Teoría de Sistemas y Control Automático

Estabilidad en representación interna

Dr. Antonio Ferramosca - e-mail: *ferramosca@santafe-conicet.gob.ar*
Ing. Ivan Talijancic - e-mail: *italijancic@outlook.com*

4º y 5º Ing. Electromecánica
UTN - Facultad Regional Reconquista

Estabilidad: introducción

- La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería.

Estabilidad: introducción

- La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería.
- En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad:
  - estabilidad de puntos de equilibrio (y conjunto invariantes)
  - estabilidad entrada-estado
  - estabilidad entrada-salida.

Estabilidad: introducción

- La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería.
- En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad:
  - estabilidad de puntos de equilibrio (y conjunto invariantes)
  - estabilidad entrada-estado
  - estabilidad entrada-salida.
- La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.

Estabilidad: introducción

- La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería.
- En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad:
  - estabilidad de puntos de equilibrio (y conjunto invariantes)
  - estabilidad entrada-estado
  - estabilidad entrada-salida.
- La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.
- Un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es *inestable*.

Estabilidad: introducción

- La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería.
- En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad:
  - estabilidad de puntos de equilibrio (y conjunto invariantes)
  - estabilidad entrada-estado
  - estabilidad entrada-salida.
- La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.
- Un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es *inestable*.
- Un punto de equilibrio se dice *asintóticamente estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

Estabilidad: definiciones

Consideramos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x)$$

Supongamos que $\bar{x}$ es un PE: es decir $f(\bar{x}) = 0$. (Desde ahora por conveniencia se supondrá que $\bar{x} = 0$).

Estabilidad: definiciones

Consideramos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x)$$

Supongamos que $\bar{x}$ es un PE: es decir $f(\bar{x}) = 0$. (Desde ahora por conveniencia se supondrá que $\bar{x} = 0$).

Estabilidad local

El PE $x = 0$ es localmente estable si, para todo $\epsilon \geq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

Estabilidad: definiciones

Consideramos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x)$$

Supongamos que $\bar{x}$ es un PE: es decir $f(\bar{x}) = 0$. (Desde ahora por conveniencia se supondrá que $\bar{x} = 0$).

Estabilidad local

El PE $x = 0$ es localmente estable si, para todo $\epsilon \geq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

$x = 0$ es inestable si no es estable.

Estabilidad: definiciones

Consideramos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x)$$

Supongamos que $\bar{x}$ es un PE: es decir $f(\bar{x}) = 0$. (Desde ahora por conveniencia se supondrá que $\bar{x} = 0$).

Estabilidad local

El PE $x = 0$ es localmente estable si, para todo $\epsilon \geq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

$x = 0$ es inestable si no es estable.

Convergencia (atractividad)

El PE $x = 0$ es atractivo si $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Estabilidad: definiciones

Consideramos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x)$$

Supongamos que $\bar{x}$ es un PE: es decir $f(\bar{x}) = 0$. (Desde ahora por conveniencia se supondrá que $\bar{x} = 0$).

Estabilidad local

El PE $x = 0$ es localmente estable si, para todo $\epsilon \geq 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \epsilon$, para todo $t \geq 0$.

$x = 0$ es inestable si no es estable.

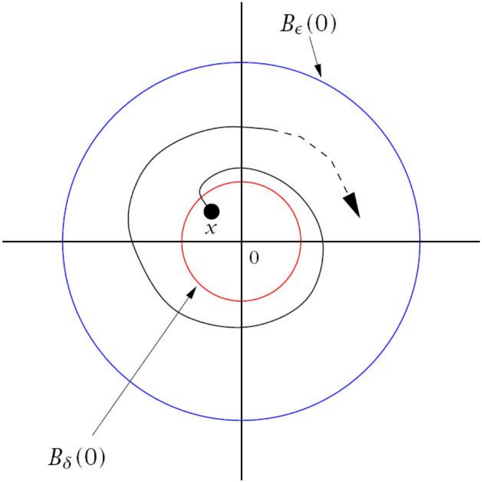
Convergencia (atractividad)

El PE $x = 0$ es atractivo si $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Estabilidad Asintótica

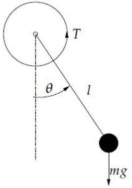
El PE $x = 0$ es asintoticamente estable si es localmente estable y atractivo.

Estabilidad de $x = 0$



Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

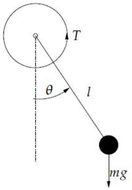


$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2
\end{aligned}
$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2\end{aligned}$$

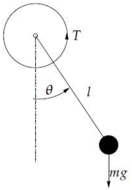
donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Los PE (cuando $\dot{x}_{1,2} = 0$) son: $(0,0)$ y $(\pi, 0)$.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2\end{aligned}$$

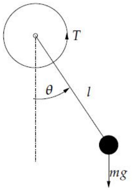


donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Los PE (cuando $\dot{x}_{1,2} = 0$) son: $(0,0)$ y $(\pi, 0)$.
- Si no hay fricción ($k = 0$), las trayectorias entorno a $(0,0)$ son órbitas cerradas: empezando suficientemente cerca del PE ($\|x(0)\| < \delta$), las trayectorias van a permanecer cerca del PE.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).



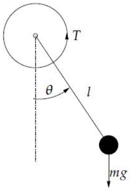
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2\end{aligned}$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Los PE (cuando $\dot{x}_{1,2} = 0$) son: $(0,0)$ y $(\pi,0)$.
- Si no hay fricción ($k = 0$), las trayectorias entorno a $(0,0)$ son órbitas cerradas: empezando suficientemente cerca del PE ($\|x(0)\| < \delta$), las trayectorias van a permanecer cerca del PE.
- El PE es estable.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

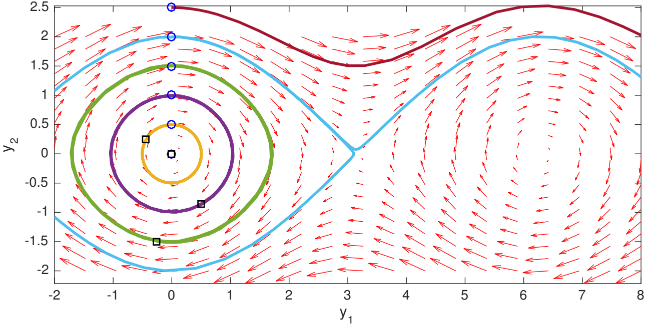


$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{aligned}$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Los PE (cuando $\dot{x}_{1,2} = 0$) son: $(0,0)$ y $(\pi,0)$.
- Si no hay fricción ($k = 0$), las trayectorias entorno a $(0,0)$ son órbitas cerradas: empezando suficientemente cerca del PE ($\|x(0)\| < \delta$), las trayectorias van a permanecer cerca del PE.
- El PE es estable.
- No es Asintóticamente Estable (AE), porque las trayectorias que comienzan fuera del PE nunca tienden a él.

