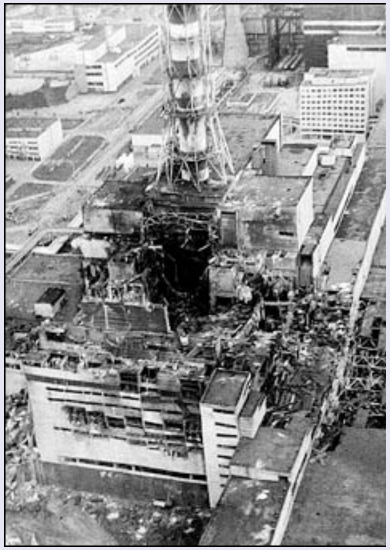
Tema 7: Estabilidad

- Introducción
- Criterios relativos a la descripción externa
- Criterio de Nyquist
- Márgenes de estabilidad
- Criterios relativos a la descripción interna

Motivación

- Estabilidad de todo tipo de sistemas:
  - Estructuras (puente de Tacoma)
  - Plantas de energía (Chernobyl)
  - Aeronáutica (aviones de combate)
  - Automóvil (ESP)

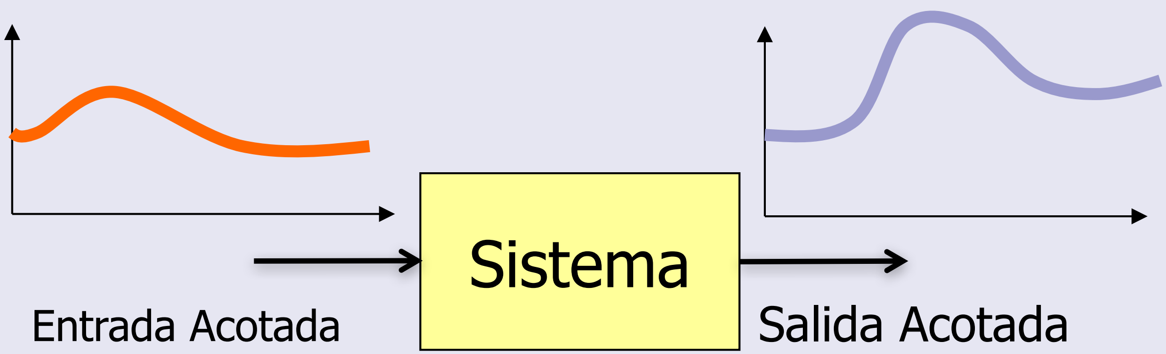


An unstable aircraft is normally difficult or impossible for a human pilot to keep under control. But the F-16's quadruple-redundant fly-by-wire computer automatically makes constant split-second corrections to keep the plane stable.

SOURCE: UNITED STATES AIR FORCE

Definición

- La estabilidad es una propiedad inherente del sistema. Independiente de las señales
- Un sistema es estable si, ante **cualquier** entrada acotada responde con una salida acotada
- Señal acotada si $|x(t)| < k < \infty$
- Estable si $|u(t)| < K_u \Rightarrow |y(t)| < K_y \quad \forall t$



- Se denomina estabilidad BIBO (*Bounded Input – Bounded Output*)

Determinación de la estabilidad

- Determinar la estabilidad sin tener que comprobar la condición para cualquier señal
- Objetivo: conocer la estabilidad en función de la descripción (interna o externa) del sistema

- Si el sistema está descrito mediante la **integral de convolución**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

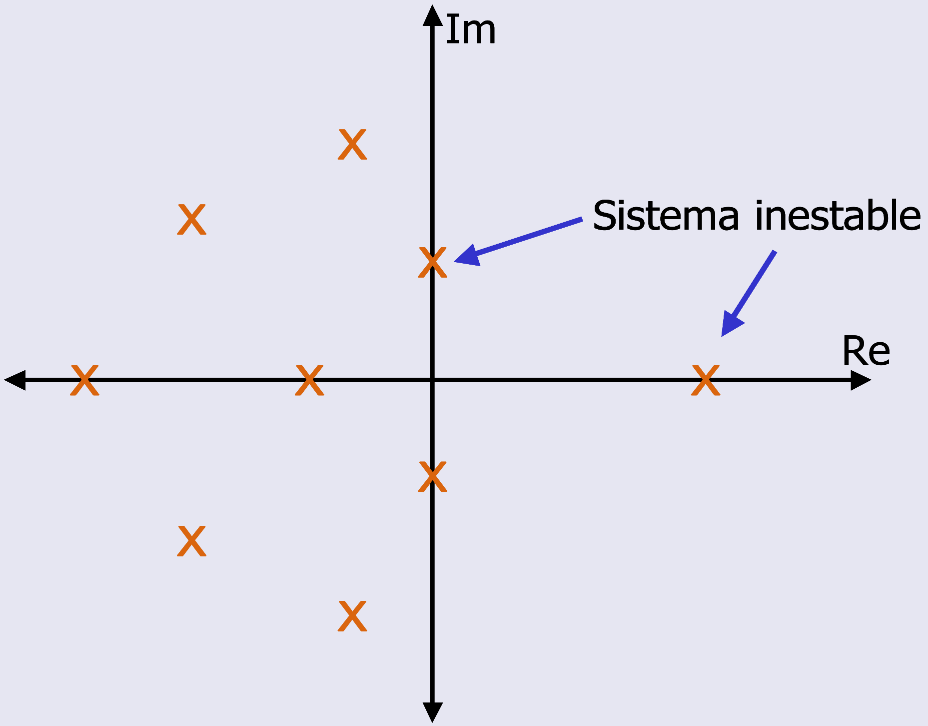
- Será estable si y sólo si existe un *k* finito tal que:

$$\int_{-\infty}^{t} \left|h(t-\tau)\right| d\tau < k < \infty$$

Criterio para función de transferencia

- Teorema: un sistema lineal y estacionario descrito por una función de transferencia *G(s)* es estable si y sólo si todos los polos están situados en el semiplano izquierdo abierto del plano *s.*

Todos los polos tienen que tener **parte real negativa**.



