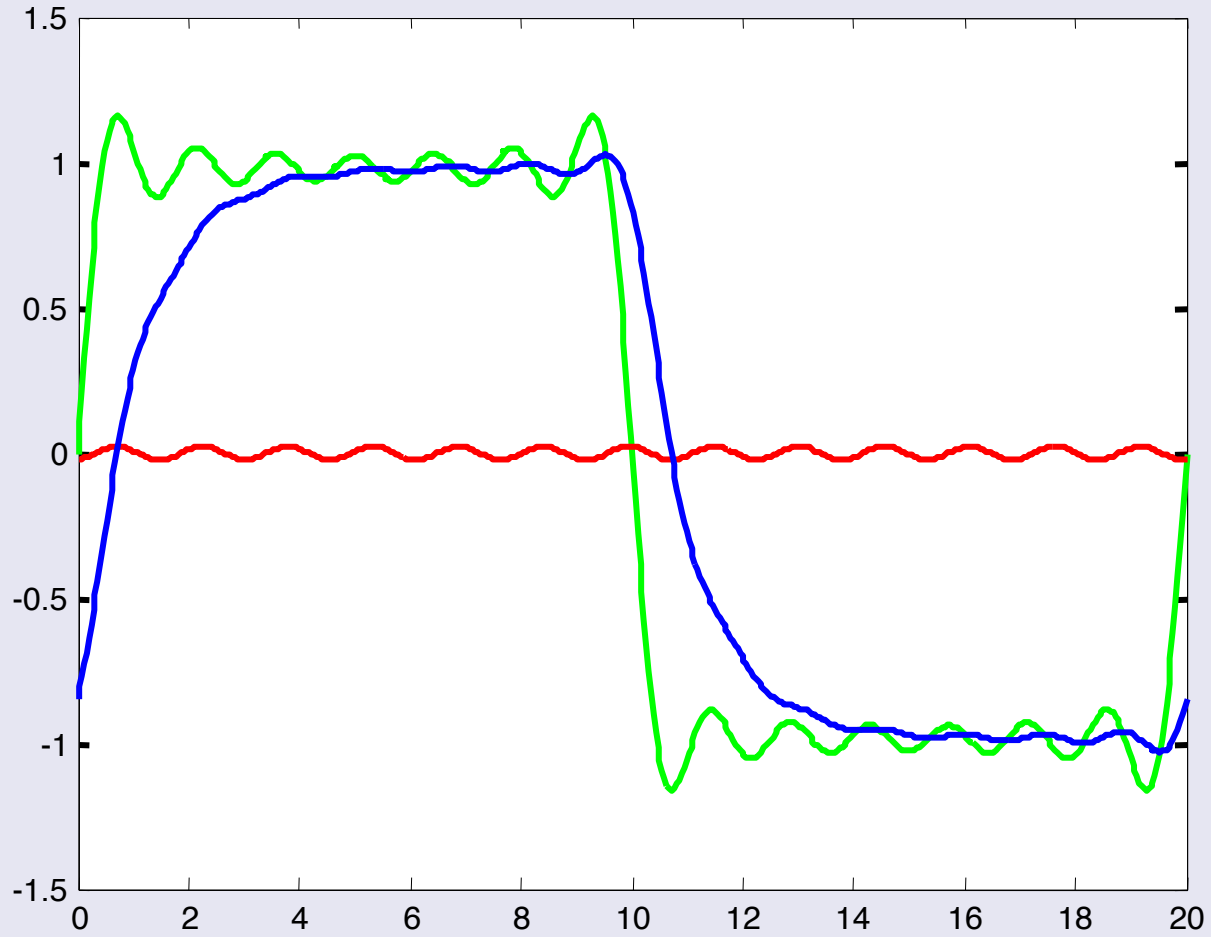
Salida hasta el armónico 5



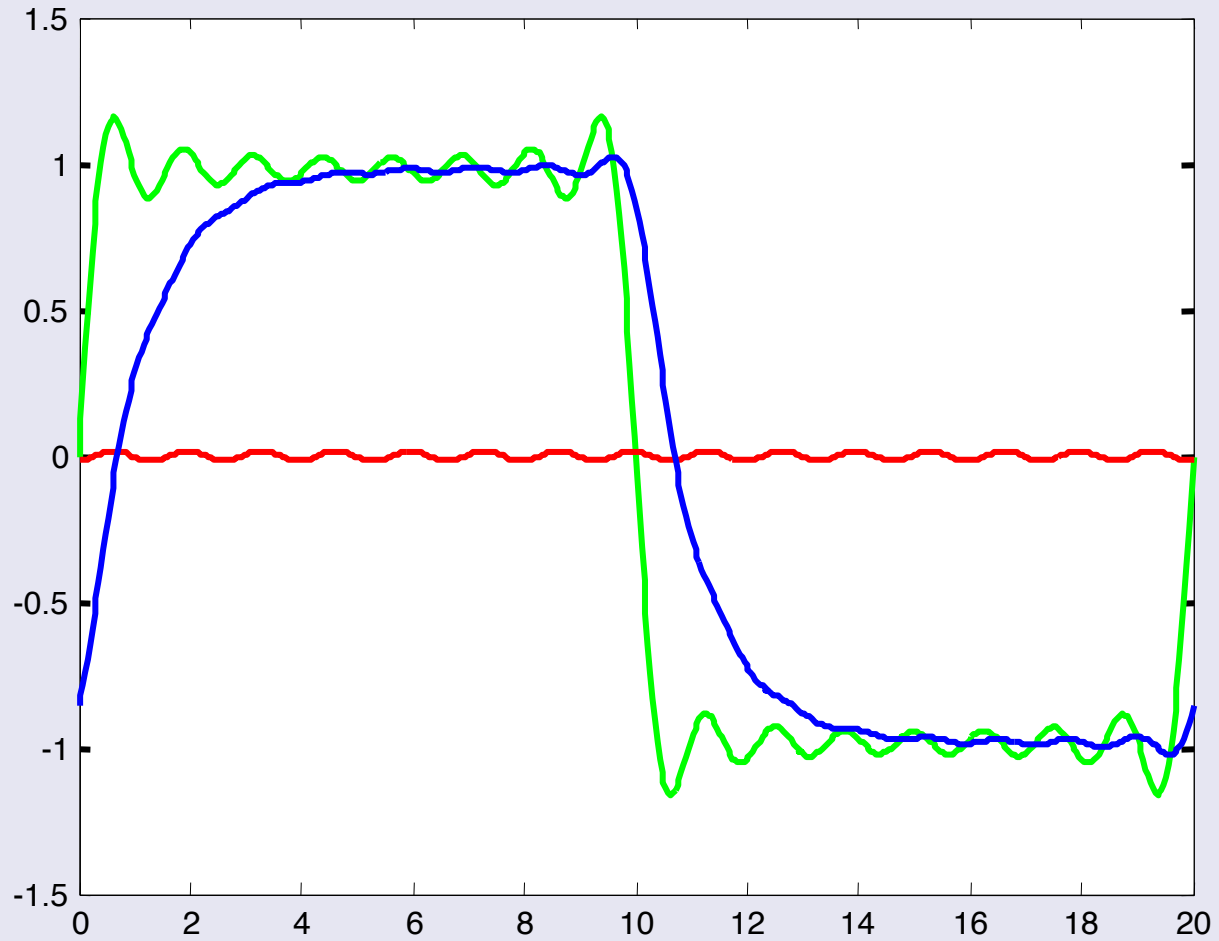
Salida hasta el armónico 6



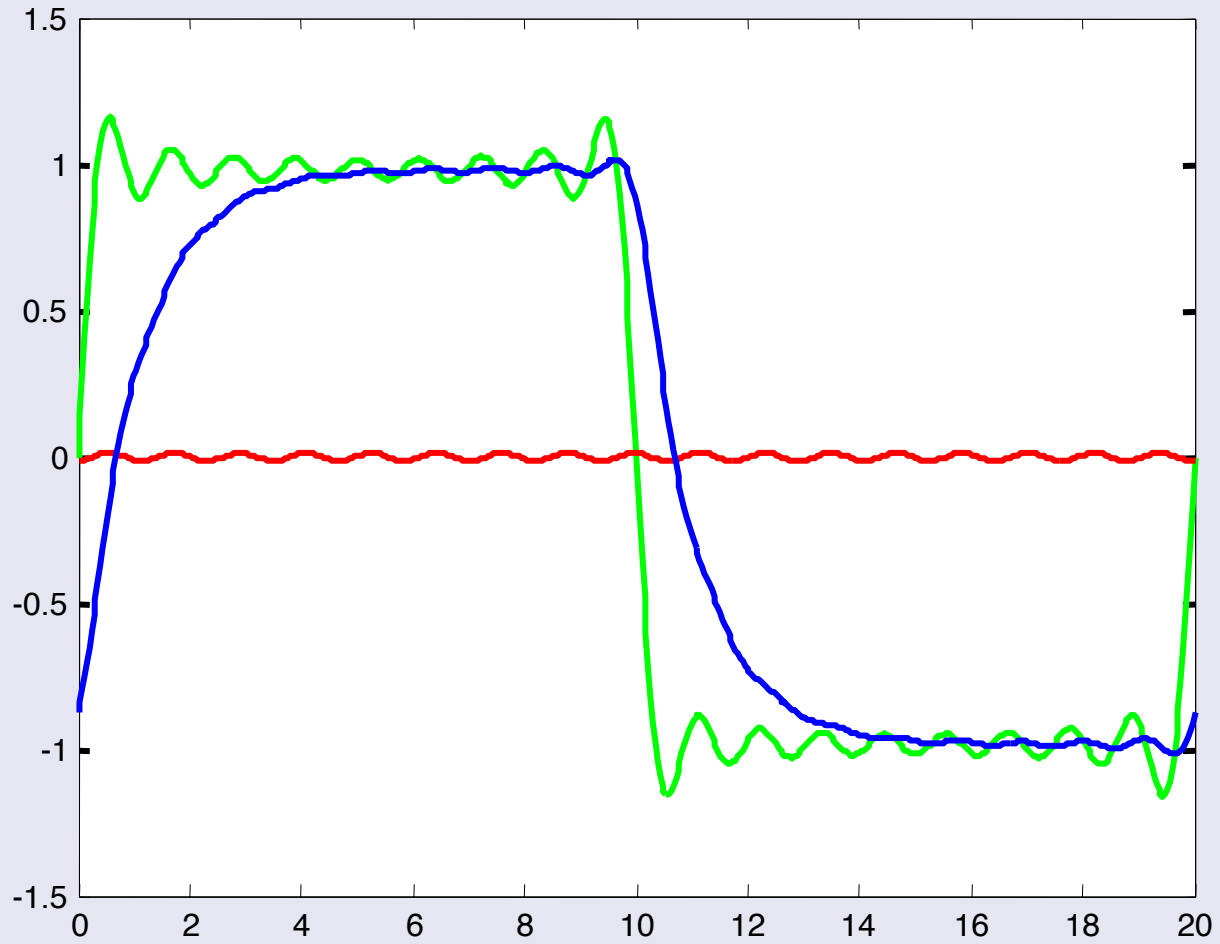
Salida hasta el armónico 7



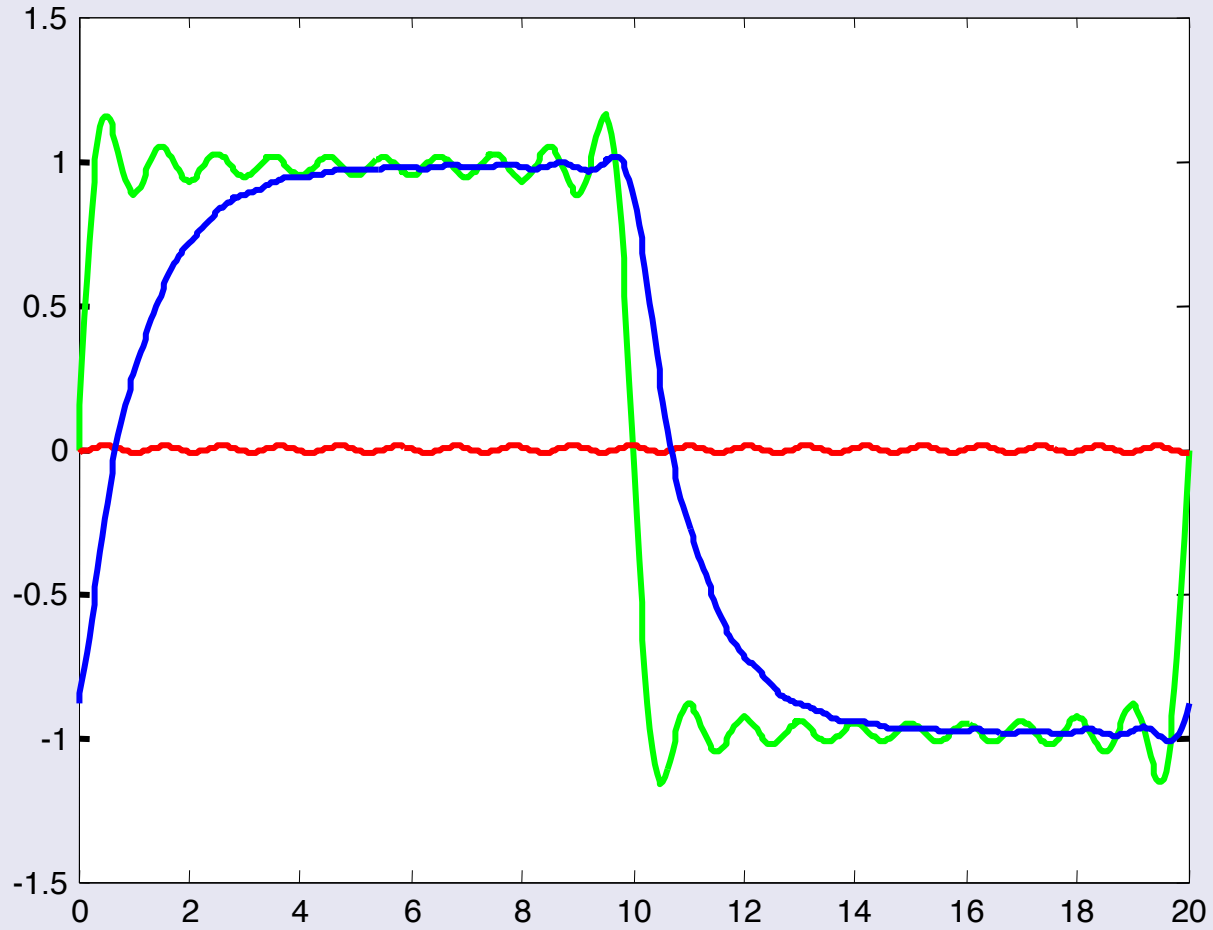
Salida hasta el armónico 8



Salida hasta el armónico 9

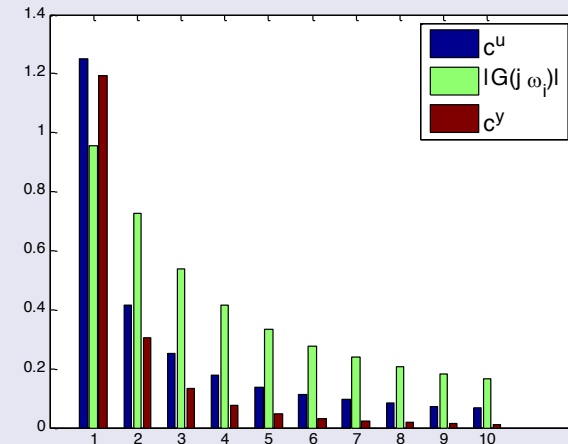


Salida hasta el armónico 10



Interpretación frecuencial de la respuesta de sistemas lineales

- Se observa que los armónicos de las señales decaen con el orden del armónico.
 - Armónicos muy atenuados aportan poco a la señal
 - Se puede definir una frecuencia a partir de la cual los armónicos aportan poco a la señal.
 - Esta frecuencia se denomina ancho de banda
 - Es una medida de la rapidez de la señal
- Los sistemas dinámicos tienden a atenuar las altas frecuencias (armónicos de alto orden)
 - Se puede definir un ancho de banda como una medida de su rapidez



