



Tema 9: El Lugar de las Raíces

Parte II

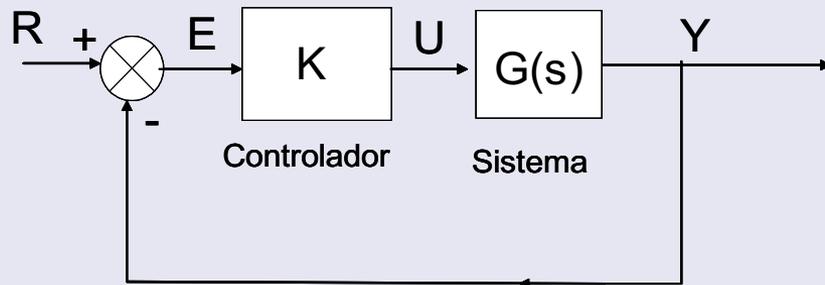
Control Automático

Introducción al Lugar de las raíces

- **Introducción al lugar de las raíces.**
 - El problema canónico
 - Ejemplos
 - Caracterización de las raíces: Criterios del módulo y del argumento
- Trazado del LR para $K > 0$
- Diseño de la ganancia del controlador
- Mejora del comportamiento en lazo cerrado:
 - Respuesta transitoria
 - Respuesta en régimen permanente
 - Diseño de controladores
- Extensiones:
 - Trazado del LR para $K < 0$
 - El LR generalizado

El problema canónico

- Objetivo: análisis del efecto de un parámetro en los polos del sistema en lazo cerrado (Evans, 1948)



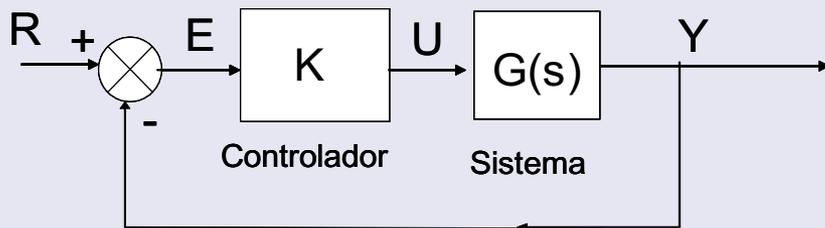
$$G_{bc}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

¿Cómo varían los polos al variar K ?

El problema canónico

■ Utilidad

- Análisis: Cómo varía el comportamiento con el parámetro
- Síntesis: Cómo elegir K para que se comporte conforme a unas especificaciones



$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

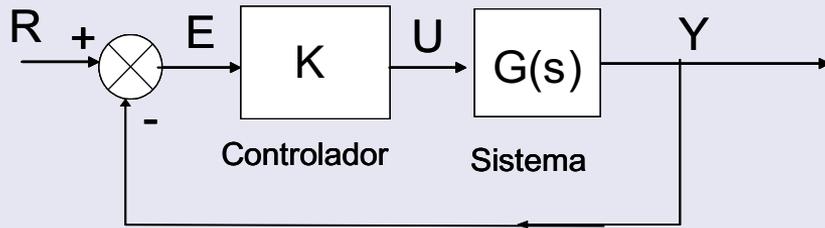
$$G_{bc}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{Kn(s)}{d(s)+Kn(s)}$$

$$d_{bc}(s) = d(s) + Kn(s) = 0$$

Polos: $s_i^*(K)$

- Analíticamente: imposible para orden alto
- Gráficamente: Curva parametrizada en K

Ejemplo



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$G_{bc}(s) = \frac{K}{s(s+2)+K}$$

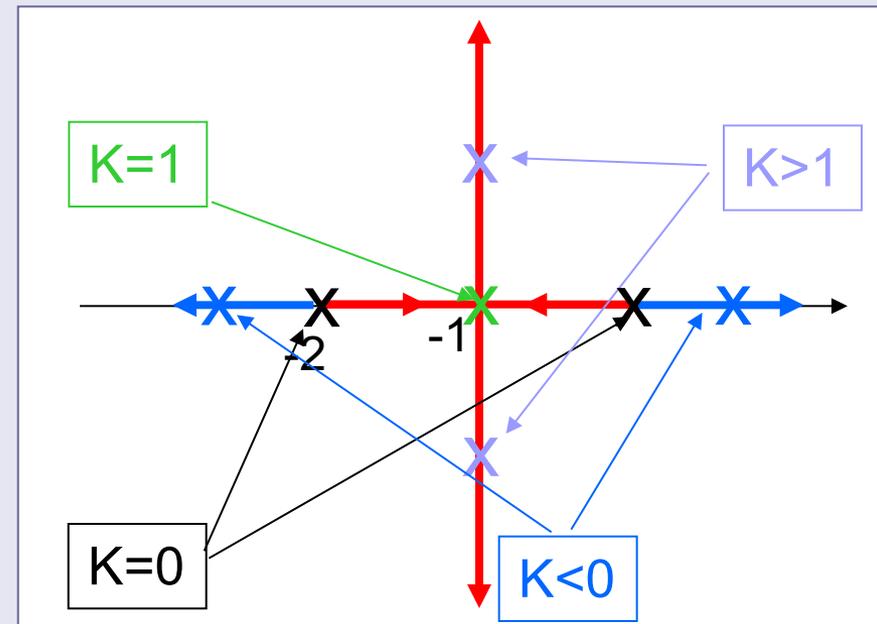
Los polos del sistema realimentado son:

$$d_{bc}(s) = s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{cases} s_1^*(K) = -1 + \sqrt{1-K} \\ s_2^*(K) = -1 - \sqrt{1-K} \end{cases}$$

Lugar de las Raíces

Curvas $s_1^*(K)$ y $s_2^*(K)$ (Ramaz)



El problema canónico

¿ Y si $G(s) = \frac{1}{s^6 + s^5 + 2s^4 - s^3 + s^2 + 2s + 1}$?

- Imposible calcular los polos en función de K de forma analítica
- Trazado gráfico (aproximado)

Construcción del Lugar de las Raíces

(Evans, 1948)

Caracterización de las raíces

$$d_{bc}(s) = d(s) + Kn(s) = 0 \Rightarrow \frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}$$

- Criterio del argumento

$$s_0 \in LR \text{ si } \angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = \angle \frac{-1}{K} = \begin{cases} \pi & \text{si } K > 0 \\ 0 & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

- Criterio del módulo

s_0 es polo para un valor de K tal que $\left| \frac{n(s_0)}{d(s_0)} \right| = \frac{1}{|K|}$

Caracterización de las raíces

Se asume que $G(s)$ tiene la forma

$$G(s) = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{(s+c_1)(s+c_2)\dots(s+c_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \quad m \leq n$$

(polinomios mónicos)

Ejemplo

$$G(s) = \frac{3s+2}{s^2+4s+5} = 3 \frac{s+2/3}{s^2+4s+5} = 3G'(s)$$

$$G_{bc}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{3KG'(s)}{1+3KG'(s)}$$

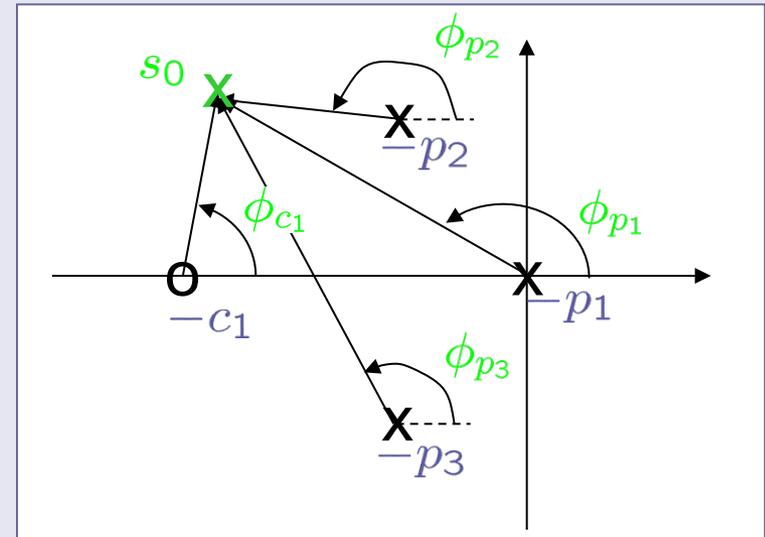
definiendo $K' = 3K$ $G_{bc}(s) = \frac{K'G'(s)}{1+K'G'(s)}$

Caracterización de las raíces

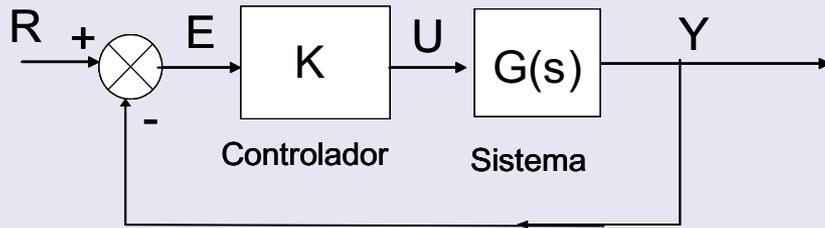
■ Criterio del argumento

$$\angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = (\angle(s_0 + c_1) + \dots + \angle(s_0 + c_m)) - (\angle(s_0 + p_1) + \dots + \angle(s_0 + p_n))$$

$$\angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = \sum_{i=1}^m \phi_{c_i}(s_0) - \sum_{k=1}^n \phi_{p_k}(s_0)$$



Ejemplo



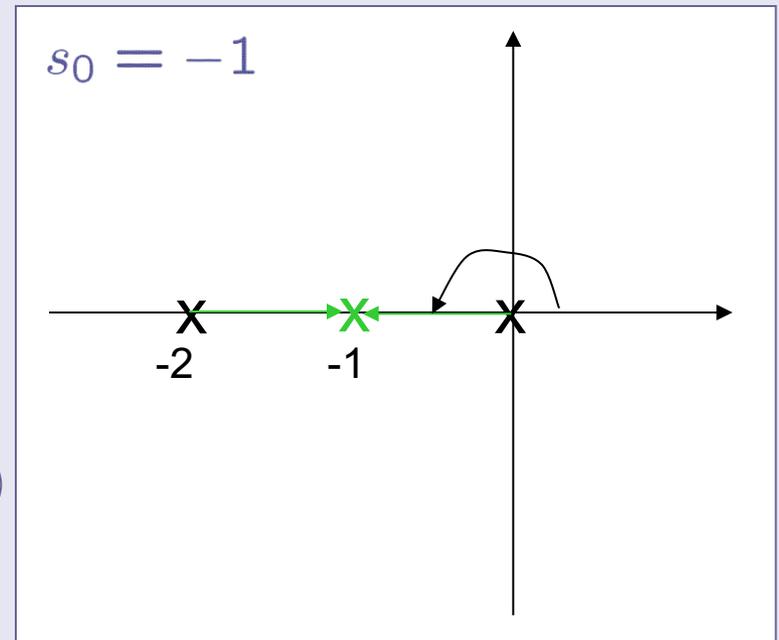
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = -\phi_{p_1} - \phi_{p_2} = -0 - \pi = \pi$$

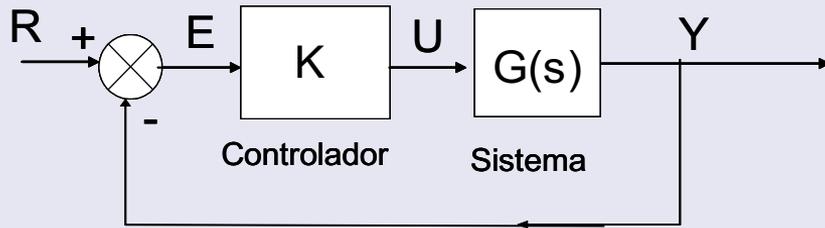
$$\left| \frac{n(s_0)}{d(s_0)} \right| = \frac{1}{|-1| |-1+2|} = 1$$

$s_0 \in LR$ para $K = 1$

$K > 0$



Ejemplo

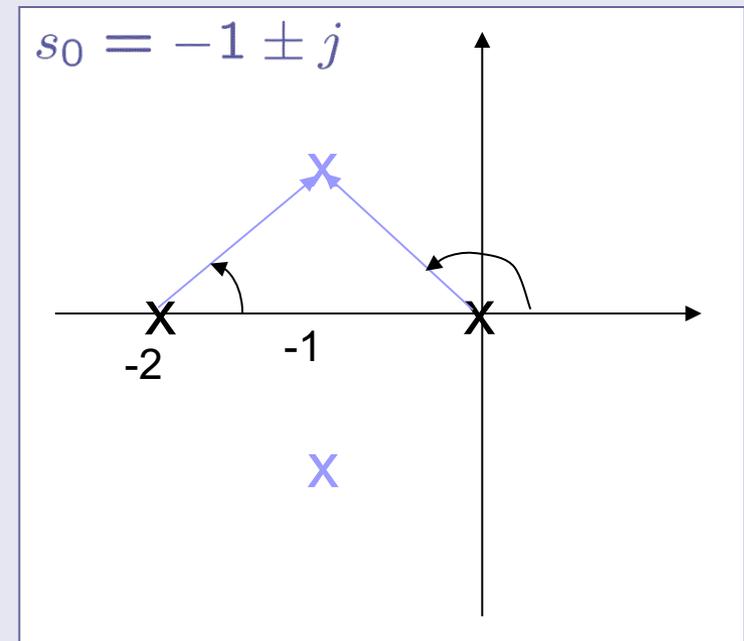


$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

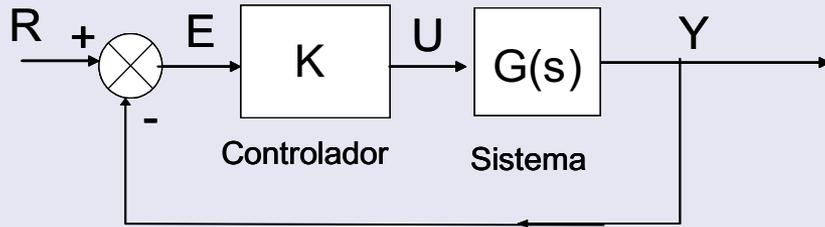
$$\angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = -\phi_{p1} - \phi_{p2} = -\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = \pi$$

$$\left| \frac{n(s_0)}{d(s_0)} \right| = \frac{1}{|-1+j||-1+j+2|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$s_0 \in LR$ para $K = 2$



Ejemplo



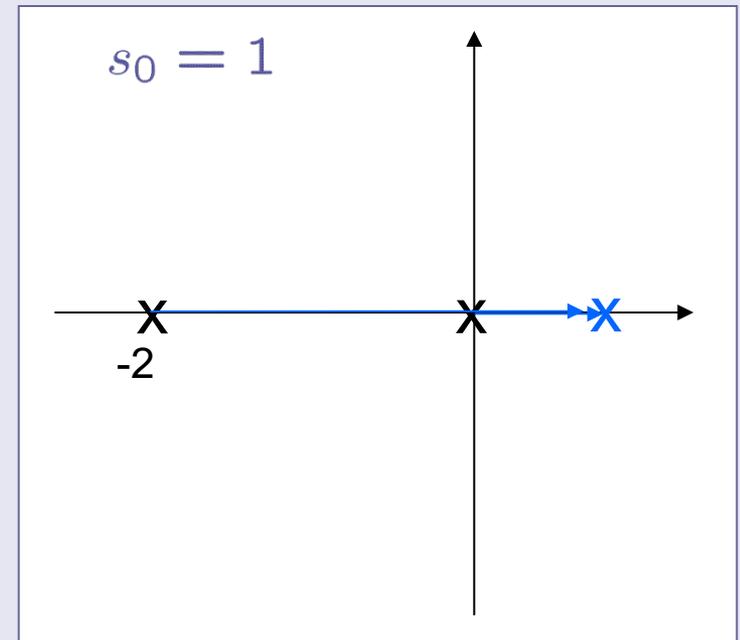
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = -\phi_{p_1} - \phi_{p_2} = -0 - 0 = 0$$