En Matlab: comando ***roots()***

Justificación

- Si $G(s)$ es una función racional, se puede decomponer en suma de términos de la forma

$$\frac{K}{(s+p_i)^l}$$

con $(-p_i)$ real o complejo

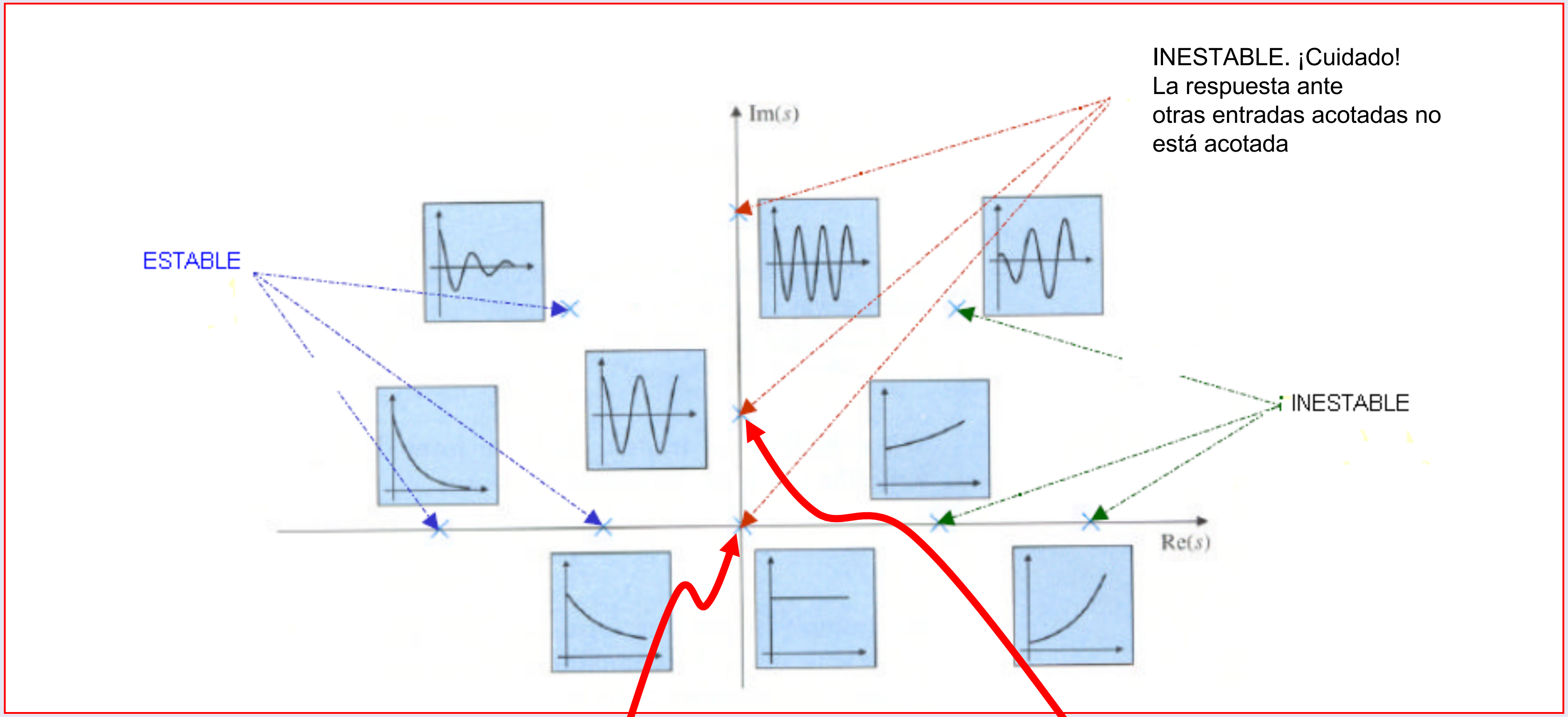
- Su respuesta impulsional $g(t)$ será la suma de exponenciales de la forma

$$t^{l-1}e^{-p_i t}$$

- La integral de convolución que proporciona $y(t)$ en función de la respuesta impulsional $g(t)$ estará acotada si y sólo si los $(-p_i)$ tienen parte real negativa. Esto es así porque el producto de $g(t)$ por cualquier entrada acotada lo estará cuando las exponenciales sean decrecientes.

Ejemplos

Respuesta ante un IMPULSO



No acotada ante *escalón*

No acotada ante *u(t)=sen t*

Criterio de Routh-Hurwitz I

- Para determinar la estabilidad no es necesario conocer el **valor** de las raíces de *d(s)*, sino sólo saber si están en el semiplano izquierdo
- Criterio de Routh-Hurwitz: permite determinar si las **partes reales de los polos son negativas**

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

- Un polinomio se dice **polinomio de Hurwitz** si todas sus raíces tienen parte real negativa. Determinar la estabilidad de *G(s)* equivale a determinar si *d(s)* es Hurwitz

Criterio de Routh-Hurwitz II

- El polinomio $d(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$ es Hurwitz si cumple:

  1.- Todos sus coeficientes son positivos

  y

  2.- Los elementos de la primera columna de la tabla de Routh son positivos

  La tabla de Routh se obtiene en función de los coeficientes $\boldsymbol{a_i}$ del polinomio (se considera mónico).

  Nótese que si no se cumple el punto 1 no es necesario crear la tabla de Routh.

Tabla de Routh

- Tiene (*n+1*) filas
- Las 2 primeras filas son los coeficientes a_i alternos

Coeficientes impares

Coeficientes pares

s^n	1	a_2	a_4	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
...	...	...	...	
s^0	z_1			

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

Siendo a_0 =1 y así para los c_i … z_i

Tabla de Routh

Deben ser estrictamente positivos (>0)

El número de cambios de signo es el número de raíces con parte real positiva

s^n	1	a_2	a_4	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
...	...	...	...	
s^0	z_1			

Ejemplo

Polinomio: $s^4+5s^3+3s^2+s+2$

- Todos los a_i positivos
- Tabla de Routh

s^4	1	3	2
s^3	5	1	
s^2	$\frac{3*5-1}{5}=\frac{14}{5}$	$\frac{5*2}{5}=2$	
s^1	$\frac{\frac{14}{5}-10}{\frac{14}{5}}=\frac{-36}{14}$		
s^0	2		

1 elemento negativo: **Inestable**

Además hay 2 polos inestables

$$s=-1, \quad s=-4.33$$

$$s=0.168\pm 0.657j$$

Ejemplo

- $d(s)=s^4+0.5s^3+1.5s^2+2.5s+5$
- Todos los a_i positivos
- Tabla de Routh:

Se podría parar aquí

s^4	1	1.5	5
s^3	0.5	2.5	
s^2	$\frac{1.5*5-2.5}{0.5}=-3.5$	$\frac{0.5*5}{0.5}=5$	
s^1	$\frac{-3.5*2.5-0.5*5}{-3.5}=3.21$		
s^0	5		

- Además, el número de cambios de signo coincide con el número de raíces en el **semiplano derecho abierto** (sin contar el eje imaginario), **SDA** . Esto es útil para el criterio de Nyquist
- 2 cambios de signo:

$$s=-1.0055\pm 0.93311j$$
$$s=0.7555\pm 1.444j$$

Ejemplo

- Muy útil cuando uno de los coeficientes es un parámetro

s^3+5s^2+6s+k:

- Condición: $k>0$
- Tabla de Routh:

s^3	1	6
s^2	5	k
s^1	(30-k)/5	
s^0	k	

Condición

$0<k<30$

Casos singulares (aparición de ceros)

- Cuando hay un elemento nulo en la primera columna no se puede seguir
- Aunque ya se sabe que es **inestable**, puede ser útil para determinar el número de polos inestables
- Ejemplo: $s^4+s^3+2s^2+2s+3$

Es un 0

Se sustituye el 0 por ε y se continúa

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	$0 \to \varepsilon$	3	
s^1	$\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}=\frac{-3}{\varepsilon}$		
s^0	3		

Es negativo

Al final hay 2 cambios de signo: tiene 2 raíces inestables:

$$s=-0.9057\pm 0.902j$$

$$s=0.457\pm 1.29j$$

Casos singulares

- Puede ocurrir que **todos los elementos de una fila sean nulos** (ya se sabe que es inestable). Esto indica que el polinomio tiene un **factor par**.
- Se usa la ecuación subsidiaria. Se sustituyen los coeficientes que son 0 por los coeficientes de la derivada de la ecuación subsidiaria de la fila anterior

- $d(s)=s^4+3s^3+3s^2+3s+2$

Fila con todos 0, no se puede seguir

Ecuación subsidiaria (s^2): $2s^2+2$.
Su derivada es: $4s$
La nueva fila de s^1 es [4 0]

s^4	1	3	2
s^3	3	3	
s^2	$\frac{9-3}{3}=2$	2	
s^1	$\frac{6-6}{3}=0 \rightarrow 4$	0	
s^0	2		

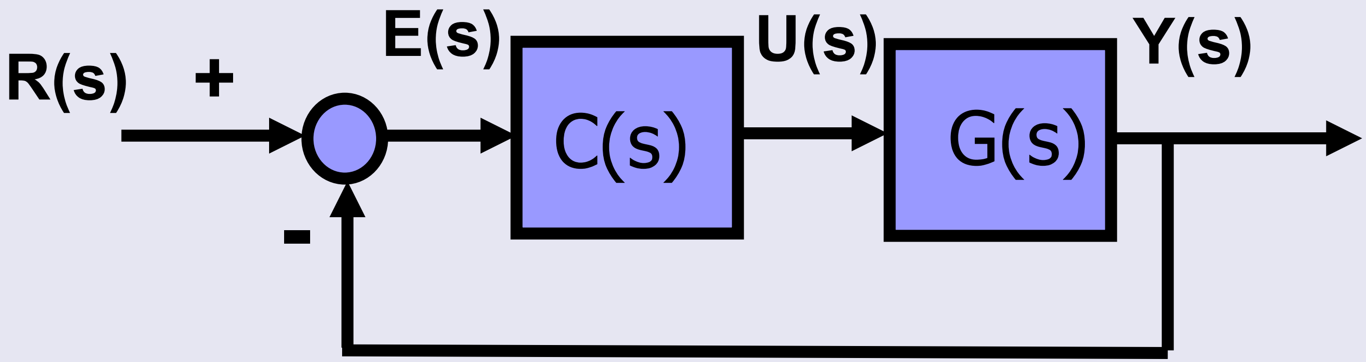
No hay cambios de signo, por lo que no hay ninguna raíz en el **SDA**. Nótese que hay 2 raíces en el **eje imaginario,** correspondientes al factor par s^2+1 (ec. subsidiaria).

Criterio de Nyquist

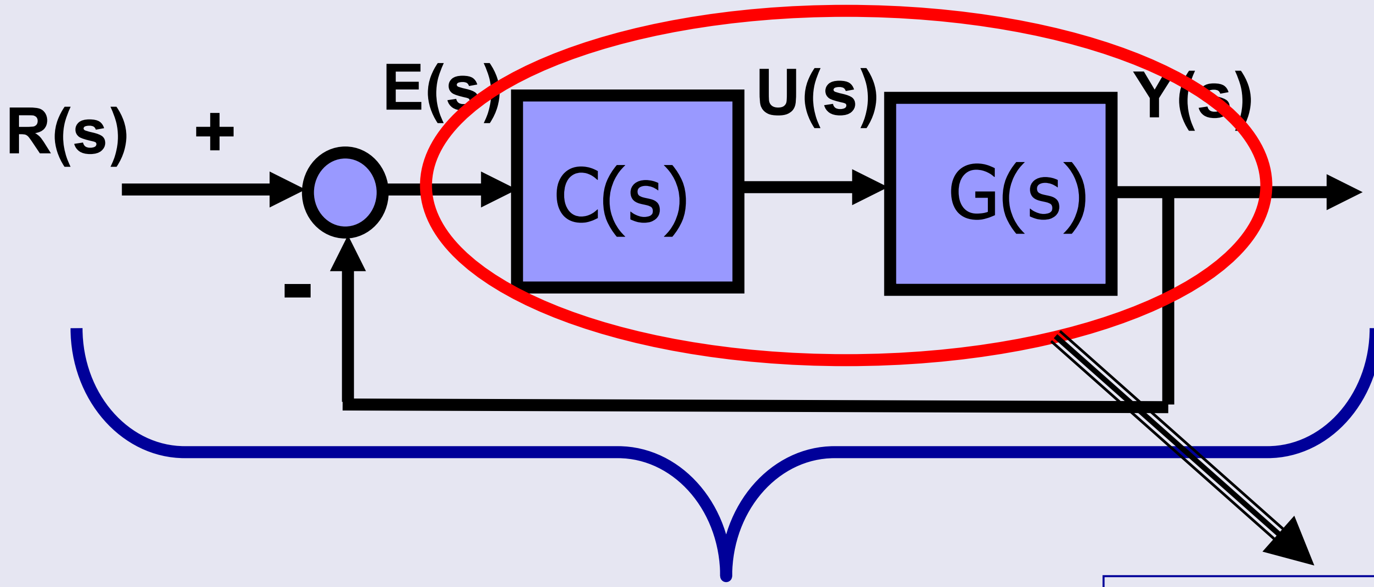
- Es un criterio gráfico que permite determinar la estabilidad de sistemas **realimentados**
- Proporciona la estabilidad del **lazo cerrado** en función de la del lazo abierto
- Es intuitivo y permite determinar los márgenes de estabilidad
- Basado en el modelo de *G(s)* o en identificación frecuencial experimental

Realimentación

- La entrada al sistema U(s) es función de la diferencia entre la salida Y(s) y la referencia R(s) que se quiera seguir
- El caso más simple es una ganancia: U(s) = K E(s)
- Pero se puede incluir cualquier bloque ***C(s),*** que hace de controlador



Lazo abierto y lazo cerrado



Lazo cerrado

Lazo abierto

Relación entre E(s) e Y(s) cuando no existe realimentación: C(s)G(s)