Transformada de Fourier

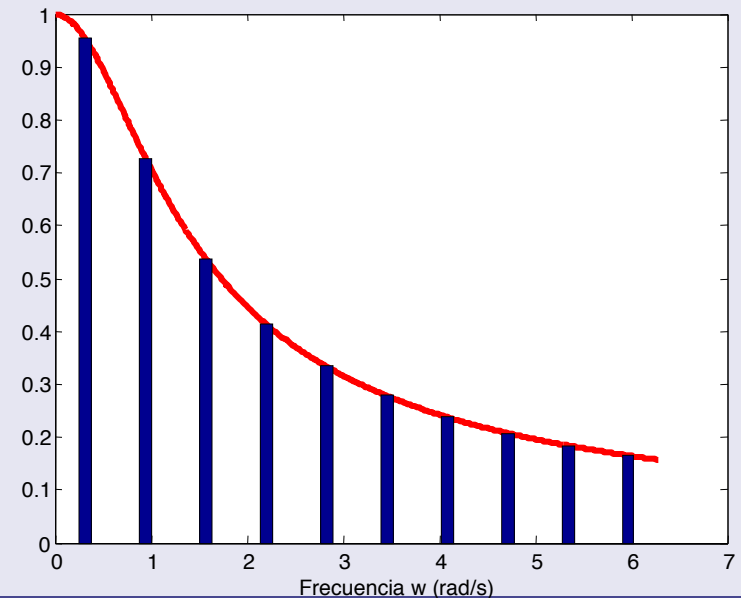
- En el caso en que las señales no sean periódicas ($T \rightarrow \infty$) la descomposición en serie se convierte en

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- Relación con la transformada de Laplace

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

- Infinitos armónicos
(definidos para toda frecuencia)
- Ancho de banda:
rango de frecuencias de armónicos significativos



Índice

- Introducción
- Respuesta de un sistema lineal a señales sinusoidales
- Transformación de Fourier
- Representación gráfica de la respuesta frecuencial
 - Diagrama de Nyquist
 - Diagrama de Bode

Representaciones gráficas

- Objetivo: representar gráficamente

- Diagrama de Bode:

$$G(j\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

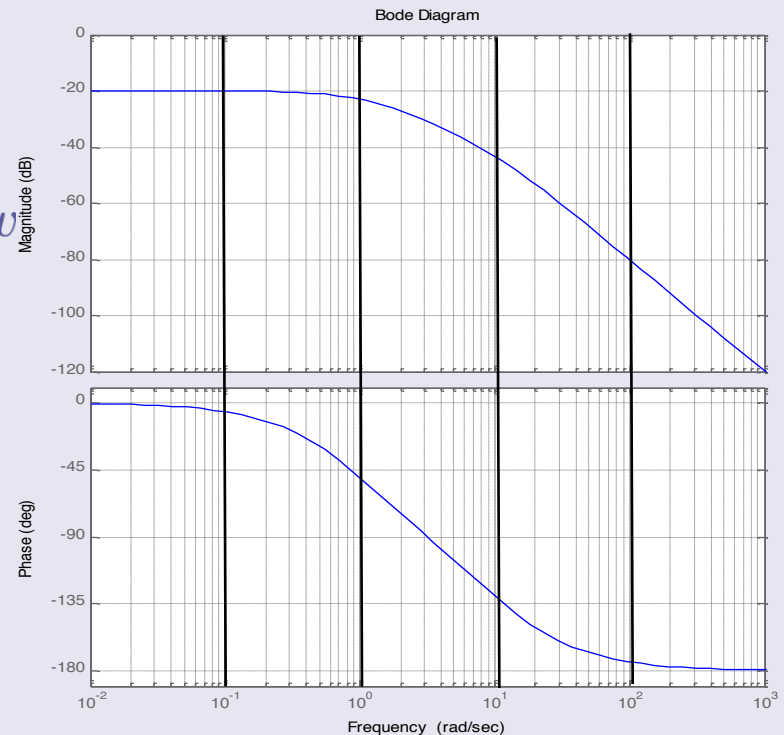
2 Gráficas escalares en escala semilogarítmica