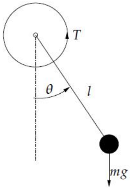
Ejemplo: Péndulo



Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

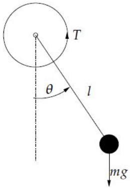
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2
\end{aligned}
$$



donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).



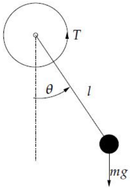
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{aligned}$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- El PE $(\pi, 0)$ es inestable.
- En el retrato de fase las trayectorias se alejan del PE.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).



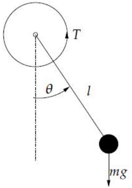
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2\end{aligned}$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- El PE $(\pi, 0)$ es inestable.
- En el retrato de fase las trayectorias se alejan del PE.
- Aún cuando la condición inicial sea suficientemente cercana a él, las trayectorias se alejan del PE.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).



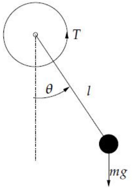
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2
\end{aligned}
$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2\end{aligned}$$



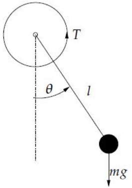
donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Supongamos que haya fricción: $k > 0$.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{aligned}$$



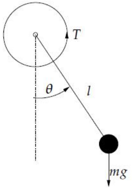
donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Supongamos que haya fricción: $k > 0$.
- El PE $(0,0)$ es un foco estable: empezando suficientemente cerca del PE ($\|x(0)\| < \delta$), las trayectorias van a permanecer cerca del PE; además tienden asintoticamente a él.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{aligned}$$



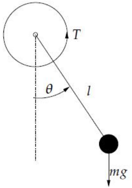
donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Supongamos que haya fricción: $k > 0$.
- El PE $(0,0)$ es un foco estable: empezando suficientemente cerca del PE ($\|x(0)\| < \delta$), las trayectorias van a permanecer cerca del PE; además tienden asintoticamente a él.
- El PE Asintóticamente Estable.

Ejemplo: péndulo

Los tres tipos de estabilidad pueden ejemplificarse con la ecuación de péndulo (con y sin fricción).

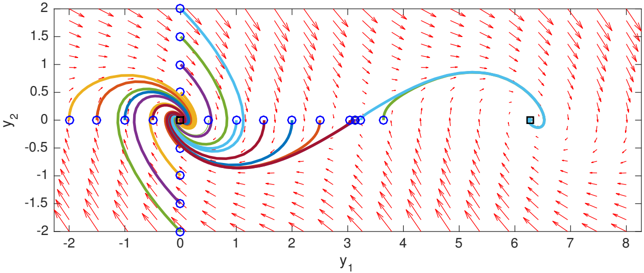
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2
\end{aligned}
$$



donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$.

- Supongamos que haya fricción: $k > 0$.
- El PE $(0, 0)$ es un foco estable: empezando suficientemente cerca del PE ($\|x(0)\| < \delta$), las trayectorias van a permanecer cerca del PE; además tienden asintoticamente a él.
- El PE Asintóticamente Estable.
- El PE $(\pi, 0)$ es inestable.

Ejemplo: Péndulo



Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.

Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.
Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

cuyo único punto de equilibrio es $x = 0$.

Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.
Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

cuyo único punto de equilibrio es $x = 0$. La solución para un estado inicial x_0 está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.
Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

cuyo único punto de equilibrio es $x = 0$. La solución para un estado inicial x_0 está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

Un análisis cualitativo del sistema se puede hacer estudiando A. Dependiendo de los autovalores de A, tenemos 3 casos:

1. Los autovalores λ_1 y λ_2 son reales y distintos,

Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.
Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

cuyo único punto de equilibrio es $x = 0$. La solución para un estado inicial x_0 está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

Un análisis cualitativo del sistema se puede hacer estudiando A. Dependiendo de los autovalores de A, tenemos 3 casos:

1. Los autovalores λ_1 y λ_2 son reales y distintos,
2. Los autovalores son reales e iguales, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.
Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

cuyo único punto de equilibrio es $x = 0$. La solución para un estado inicial x_0 está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

Un análisis cualitativo del sistema se puede hacer estudiando A. Dependiendo de los autovalores de A, tenemos 3 casos:

1. Los autovalores λ_1 y λ_2 son reales y distintos,
2. Los autovalores son reales e iguales, $\lambda_1 = \lambda_2$.
3. Los autovalores son complejos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

Sistemas lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local de sistemas lineales y no lineales alrededor de un PE.
Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax.$$

cuyo único punto de equilibrio es $x = 0$. La solución para un estado inicial x_0 está dada por

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

Un análisis cualitativo del sistema se puede hacer estudiando A. Dependiendo de los autovalores de A, tenemos 3 casos:

1. Los autovalores λ_1 y λ_2 son reales y distintos,
2. Los autovalores son reales e iguales, $\lambda_1 = \lambda_2$.
3. Los autovalores son complejos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

Comentario

En el caso de autovalores reales, hay que separar el caso en que al menos uno de los autovalores es cero. En este caso, el origen no es un PE aislado y el comportamiento cualitativo del sistema es distinto de los otros casos.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Los autovectores de un operador lineal (matriz) son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ *recibe el nombre autovalor.*

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Los autovectores de un operador lineal (matriz) son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre autovalor.

- Una transformación lineal Ax produce ciertos efectos sobre el vector x. Dichos efectos dependen de la forma de A.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Los autovectores de un operador lineal (matriz) son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre autovalor.

- Una transformación lineal Ax produce ciertos efectos sobre el vector x. Dichos efectos dependen de la forma de A.
- Los vectores pueden visualizarse como flechas de una cierta longitud apuntando en una dirección y sentido determinados.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Los autovectores de un operador lineal (matriz) son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre autovalor.

- Una transformación lineal Ax produce ciertos efectos sobre el vector x. Dichos efectos dependen de la forma de A.
- Los vectores pueden visualizarse como flechas de una cierta longitud apuntando en una dirección y sentido determinados.
- Los autovectores son vectores que, o no son afectados por la transformación o sólo resultan multiplicados por un escalar, y por tanto, no varían su dirección.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Los autovectores de un operador lineal (matriz) son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre autovalor.

- Una transformación lineal Ax produce ciertos efectos sobre el vector x. Dichos efectos dependen de la forma de A.
- Los vectores pueden visualizarse como flechas de una cierta longitud apuntando en una dirección y sentido determinados.
- Los autovectores son vectores que, o no son afectados por la transformación o sólo resultan multiplicados por un escalar, y por tanto, no varían su dirección.
- El autovalor de un autovector es el factor de escala por el que ha sido multiplicado.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Sea A una transformación lineal y v un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que

$$Av = \lambda v$$

entonces v es un autovector de A, y su autovalor asociado es λ.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Sea A una transformación lineal y v un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que

$$Av = \lambda v$$

entonces v es un autovector de A, y su autovalor asociado es λ.

Como se calculan los autovalores?

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Sea A una transformación lineal y v un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que

$$Av = \lambda v$$

entonces v es un autovector de A, y su autovalor asociado es λ.