Función de Transferencia

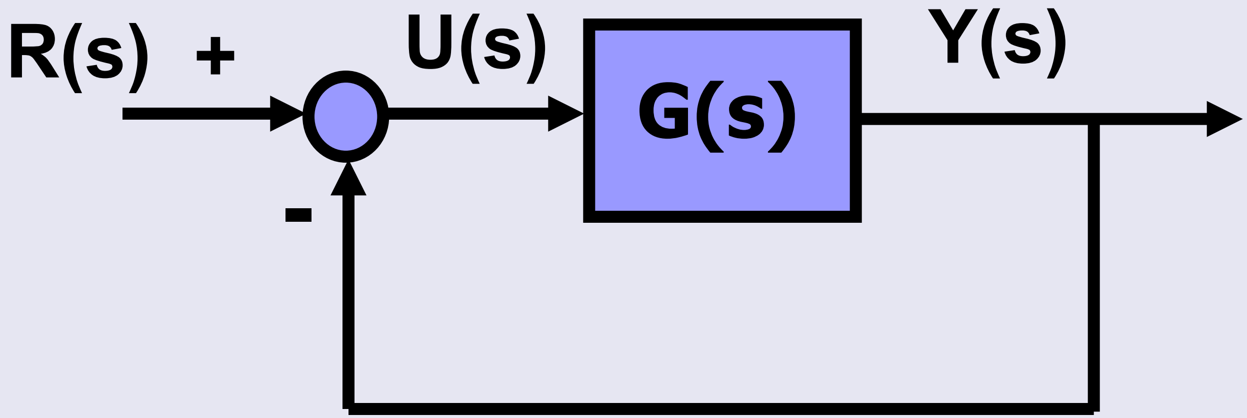
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Uso del criterio de Nyquist

- Este criterio proporciona la estabilidad del **lazo cerrado**
- Para ello hay que conocer el lazo abierto (a partir de ahora se considerará como un solo bloque **G(s)** que, en su caso, será el producto de todos los bloques que haya entre el error y la salida)
- Nótese que el criterio de Routh-Hurwitz sirve en ambos casos, dependiendo de cuál sea el polinomio ***d(s)*** que se analice (denominador del L.A. o del L.C.)

Criterio de Nyquist

Consideramos por tanto la siguiente situación



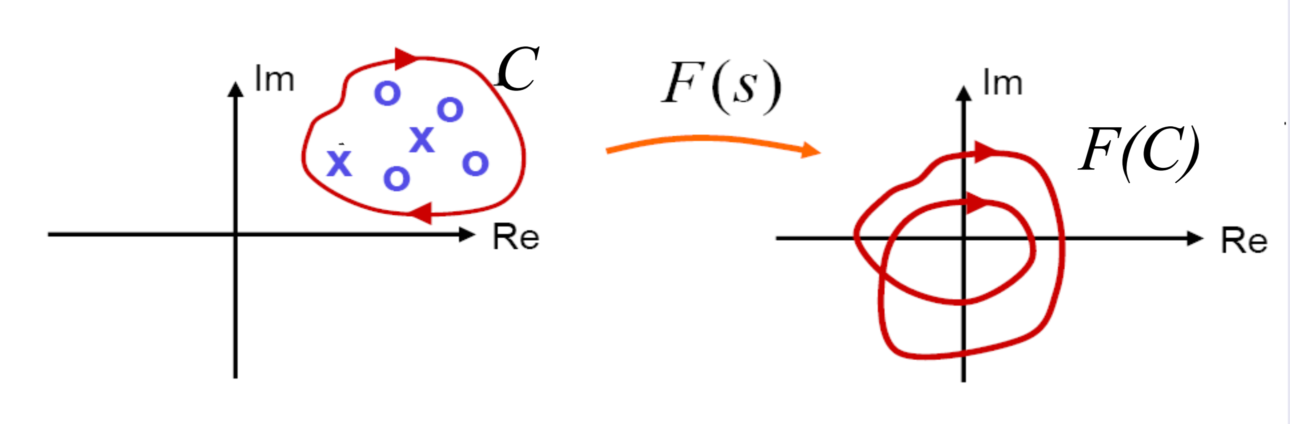
La estabilidad se puede ver afectada por la realimentación

Estabilidad en L.A. no implica estabilidad del L.C. (y viceversa)

Este criterio permite analizar el efecto de la realimentación sobre la estabilidad

Derivación del criterio

- Basado en el Teorema de Cauchy.
- Sea una función racional ***F(s)*** y una curva cerrada ***C*** en el plano ***s***. La curva C puede rodear a ceros (o) y polos (x) de F(s), pero no puede pasar por ningún cero ni polo.
- La curva C se recorre en un determinado sentido (por ejemplo, horario)
- ***F(C)*** es la curva imagen de C mediante la transformación F(s). También tiene un sentido



Derivación del criterio

Teorema de Cauchy:

"El número de veces que la curva *F(C)* rodea al origen (en el sentido elegido) es igual a la diferencia entre el número de ceros y el de polos de *F(s)* encerrados por la curva *C*."

Número de vueltas de F(C)