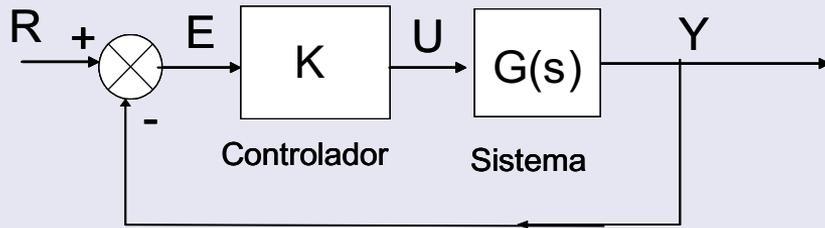
$$\left| \frac{n(s_0)}{d(s_0)} \right| = \frac{1}{|1||1+2|} = \frac{1}{3}$$

$$K < 0$$

$s_0 \in LR$ para $K = -3$



Ejemplo

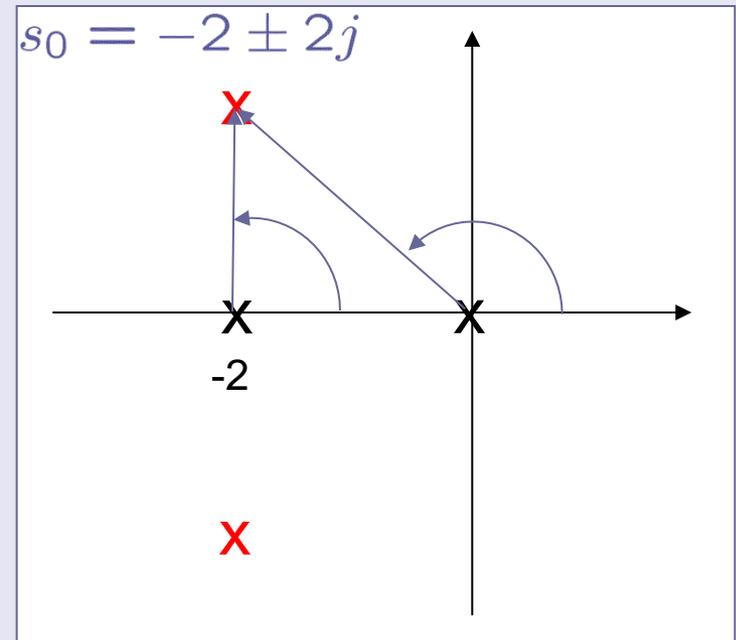


$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

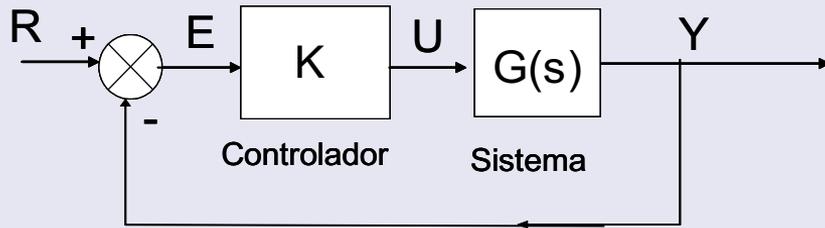
$$\angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = -\phi_{p1} - \phi_{p2} = -\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{5}{4}\pi$$
$$\left| \frac{n(s_0)}{d(s_0)} \right| = \frac{1}{|-2 + 2j| |-2 + 2j + 2|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$\neq \pi$

s_0 NO pertenece al LR



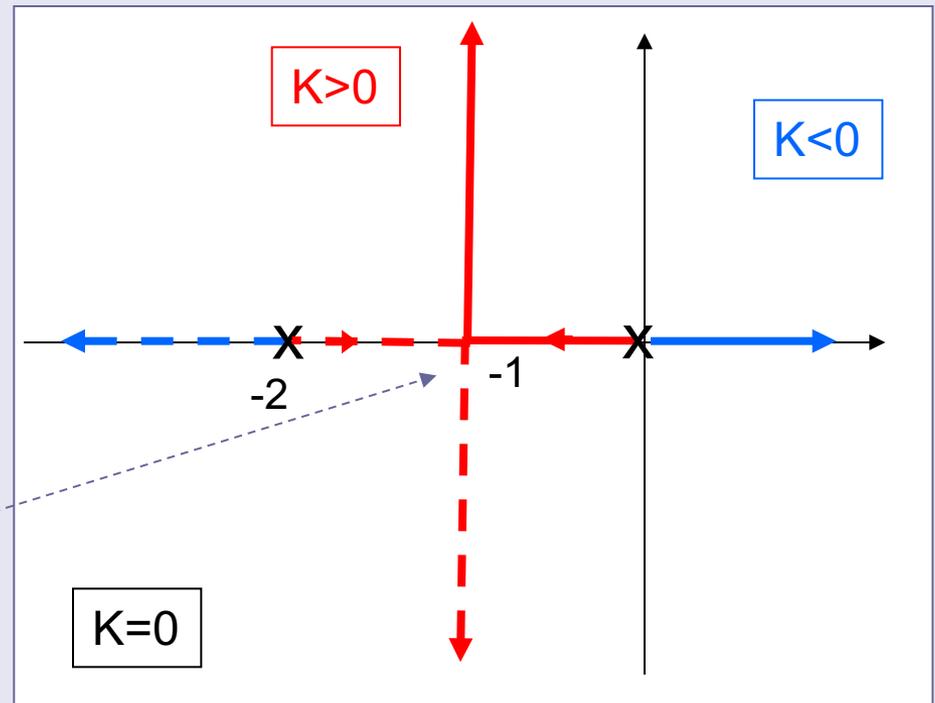
Ejemplo



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

- Rama del polo $s=0$
- - - Rama del polo $s=-2$

Punto de separación



Contenido

- Introducción al lugar de las raíces.
- **Trazado del LR para $K > 0$**
- Diseño de la ganancia del controlador
- Mejora del comportamiento en lazo cerrado:
 - Respuesta transitoria
 - Respuesta en régimen permanente
 - Diseño de controladores
- Extensiones:
 - Trazado del LR para $K < 0$
 - El LR generalizado

Aspectos importantes del LR

■ Número de ramas= n :

- Si $G(s)=n(s)/d(s)$ donde $n(s)$ y $d(s)$ son polinomios de grado m y n respectivamente, entonces los polos de la función de transferencia en lazo cerrado son las soluciones a:

$$d(s)+Kn(s)=0$$

- En número de raíces (ramas) es constante e igual a n si el grado del polinomio es constante e igual a n para cualquier K (por ejemplo si $n>m$).
- Si el grado del polinomio característico no varía con K las raíces varían de forma continua con K .

Aspectos importantes del LR

■ Simetría

- El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real.
- Los polos complejos de la función de transferencia en lazo cerrado aparecen siempre en forma de pares conjugados.

■ Puntos de inicio ($K=0$)

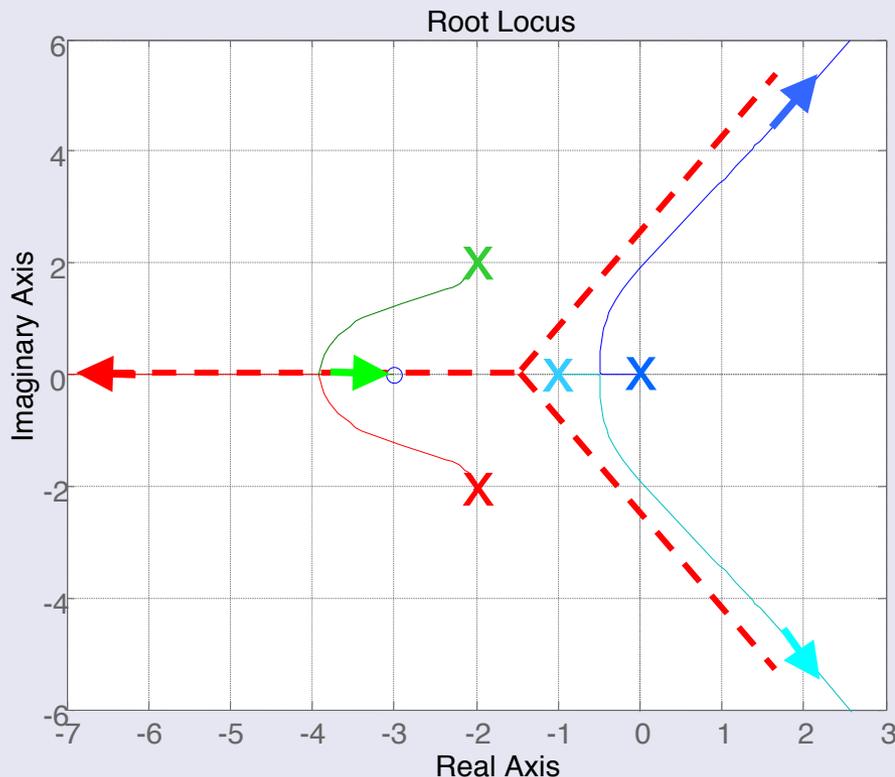
- Para valores pequeños de $k>0$ la ecuación característica $d(s)+Kn(s)=0$ puede aproximarse por $d(s)=0$.
- **Consecuencia:** El lugar de las raíces comienza en los polos de $G(s)=n(s)/d(s)$.

■ Puntos finales ($K\rightarrow\infty$)

- La ecuación característica se puede re-escribir como $(1/K)d(s)+n(s)=0$. Por lo tanto, para valores altos de $k>0$ se puede aproximar por $n(s)=0$.
- **Consecuencia:** De las n ramas, m terminan en los m ceros de $G(s)$ y las restantes $n-m$ ramas tienden a $n-m$ asíntotas.

Ejemplo de un LR

$$G(s) = \frac{s+3}{s^4+5s^3+12s^2+8s} = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2+2j)(s+2-2j)}$$



- 4 polos l.a. $n=4$
- 1 cero. $m=1$
- 4 ramas $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ cero} \\ 3 \text{ asíntotas} \end{array} \right.$
- 1 punto separación
- 1 punto de ingreso

Trazado del LR para $K > 0$

- Se parte del problema canónico de la forma

$$[(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)] + K[(s + c_1)(s + c_2) \cdots (s + c_m)] = 0$$

con $m \leq n$ y $K > 0$

- El LR está formado por n ramas

- Las n ramas parten de los n polos en l.a.

$$d(s) + Kn(s) = 0 \text{ tomando } K = 0, d(s) = 0$$

- m ramas tienden a los ceros en l.a.

$$d(s) + Kn(s) = 0 \text{ tomando } K \rightarrow \infty, n(s) = 0$$

- $n-m$ ramas tienden al infinito de forma asintótica

Trazado del LR para $K > 0$

- Se parte del problema canónico de la forma

$$[(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)] + K[(s + c_1)(s + c_2) \cdots (s + c_m)] = 0$$

con $m \leq n$ y $K > 0$

- Trazado

- Pasos a seguir que permiten su trazado
- El trazado es aproximado
- Información cualitativa

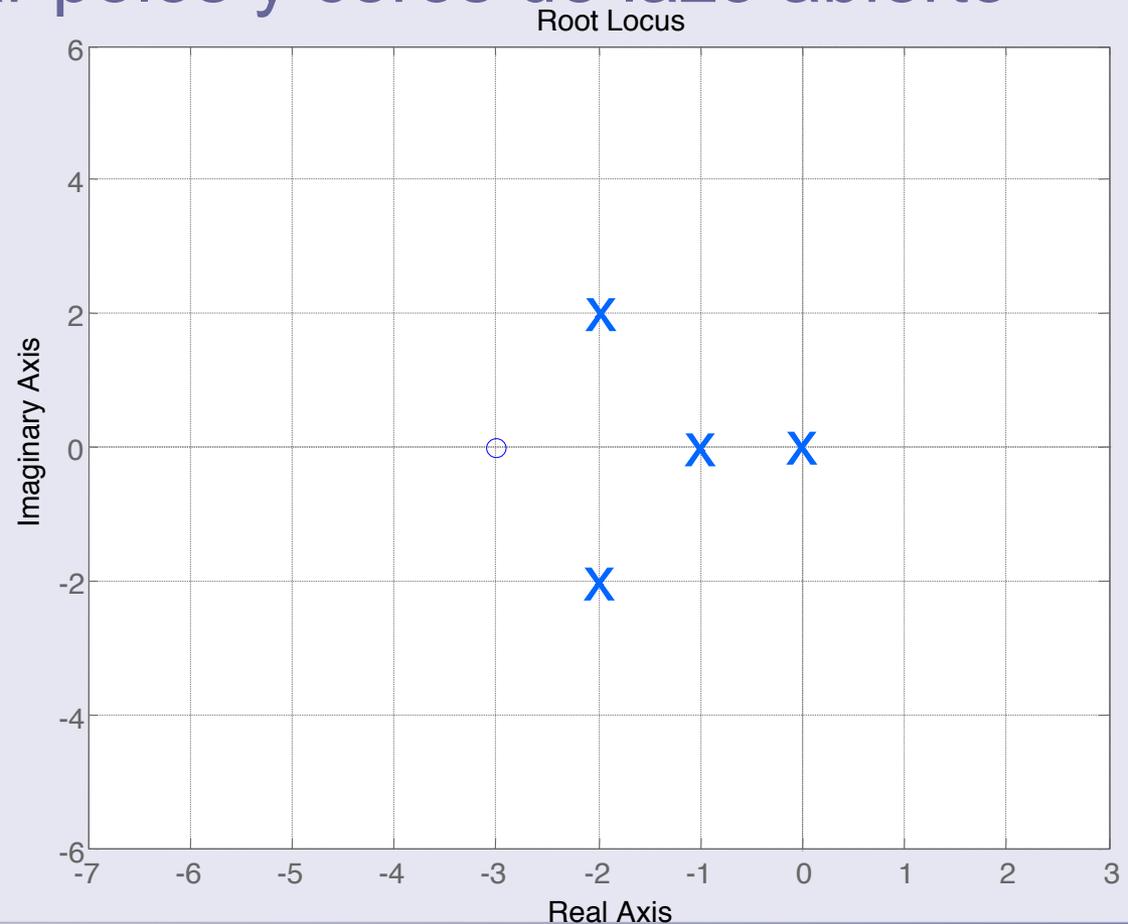
- Ejemplo ilustrativo

$$G(s) = \frac{s+3}{s^4+5s^3+12s^2+8s} = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2+2j)(s+2-2j)}$$

Pasos para el trazado del LR

PASO 1: Ubicar polos y ceros de lazo abierto

x → polo
o → cero

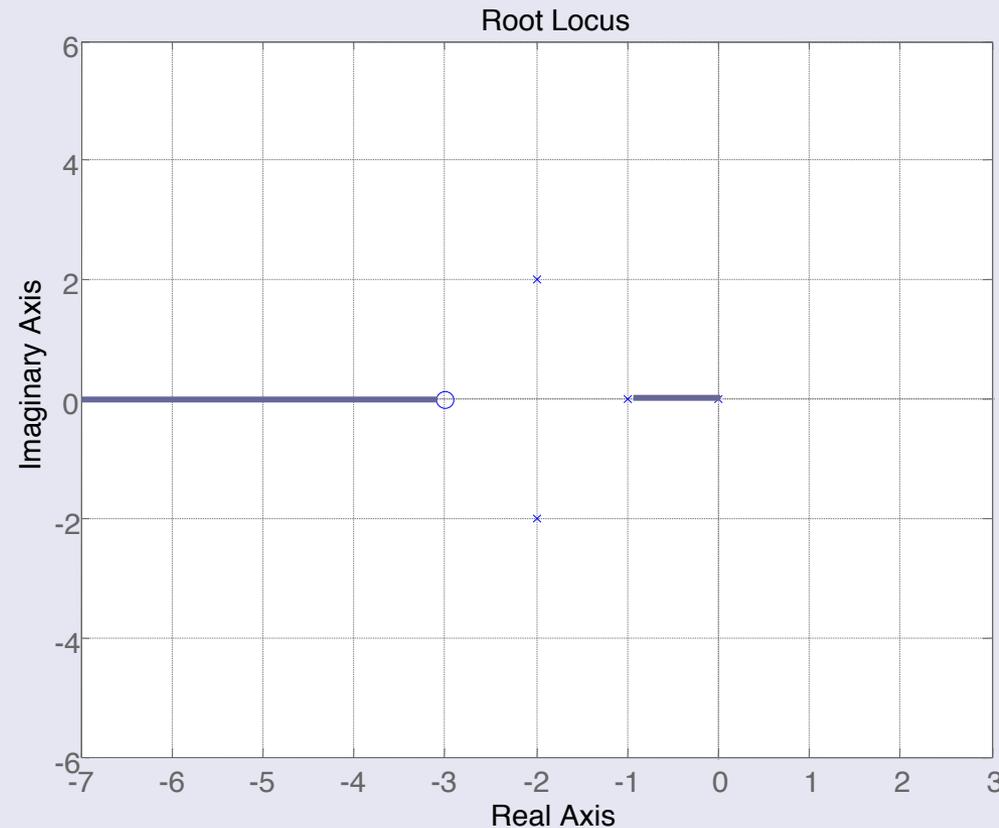


Pasos para el trazado del LR

PASO 2: Lugar de las Raíces sobre el eje real

$s_0 \in \text{LR}$ si el N° de ceros y polos reales a su derecha es **impar**

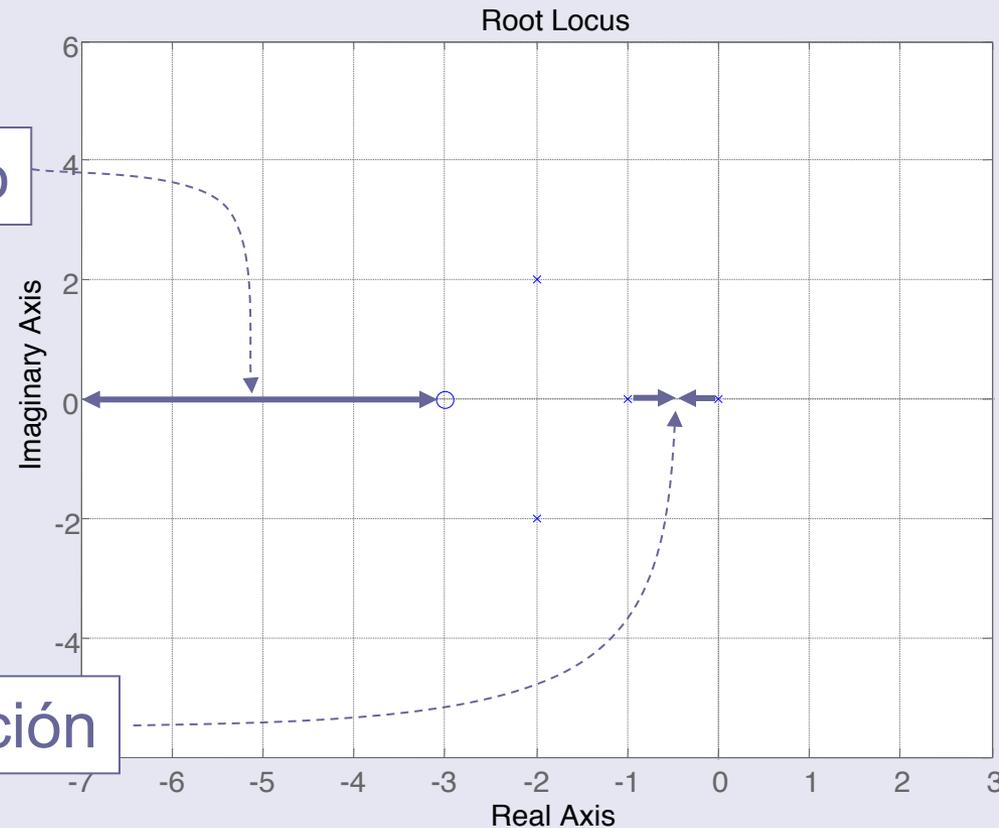
Se debe al hecho de que un par de polos complejos conjugados no afectan a la condición de ángulo para puntos en el eje real