Como se calculan los autovalores? Basándonos en la definición

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)v = 0$$

por lo que los valores de λ se encuentran resolviendo

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Repaso: Autovalores y Autovectores

Definición

Sea A una transformación lineal y v un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que

$$Av = \lambda v$$

entonces v es un autovector de A, y su autovalor asociado es λ.

Como se calculan los autovalores? Basándonos en la definición

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)v = 0$$

por lo que los valores de λ se encuentran resolviendo

$$det(A - \lambda I) = 0$$

En *Matlab* se usa la función $eig(A)$.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Algunas transformaciones especiales en $\mathbb{R}^2$:

Repaso: Autovalores y Autovectores

Algunas transformaciones especiales en $\mathbb{R}^2$:

- Rotación: ningún autovector de valores reales; existen en cambio pares (autovalor, autovector) complejos.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Algunas transformaciones especiales en $\mathbb{R}^2$:

- Rotación: ningún autovector de valores reales; existen en cambio pares (autovalor, autovector) complejos.
- Reflexión: los autovectores son perpendiculares y paralelos al eje de simetría; los autovalores son -1 y 1, respectivamente.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Algunas transformaciones especiales en $\mathbb{R}^2$:

- Rotación: ningún autovector de valores reales; existen en cambio pares (autovalor, autovector) complejos.
- Reflexión: los autovectores son perpendiculares y paralelos al eje de simetría; los autovalores son -1 y 1, respectivamente.
- Escalado uniforme: todos los vectores son autovectores, y el autovalor es el factor de escala.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Algunas transformaciones especiales en $\mathbb{R}^2$:

- Rotación: ningún autovector de valores reales; existen en cambio pares (autovalor, autovector) complejos.
- Reflexión: los autovectores son perpendiculares y paralelos al eje de simetría; los autovalores son -1 y 1, respectivamente.
- Escalado uniforme: todos los vectores son autovectores, y el autovalor es el factor de escala.
- Proyección sobre una recta: los autovectores con autovalor 1 son paralelos a la recta, autovectores con autovalor 0 son perpendiculares a la dirección de la proyección.

Repaso: Autovalores y Autovectores

Algunas transformaciones especiales en $\mathbb{R}^2$:

- Rotación: ningún autovector de valores reales; existen en cambio pares (autovalor, autovector) complejos.
- Reflexión: los autovectores son perpendiculares y paralelos al eje de simetría; los autovalores son -1 y 1, respectivamente.
- Escalado uniforme: todos los vectores son autovectores, y el autovalor es el factor de escala.
- Proyección sobre una recta: los autovectores con autovalor 1 son paralelos a la recta, autovectores con autovalor 0 son perpendiculares a la dirección de la proyección.

Comentario (Ejemplo en 3D)

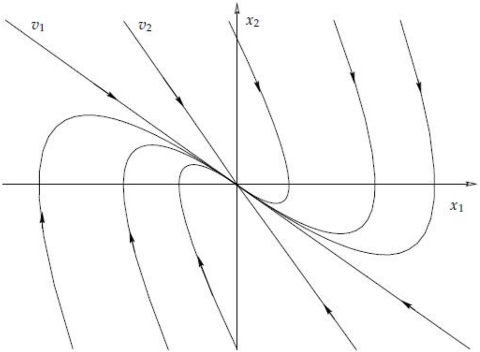
A medida que la Tierra rota, los vectores en el eje de rotación permanecen invariantes. Si se considera la transformación lineal que sufre la Tierra tras una hora de rotación, una flecha que partiera del centro de la Tierra al Polo Sur geográfico sería un autovector de esta transformación, pero una flecha que partiera del centro a un punto del ecuador no sería un autovector.

Autovalores reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

Sean v_1 y v_2 los *autovectores* asociados con λ_1 yλ_2.

El retrato de fase es el de un:

- *nodo estable* si ambos autovalores son negativos. Las trayectorias en el plano de fase son parábolas que se hacen tangentes al autovector lento (corresp. al mayor autovalor) cuando se acercan al origen, y paralelas al autovector rápido (correspondiente. al menor autovalor) lejos del origen.

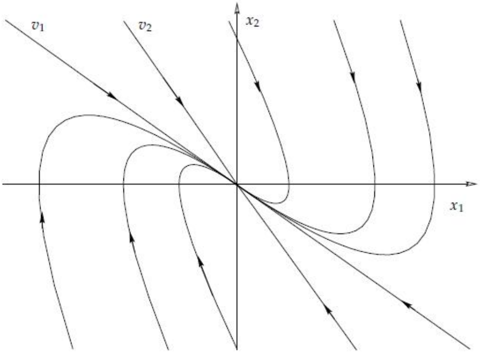


Autovalores reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

Sean v_1 y v_2 los *autovectores* asociados con λ_1 yλ_2.

El retrato de fase es el de un:

- *nodo inestable* si ambos autovalores son positivos. Las trayectorias en el plano de fase son parábolas con formas similares a la del nodo estable pero con sentido invertido.

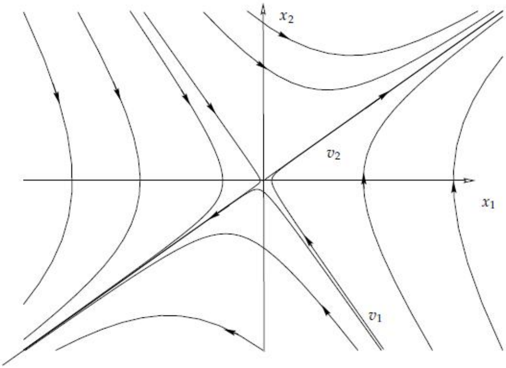


Autovalores reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

Sean v_1 y v_2 los *autovectores* asociados con λ_1 yλ_2.

El retrato de fase es el de un:

- *ensilladura* si los autovalores tienen distinto signo. Las trayectorias en el plano de fase (excepto las correspondientes a los autovectores, que son rectas) son hipérbolas que comienzan tangentes al autovector estable (correspondiente al autovalor estable) en infinito, y terminan tangentes al autovector inestable (correspondiente al autovalor inestable), también en infinito.



Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En este caso conviene usar la descripción en coordenadas polares del sistema.

Definición

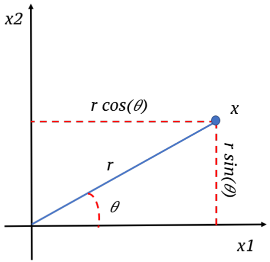
Las ***coordenadas polares*** *o sistema de coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo.*

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En este caso conviene usar la descripción en coordenadas polares del sistema.

Definición

*Las **coordenadas polares** o sistema de coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo.*



- Cada punto $x = (x_1, x_2)$ está definido por:

  r: su distancia al origen

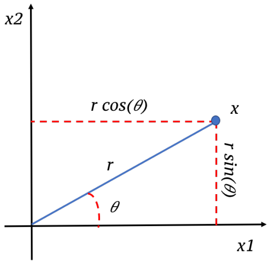
  θ: el ángulo del vector de posición sobre el eje x_1.