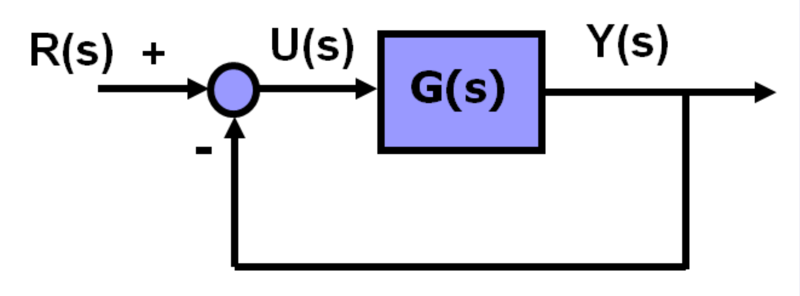
N = Z - P

Número de ceros de F(s) dentro de C

Número de polos de F(s) dentro de C

Relación del T. de Cauchy con la estabilidad

- Nyquist relacionó el T. de Cauchy con la estabilidad del lazo cerrado

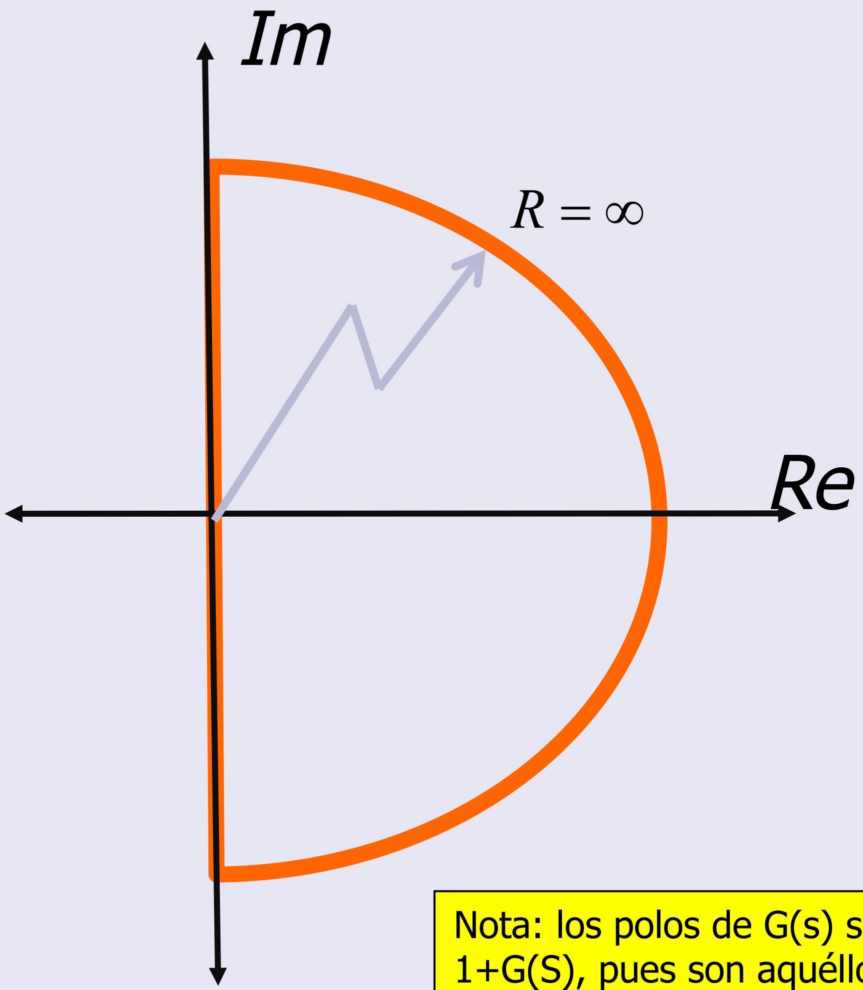


$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

- Los polos del L.C. son las raíces del polinomio ***1+G(s)***
- La estabilidad del L.C. se garantiza si no hay polos de ***T(s)***, es decir, ceros de ***1+G(s)*** en el semiplano derecho cerrado.

- Como función ***F(s)*** se toma ***1+G(s)***
- Como curva de interés ***C*** se toma la que rodea al semiplano derecho cerrado

Contorno de Nyquist



Z: Número de ceros de F(s) dentro de C = Número de *polos inestables del L.C.*

P: Número de polos de F(s) dentro de C = Número de *polos inestables del L.A.*

N: Número de vueltas que da 1+G(s) al origen = Nº vueltas de G(s) al **-1**

Nota: los polos de G(s) son iguales que los polos de 1+G(S), pues son aquéllos valores para los que la función se hace infinita

Criterio de Nyquist

- Según el T. de Cauchy: ***N = Z – P***
- El L.C. será estable si ***Z = 0,*** es decir, si

  P = -N, por tanto:

  "El sistema realimentado es estable si y sólo si G(C) rodea al punto crítico s = -1 un número de veces igual al número de polos inestables de G(s), cambiado de signo"

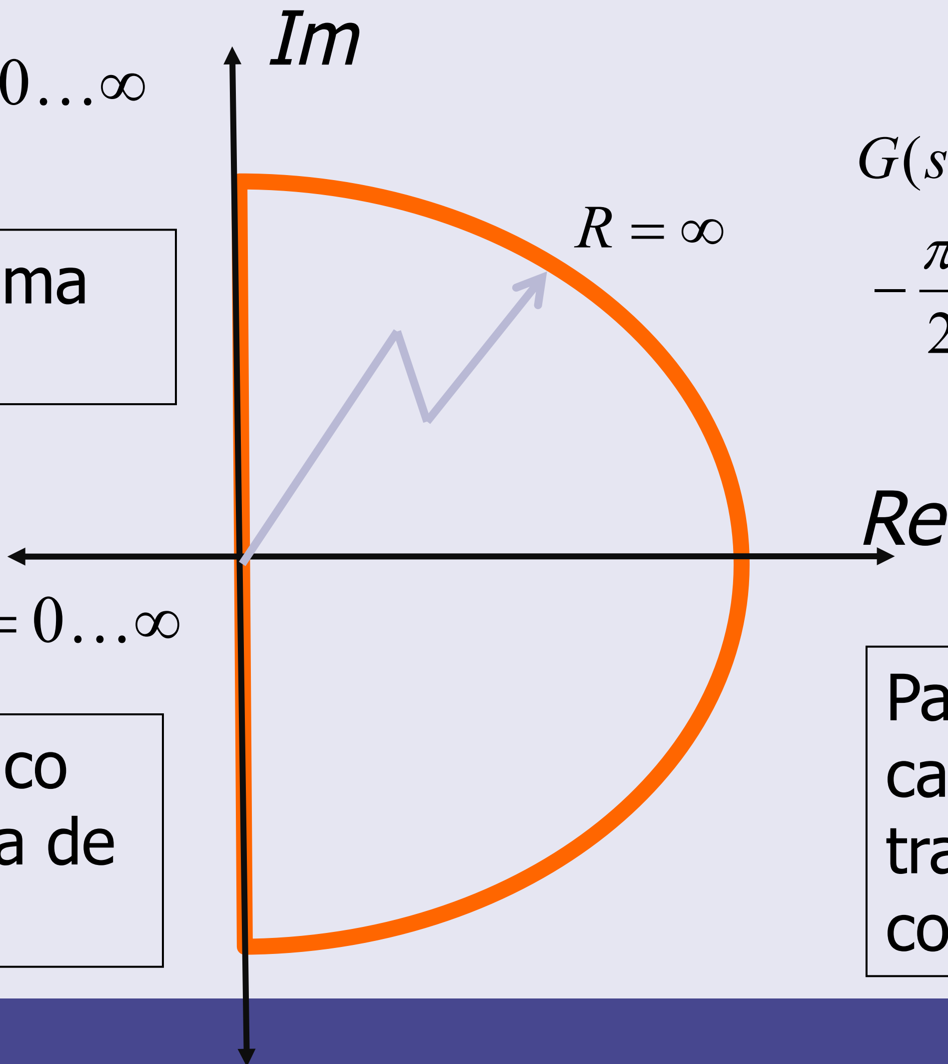
- Para analizar la estabilidad del L.C. es necesario por tanto:
  - Conocer la estabilidad del L.A. (valor de P)
  - Dibujar la transformada del contorno de Nyquist G(C)