- Módulo

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) \leftrightarrow \omega$$

- Argumento

$$\angle G(j\omega) \leftrightarrow \omega$$



Representaciones gráficas

■ Objetivo: representar gráficamente

□ Diagrama de Nyquist

- Representación en polares $G(j\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- Cada punto es un valor de $G(j\omega)$ para cierta frecuencia ω
- Curva parametrizada

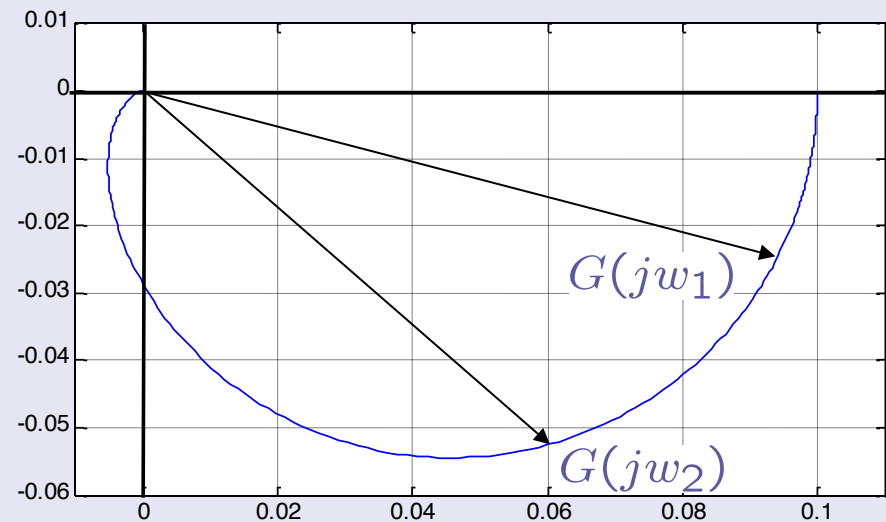


Diagrama de Bode

- Expresar el sistema en *Forma de Bode*

$$G(s) = \frac{K_G (s + c_m)(s - c_n)}{s(s + p_e)(s - p_i)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$G(s) = \frac{K_B \left(\frac{s}{c_m} + 1\right) \left(\frac{s}{c_n} - 1\right)}{s \left(\frac{s}{p_e} + 1\right) \left(\frac{s}{p_i} - 1\right) \left(\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\delta \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1\right)}$$

Ganancia de Bode $K_B = K_G \frac{c_m c_n}{p_e p_i \omega_n^2}$

Diagrama de Bode

■ Cálculo de $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = K_B \left(\frac{j\omega}{c_m} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{c_n} - 1 \right) \cdot \frac{1}{j\omega} \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{p_e} + 1 \right)} \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{p_i} - 1 \right)} \frac{1}{\left(\left(\frac{j\omega}{w_n} \right)^2 + 2\delta \left(\frac{j\omega}{w_n} \right) + 1 \right)}$$

■ Cálculo del módulo

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |K_B| + 20 \log \left| \frac{j\omega}{c_m} + 1 \right| + 20 \log \left| \frac{j\omega}{c_n} - 1 \right| + \dots \\ &+ 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| + 20 \log \frac{1}{\left| \frac{j\omega}{p_e} + 1 \right|} + 20 \log \frac{1}{\left| \frac{j\omega}{p_i} - 1 \right|} + \dots \\ &+ 20 \log \frac{1}{\left| \left(\frac{j\omega}{w_n} \right)^2 + 2\delta \left(\frac{j\omega}{w_n} \right) + 1 \right|} \end{aligned} \quad (1)$$

Diagrama de Bode

- Cálculo del argumento

$$\begin{aligned}\arg G(j\omega) = & \arg(K_B) + \arg\left(\frac{j\omega}{c_m} + 1\right) + \arg\left(\frac{j\omega}{c_n} - 1\right) + \dots \\ & + \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{\frac{j\omega}{p_e} + 1}\right) + \arg\left(\frac{1}{\frac{j\omega}{p_i} - 1}\right) + \dots \\ & + \arg\left(\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{w_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{j\omega}{w_n}\right) + 1}\right)\end{aligned}$$

Propiedad Aditiva:
El Bode se calcula sumando el diagrama de cada uno de sus factores

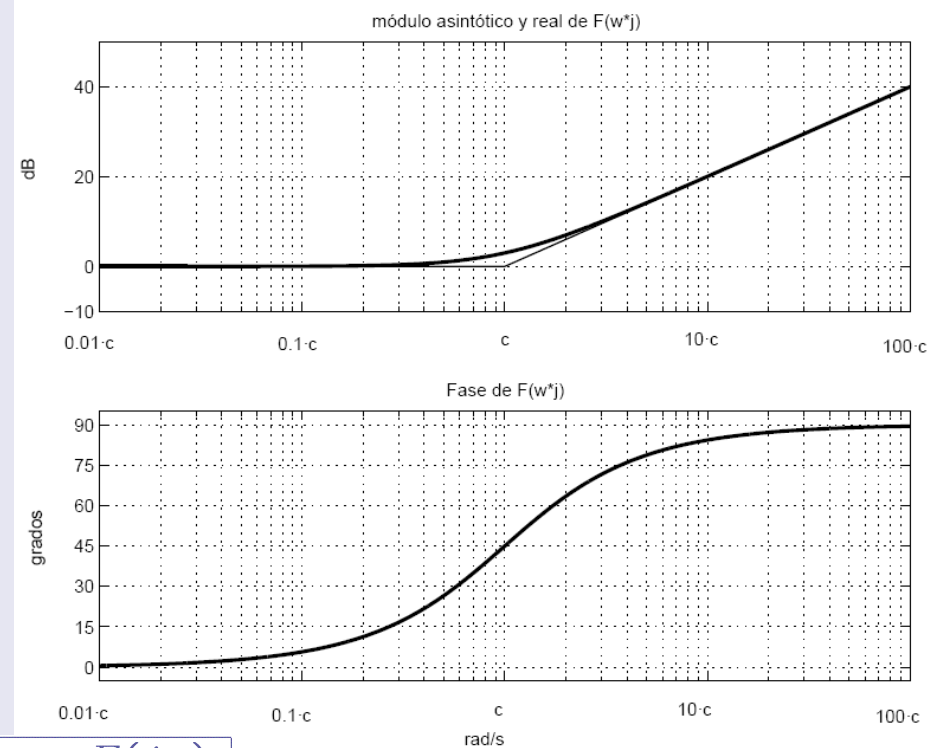
Bode de la Ganancia

$$F(j\omega) = K_B$$

	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$K_B > 0$	$20 \log K_B $	0°
$K_B < 0$	$20 \log K_B $	-180°

Bode de un Cero de fase mínima

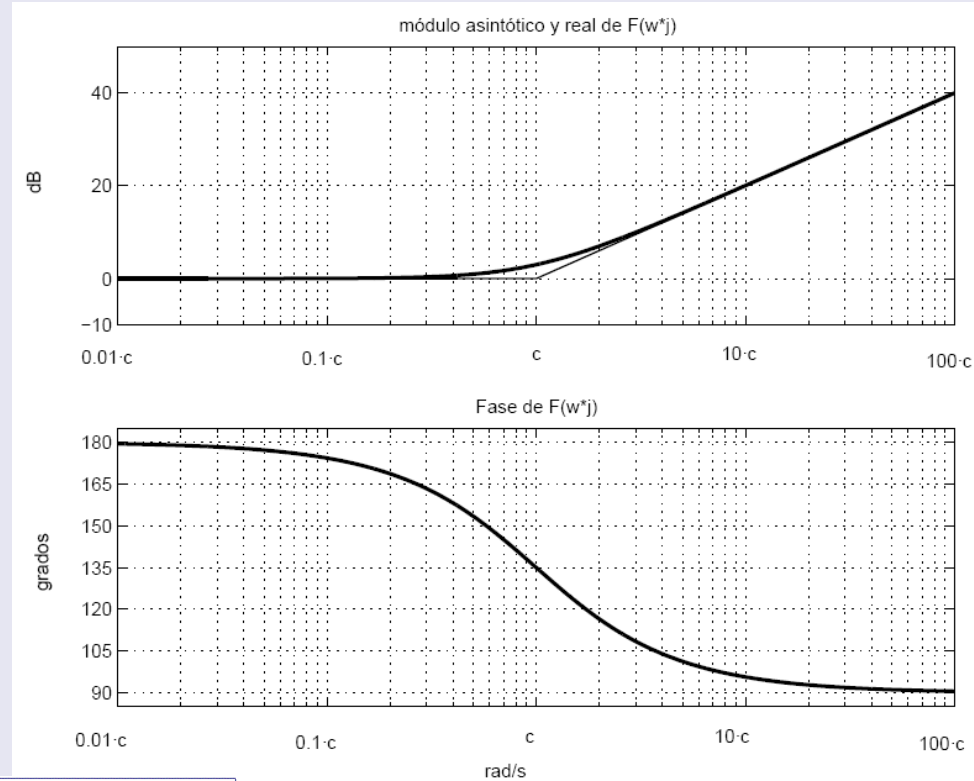
$$F(j\omega) = j\frac{\omega}{c_m} + 1$$