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En este caso conviene usar la descripción en coordenadas polares del sistema.

Definición

*Las **coordenadas polares** o sistema de coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo.*



- Cada punto $x = (x_1, x_2)$ está definido por:

  r: su distancia al origen

  θ: el ángulo del vector de posición sobre el eje x_1.

- Para pasar de coordenadas polares a cartesianas:

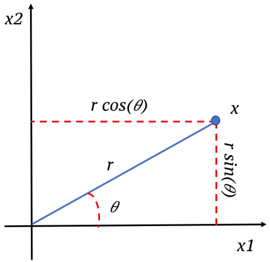
$$x_1 = r\cos(\theta), \quad x_2 = r\sin(\theta)$$

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En este caso conviene usar la descripción en coordenadas polares del sistema.

Definición

*Las **coordenadas polares** o sistema de coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo.*



- Cada punto $x = (x_1, x_2)$ está definido por:

  r: su distancia al origen

  θ: el ángulo del vector de posición sobre el eje x_1.

- Para pasar de coordenadas polares a cartesianas:

$$x_1 = r\cos(\theta), \quad x_2 = r\sin(\theta)$$

- Para pasar de coordenadas cartesianas a polares:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$$

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En coordenadas polares el modelo de estado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta, \end{aligned}$$

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En coordenadas polares el modelo de estado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta, \end{aligned}$$

de forma que el radio es una función exponencial de la parte real de los autovalores, α, y el ángulo crece linealmente con la parte imaginaria β. El retrato de fase es el de un

- *foco estable* si α es negativa. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que convergen al origen.

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En coordenadas polares el modelo de estado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta, \end{aligned}$$

de forma que el radio es una función exponencial de la parte real de los autovalores, α, y el ángulo crece linealmente con la parte imaginaria β. El retrato de fase es el de un

- *foco estable* si α es negativa. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que convergen al origen.
- *foco inestable* si α es positiva. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que divergen del origen.

Autovalores complejos, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

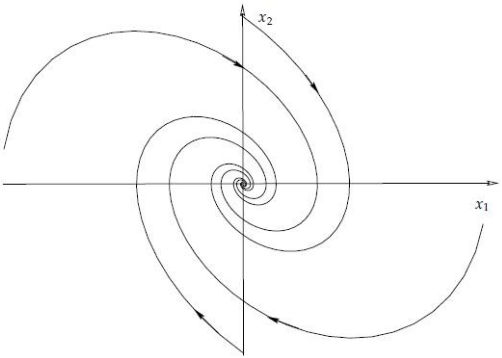
En coordenadas polares el modelo de estado toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta, \end{aligned}$$

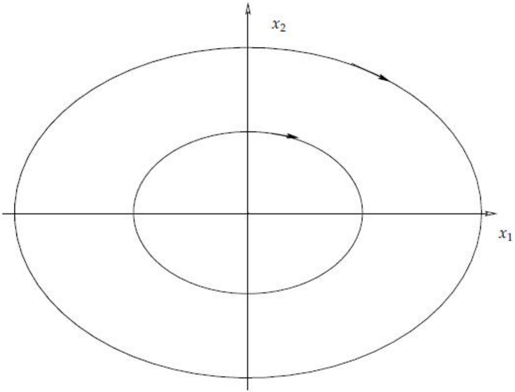
de forma que el radio es una función exponencial de la parte real de los autovalores, α, y el ángulo crece linealmente con la parte imaginaria β. El retrato de fase es el de un

- *foco estable* si α es negativa. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que convergen al origen.
- *foco inestable* si α es positiva. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que divergen del origen.
- *centro* si $\alpha = 0$. Las trayectorias en el plano de fase son elipses centradas en el origen.

Foco estable

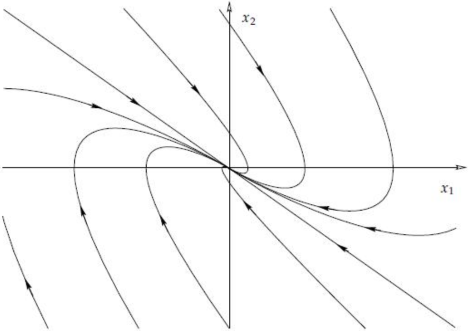


Centro



Autovalores Múltiples No Nulos, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

El retrato de fase en este caso se asemeja al de un nodo (estable o inestable según λ sea negativo o positivo). Las trayectorias no tienen en este caso el comportamiento asintótico rápido-lento como en el caso de autovalores distintos.



Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.
3. **ensilladura**: autovalores de distinto signo.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.
3. **ensilladura**: autovalores de distinto signo.
4. **foco estable**: autovalores complejos, con parte real negativa.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.
3. **ensilladura**: autovalores de distinto signo.
4. **foco estable**: autovalores complejos, con parte real negativa.
5. **foco inestable**: autovalores complejos, con parte real positiva.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.
3. **ensilladura**: autovalores de distinto signo.
4. **foco estable**: autovalores complejos, con parte real negativa.
5. **foco inestable**: autovalores complejos, con parte real positiva.
6. **centro**: autovalores complejos, con parte real nula.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.
3. **ensilladura**: autovalores de distinto signo.
4. **foco estable**: autovalores complejos, con parte real negativa.
5. **foco inestable**: autovalores complejos, con parte real positiva.
6. **centro**: autovalores complejos, con parte real nula.

El *tipo de equilibrio* está completamente especificado por la ubicación de los autovalores de A.

Resumen del caso en que el origen es un PE aislado

Resumen

El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados a diferentes tipos de equilibrio:

1. **nodo estable**: autovalores reales negativos.
2. **nodo inestable**: autovalores reales positivos.
3. **ensilladura**: autovalores de distinto signo.
4. **foco estable**: autovalores complejos, con parte real negativa.
5. **foco inestable**: autovalores complejos, con parte real positiva.
6. **centro**: autovalores complejos, con parte real nula.

El *tipo de equilibrio* está completamente especificado por la ubicación de los autovalores de A.

El *comportamiento global* del sistema está *cualitativamente* determinado por el tipo de equilibrio.

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

- Dicho de otra forma: todo vector tal que $Av = 0$.

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

- Dicho de otra forma: todo vector tal que $Av = 0$.
- Se denota como $M = null(A)$ y es tal que $v = M\theta$, donde θ es un escalar o un vector dependiendo del tamaño de M.

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

- Dicho de otra forma: todo vector tal que $Av = 0$.
- Se denota como $M = null(A)$ y es tal que $v = M\theta$, donde θ es un escalar o un vector dependiendo del tamaño de M.
- Todo vector en el kernel de A, es decir todo $v = M\theta$, es un punto de equilibrio del sistema.