Pasos para el trazado del LR

PASO 3: Determinar los puntos de separación e ingreso

Punto de ingreso



Punto de separación

Pasos para el trazado del LR

Cálculo de los puntos de separación e ingreso

Son polos DOBLES de $G_{bc}(s)$

- Anulan el denominador

$$d_{bc}(s_0) = d(s_0) + Kn(s_0) = 0$$

- Anulan la derivada del denominador

$$d'_{bc}(s_0) = d'(s_0) + Kn'(s_0) = 0$$

$$s_0 \in LR \text{ tal que } d(s_0)n'(s_0) - n(s_0)d'(s_0) = 0$$

Pasos para el trazado del LR

■ Ejemplo

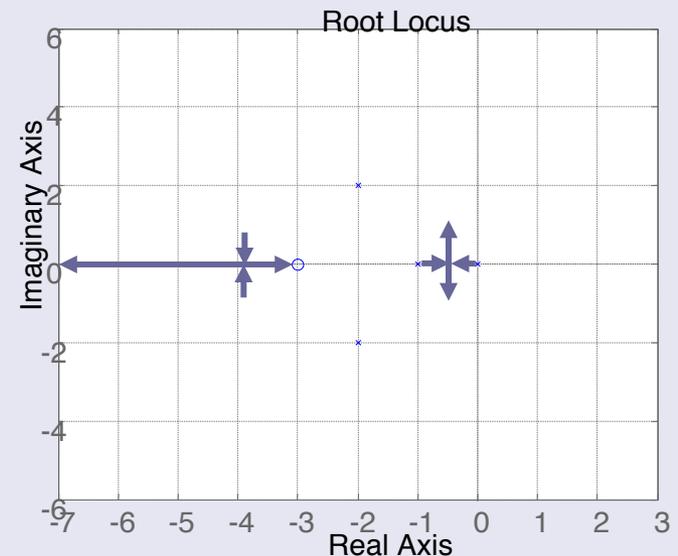
$$n(s) = (s + 3)$$

$$d(s) = s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 8s$$

$$\begin{aligned}d'(s)n(s) - n'(s)d(s) &= (4s^3 + 15s^2 + 24s + 8)(s + 3) \\ &\quad - 1(s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 8s) \\ &= 3s^4 + 22s^3 + 57s^2 + 72s + 24\end{aligned}$$

Raíces

$$\begin{aligned}s_1 &= -3.91 \in LR \\ s_2 &= -1.46 + 1.42j \notin LR \\ s_3 &= -1.46 - 1.42j \notin LR \\ s_4 &= -0.4897 \in LR\end{aligned}$$



Pasos para el trazado del LR

PASO 4: Calcular las asíntotas

n ramas $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ ramas tienden a los ceros} \\ n-m \text{ ramas tienden asintóticamente al infinito} \end{array} \right.$

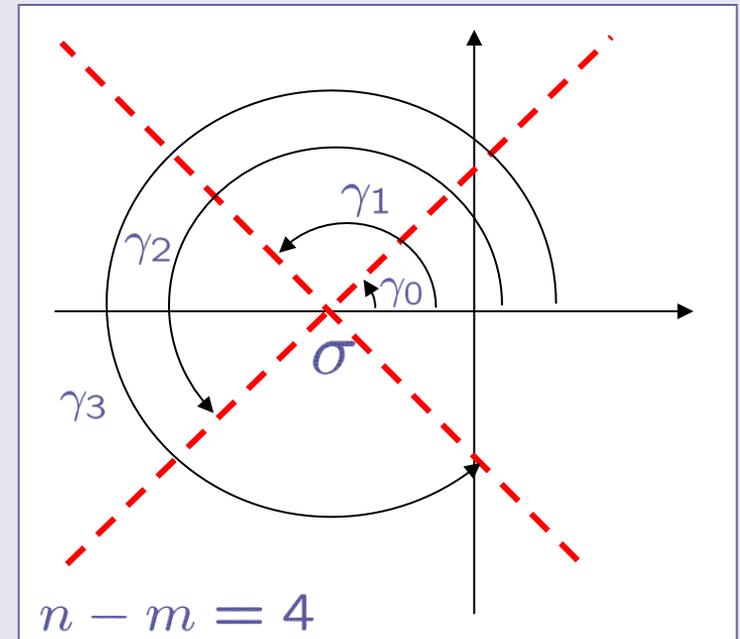
Centroide

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (-p_i) - \sum_{k=1}^m (-c_k)}{n - m}$$

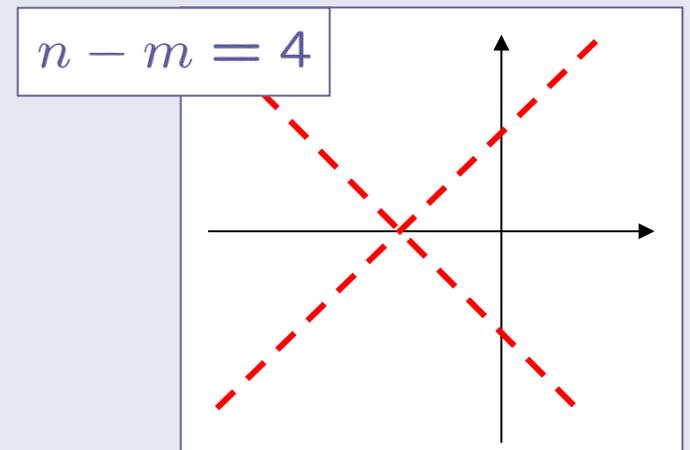
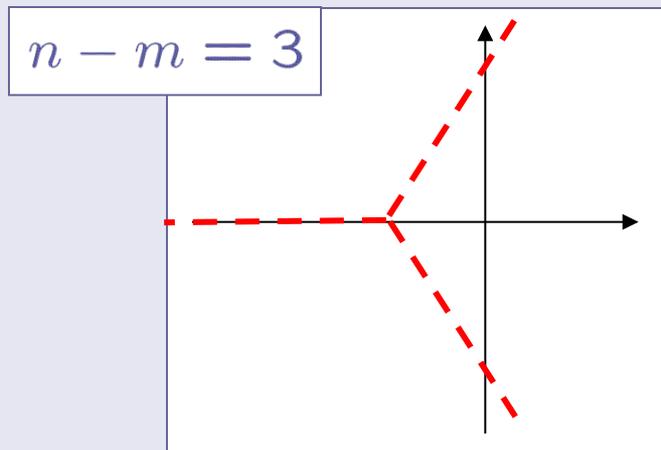
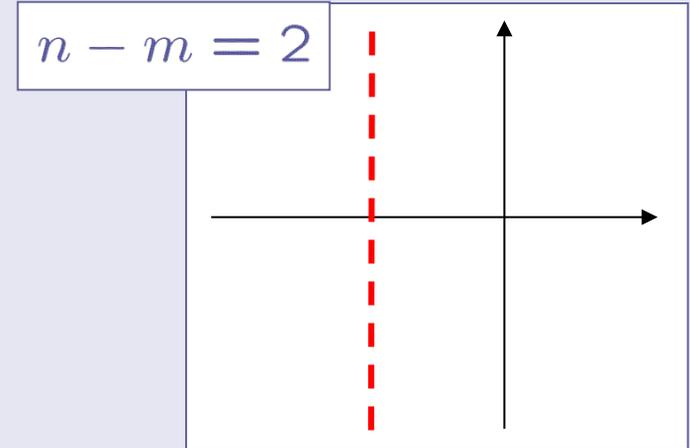
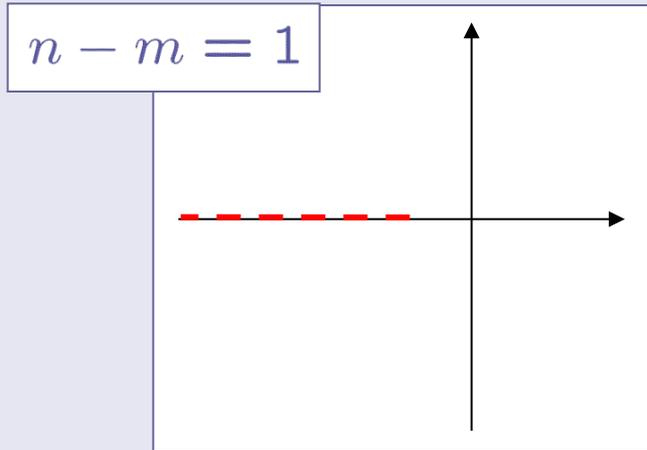
Ángulos de las asíntotas

$$\gamma_k = \frac{180 + 360 \times k}{n - m}$$

$$k = 0, \dots, n - m - 1$$



Pasos para el trazado del LR

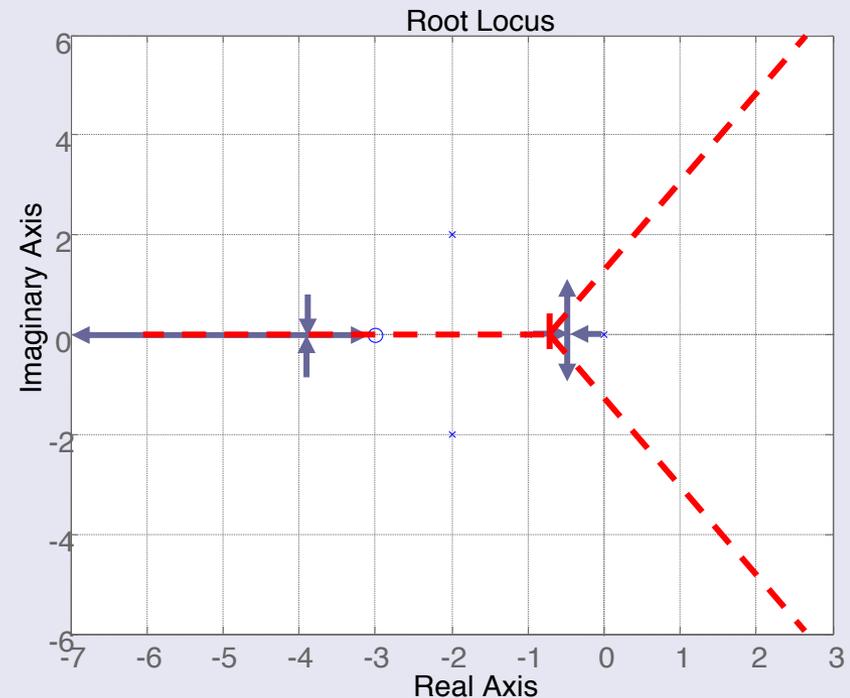


Pasos para el trazado del LR

■ Ejemplo $G(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2+2j)(s+2-2j)}$

$$\sigma = \frac{(0+(-1)+(-2+2j)+(-2-2j)) - (-3)}{4-1} = \frac{-2}{3}$$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{180}{3} = 60 \\ \gamma_1 &= \frac{180+360}{3} = 180 \\ \gamma_2 &= \frac{180+360 \times 2}{3} = 300\end{aligned}$$



Pasos para el trazado del LR

PASO 5: Calcular los puntos de corte con el eje imaginario

Método de Routh-Hurwitz

n	1	a_2	\dots
$n - 1$	a_1	a_3	\dots
\vdots	\vdots		
2	a	b	
1	0		
0			

$as^2 + b = 0$

Si $b/a > 0$, $s = \pm \sqrt{b/a}$

Factor par de orden 2

Pasos para el trazado del LR

■ Ejemplo $G(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2+2j)(s+2-2j)}$

$$\begin{aligned} d_{bc}(s) &= s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 8s + K(s+3) \\ &= s^4 + 5s^3 + 12s^2 + (K+8)s + 3K \end{aligned}$$

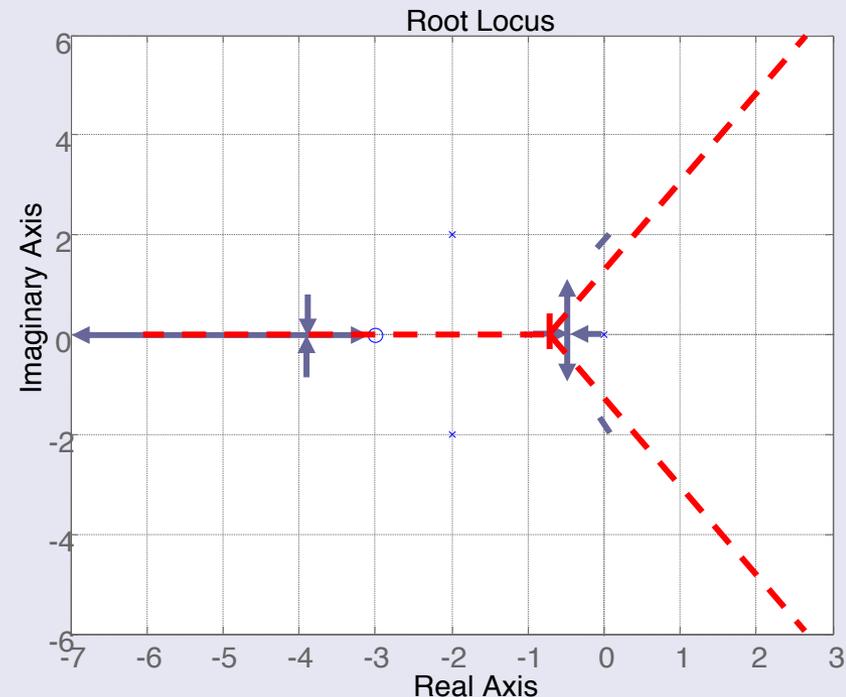
4	1	12	3K
3	5	K+8	
2	$\frac{52-K}{5}$	3K	
1	$\frac{K^2+31K-416}{K-52}$		
0	3K		

Factor par de orden 2

$$K^2 + 31K - 416 = 0 \rightarrow K = 10.11 > 0$$

Ecuación subsidiaria

$$8.37s^2 + 30.55 = 0 \rightarrow s = \pm 1.9j$$



Pasos para el trazado del LR

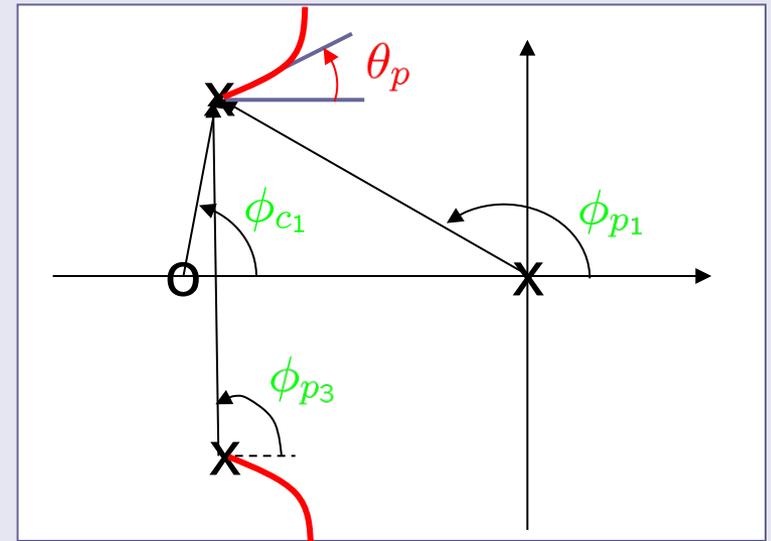
PASO 6: Ángulo de salida (entrada) de polos (ceros) complejos

Ángulo salida de un polo

$$\theta_p = 180 - \sum \phi_{p_i} + \sum \phi_{c_k}$$

Ángulo entrada en un cero

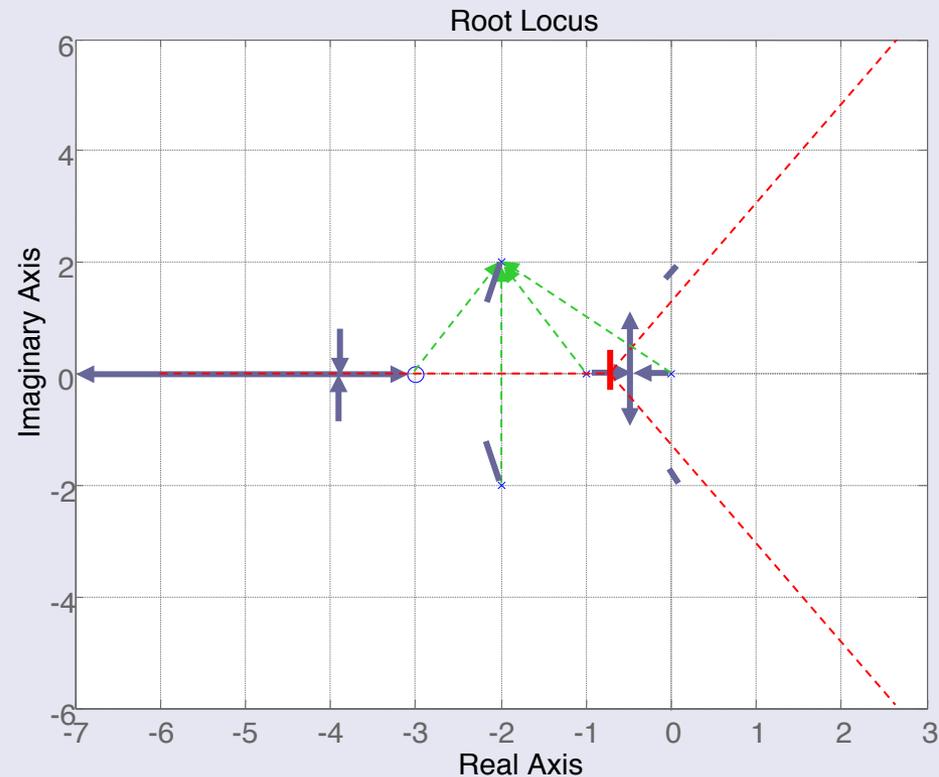
$$\theta_c = 180 + \sum \phi_{p_i} - \sum \phi_{c_k}$$