	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll c_m$	$\simeq 1$	0 dB	0°
$\omega = c_m$	$1 + j$	3 dB	45°
$\omega \gg c_m$	$\simeq j\frac{\omega}{c_m}$	$20 \log \omega - 20 \log c_m$ dB	90°

Bode de un Cero de fase no mínima

$$F(j\omega) = j\frac{\omega}{c_n} - 1$$

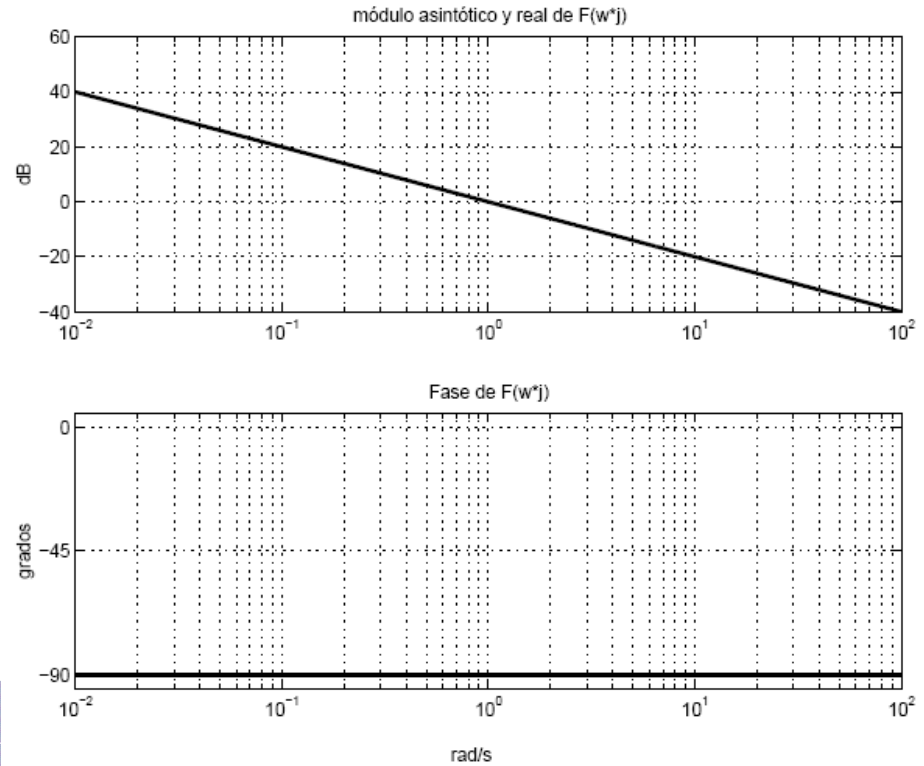


	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll c_n$	$\simeq -1$	0 dB	180°
$\omega = c_n$	$j - 1$	3 dB	135°
$\omega \gg c_n$	$\simeq j\frac{\omega}{c_n}$	$20 \log \omega - 20 \log c_n$ dB	90°

Bode de un integrador

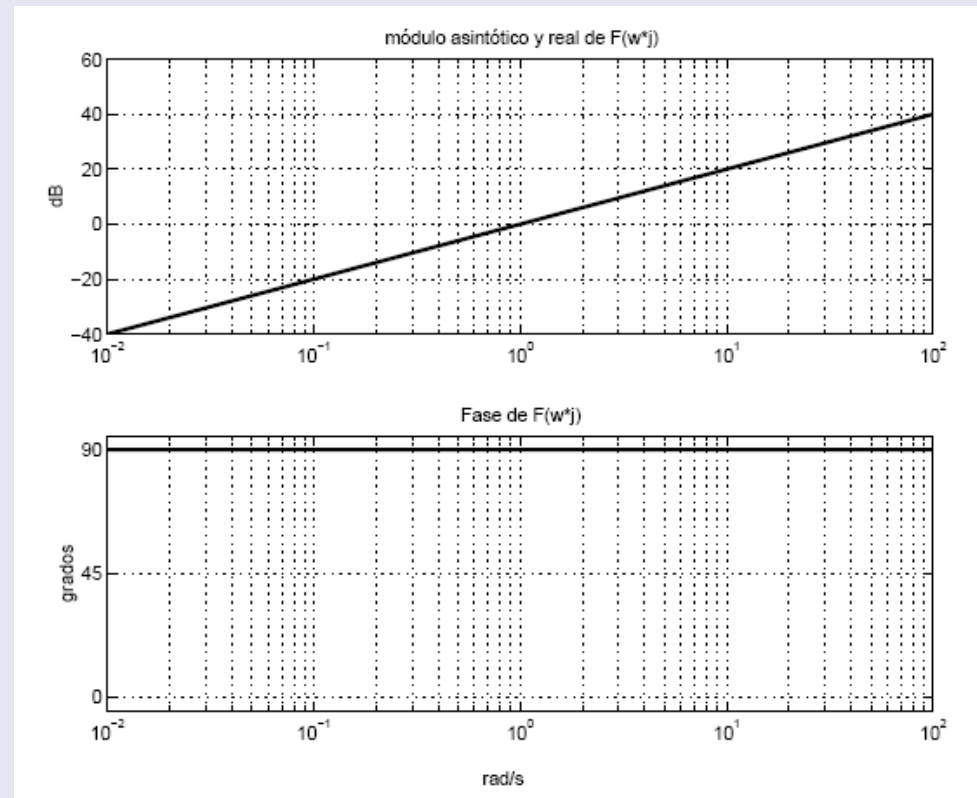
$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\forall \omega$	$-\frac{1}{\omega j}$	$-20 \log \omega$	-90°



Bode de un derivador

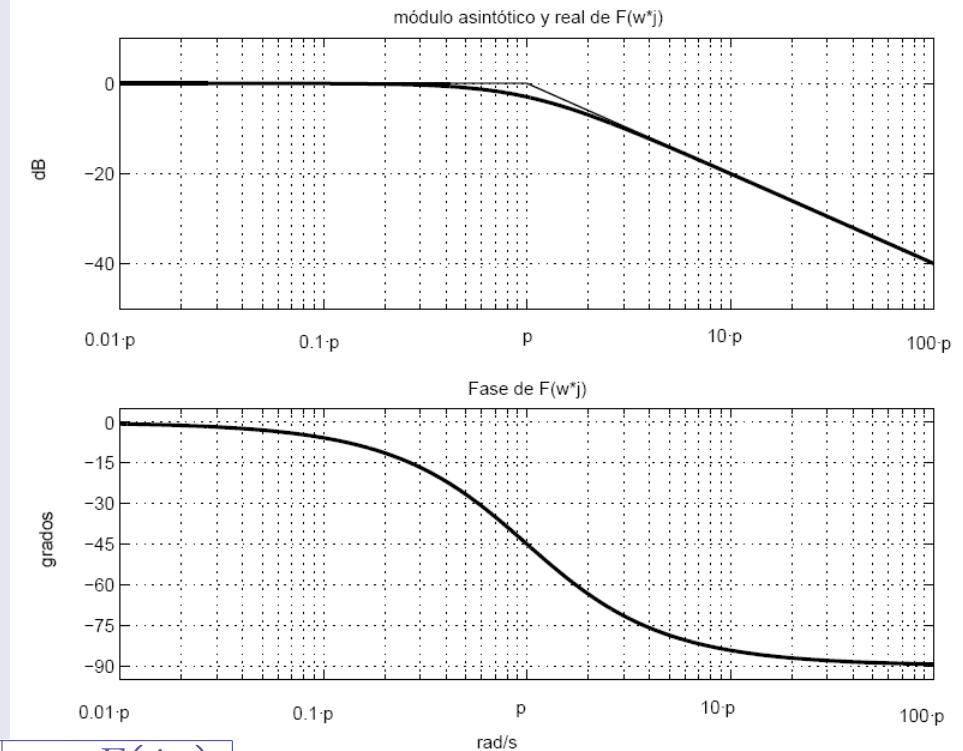
$$F(j\omega) = j\omega$$



	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\forall \omega$	ωj	$20 \log \omega$	90°

Bode de un polo estable

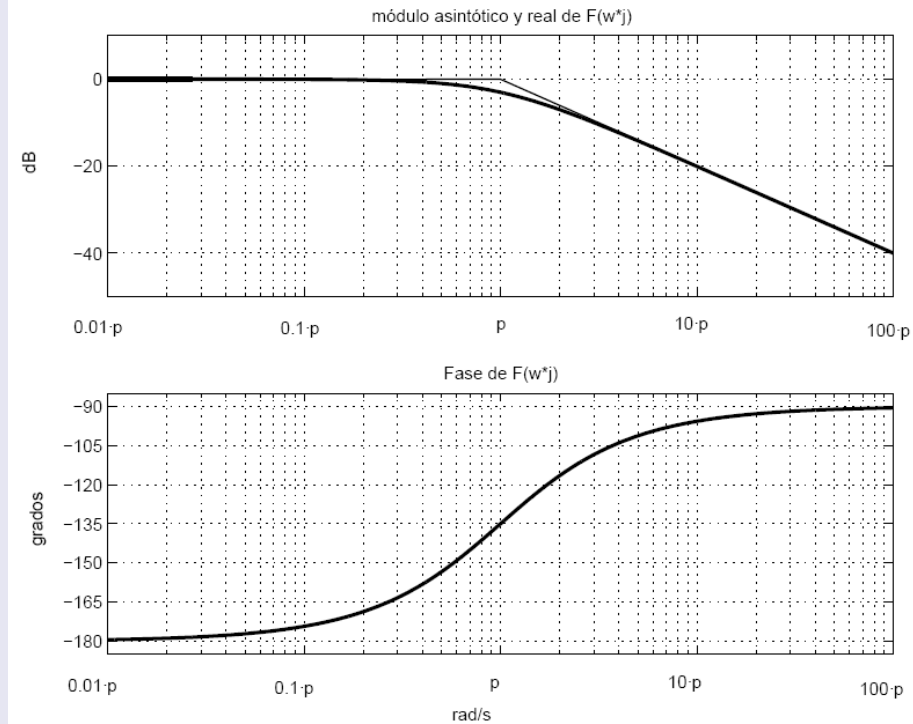
$$F(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{p_e} + 1}$$