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

- Dicho de otra forma: todo vector tal que $Av = 0$.
- Se denota como $M = null(A)$ y es tal que $v = M\theta$, donde θ es un escalar o un vector dependiendo del tamaño de M.
- Todo vector en el kernel de A, es decir todo $v = M\theta$, es un punto de equilibrio del sistema.
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = null(A) = \begin{bmatrix} -0.97 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

Cualquier $v = M\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, es tal que $Av = 0$.

$$v = M * 3 = \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.73 \end{bmatrix}, \quad Av = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

- Dicho de otra forma: todo vector tal que $Av = 0$.
- Se denota como $M = null(A)$ y es tal que $v = M\theta$, donde θ es un escalar o un vector dependiendo del tamaño de M.
- Todo vector en el kernel de A, es decir todo $v = M\theta$, es un punto de equilibrio del sistema.
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = null(A) = \begin{bmatrix} -0.97 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

  Cualquier $v = M\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, es tal que $Av = 0$.

$$v = M * 3 = \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.73 \end{bmatrix}, \quad Av = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La dimensión del kernel puede ser uno o dos.

Uno o ambos autovalores nulos

En este caso A tiene un kernel o espacio nulo no trivial.

Definición

Kernel: *Un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por A: conjunto de vectores cuya imagen bajo A sea el vector nulo.*

- Dicho de otra forma: todo vector tal que $Av = 0$.
- Se denota como $M = null(A)$ y es tal que $v = M\theta$, donde θ es un escalar o un vector dependiendo del tamaño de M.
- Todo vector en el kernel de A, es decir todo $v = M\theta$, es un punto de equilibrio del sistema.
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = null(A) = \begin{bmatrix} -0.97 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

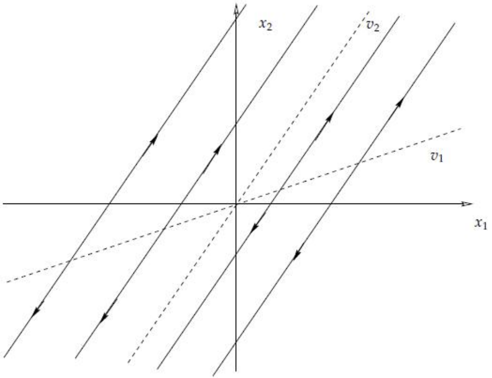
Cualquier $v = M\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, es tal que $Av = 0$.

$$v = M * 3 = \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.73 \end{bmatrix}, \quad Av = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La dimensión del kernel puede ser uno o dos.
- Si es dos, A es la matriz nula y todo punto en el espacio de estado es un punto de equilibrio.

Uno o ambos autovalores nulos

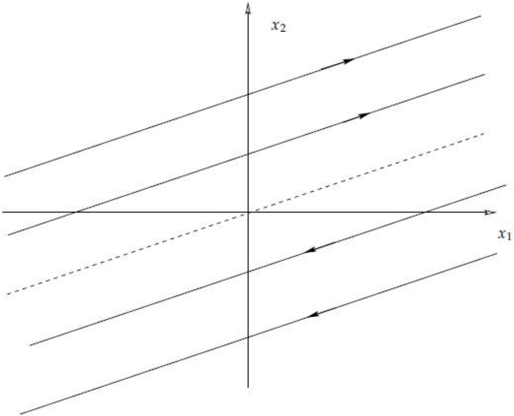
- Si la dimensión del kernel es uno, se mira la *multiplicidad* del cero como autovalor.
  - Si esta multiplicidad es uno, el autovector correspondiente (notar que hay otro autovector que corresponde a un autovalor $\neq 0$) define (genera) el conjunto o subespacio de equilibrio del sistema.



Todas las trayectorias convergen al subespacio de equilibrio cuando el autovalor no nulo es negativo, y divergen cuando es positivo (como en la figura).

Uno o ambos autovalores nulos

- Si la dimensión del kernel es uno, se mira la *multiplicidad* del cero como autovalor.
    - Si la multiplicidad es dos, el único autovector v genera el conjunto o subespacio de equilibrio del sistema.



Las trayectorias que comienzan fuera del subespacio de equilibrio se mueven paralelas a él.

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Desde el punto de vista del control, lo que nos interesa es garantizar que el PE donde queremos controlar el sistema, sea un PE asint. estable.

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Desde el punto de vista del control, lo que nos interesa es garantizar que el PE donde queremos controlar el sistema, sea un PE asint. estable.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos.

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Desde el punto de vista del control, lo que nos interesa es garantizar que el PE donde queremos controlar el sistema, sea un PE asint. estable.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos.

Como podemos garantizar el cumplimento de esta propiedad?

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Desde el punto de vista del control, lo que nos interesa es garantizar que el PE donde queremos controlar el sistema, sea un PE asint. estable.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos.

Como podemos garantizar el cumplimiento de esta propiedad?

Por lo general, se recurre a la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Desde el punto de vista del control, lo que nos interesa es garantizar que el PE donde queremos controlar el sistema, sea un PE asint. estable.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos.

Como podemos garantizar el cumplimento de esta propiedad?

Por lo general, se recurre a la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Esta teoría es una generalización matemática de una observación física: si un sistema físico disipa energía mecánica, entonces este sistema terminará estabilizándose en un punto de equilibrio.

Teoría de estabilidad de Lyapunov

Desde el punto de vista del control, lo que nos interesa es garantizar que el PE donde queremos controlar el sistema, sea un PE asint. estable.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos.

Como podemos garantizar el cumplimiento de esta propiedad?

Por lo general, se recurre a la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Esta teoría es una generalización matemática de una observación física: si un sistema físico disipa energía mecánica, entonces este sistema terminará estabilizándose en un punto de equilibrio.

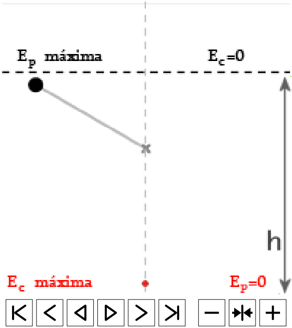
Vamos a estudiar el caso del péndulo.

Ejemplo: Péndulo

Estudiemos la energía total del péndulo.

- La energía total es la suma de Energía Potencial (E_p) y Energía Cinética (E_c).
- La E_p es máxima cuando $E_c = 0$.
- $E_p = 0$ cuando E_c es máxima.

$$
\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 \\
E_p &= mgl(1-\cos(\theta)) = mgl(1-\cos(x_1)) \\
E(x) &= E_c + E_p \\
&= \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1-\cos(x_1))
\end{aligned}
$$



- En el punto de equilibrio $E(0) = 0$.
- $E(x) \neq 0$ en cualquier otro punto de la trayectoria del sistema.