Transformada del contorno de Nyquist

$G(j\omega) \quad \omega = 0 \ldots \infty$

$\Downarrow$

Es el diagrama de Nyquist



$G(s) \quad s = Re^{\theta j}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \qquad R \to \infty$

$\Downarrow$

Para sistemas causales, este tramo se convierte en el 0

$G(-j\omega) \quad \omega = 0 \ldots \infty$

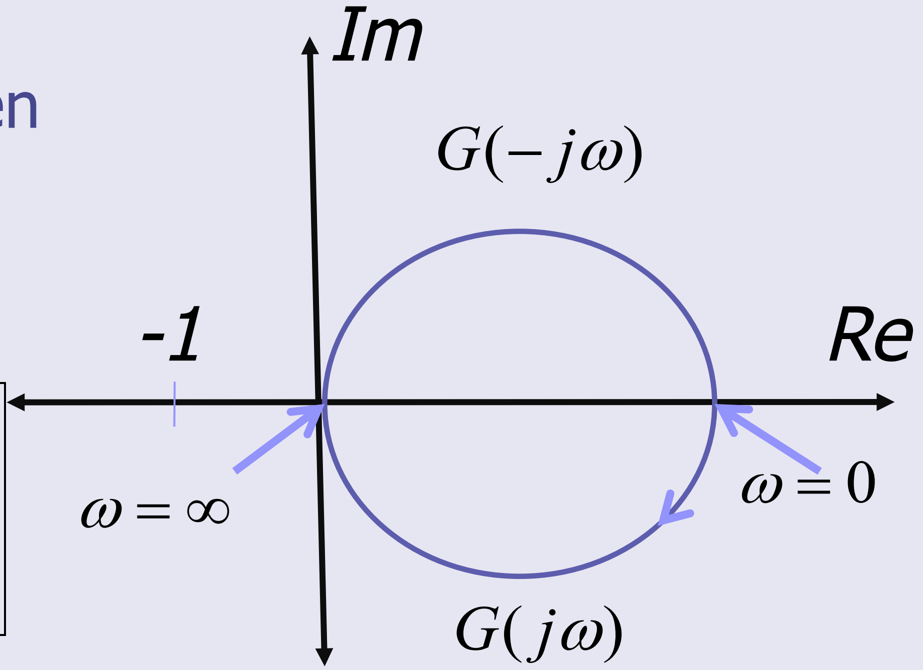
$\Downarrow$

Es el simétrico del diagrama de Nyquist

Uso del criterio de Nyquist

- Basta por tanto dibujar G(jw) y G(-jw) y ver el número de vueltas (**N**) que da al punto s=-1.
- Para que el L.C. sea estable, debe cumplirse que N sea igual a **–P**, siendo **P** el número de polos inestables de L.A.
- Ejemplo: sistema de 1º orden

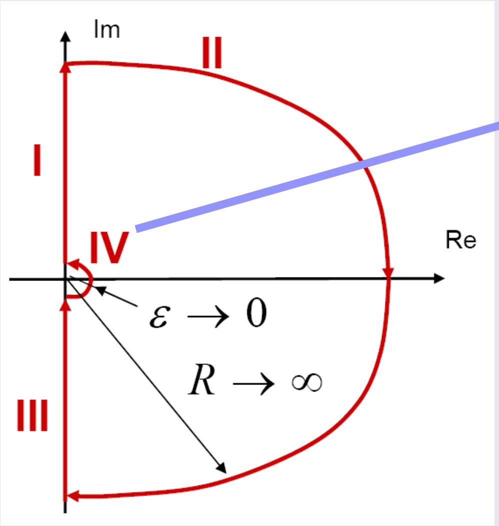
$$G(s) = \frac{K}{1+\tau s}$$



Se observa que N=0. Como P=0 el sistema en L.C. es **estable** (para K>0)

Ejemplo: sistema con integrador

- El T. de Cauchy se cumple siempre que no haya polos en el contorno C. En ese caso, el contorno debe modificarse ligeramente para no contener al polo.
- Si el sistema tiene polos en s=0:



$$s = R e^{j\theta} \qquad \theta : -\pi/2 \to 0 \to \pi/2$$
$$\varepsilon \to 0$$

Hay que calcular la transformada del tramo IV, que va a tomar valor infinito

Ejemplo con integrador

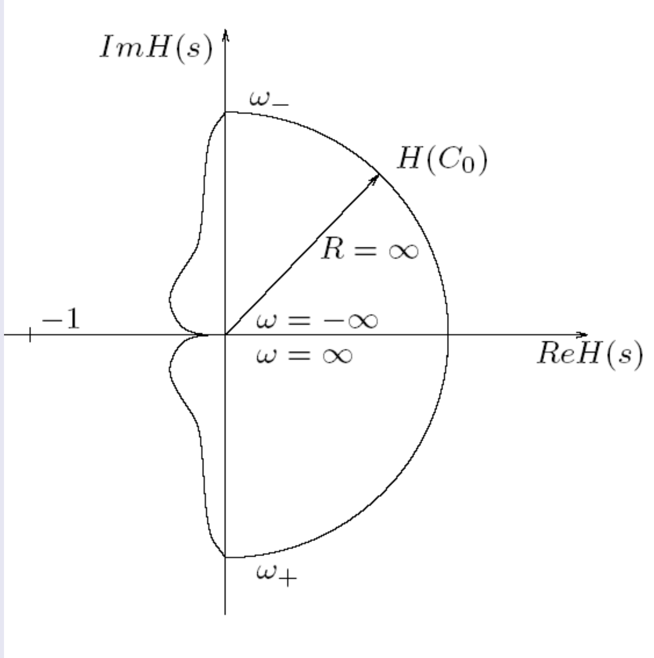
$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)}$$

- La transformada del "rodeo" al polo es:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G(s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon e^{\theta j}(1+\epsilon e^{\theta j})} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon e^{\theta j}}$$

- Que para los distintos valores de θ:

$$\begin{aligned} \theta=-\pi/2: &\quad G(j\omega) \to \pi/2 \\ \theta=0: &\quad G(j\omega) \to 0 \\ \theta=\pi/2: &\quad G(j\omega) \to -\pi/2 \end{aligned}$$