	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll p_e$	$\simeq 1$	0 dB	0°
$\omega = p_e$	$\frac{1}{j+1}$	-3 dB	-45°
$\omega \gg p_e$	$\simeq -\frac{p_e}{\omega}j$	$20 \log p_e - 20 \log \omega$ dB	-90°

Bode de un polo inestable

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{p_i} - 1}$$



	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll p_i$	$\simeq -1$	0 dB	-180°
$\omega = p_i$	$\frac{1}{j-1}$	-3 dB	-135°
$\omega \gg p_i$	$\simeq -\frac{p_i}{\omega}j$	$20 \log p_i - 20 \log \omega$ dB	-90°

Bode de un Polo Complejo

$$F(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)j}$$

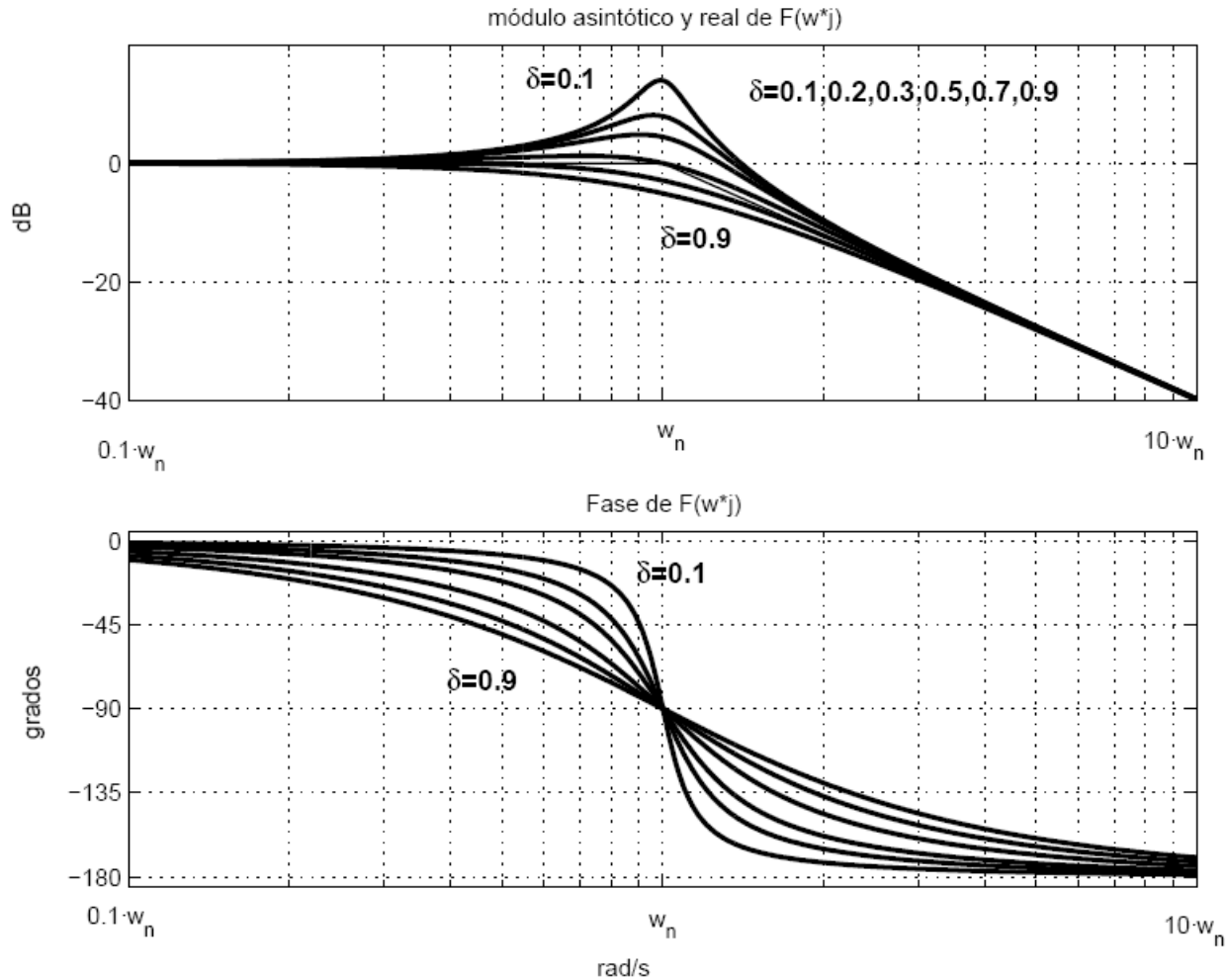
	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll \omega_n$	$\simeq 1$	0 dB	0°
$\omega = \omega_n$	$\frac{1}{2\delta j}$	$-20 \log(2\delta)$ dB	-90°
$\omega \gg \omega_n$	$\simeq -\left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2$	$40 \log \omega_n - 40 \log \omega$ dB	-180°

- Depende de δ
- El módulo presenta un máximo para $\delta \leq 0.707$

Pico de Resonancia

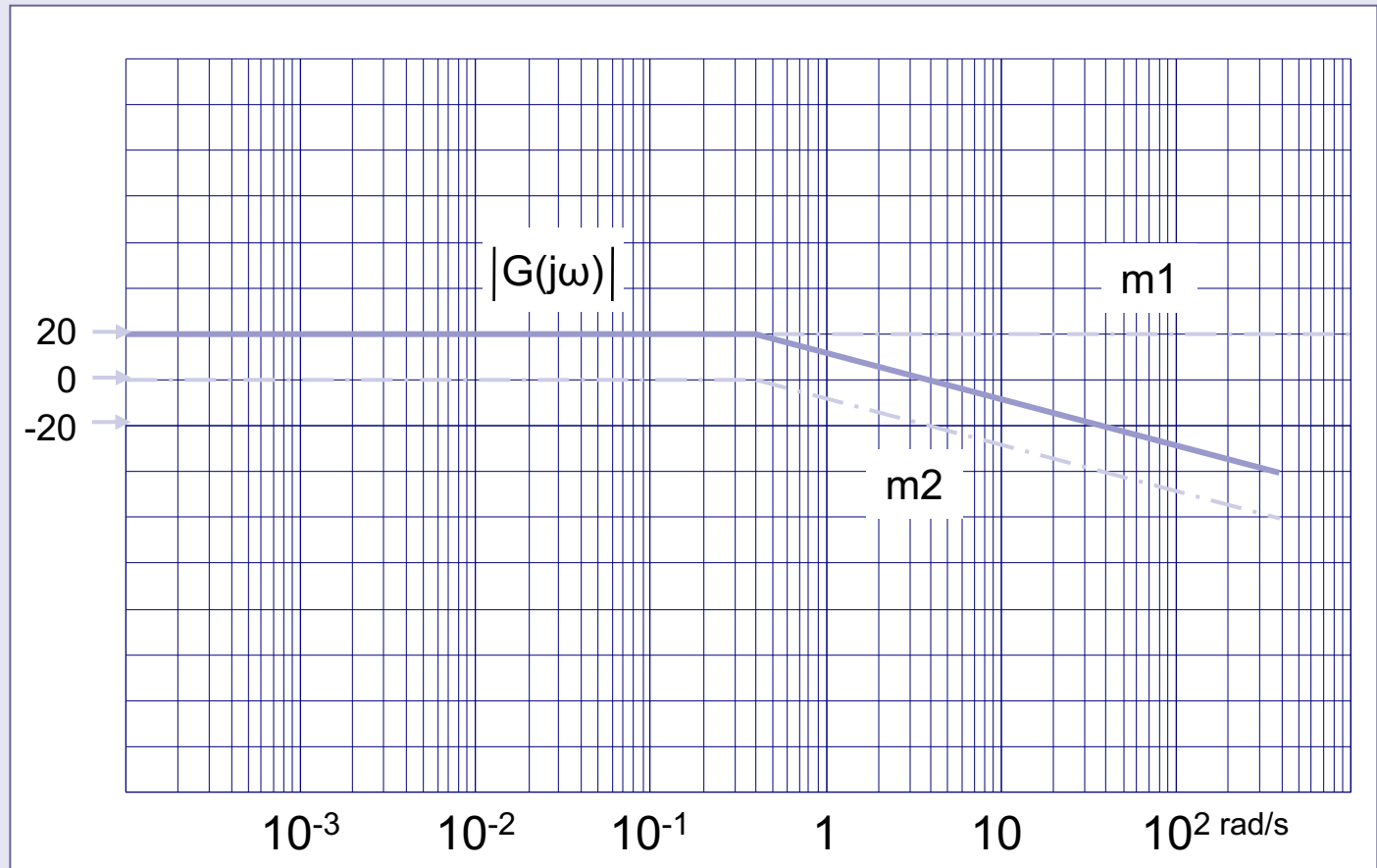
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$
$$M_r = |F(j\omega_r)| = \frac{1}{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}$$