Ejemplo: Péndulo

En ausencia de fricción: $k = 0$

$$E(x) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos(x_1))$$

- Vamos a estudiar la variación de energía:

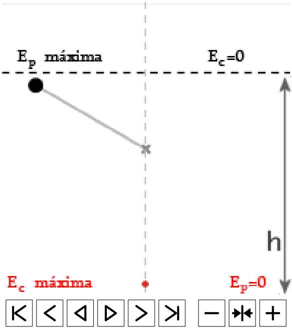
$$\dot{E}(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial E}{\partial x_i}\dot{x}_i = mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + ml^2x_2\dot{x}_2$$

- Teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales del sistema sin fricciones:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1)$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{E}(x) &= mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + ml^2x_2\dot{x}_2 \\ &= mgl\sin(x_1)x_2 - mgl\sin(x_1)x_2 = 0\end{aligned}$$



Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.
- El PE $x = 0$ es estable pero no podemos decir nada más que eso.

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.
- El PE $x = 0$ es estable pero no podemos decir nada más que eso.
- Si consideramos fricciones, con $k > 0$, *entonces*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.
- El PE $x = 0$ es estable pero no podemos decir nada más que eso.
- Si consideramos fricciones, con $k > 0$, *entonces*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

- Por lo tanto, la variación de energía a lo largo de las trayectorias del sistema será:

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) &= mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + ml^2 x_2\dot{x}_2 \\ &= mgl\sin(x_1)x_2 - mgl\sin(x_1)x_2 - kl^2x_2^2 = -kl^2x_2^2 \end{aligned}$$

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.
- El PE $x = 0$ es estable pero no podemos decir nada más que eso.
- Si consideramos fricciones, con $k > 0$, *entonces*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

- Por lo tanto, la variación de energía a lo largo de las trayectorias del sistema será:

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) &= mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + ml^2 x_2\dot{x}_2 \\ &= mgl\sin(x_1)x_2 - mgl\sin(x_1)x_2 - kl^2x_2^2 = -kl^2x_2^2 \end{aligned}$$

- Siendo $k > 0$, entonces $\dot{E}(x) < 0$.

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.
- El PE $x = 0$ es estable pero no podemos decir nada más que eso.
- Si consideramos fricciones, con $k > 0$, *entonces*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

- Por lo tanto, la variación de energía a lo largo de las trayectorias del sistema será:

$$\begin{aligned}\dot{E}(x) &= mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + ml^2 x_2\dot{x}_2 \\ &= mgl\sin(x_1)x_2 - mgl\sin(x_1)x_2 - kl^2x_2^2 = -kl^2x_2^2\end{aligned}$$

- Siendo $k > 0$, entonces $\dot{E}(x) < 0$.
- El sistema disipa energía a lo largo de su trayectoria, hasta converger a $E(0) = 0$.

Ejemplo: Péndulo

- $\dot{E}(x) = 0$ quiere decir que no hay variaciones de energía. La energía del sistema se mantiene constante si no hay fricciones.
- El sistema es conservativo, en el sentido que no hay disipación de energía.
- El PE $x = 0$ es estable pero no podemos decir nada más que eso.
- Si consideramos fricciones, con $k > 0$, *entonces*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

- Por lo tanto, la variación de energía a lo largo de las trayectorias del sistema será:

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) &= mgl\sin(x_1)\dot{x}_1 + ml^2 x_2\dot{x}_2 \\ &= mgl\sin(x_1)x_2 - mgl\sin(x_1)x_2 - kl^2x_2^2 = -kl^2x_2^2 \end{aligned}$$

- Siendo $k > 0$, entonces $\dot{E}(x) < 0$.
- El sistema disipa energía a lo largo de su trayectoria, hasta converger a $E(0) = 0$.
- Por lo tanto el PE $x = 0$ es asintoticamente estable.

Teorema de Lyapunov

Basándose en estas observaciones, en 1892 Lyapunov demostró que todas las funciones que, como la función energía, cumplen las hipótesis del siguiente teorema, pueden ser utilizadas para demostrar la estabilidad de un PE.

Teorema

Sea $x = 0$ un PE de $\dot{x} = f(x)$, y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \quad V(x) > 0, \quad \text{en } D - \{0\} \\ \dot{V}(x) &\leq 0, \quad \text{en } D \end{aligned}$$

entonces el PE $x = 0$ es estable. Más aun, si

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \text{en } D - \{0\}$$

entonces el PE $x = 0$ es asintoticamente estable.

La primera condición equivale a decir que $V(x)$ es *definida positiva*. La segunda condición equivale a decir que $\dot{V}(x)$ es *semi-definida negativa* (caso PE estable) o *definida negativa* (caso PE asint. estable).

Teorema de Lyapunov

Basándose en estas observaciones, en 1892 Lyapunov demostró que todas las funciones que, como la función energía, cumplen las hipótesis del siguiente teorema, pueden ser utilizadas para demostrar la estabilidad de un PE.

Teorema

Sea $x = 0$ un PE de $\dot{x} = f(x)$, y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen. Sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \quad V(x) > 0, \quad \text{en } D - \{0\} \\ \dot{V}(x) &\leq 0, \quad \text{en } D \end{aligned}$$

entonces el PE $x = 0$ es estable. Más aun, si

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \text{en } D - \{0\}$$

entonces el PE $x = 0$ es asintoticamente estable.

La primera condición equivale a decir que $V(x)$ es *definida positiva*. La segunda condición equivale a decir que $\dot{V}(x)$ es *semi-definida negativa* (caso PE estable) o *definida negativa* (caso PE asint. estable).

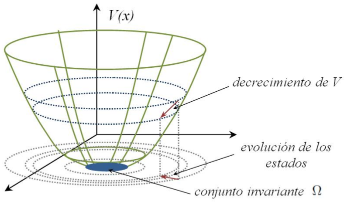
Si $\dot{V}(x) > 0$ el PE es inestable.

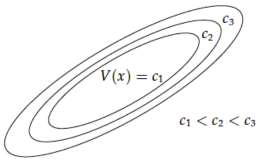
Función de Lyapunov

Una función que cumple con lo establecido por el teorema anterior se define *función de Lyapunov*.

Función de Lyapunov

Una función que cumple con lo establecido por el teorema anterior se define *función de Lyapunov*.

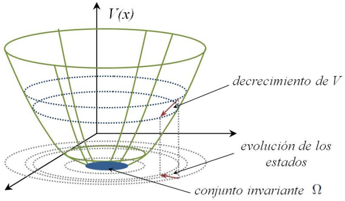




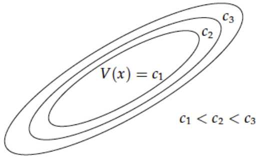
- La superficie $V(x) = c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel.

Función de Lyapunov

Una función que cumple con lo establecido por el teorema anterior se define *función de Lyapunov*.

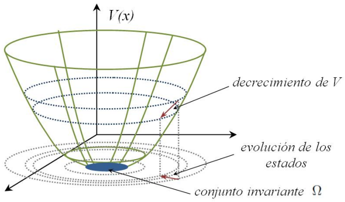


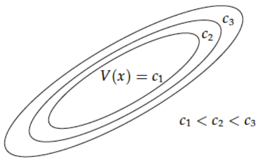
- La superficie $V(x) = c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él.