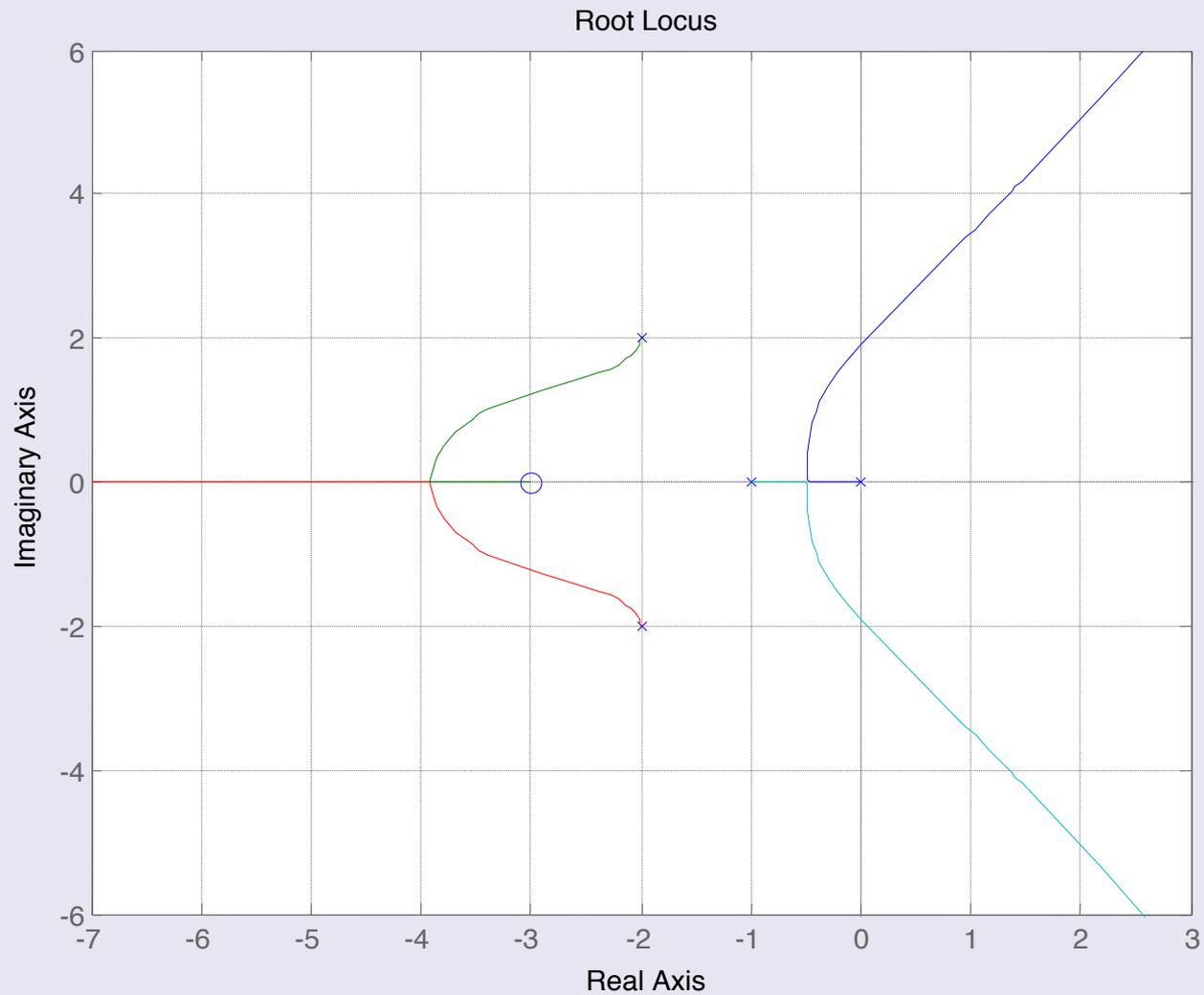
Pasos para el trazado del LR

■ Ejemplo $G(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2+2j)(s+2-2j)}$

$$\begin{aligned}\theta_p &= 180 - (135 + 116.57 + 90) + (63.43) \\ &= -98.14\end{aligned}$$



Ejemplo del trazado del LR

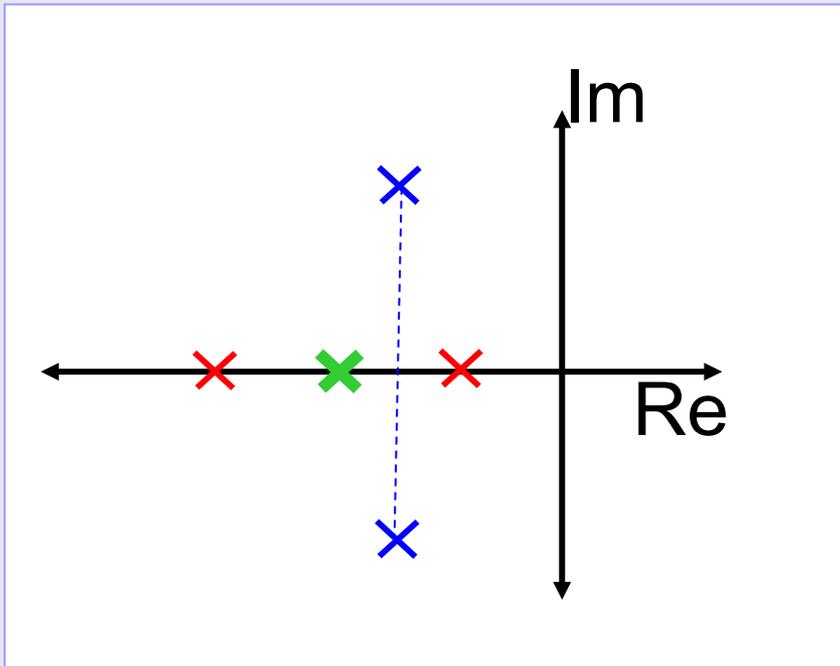


Contenido

- Introducción al lugar de las raíces.
- Trazado del LR para $K > 0$
- **Diseño de la ganancia del controlador**
 - **Hipótesis de diseño**
 - **Especificaciones de control y regiones admisibles**
 - **Cálculo de la ganancia del controlador**
 - **Ejemplos**
- Mejora del comportamiento en lazo cerrado:
 - Respuesta transitoria
 - Respuesta en régimen permanente
 - Diseño de controladores
- Extensiones:
 - Trazado del LR para $K < 0$
 - El LR generalizado

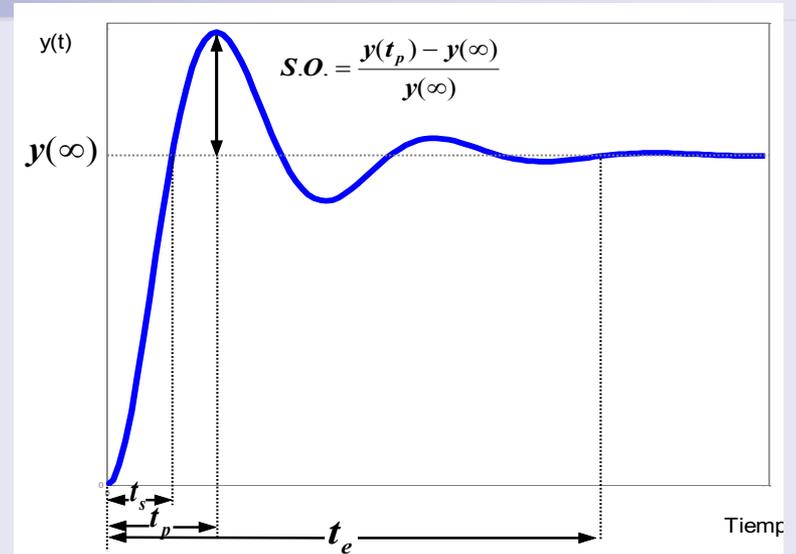
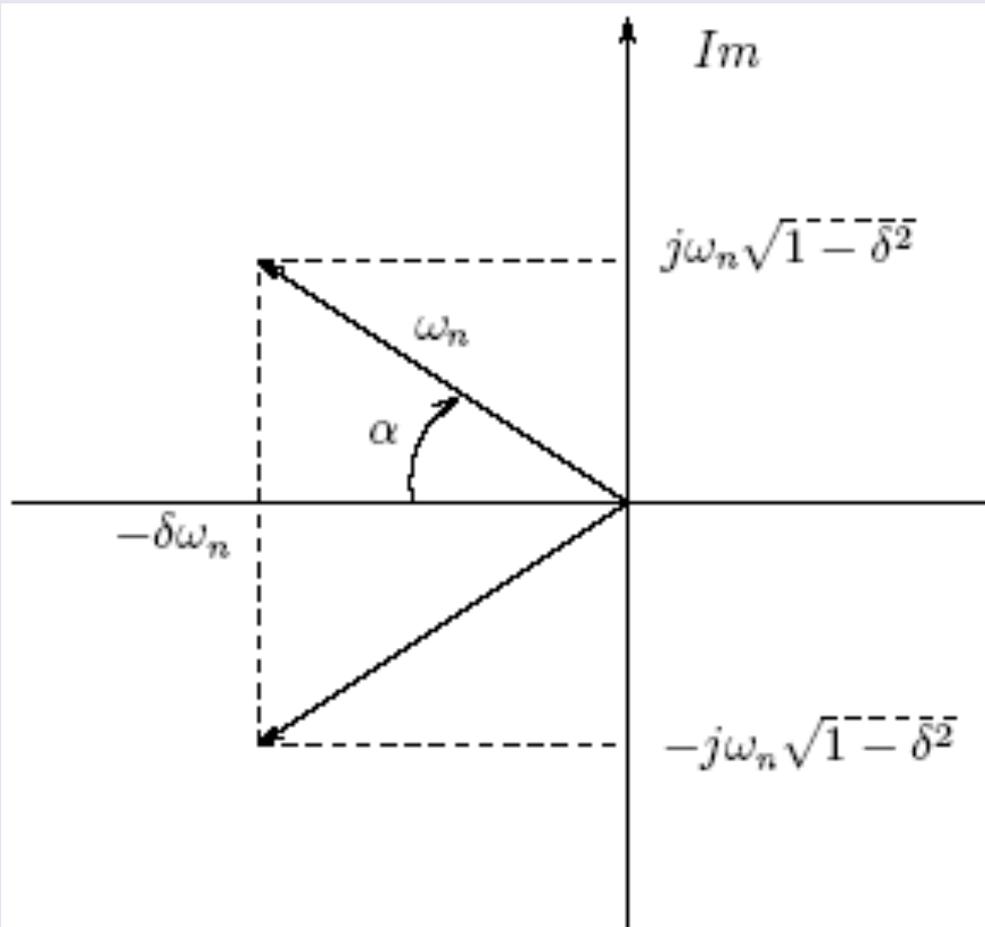
Sistemas de segundo orden

$$\text{Polos: } -\delta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\delta^2 - 1}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \delta > 1: \text{ Sobreamortiguado} \\ \delta = 1: \text{ Críticamente am.} \\ \delta < 1: \text{ Subamortiguado} \end{array} \right.$$

Sistemas subamortiguados

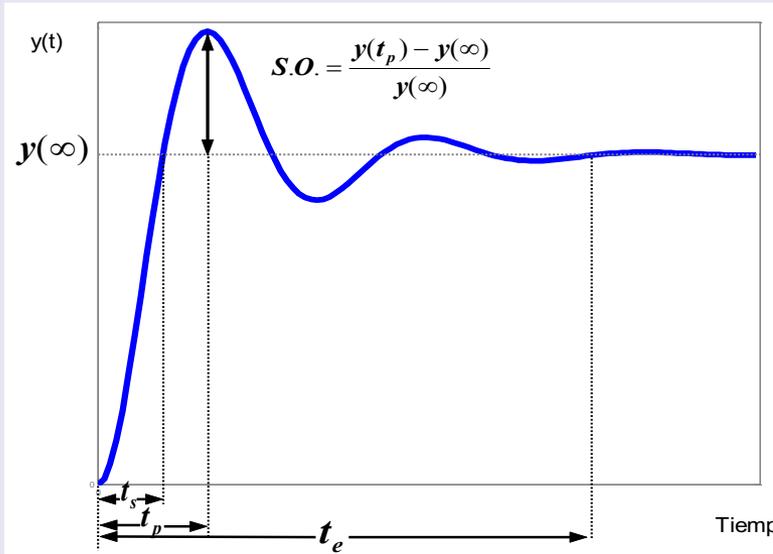


$$S.O. = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

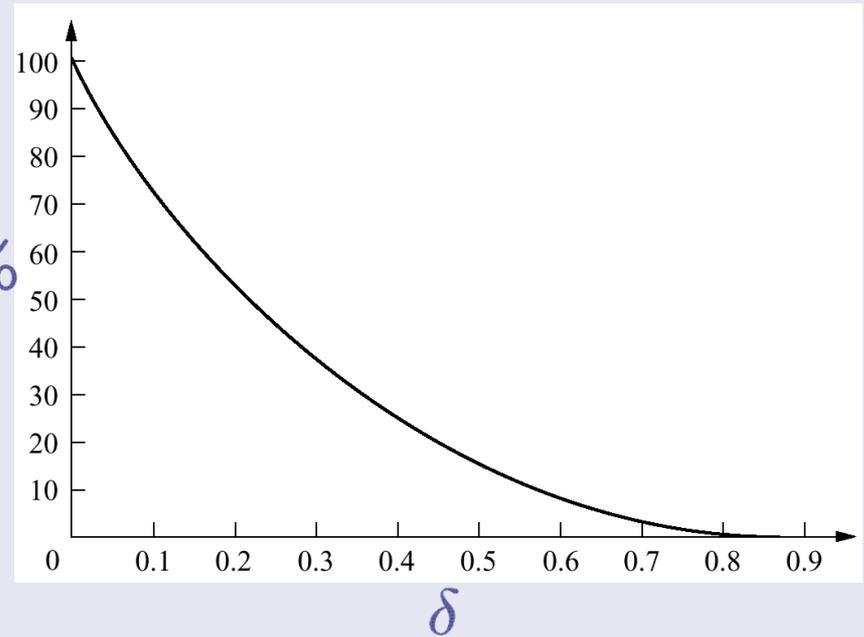
$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \delta$$

Sistemas subamortiguados



$S.O.\%$



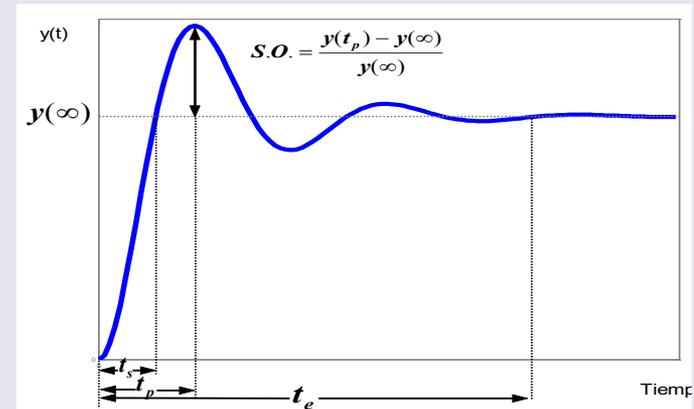
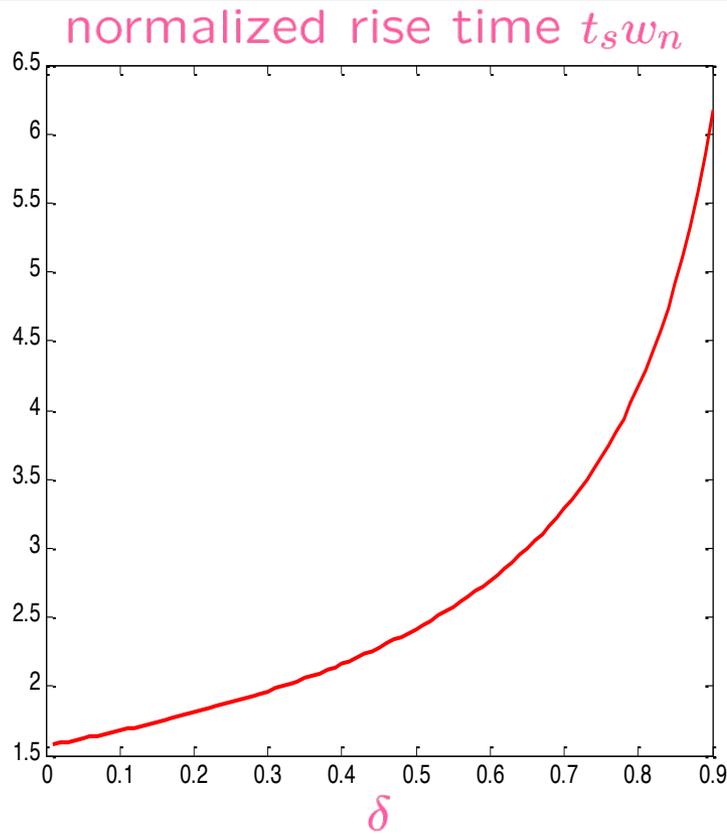
$$S.O. = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Tiempo de subida normalizado