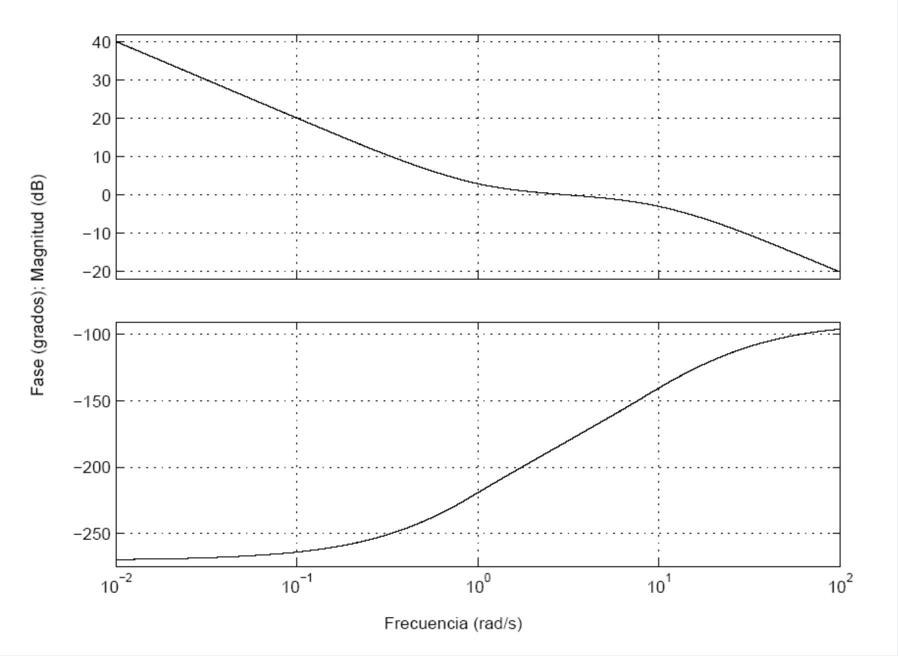
- Por tanto la vuelta infinita se da por la derecha
- Siempre se va a cumplir que el arco infinito se recorre en sentido horario.

- Por tanto N=0. Como P=0, el L.C. es **estable**

Ejemplo con polo inestable

- Para el sistema:
- La G(jw) se dibuja a partir del Bode

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(\frac{s}{10} - 1)}$$



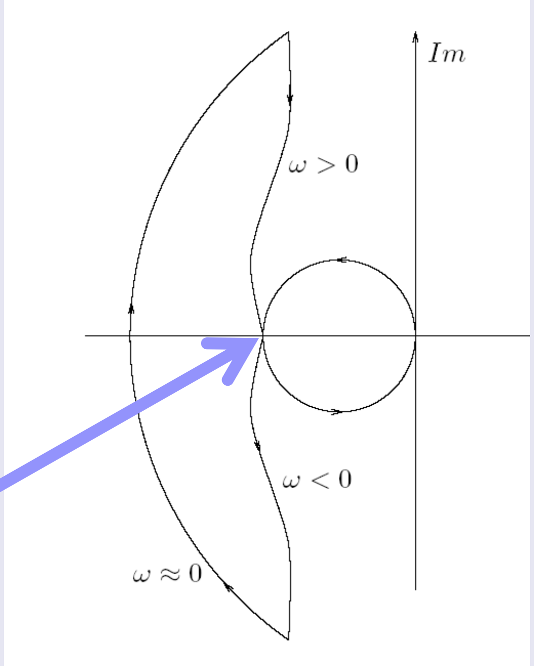
Se observa que la amplitud se hace infinita para frecuencias bajas.

También se observa que corta al eje real (fase=-180º)

Ejemplo (continuación)

- Corte con el eje real:

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{j\omega(\frac{j\omega}{10}-1)} = \frac{K}{\frac{\omega^4}{100}+\omega^2}\left(\frac{-11\omega^2}{10} + (\omega - \frac{\omega^3}{10})j\right)$$



- La parte imaginaria se anula cuando este término es 0:

$$\omega = 0 \text{ y en } \omega = \sqrt{10}.$$

- Para esa frecuencia: $G(j\sqrt{10}) = -K$

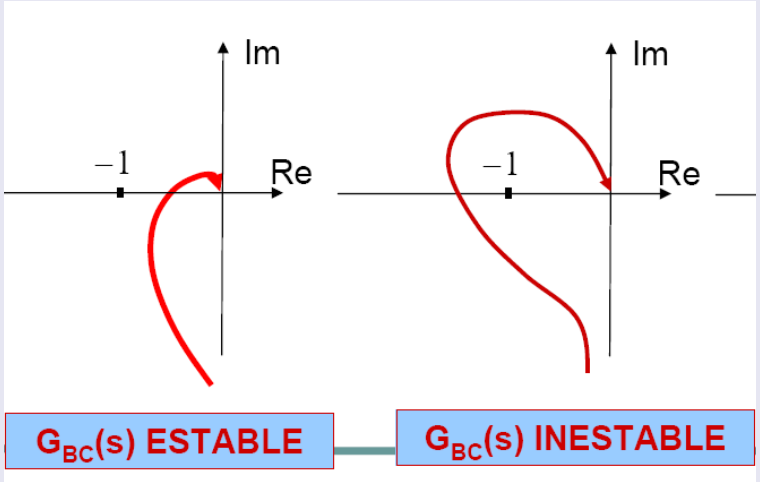
- P=1. Se observa que:
  - Si K>1: N=-1 y por tanto L.C. **Estable**
  - Si K<1: N=1 y por tanto L.C. **Inestable**

Nota: se puede comprobar que el rodeo infinito siempre sale en sentido horario

Criterio reducido

- También llamada regla práctica de Nyquist
- Para cierto tipo de sistemas no es necesario dibujar la transformada de todo el contorno. Basta el diagrama polar (G(jw))

"Para sistemas estables (y para los estables en serie con un integrador) y de fase mínima, la estabilidad del L.C. está garantizada si, recorriendo el diagrama polar en sentido de las frecuencias crecientes, el punto **-1** queda a la izquierda"