Bode de un Polo Complejo

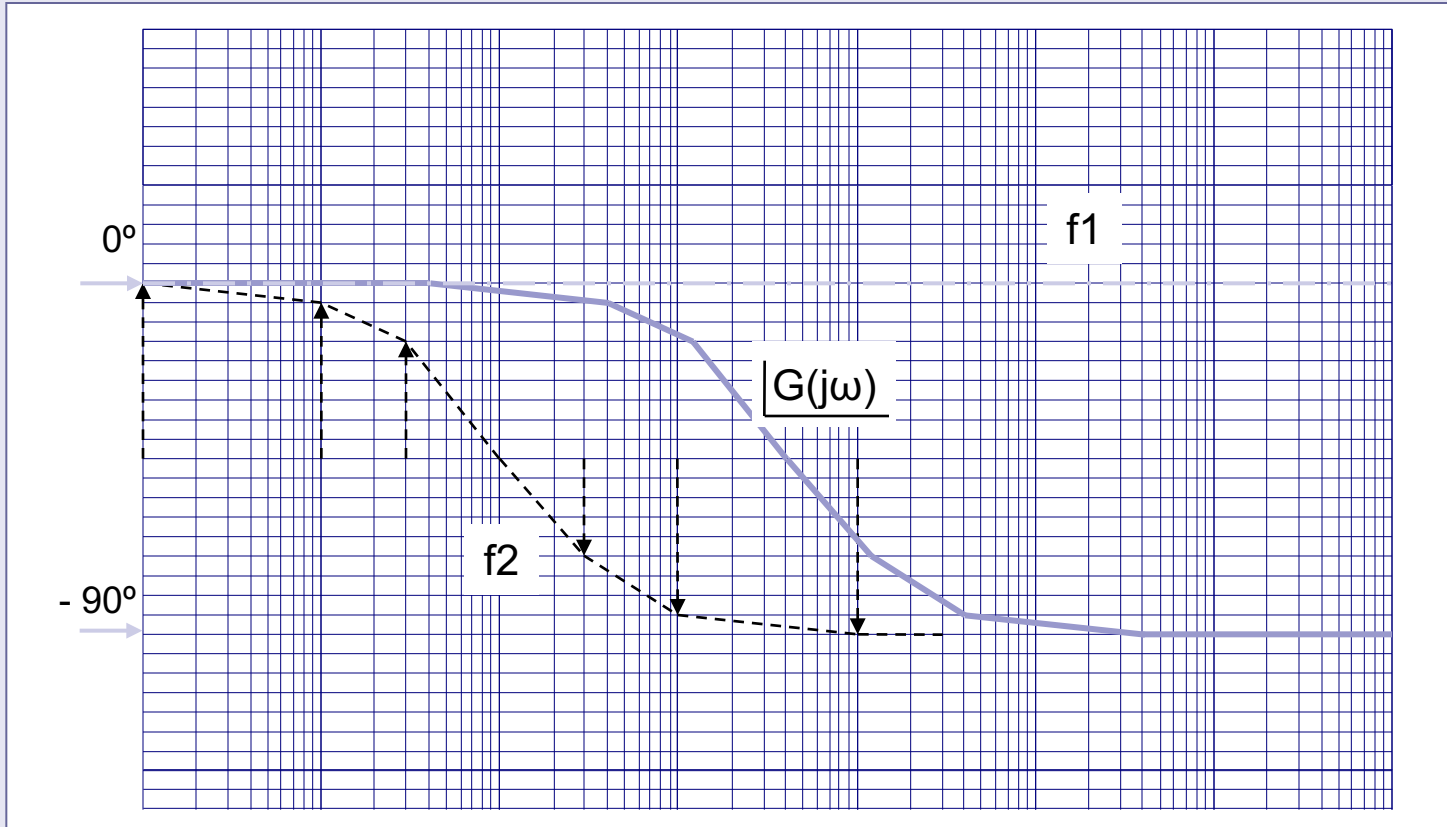


Ejemplo 1

$$G(s) = \frac{10}{1 + 2.5s}$$

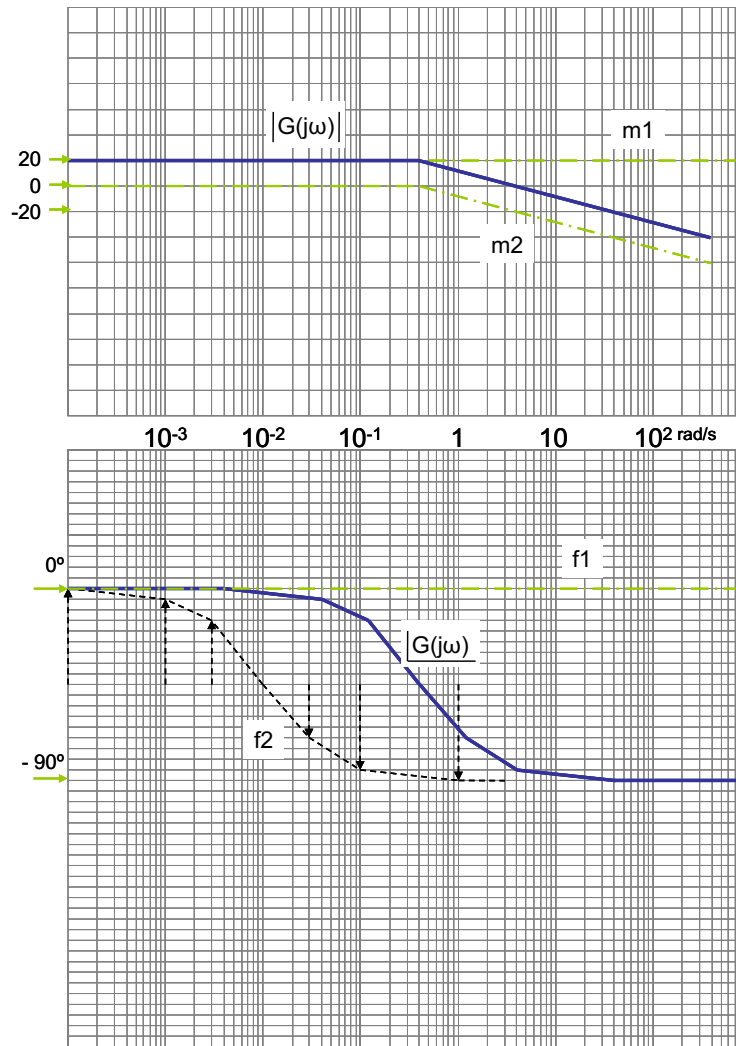


Ejemplo 1



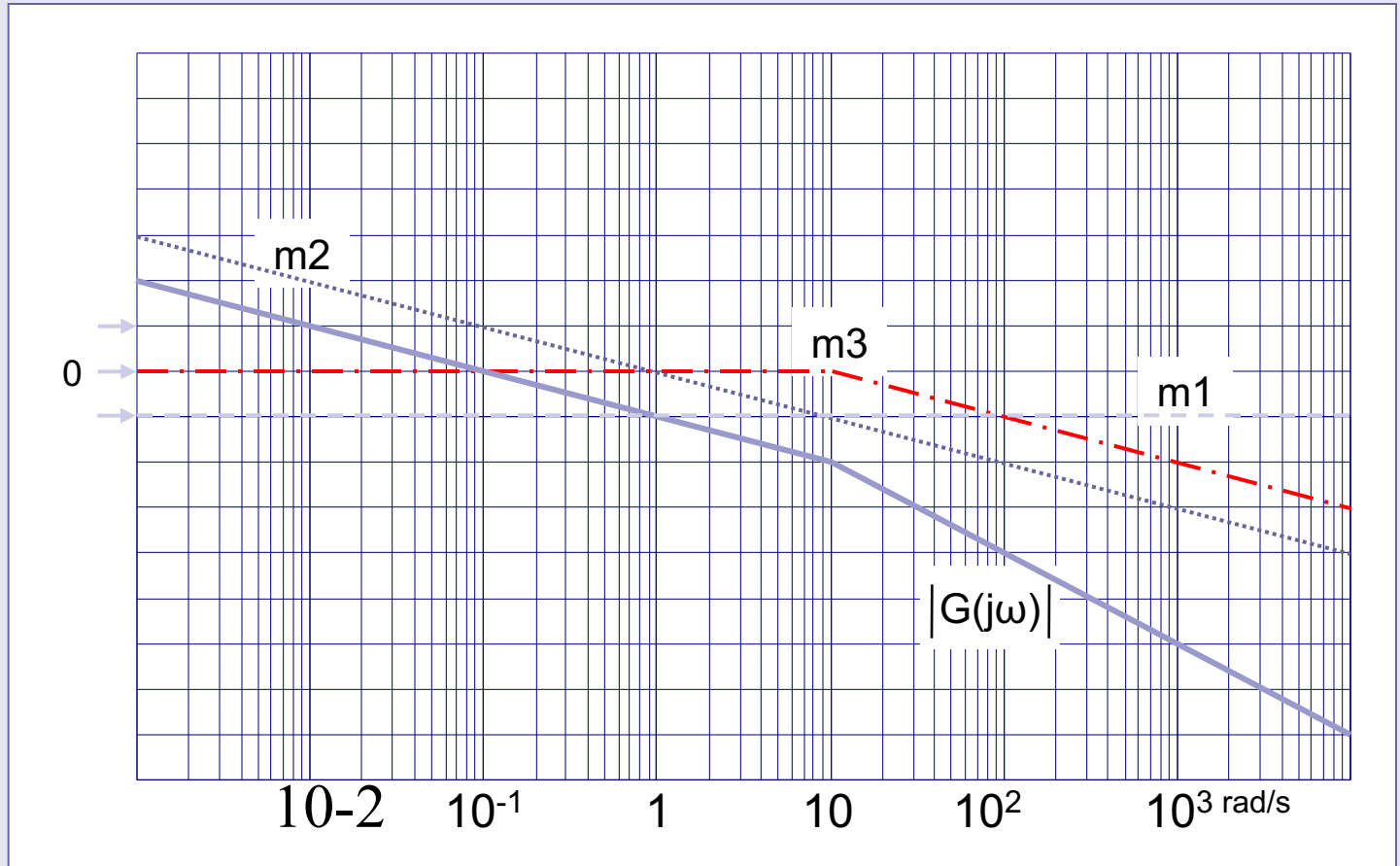
Frecuencia relativa a p (o c)	0.01	0.1	0.3	1	3	10	100
Separación del valor central (en grados)	45	40	30	0	-25	-40	-45