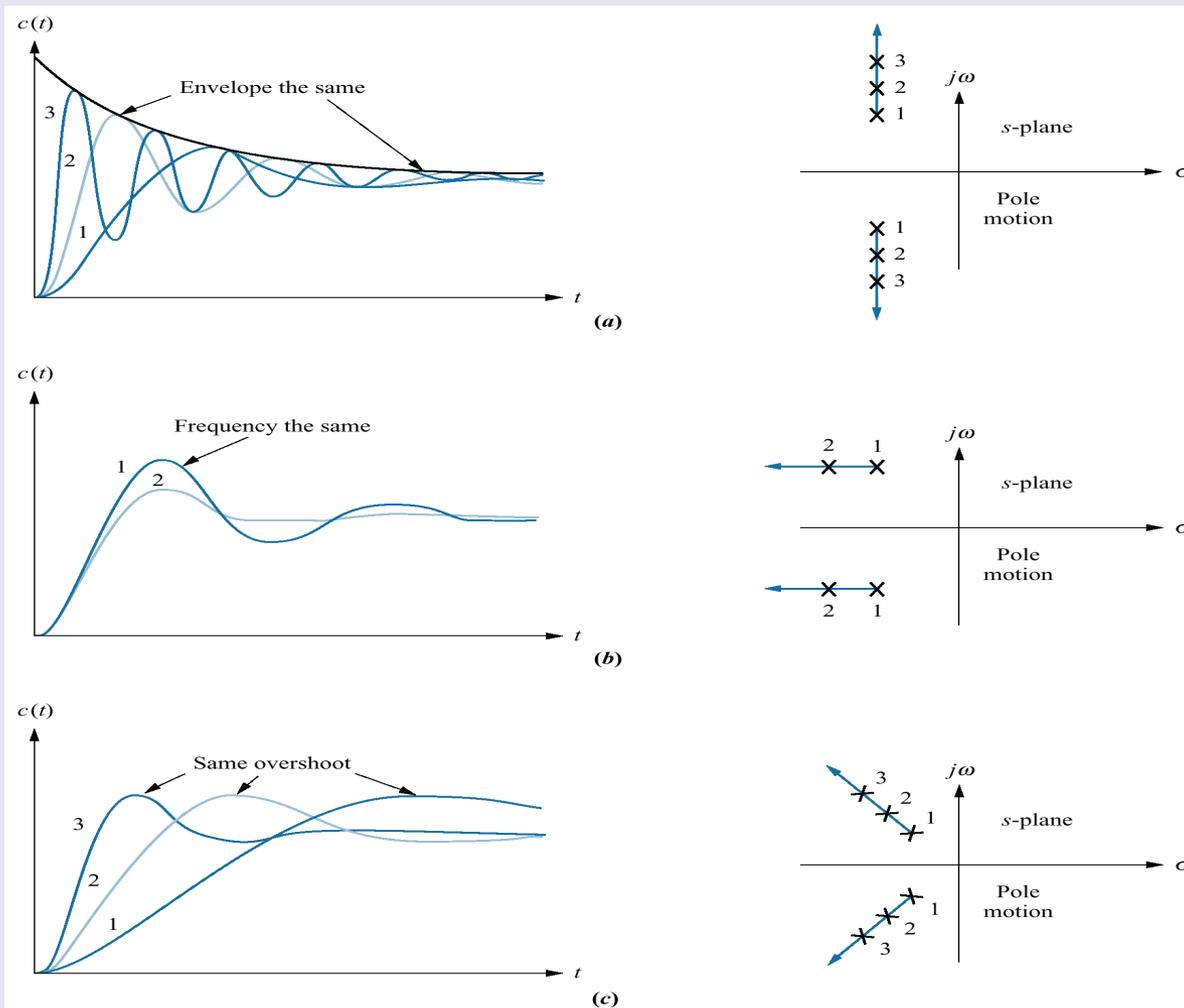
$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

El tiempo de subida normalizado se define como $t_s \omega_n$ y depende slo de δ :

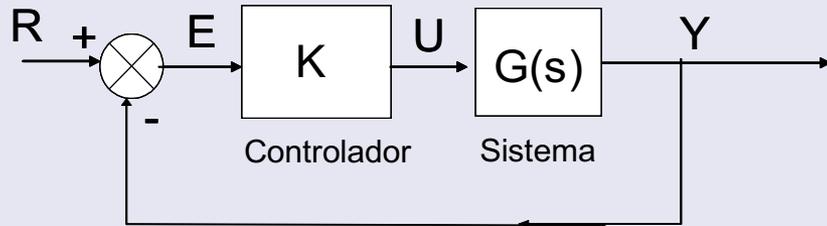
$$t_s \omega_n = \frac{\pi - \alpha}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$



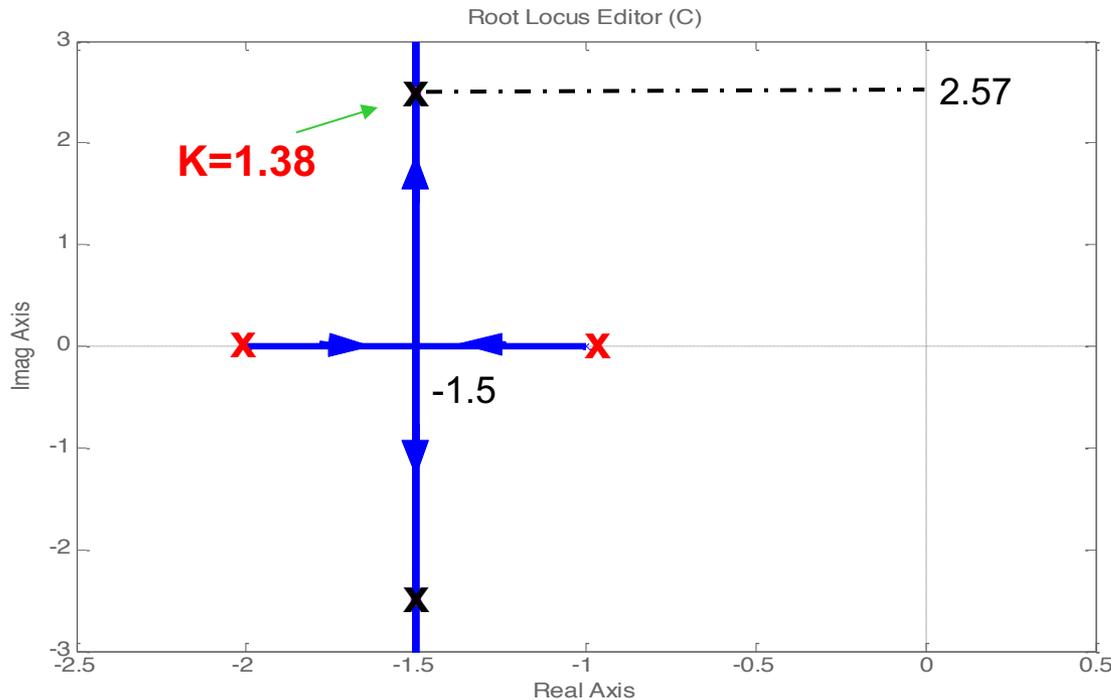
Sistemas subamortiguados



Ejemplo 1:



$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+1)}$$

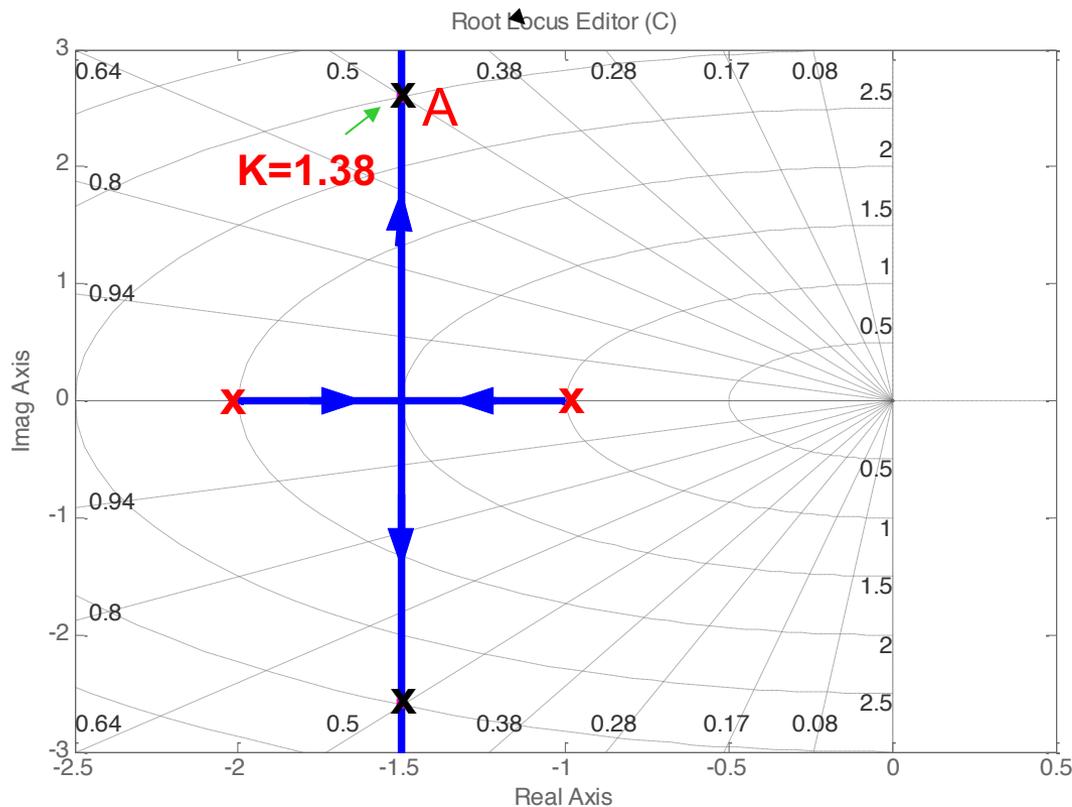


¿Cuál es la SO y el t_s para un controlador P con $K=1.38$?

De $G_{bc}(s)$ se deduce que los polos son $-1.5+2.57j$ y $-1.5-2.57j$

Ejemplo 1:

$$A = -1.5 + 2.57j = -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$



$$\delta = 0.513$$

$$\omega_n = 2.92$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

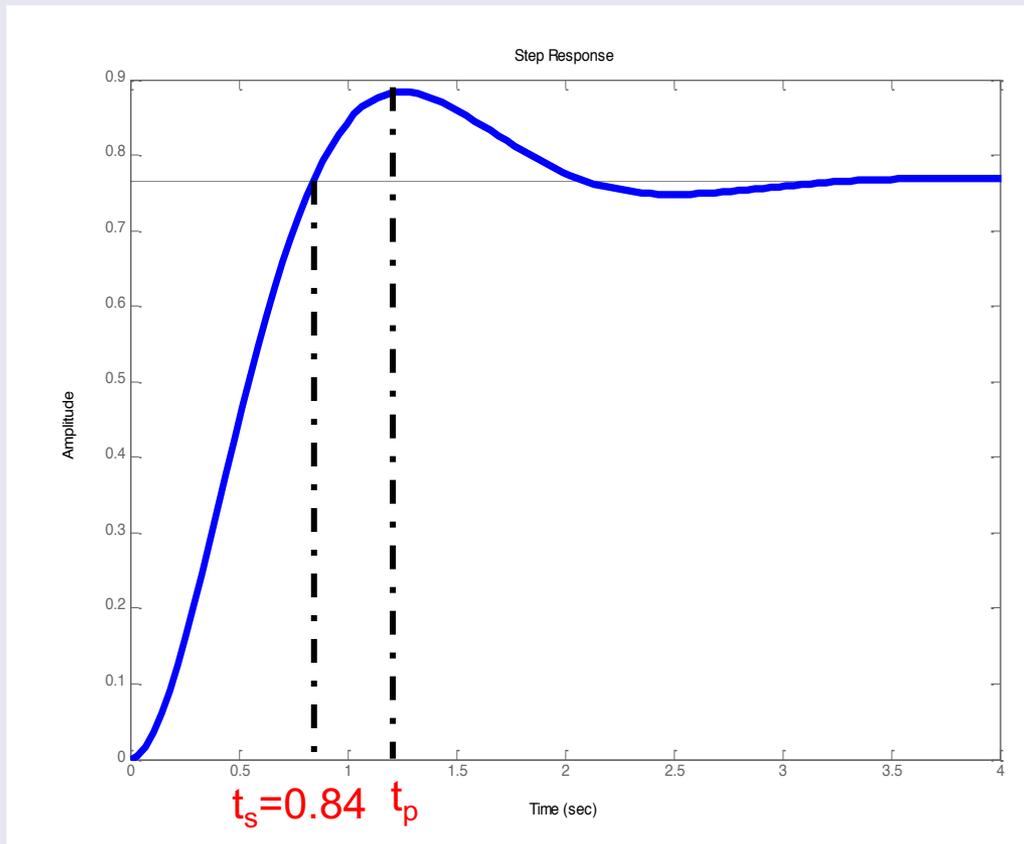
$$SO = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 15.3\%$$

$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = 0.84$$

Ejemplo 1:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = 0.7753, \quad y(t_p) = 0.89$$

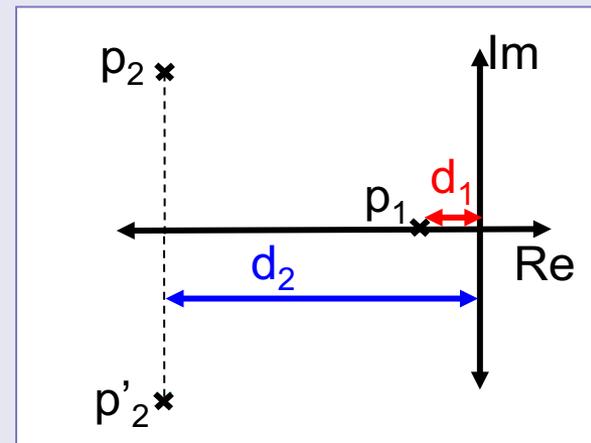
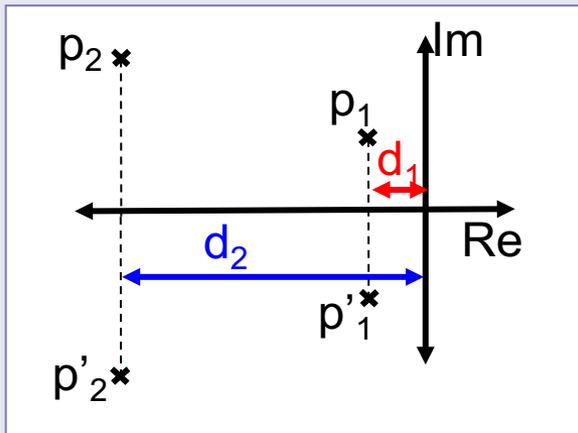
$$SO = 100 \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = 15.3\%$$



- Dado que $G(s)$ es de tipo 0, el sistema en l.c. presenta error en régimen permanente en posición.
- La SO y t_s obtenidos son exactos por que el sistema en l.c. es de orden 2 sin ceros.

Polos dominantes en l.c.

- Dinámicas dominantes: **polos con la respuesta más lenta**
- Las dinámicas dominantes se caracterizan por su relación según la parte real de los polos

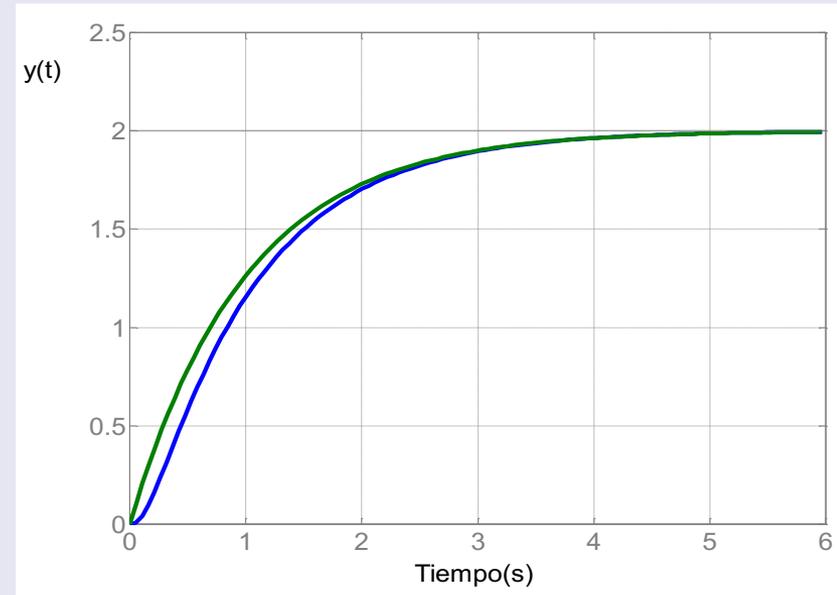
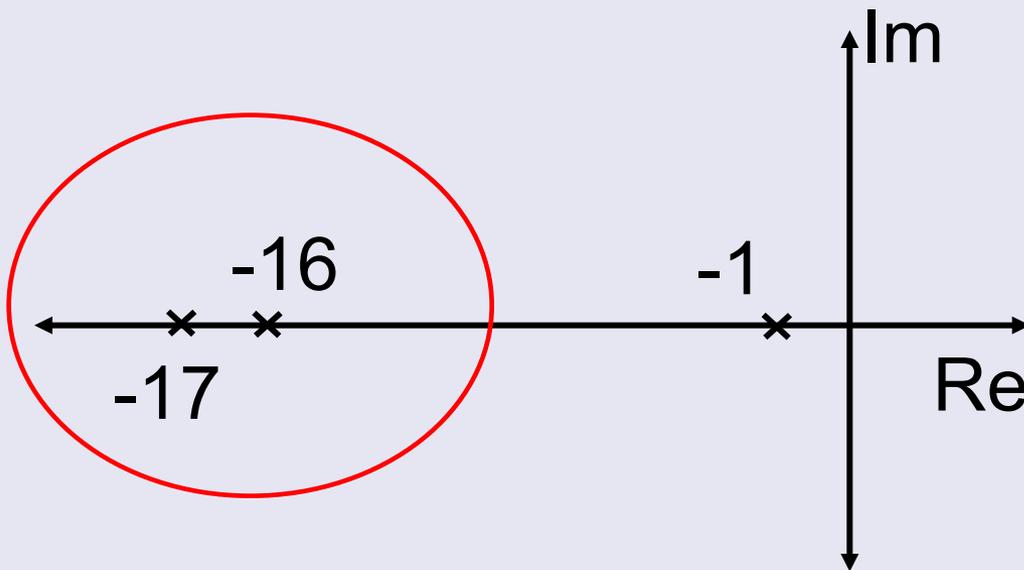


p_1 son dominantes si $d_2/d_1 > 5$

Sistema reducido: La ganancia estática debe permanecer constante

Polos dominantes en b.c.

$$G(s) = \frac{544}{(s+1)(s+16)(s+17)} \approx \frac{544}{(s+1)(16)(17)} = \frac{2}{s+1}$$



-1 es dominante.