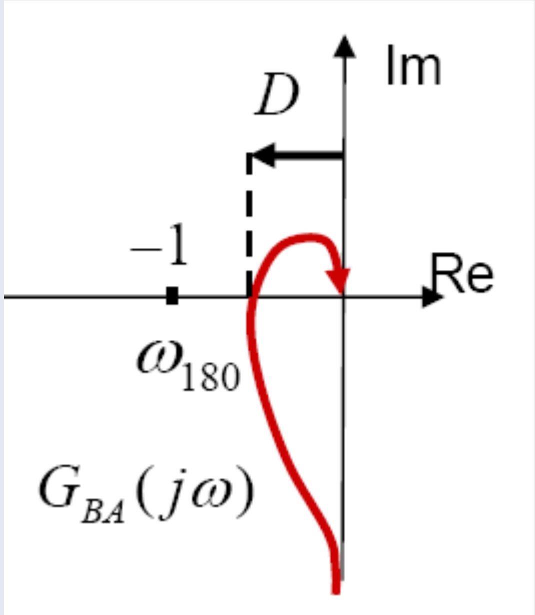


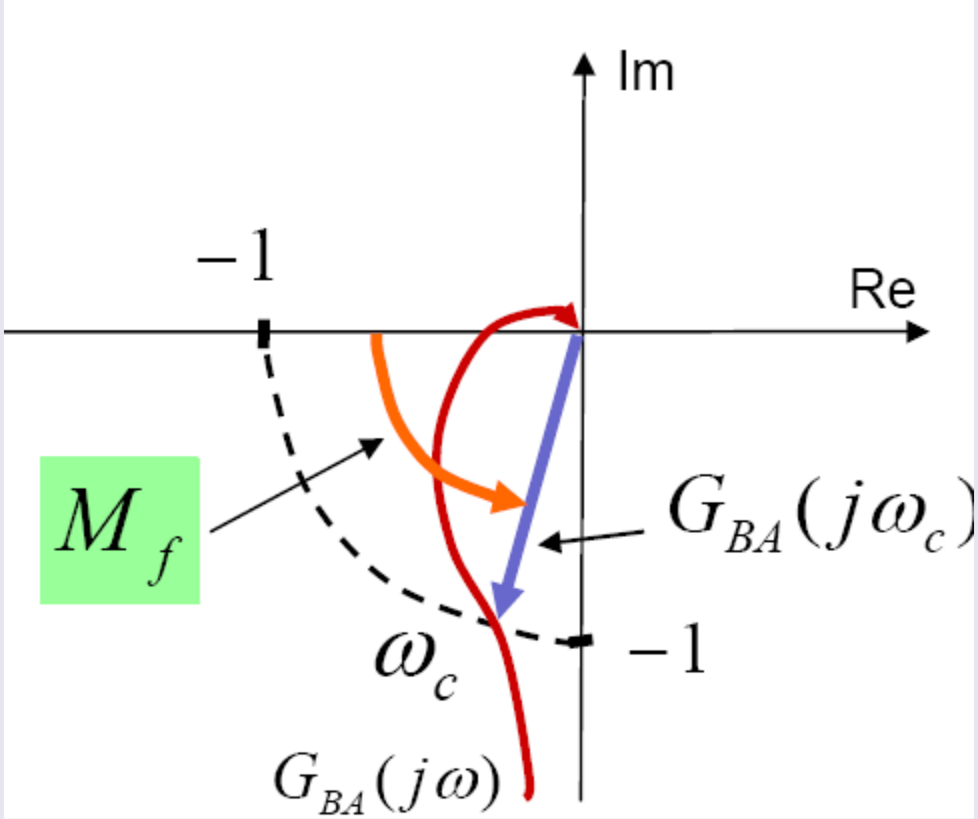
Márgenes de estabilidad

- Para los sistemas a los que se puede aplicar el criterio reducido, se puede ver de forma gráfica lo "cerca" que está el sistema de la estabilidad, midiendo la distancia de G(jw) al punto -1.
- Útil por las incertidumbres
- Se pueden definir los siguientes márgenes:
  - **Margen de ganancia**: la magnitud que le falta a la amplitud de G(jw) cuando su fase es -180º para llegar al punto -1 expresada en dB
  - **Margen de fase**: la fase que le falta a G(jw) para llegar a -180º cuando la magnitud es 1

Márgenes de estabilidad

- La estabilidad queda asegurada cuando estos 2 valores son positivos

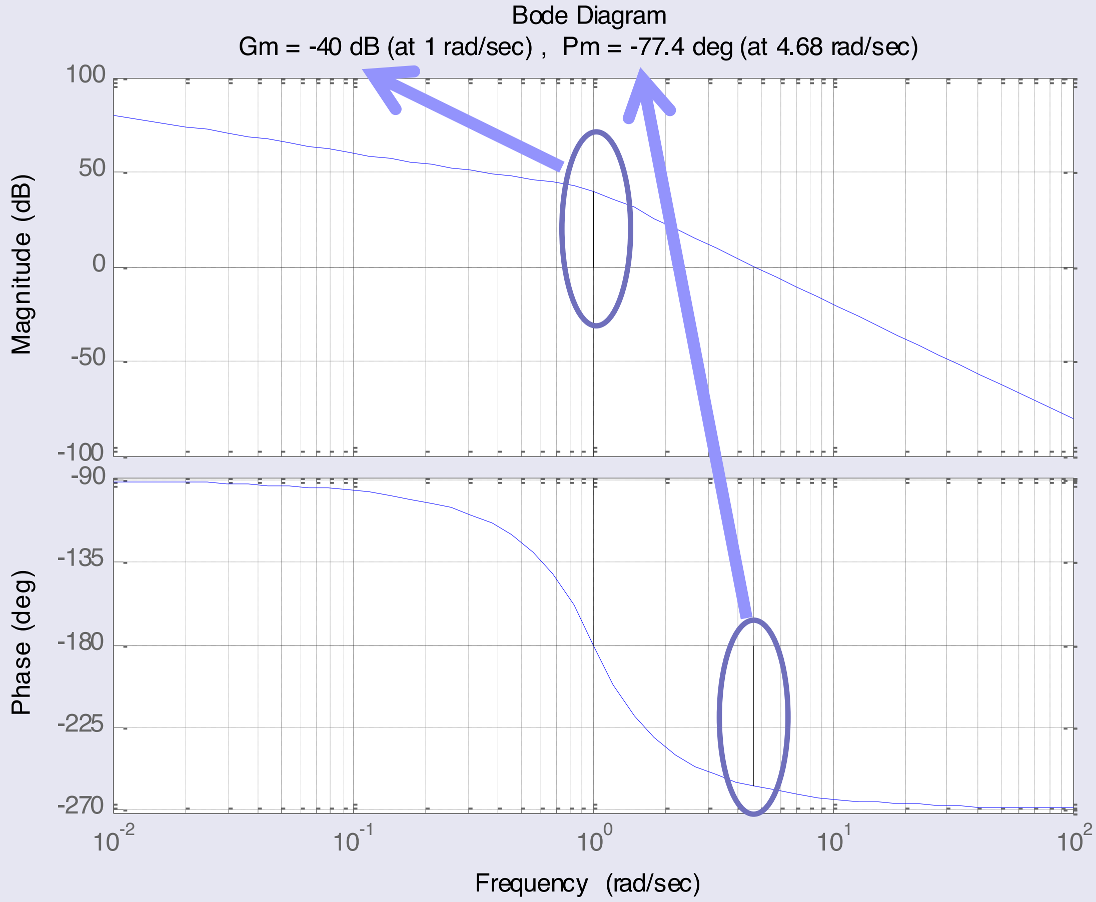




$$M_g = 20\log\left(\frac{1}{D}\right)$$

Márgenes de estabilidad

- Se pueden leer directamente del diagrama de Bode



Resumen

- Interés del estudio de la estabilidad en Ingeniería
- La estabilidad equivale a la situación de los polos en el plano complejo
- Criterio de Routh (analítico) para determinar la situación de los polos
- Criterio de Nyquist (gráfico) para determinar la estabilidad del **lazo cerrado**