Ejemplo 1

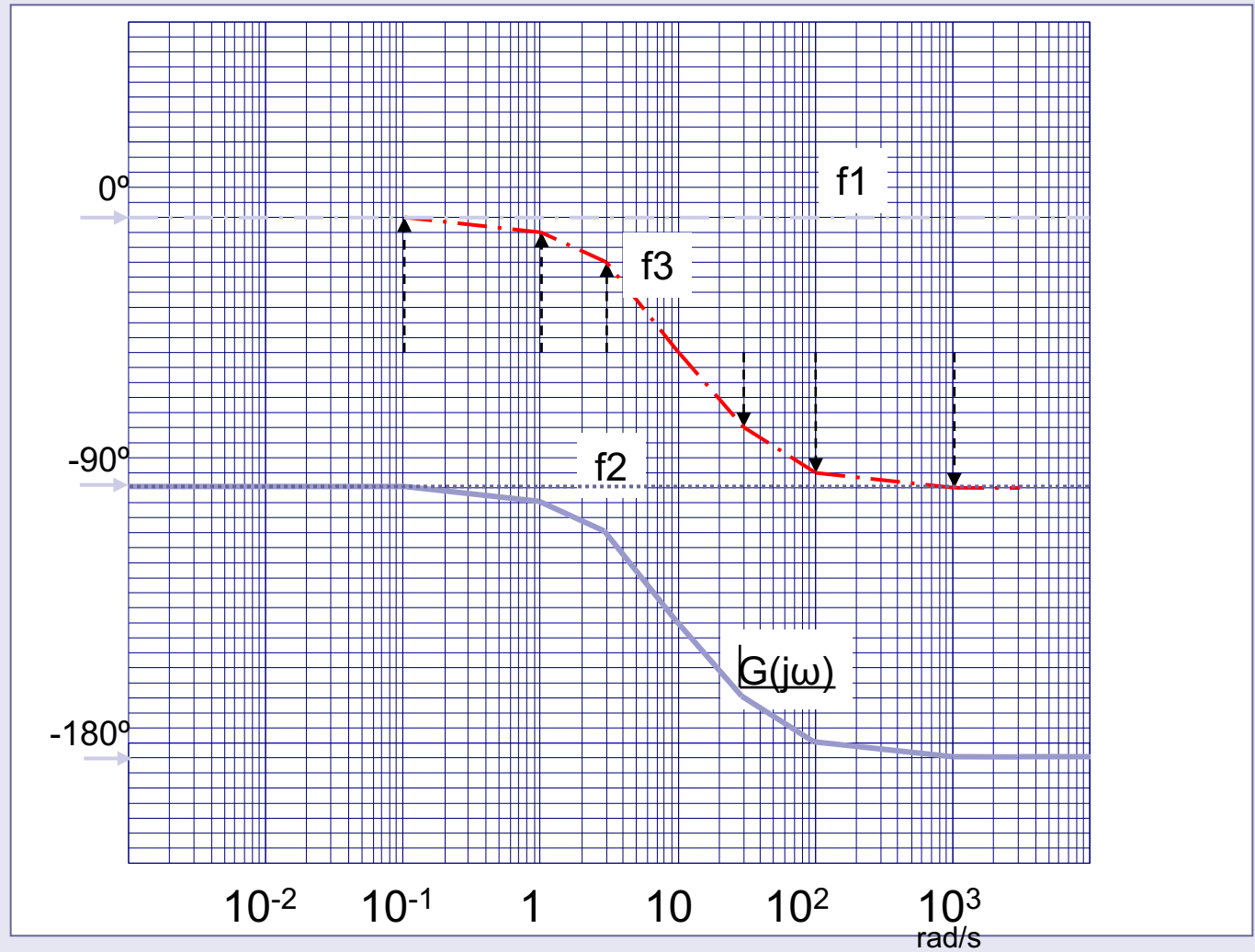


Ejemplo 2

$$G(s) = \frac{1}{s(10+s)}$$

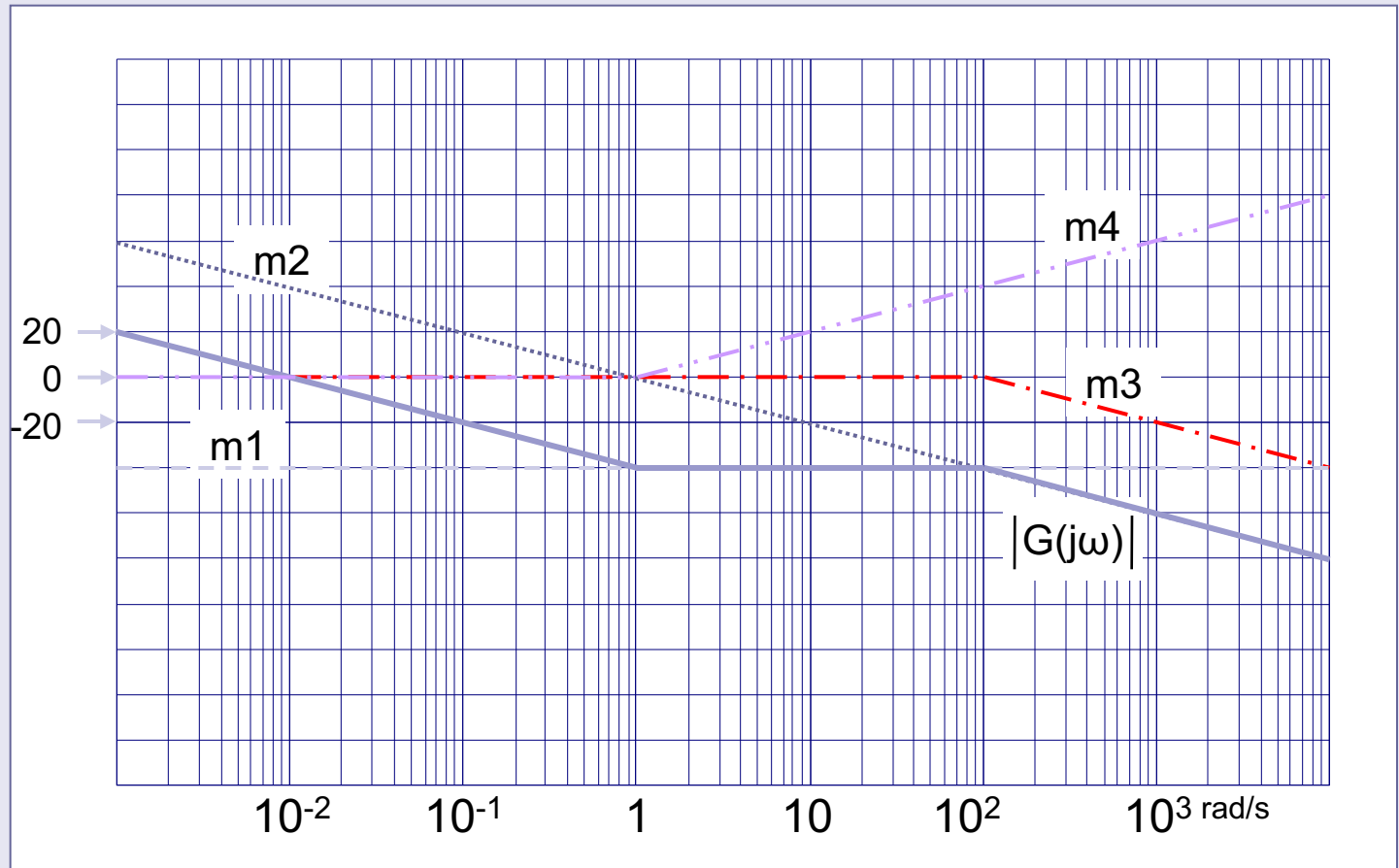


Ejemplo 2

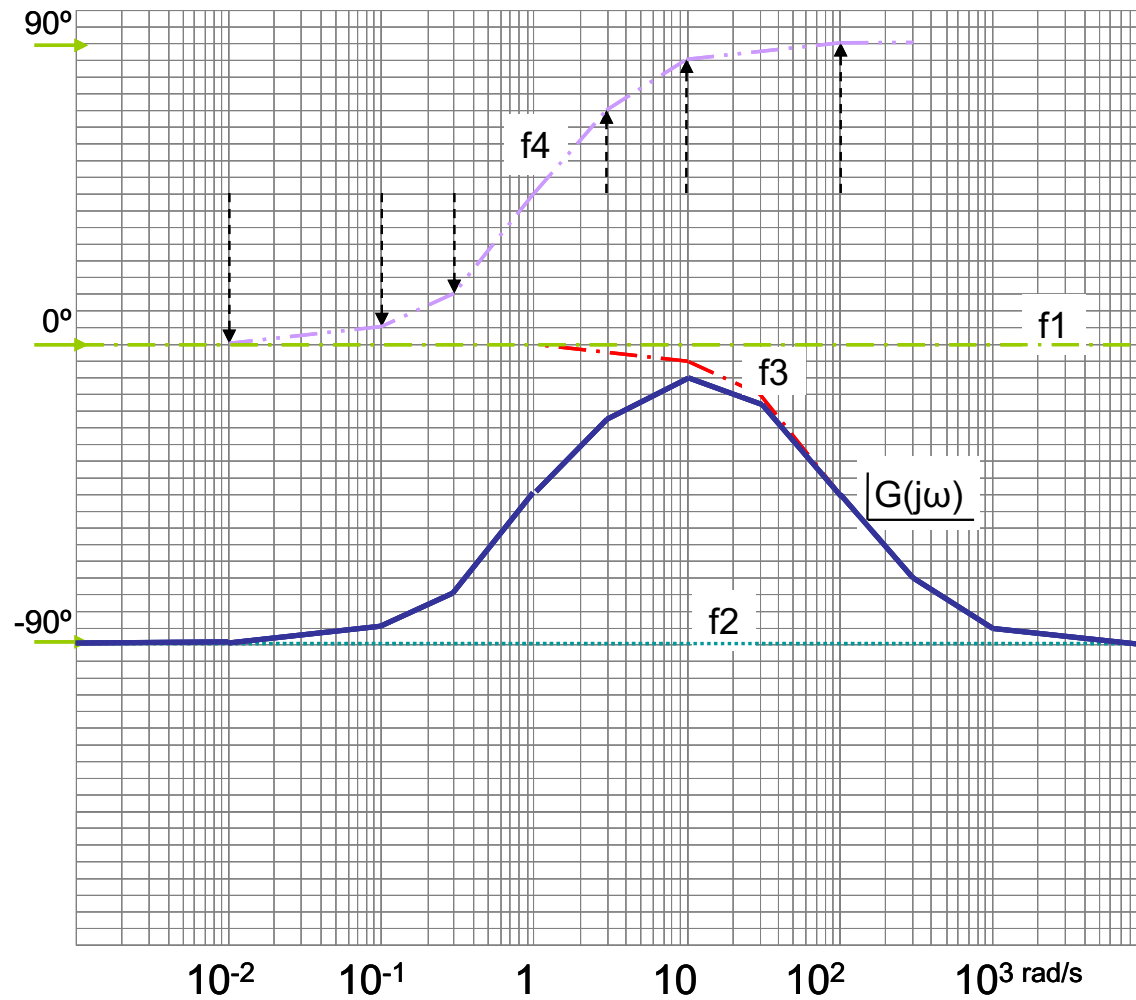


Ejemplo 3

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s + 100)}$$



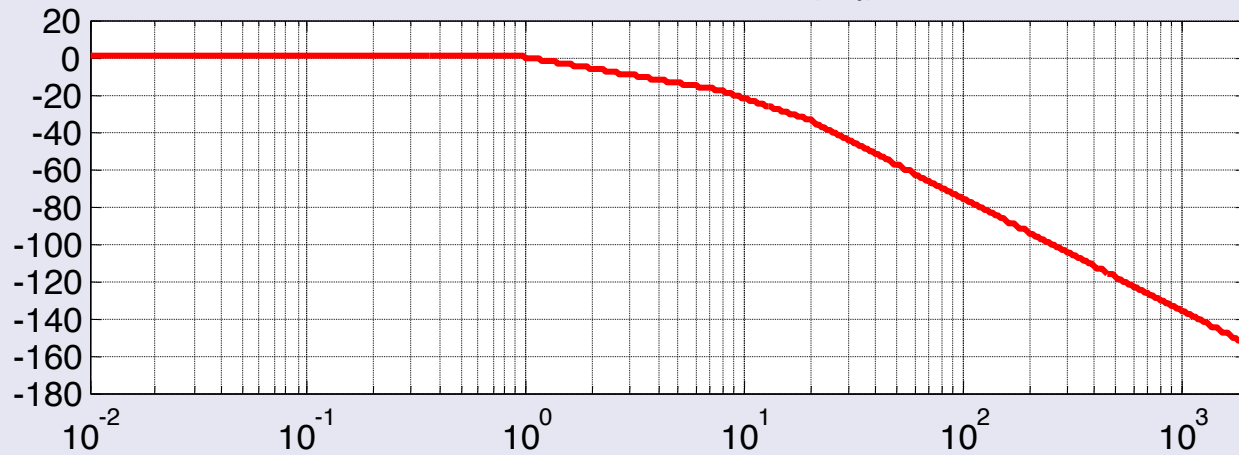
Ejemplo 3



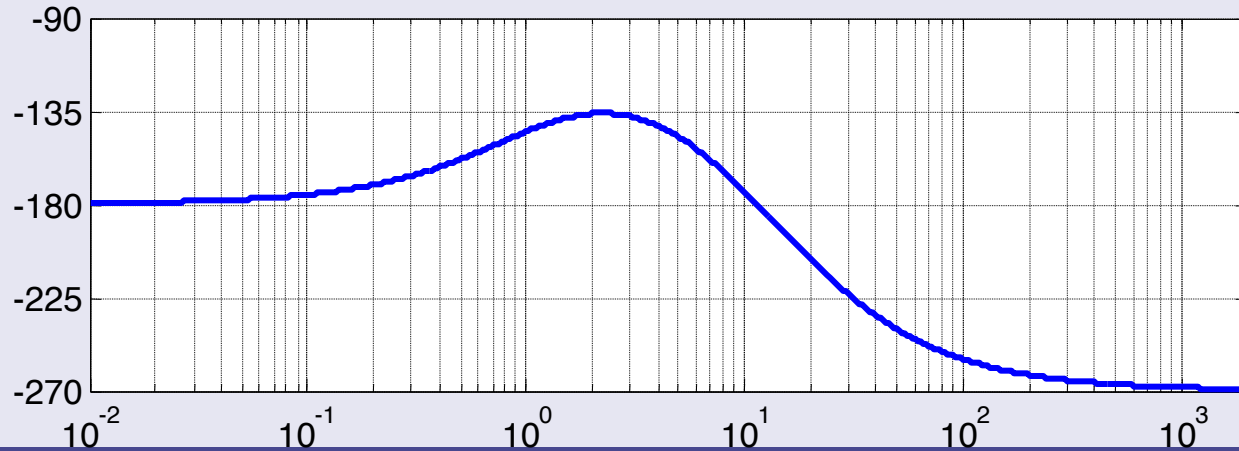
Ejemplo 4:

$$G(s) = \frac{160}{(s-1)(s+8)(s+20)}$$