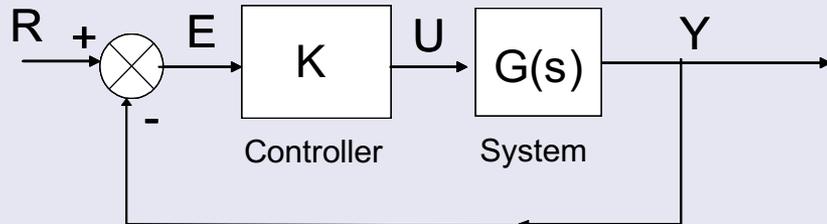
El resto de los polos se pueden eliminar

Controlador Proporcional

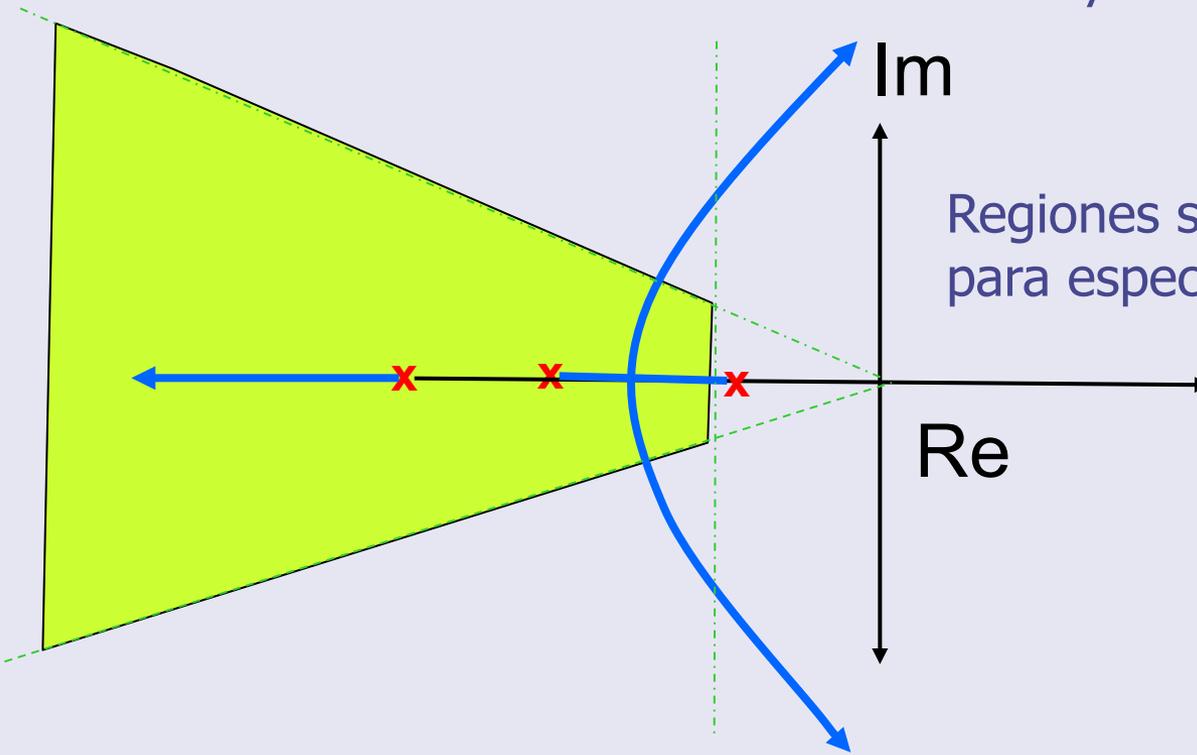
- EL LR representa la evolución de los polos de $G_{bc}(s)$ al variar la ganancia del controlador.
- La SO y t_s para una ganancia dada se puede calcular, asumiendo que los polos son dominantes.
- **Diseño:**
 - Determinar s_0 del LR que cumpla las especificaciones (si LR pasa por una cierta región del plano s)
 - La ganancia correspondiente será

$$K = \frac{1}{|G(s_0)|}$$

Especificaciones en el plano complejo

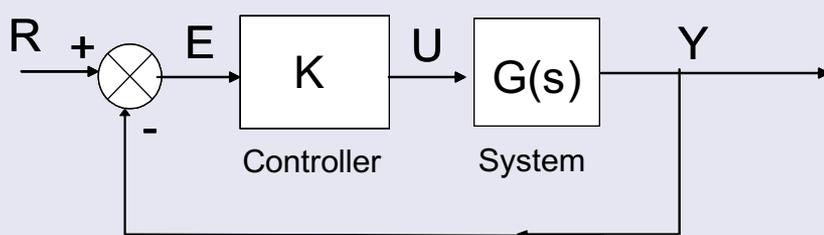


La región en verde corresponde a la zona que cumple las especificaciones en SO y tiempo de establecimiento.



Regiones similares se pueden obtener para especificaciones en SO y ω_n

Ejemplo 2:



$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+1)}$$

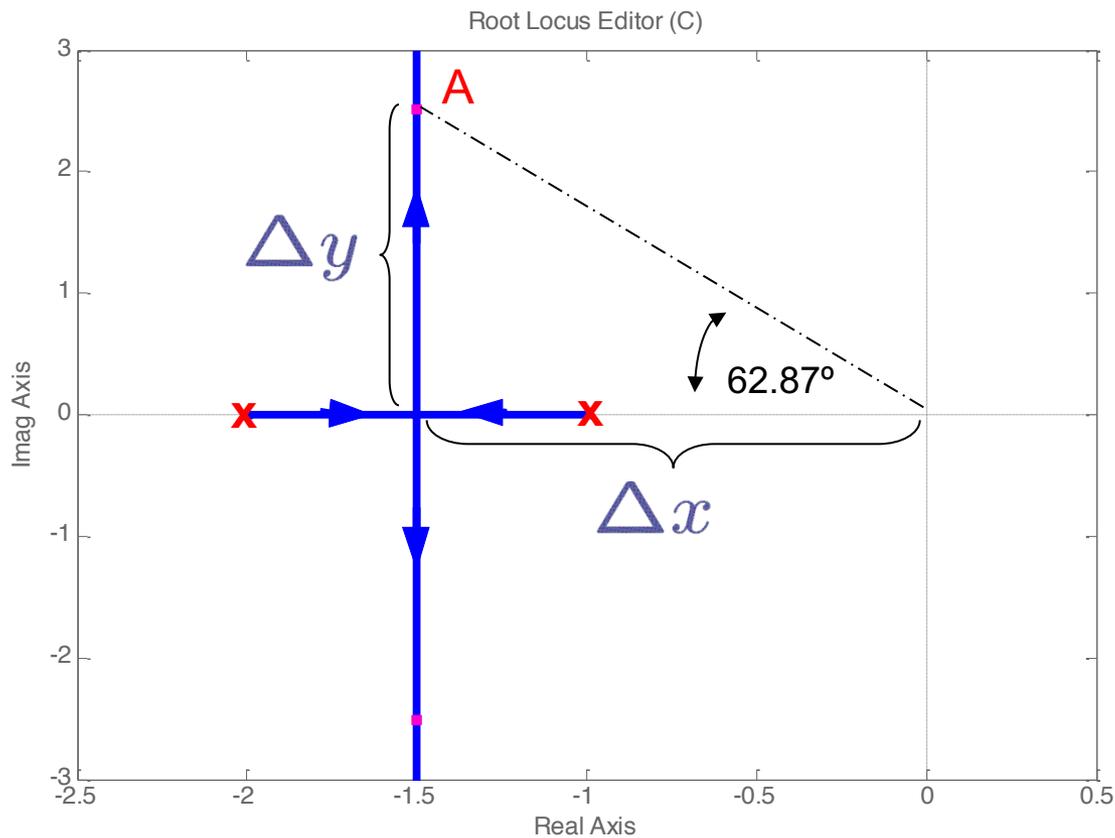
- Diseñar un controlador proporcional que haga el sistema lo más rápido posible con SO inferior a 20%

$$SO = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{(\ln SO)^2}{\pi^2 + (\ln SO)^2}} = 0.4559$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = 1.952 \Rightarrow \alpha = 62.87^\circ$$

Ejemplo 2:

$$\tan 62.87 = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \Rightarrow \Delta Y = 2.88$$

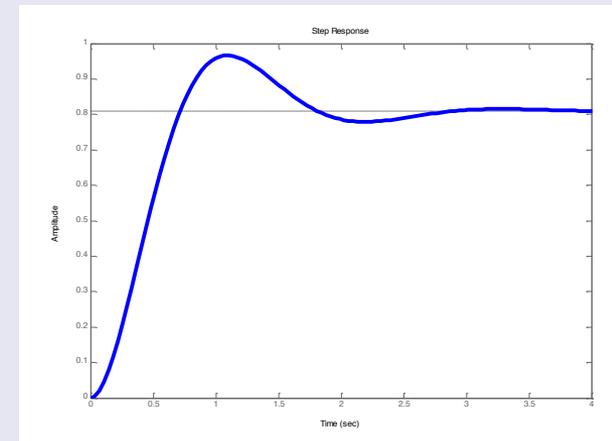


$$A = -\Delta X + j\Delta Y$$
$$= -1.5 + j2.88$$

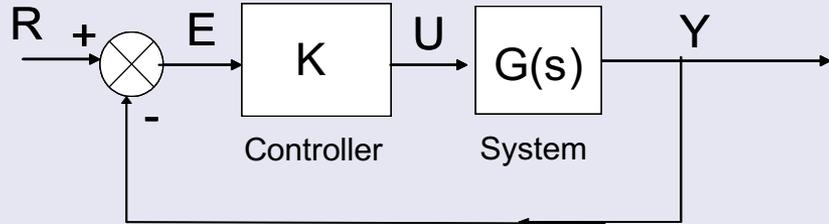
$$K' = 5K = \left| \frac{1}{G(A)} \right|$$

$$= 8.5444$$

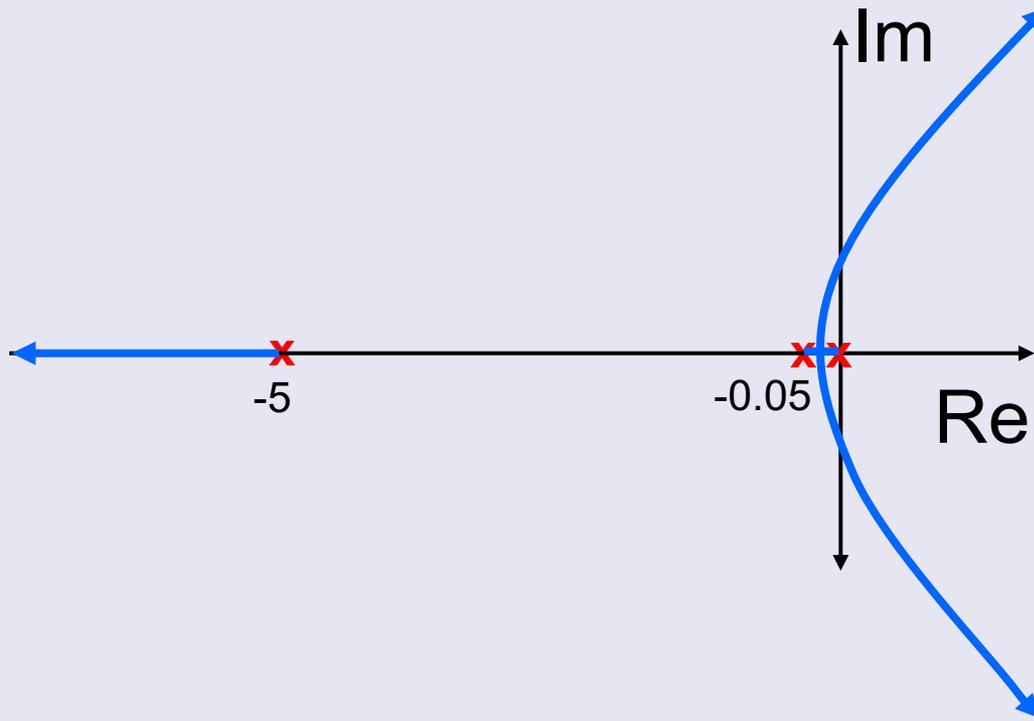
$$K = 1.7089$$



Ejemplo 3: Control proporcional de un servomecanismo



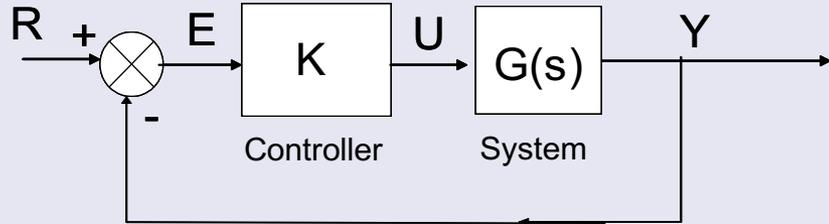
$$G(s) = \frac{0.75}{s(s+5)(s+0.05)}$$



¿Es posible obtener un controlador proporcional tal que

- la SO sea menor que 10%
- el tiempo de subida sea menor de 5 segundos?

Ejemplo 3: Control proporcional de un servomecanismo



$$G(s) = \frac{0.75}{s(s+5)(s+0.05)}$$

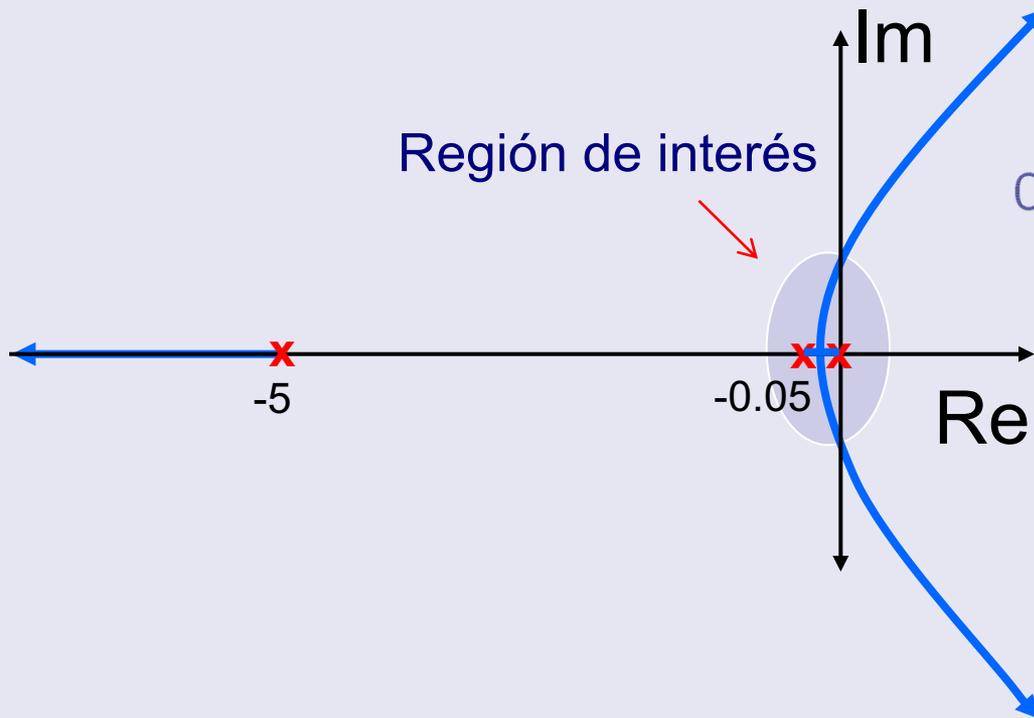
El polinomio característico se puede aproximar por uno de segundo orden

$$0.75K + s(s+5)(s+0.05) = 0$$

$$\frac{0.75K}{s+5} + s(s+0.05) = 0$$

En la región de interés se puede realizar la aproximación:

$$\frac{0.75K}{5} + s(s+0.05) = 0$$

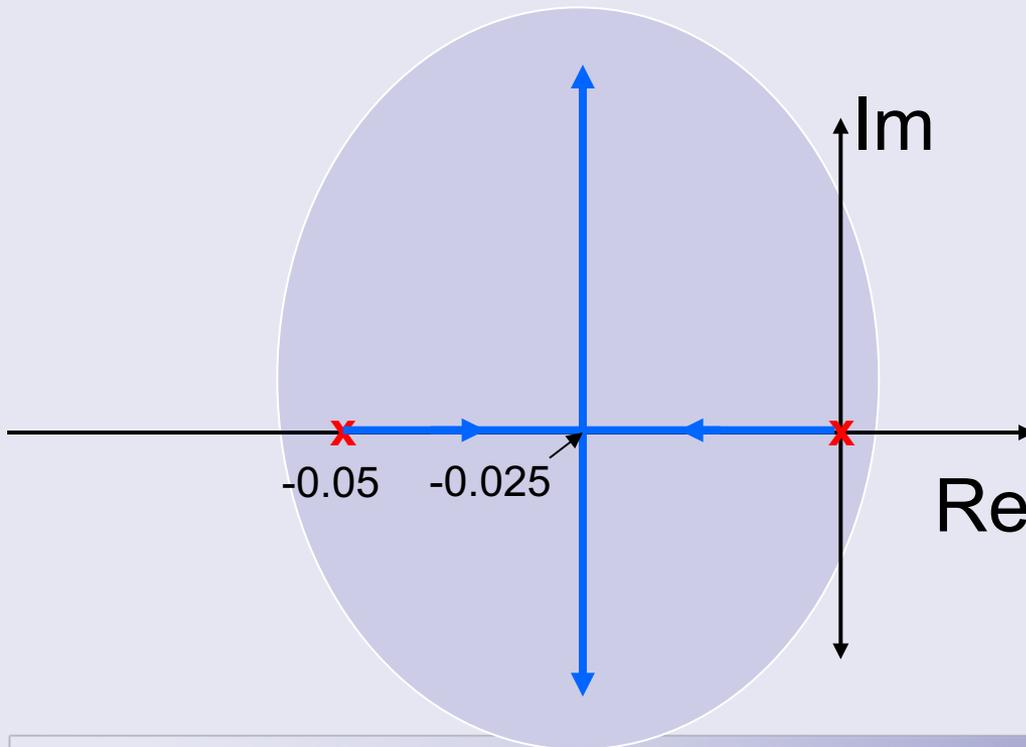


Ejemplo 3:

Control proporcional de un servomecanismo

En la región de interés el lugar de las raíces $\frac{0.75K}{5} + s(s + 0.05) = 0$ se puede aproximar por el correspondiente a :

$$\text{Es decir, } 1 + \frac{K'}{s(s + 0.05)} = 0, \quad K' = \frac{0.75K}{5}$$

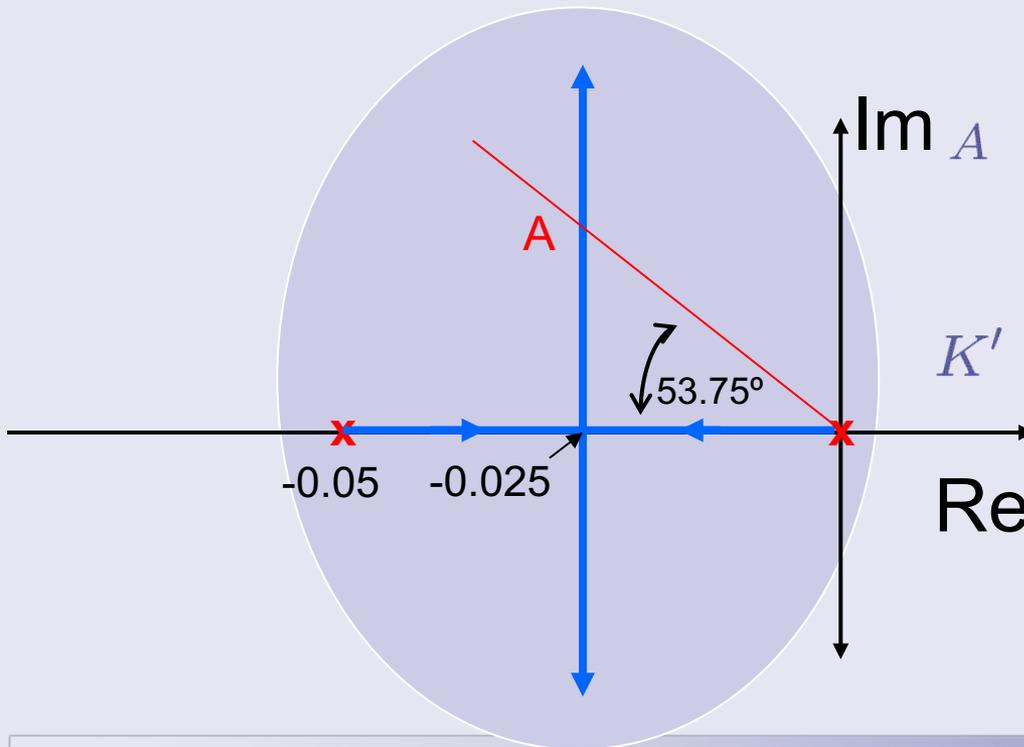


Ejemplo 3:

Control proporcional de un servomecanismo

Para satisfacer la especificación en SO: $\delta = \sqrt{\frac{(\ln SO)^2}{\pi^2 + (\ln SO)^2}} = 0.591$

$$\alpha = \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \right) = 53.75^\circ$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A &= -0.025 + \tan(53.75)0.025j \\ &= -0.025 + 0.0341j \end{aligned}$$

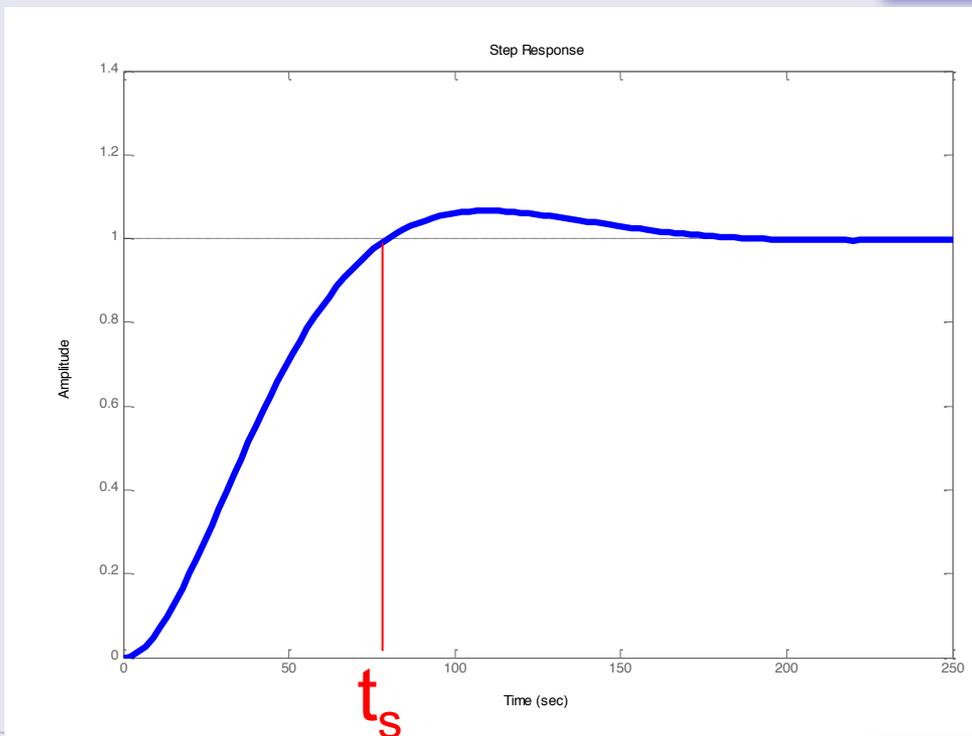
$$K' = |s(s + 0.025)|_{s=A} = 0.0014$$

$$K = \frac{5K'}{0.75} = 0.0096$$

Ejemplo 3: Control P del servomecanismo

$$\begin{aligned} A &= -0.025 + j0.0341 \\ &= -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \end{aligned} \Rightarrow \omega_n = |A| = \sqrt{0.025^2 + 0.0341^2} = 0.0423$$

$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = 64.59$$



Dado que la hipótesis de polos dominantes es válida, el valor de SO es semejante al esperado.

La especificación de tiempo de subida no se satisface.
Para reducir t_s se debe aumentar K , lo que implica aumentar SO.

Contenido

- Introducción al lugar de las raíces.
- Trazado del LR para $K > 0$
- Diseño de la ganancia del controlador
- **Mejora del comportamiento en lazo cerrado:**
 - **Respuesta transitoria**
 - **Respuesta en régimen permanente**
 - **Diseño de controladores**
- Extensiones:
 - Trazado del LR para $K < 0$
 - El LR generalizado

Diseño para respuesta transitoria

- El LR ilustra cómo la respuesta transitoria varía con la ganancia
- En cada punto del LR, la SO y el t_s se puede estimar (Hipótesis de polos dominantes)
- **Procedimiento de diseño (Primer caso):**
 - Dadas unas especificaciones, se determina si existe un punto A perteneciente al LR que las cumpla.
 - Si existe el punto A, entonces se calcula la ganancia para la cual los polos se ubican en A
 - Condición de módulo

$$K = \frac{1}{|G(A)|}$$

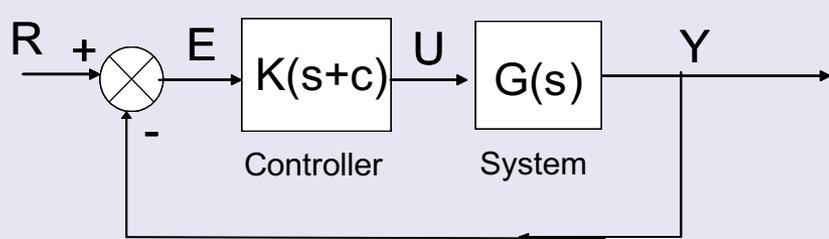
Diseño para respuesta transitoria

■ Procedimiento de diseño (Segundo caso):

- Si no existe un punto del LR que cumpla las especificaciones, las especificaciones no se pueden cumplir con un controlador P.
Entonces es necesario modificar el LR.
- De las especificaciones (δ, ω_n) se determina un punto A
- La adición de un controlador modifica el LR
- El controlador (PD o Red de Avance) se diseña para que el nuevo LR pase por A.
- Los polos y ceros del controlador se determinan para que se cumpla la condición de argumento en A
- Una vez que los ceros y polos del controlador se fijan, su ganancia se determina por la condición de magnitud en A

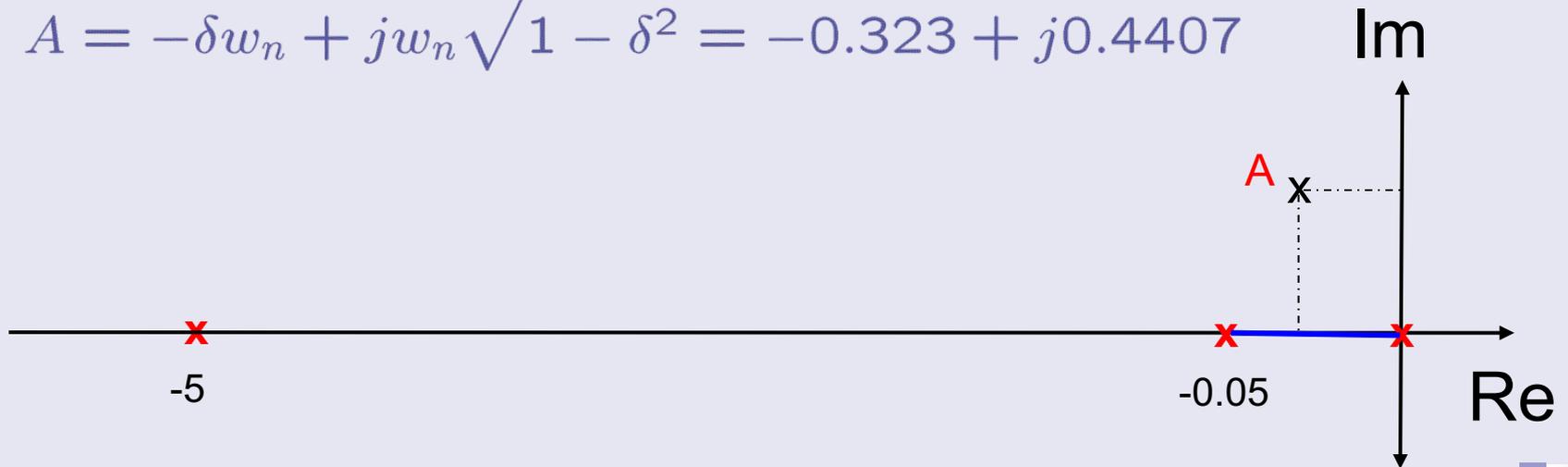
Ejemplo 4:

Controlador PD del servomecanismo

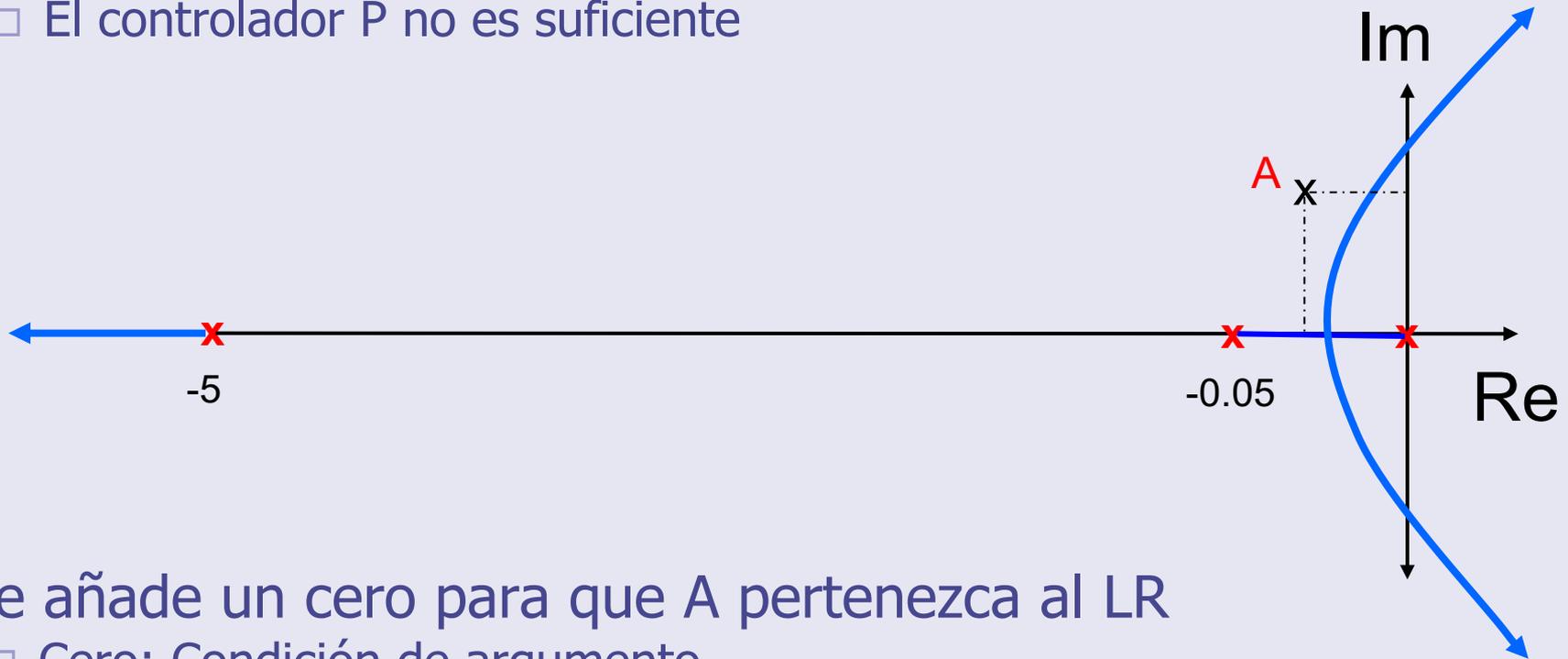


$$G(s) = \frac{0.75}{s(s+5)(s+0.05)}$$

- Especificaciones: $SO = 10\%$, $t_s = 5s$
- Se traducen en $\delta = 0.59$, $\omega_n = 0.54$
- El sistema en b.c. debe tener los polos dominantes en $A = -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -0.323 + j0.4407$



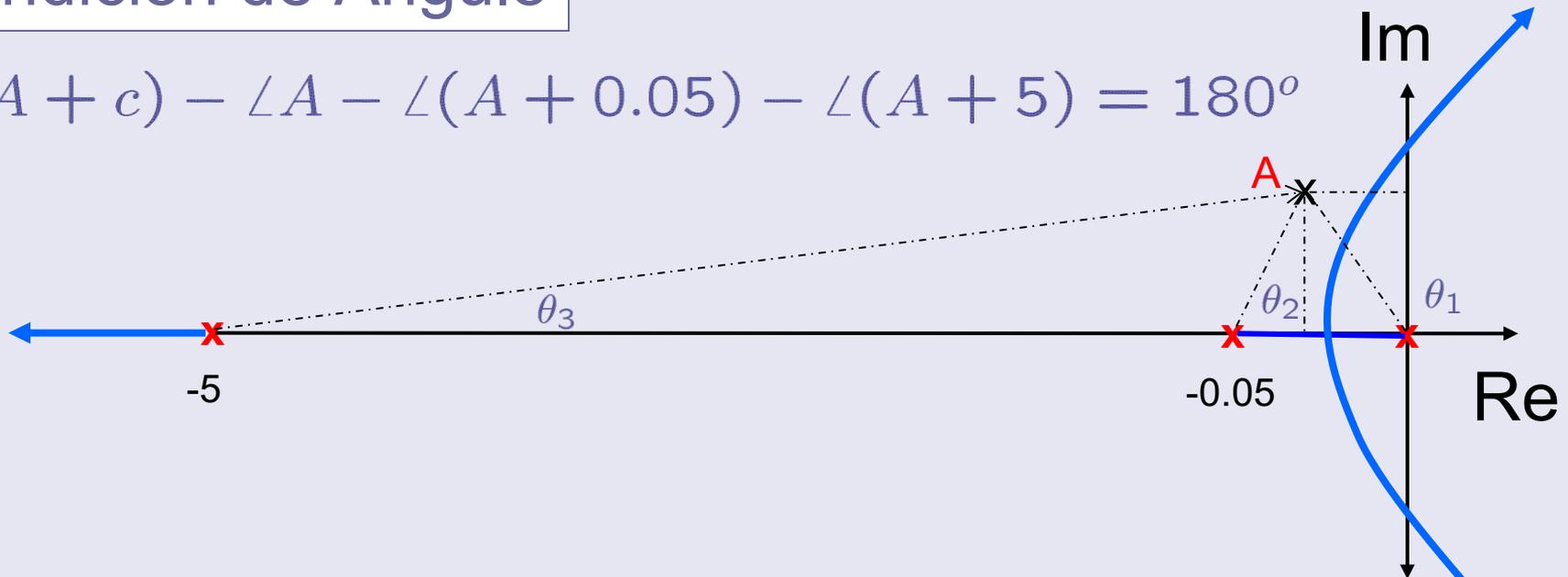
- El sistema sin compensar no pasa por el punto A
 - El controlador P no es suficiente



- Se añade un cero para que A pertenezca al LR
 - Cero: Condición de argumento
 - Ganancia: Condición de módulo