Función de Lyapunov

Una función que cumple con lo establecido por el teorema anterior se define *función de Lyapunov*.

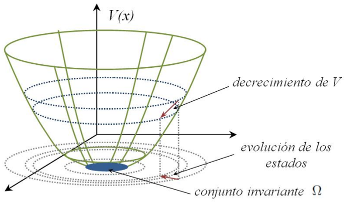


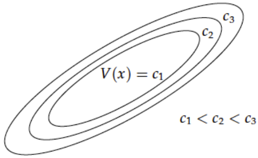


- La superficie $V(x) = c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él.
- Cuando $\dot{V}(x) < 0$ la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra interior con menor c.

Función de Lyapunov

Una función que cumple con lo establecido por el teorema anterior se define *función de Lyapunov*.

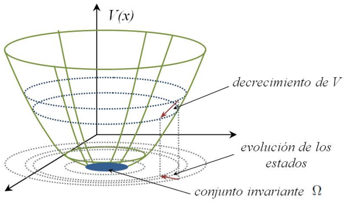


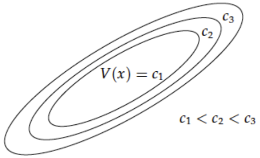


- La superficie $V(x) = c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él.
- Cuando $\dot{V}(x) < 0$ la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra interior con menor c.
- A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se achica hasta transformarse en en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \to \infty$.

Función de Lyapunov

Una función que cumple con lo establecido por el teorema anterior se define *función de Lyapunov*.





- La superficie $V(x) = c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel.
- $\dot{V}(x) \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se introduce en el conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él.
- Cuando $\dot{V}(x) < 0$ la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra interior con menor c.
- A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se achica hasta transformarse en en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \to \infty$.
- Ω_c se define *dominio de atracción* del PE: todo x en este conjunto tiende al PE para $t \to \infty$.

Ejemplo: Péndulo

- En el caso del péndulo, tomando la energía como función de Lyapunov tenemos

$$\dot{V}(x) = -kl^2 x_2^2$$

Ejemplo: Péndulo

- En el caso del péndulo, tomando la energía como función de Lyapunov tenemos

$$\dot{V}(x) = -kl^2 x_2^2$$

- Esto quiere decir que $\dot{V}(x)$ es sólo semi-definida negativa.

Ejemplo: Péndulo

- En el caso del péndulo, tomando la energía como función de Lyapunov tenemos

$$\dot{V}(x) = -kl^2x_2^2$$

- Esto quiere decir que $\dot{V}(x)$ es sólo semi-definida negativa.
- En realidad $\dot{V}(x)$ es siempre negativa salvo en el eje $x_2 = 0$, donde $\dot{V}(x) = 0$.

Ejemplo: Péndulo

- En el caso del péndulo, tomando la energía como función de Lyapunov tenemos

$$\dot{V}(x) \quad = \quad -kl^2x_2^2$$

- Esto quiere decir que $\dot{V}(x)$ es sólo semi-definida negativa.
- En realidad $\dot{V}(x)$ es siempre negativa salvo en el eje $x_2 = 0$, donde $\dot{V}(x) = 0$.
- Para que el sistema pueda mantener la condición $\dot{V}(x) = 0$, la trayectoria debe quedar confinada al eje $x_2 = 0$, que quiere decir que la velocidad del sistema tiene que ser nula.

Ejemplo: Péndulo

- En el caso del péndulo, tomando la energía como función de Lyapunov tenemos

$$\dot{V}(x) \quad = \quad -kl^2x_2^2$$

- Esto quiere decir que $\dot{V}(x)$ es sólo semi-definida negativa.
- En realidad $\dot{V}(x)$ es siempre negativa salvo en el eje $x_2 = 0$, donde $\dot{V}(x) = 0$.
- Para que el sistema pueda mantener la condición $\dot{V}(x) = 0$, la trayectoria debe quedar confinada al eje $x_2 = 0$, que quiere decir que la velocidad del sistema tiene que ser nula.
- Pero esto es imposible a no ser que $x_1 = 0$ (recuerden el retrato de fase).

Ejemplo: Péndulo

- En el caso del péndulo, tomando la energía como función de Lyapunov tenemos

$$\dot{V}(x) = -kl^2x_2^2$$

- Esto quiere decir que $\dot{V}(x)$ es sólo semi-definida negativa.
- En realidad $\dot{V}(x)$ es siempre negativa salvo en el eje $x_2 = 0$, donde $\dot{V}(x) = 0$.
- Para que el sistema pueda mantener la condición $\dot{V}(x) = 0$, la trayectoria debe quedar confinada al eje $x_2 = 0$, que quiere decir que la velocidad del sistema tiene que ser nula.
- Pero esto es imposible a no ser que $x_1 = 0$ (recuerden el retrato de fase).
- Por lo tanto en $-\pi < x_1 < \pi$ del eje $x_2 = 0$ el sistema puede mantener la condición $\dot{V}(x) = 0$ sólo en el PE $(0, 0)$.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.
- Pero como? Vimos que una forma es tomar la función energía. Pero si no somos capaces de encontrar esta función?

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.
- Pero como? Vimos que una forma es tomar la función energía. Pero si no somos capaces de encontrar esta función?
- Recurrimos a la linealización:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.
- Pero como? Vimos que una forma es tomar la función energía. Pero si no somos capaces de encontrar esta función?
- Recurrimos a la linealización:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

- Si la matriz Jacobiana A tiene autovalores con parte real negativa, entonces el PE será asintoticamente estable. A se define como matriz Hurwitz.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.
- Pero como? Vimos que una forma es tomar la función energía. Pero si no somos capaces de encontrar esta función?
- Recurrimos a la linealización:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

- Si la matriz Jacobiana A tiene autovalores con parte real negativa, entonces el PE será asintoticamente estable. A se define como matriz Hurwitz.
- Como estudiar la estabilidad del sistema linealizado con Lyapunov?

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.
- Pero como? Vimos que una forma es tomar la función energía. Pero si no somos capaces de encontrar esta función?
- Recurrimos a la linealización:
$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$
- Si la matriz Jacobiana A tiene autovalores con parte real negativa, entonces el PE será asintoticamente estable. A se define como matriz Hurwitz.
- Como estudiar la estabilidad del sistema linealizado con Lyapunov?
- Tomemos una función
$$V(x) = x'Px$$
Para que esta función sea definida positiva podemos tomar $P = P' > 0$ (simétrica y definida positiva).