módulo asintótico de $G(w^*j)$



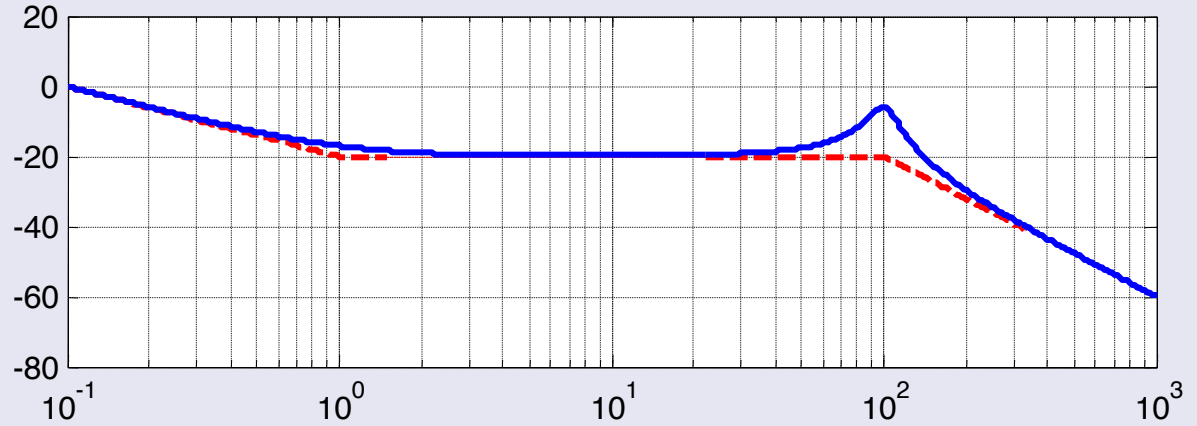
Fase de $G(w^*j)$



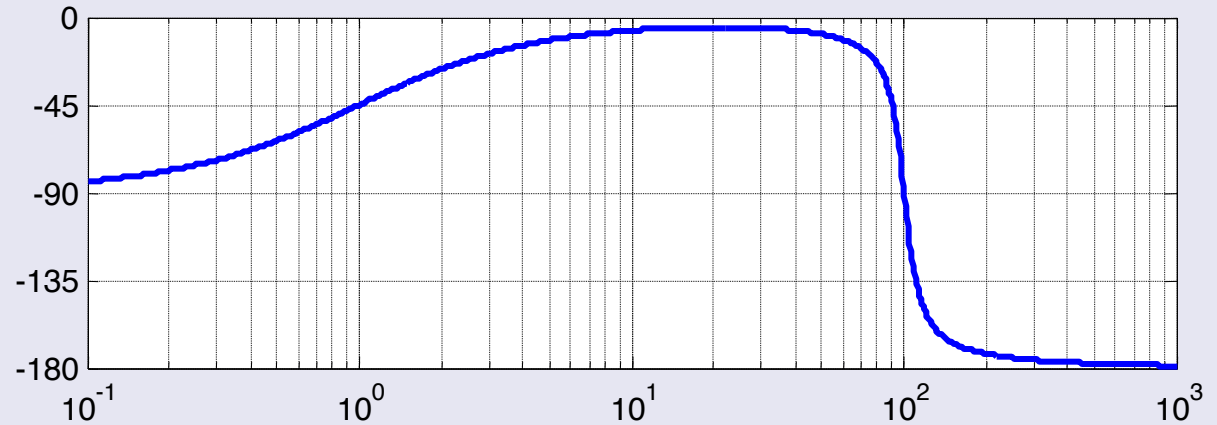
Ejemplo 5:

$$G(s) = \frac{1000(s+1)}{s(s^2+20s+10100)}$$

módulo asintótico de $G(w^*j)$



Fase de $G(w^*j)$



Trazado de Diagrama de Nyquist

- Trazado aproximado a partir del D. Bode
 - Valores a frecuencias bajas.
 - Tendencia a frecuencias altas.
 - Puntos de corte con ejes coordenados.