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Necesitamos encontrar una función que sea definida positiva, y cuya deriva respeto a la trayectoria del sistema sea definida negativa.
- Pero como? Vimos que una forma es tomar la función energía. Pero si no somos capaces de encontrar esta función?
- Recurrimos a la linealización:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$$

- Si la matriz Jacobiana A tiene autovalores con parte real negativa, entonces el PE será asintoticamente estable. A se define como matriz Hurwitz.
- Como estudiar la estabilidad del sistema linealizado con Lyapunov?
- Tomemos una función

$$V(x) = x'Px$$

  Para que esta función sea definida positiva podemos tomar $P = P' > 0$ (simétrica y definida positiva).
- La derivada de $V(x)$ sobre la trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(x) = x'P\dot{x} + \dot{x}'Px = x'(PA + A'P)x = -x'Qx$$

  donde $(PA + A'P) = -Q$.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Si Q es definida positiva, entonces $V(x)$ será una función de Lyapunov, y podemos concluir que el PE es asintoticamente estable.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Si Q es definida positiva, entonces $V(x)$ será una función de Lyapunov, y podemos concluir que el PE es asintoticamente estable.
- En la realidad, seguimos los pasos al revés: primero elegimos Q definida positiva; después buscamos P solución de la *ecuación de Lyapunov*

$$(PA + A'P) = -Q$$

y finalmente tomamos $V(x) = x'Px$.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Si Q es definida positiva, entonces $V(x)$ será una función de Lyapunov, y podemos concluir que el PE es asintoticamente estable.
- En la realidad, seguimos los pasos al revés: primero elegimos Q definida positiva; después buscamos P solución de la *ecuación de Lyapunov*

$$(PA + A'P) = -Q$$

  y finalmente tomamos $V(x) = x'Px$.
- No hay diferencia entre mirar los autovalores de A o buscar una función de Lyapunov:

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Si Q es definida positiva, entonces $V(x)$ será una función de Lyapunov, y podemos concluir que el PE es asintoticamente estable.
- En la realidad, seguimos los pasos al revés: primero elegimos Q definida positiva; después buscamos P solución de la *ecuación de Lyapunov*

$$(PA + A'P) = -Q$$

  y finalmente tomamos $V(x) = x'Px$.
- No hay diferencia entre mirar los autovalores de A o buscar una función de Lyapunov:
  - Una matriz A es Hurwitz si dada un matriz Q simétrica y definida positiva, existe una matriz P simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Si Q es definida positiva, entonces $V(x)$ será una función de Lyapunov, y podemos concluir que el PE es asintoticamente estable.
- En la realidad, seguimos los pasos al revés: primero elegimos Q definida positiva; después buscamos P solución de la *ecuación de Lyapunov*

$$(PA + A'P) = -Q$$

  y finalmente tomamos $V(x) = x'Px$.
- No hay diferencia entre mirar los autovalores de A o buscar una función de Lyapunov:
  - Una matriz A es Hurwitz si dada un matriz Q simétrica y definida positiva, existe una matriz P simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov.
  - Si A es Hurwitz, entonces existe una única P solución de la ecuación de Lyapunov.

Como encontrar la función de Lyapunov???

- Si Q es definida positiva, entonces $V(x)$ será una función de Lyapunov, y podemos concluir que el PE es asintoticamente estable.
- En la realidad, seguimos los pasos al revés: primero elegimos Q definida positiva; después buscamos P solución de la *ecuación de Lyapunov*

$$(PA + A'P) = -Q$$

  y finalmente tomamos $V(x) = x'Px$.
- No hay diferencia entre mirar los autovalores de A o buscar una función de Lyapunov:
  - Una matriz A es Hurwitz si dada un matriz Q simétrica y definida positiva, existe una matriz P simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov.
  - Si A es Hurwitz, entonces existe una única P solución de la ecuación de Lyapunov.
  - Cuando estudiamos la estabilidad de un PE de un sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$ a través del estudio del sistema linealizado $\dot{x} = Ax$, se dice que estamos usando el *método indirecto de Lyapunov*.

Ejemplo: Péndulo

- El sistema no lineal es:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

Ejemplo: Péndulo

- El sistema no lineal es:
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$
- Linealizando en el PE $(0,0)$:
$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=0})}_{=1}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = 0$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

Ejemplo: Péndulo

- El sistema no lineal es:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

- Linealizando en el PE $(0,0)$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=0})}_{=1}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = 0$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

- Tomando para el ejemplo $l = 1$, $m = 1$ y $k = 1$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -9.81\delta x_1 - \delta x_2$$

- Los autovalores de la matriz Jacobiana A son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -0.5 \pm 3.09i$$

Siendo la parta real negativa, entonces el PE es asint. estable.

Ejemplo: Péndulo

- El sistema no lineal es:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2$$

- Linealizando en el PE $(0,0)$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=0})}_{=1}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = 0$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

- Tomando para el ejemplo $l = 1$, $m = 1$ y $k = 1$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -9.81\delta x_1 - \delta x_2$$

- Los autovalores de la matriz Jacobiana A son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.81 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -0.5 \pm 3.09i$$

Siendo la parta real negativa, entonces el PE es asint. estable.

- Tomando $Q = I_2$, la función de Lyapunov (usando la función *lyap(A,Q)* de Matlab) es:

$$V(x) = x'Px, \quad P = \begin{bmatrix} 0.602 & -0.5 \\ -0.5 & 5.405 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Péndulo

- Si linealizamos en el PE $(\pi, 0)$:

$$\dot{\delta x_1} = \delta x_2, \quad \dot{\delta x_2} = -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=\pi})}_{=-1}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = \pi$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

Ejemplo: Péndulo

- Si linealizamos en el PE $(\pi, 0)$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -\frac{g}{l} \underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=\pi})}_{=-1} \delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = \pi$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

- Tomando para el ejemplo $l = 1$, $m = 1$ y $k = 1$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = 9.81\delta x_1 - \delta x_2$$

- Los autovalores de la matriz Jacobiana A son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (2.6718, -3.6718)$$

Ejemplo: Péndulo

- Si linealizamos en el PE $(\pi, 0)$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=\pi})}_{=-1}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = \pi$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

- Tomando para el ejemplo $l = 1$, $m = 1$ y $k = 1$:

$$\dot{\delta x}_1 = \delta x_2, \quad \dot{\delta x}_2 = 9.81\delta x_1 - \delta x_2$$

- Los autovalores de la matriz Jacobiana A son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (2.6718, -3.6718)$$

- Siendo λ_1 positivo, entonces el PE es inestable.

Ejemplo: Péndulo

- Si linealizamos en el PE $(\pi, 0)$:

$$\dot{\delta x_1} = \delta x_2, \quad \dot{\delta x_2} = -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(\overbrace{\bar{x}_1}^{=\pi})}_{=-1}\delta x_1 - \frac{k}{m}\delta x_2$$

donde $\bar{x}_1 = \pi$, es el valor de x_1 en el punto de equilibrio.

- Tomando para el ejemplo $l = 1$, $m = 1$ y $k = 1$:

$$\dot{\delta x_1} = \delta x_2, \quad \dot{\delta x_2} = 9.81\delta x_1 - \delta x_2$$

- Los autovalores de la matriz Jacobiana A son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.81 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (2.6718, -3.6718)$$

- Siendo λ_1 positivo, entonces el PE es inestable.
- Siendo los autovalores reales pero con signo distinto, el PE es una ensilladura.