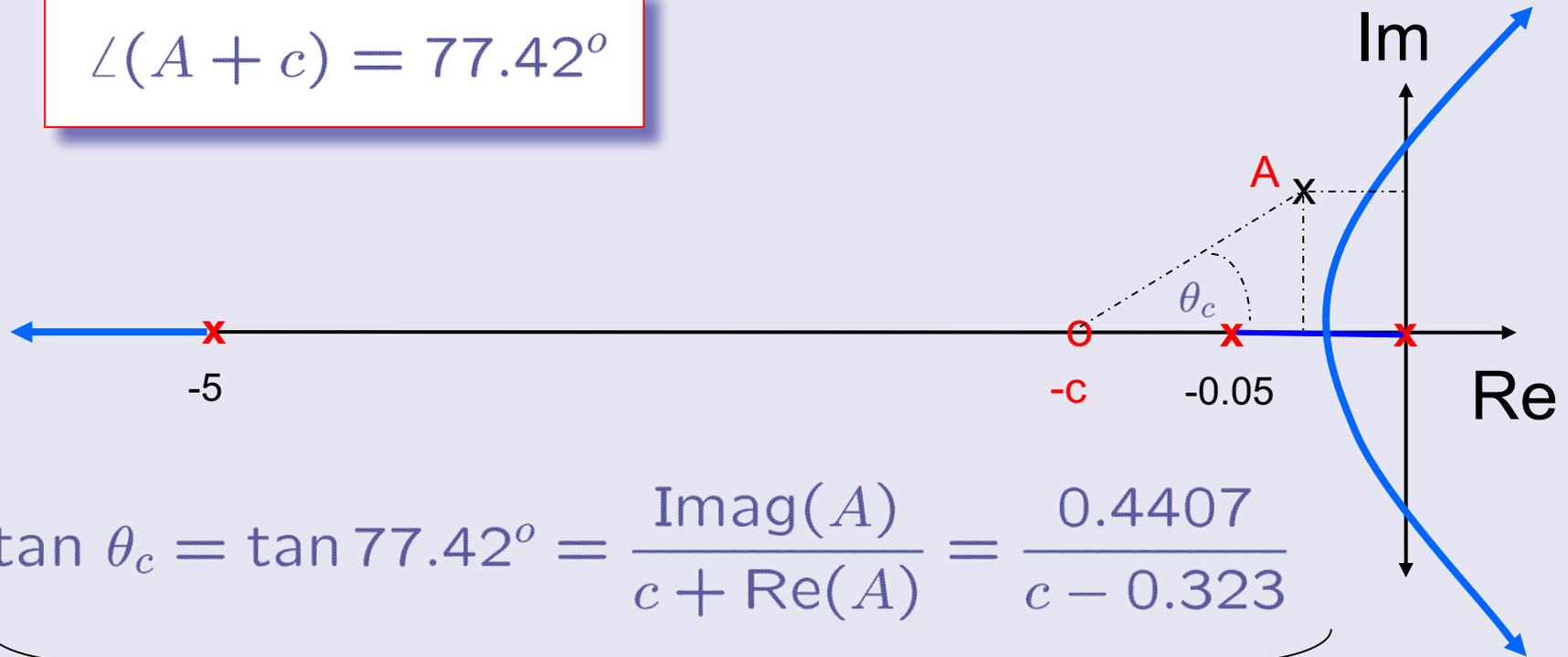
Condición de Ángulo

$$\angle(A + c) - \angle A - \angle(A + 0.05) - \angle(A + 5) = 180^\circ$$



$$\begin{aligned}\angle(A + c) &= 180^\circ + \angle A + \angle(A + 0.05) + \angle(A + 5) \\ &= 180^\circ + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 77.42^\circ\end{aligned}$$

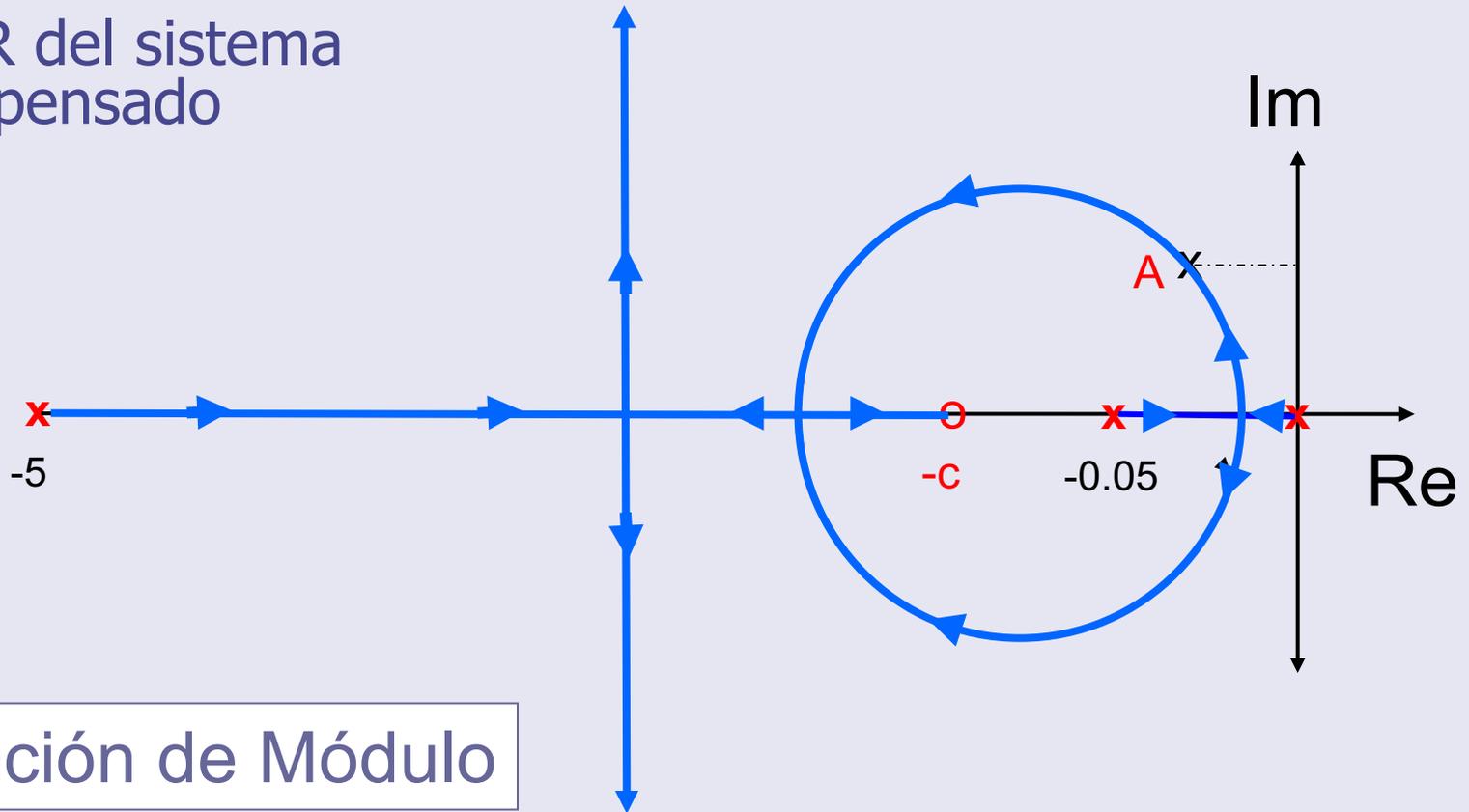
$$\angle(A + c) = 77.42^\circ$$



$$\tan \theta_c = \tan 77.42^\circ = \frac{\text{Imag}(A)}{c + \text{Re}(A)} = \frac{0.4407}{c - 0.323}$$

$$c = 0.4213$$

- El LR del sistema compensado



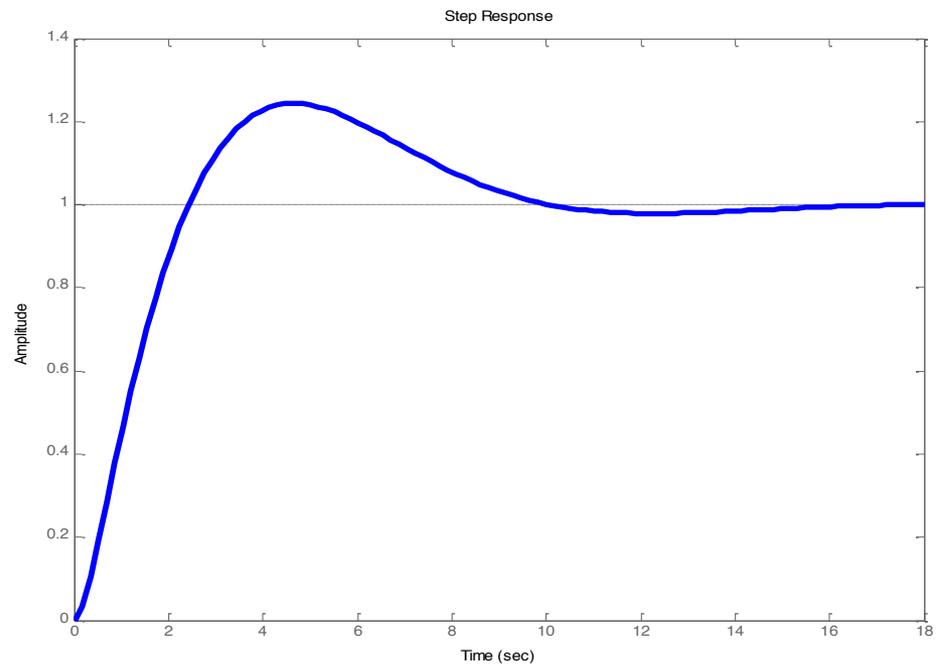
Condición de Módulo

$$1 + K(A + c)G(A) = 0 \Rightarrow K = \left| \frac{1}{(A + c)G(A)} \right| \Rightarrow K = 3.80$$

- La respuesta del sistema compensado no cumple las especificaciones
- Esto se debe al efecto del cero

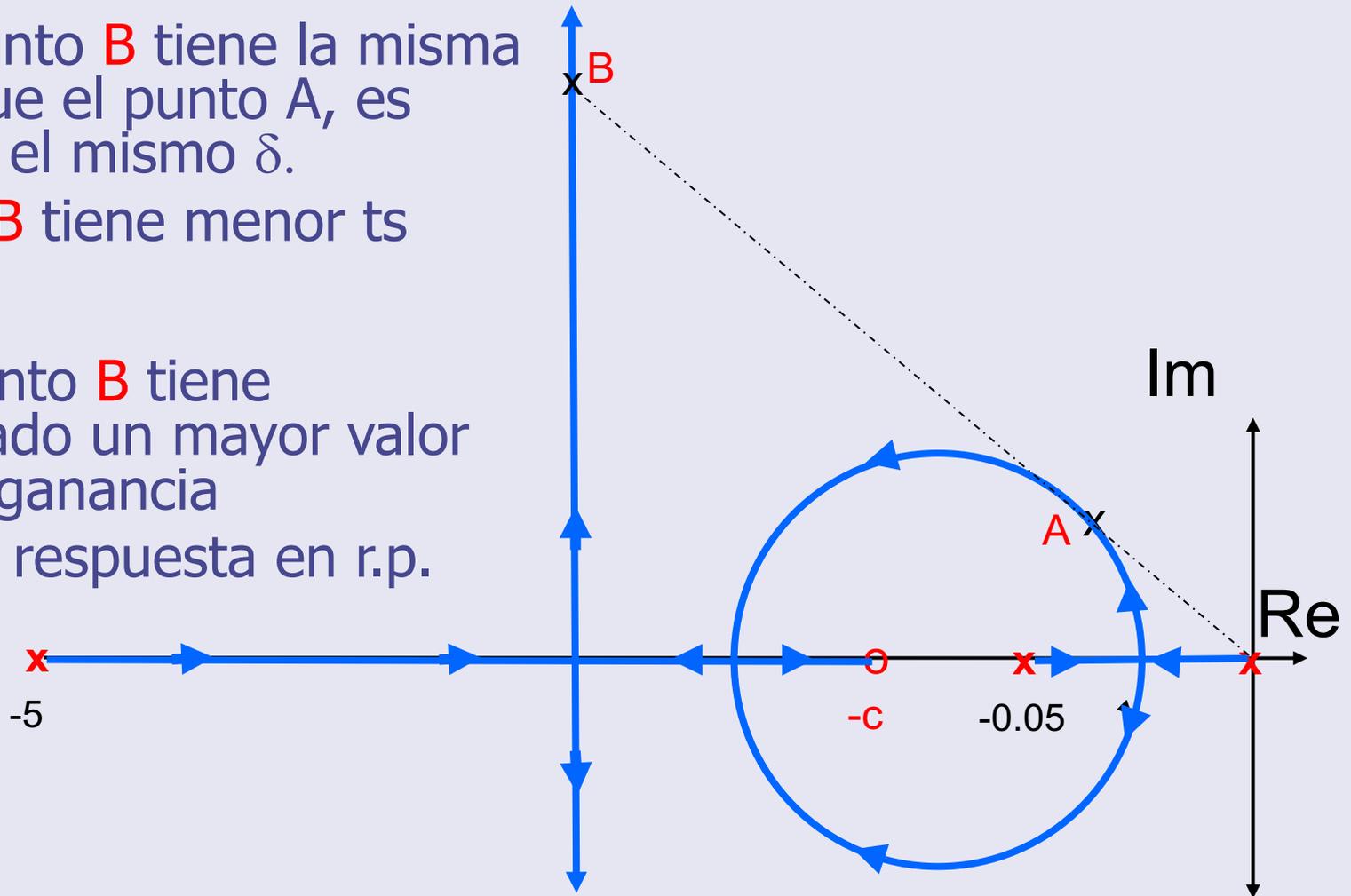
- $G_{bc}(s)$

$$\frac{2.85(s + 0.4213)}{(s + 4.409)(s^2 + 0.6414s + 0.2724)}$$



Ejemplo 4 (Revisitado)

- EL punto **B** tiene la misma SO que el punto A, es decir, el mismo δ .
- Pero **B** tiene menor t_s
- EL punto **B** tiene asociado un mayor valor de la ganancia
- Mejor respuesta en r.p.



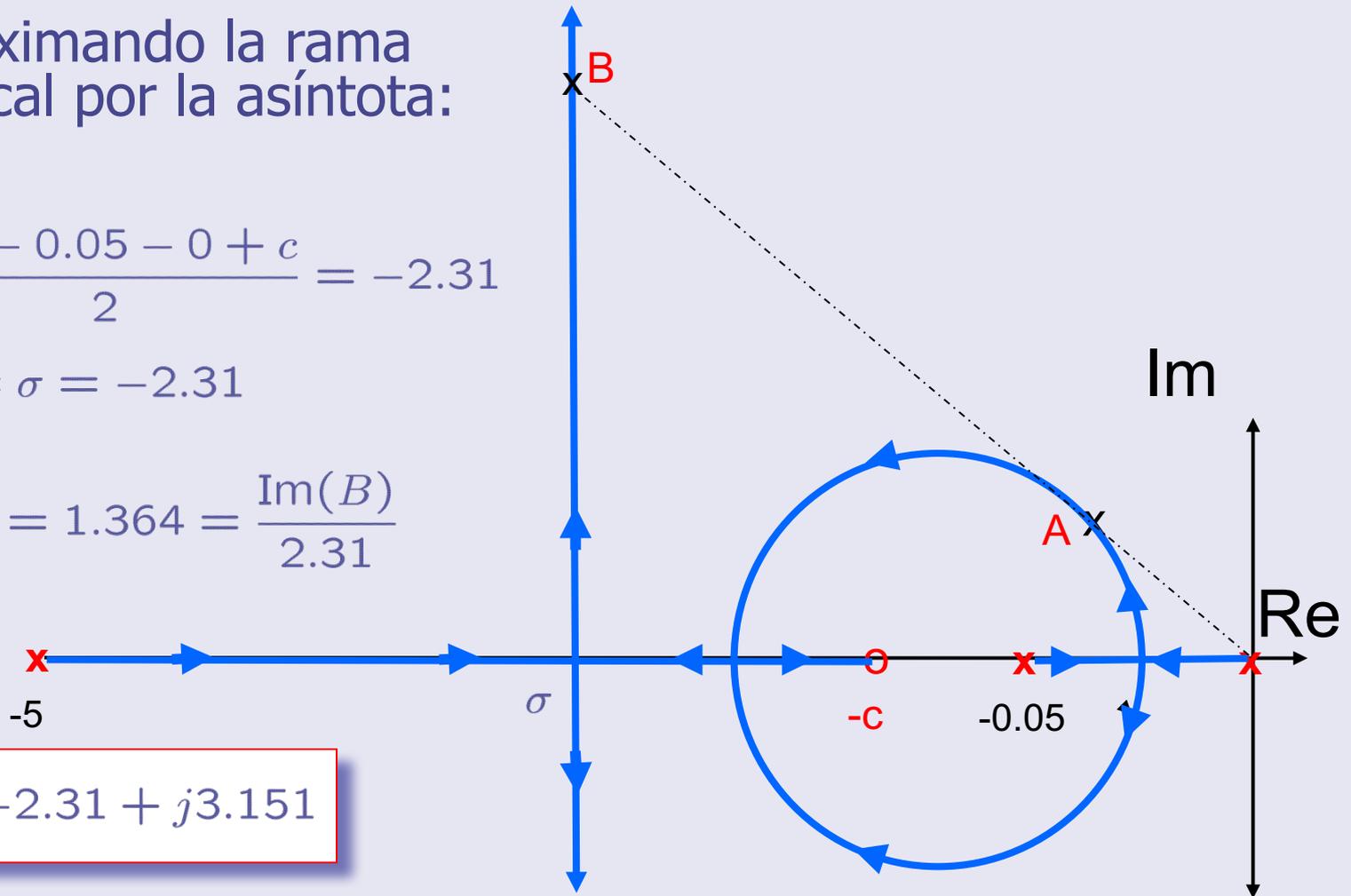
- Aproximando la rama vertical por la asíntota:

$$\sigma = \frac{-5 - 0.05 - 0 + c}{2} = -2.31$$

$$\text{Re}(B) = \sigma = -2.31$$

$$\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} = 1.364 = \frac{\text{Im}(B)}{2.31}$$

$$B = -2.31 + j3.151$$



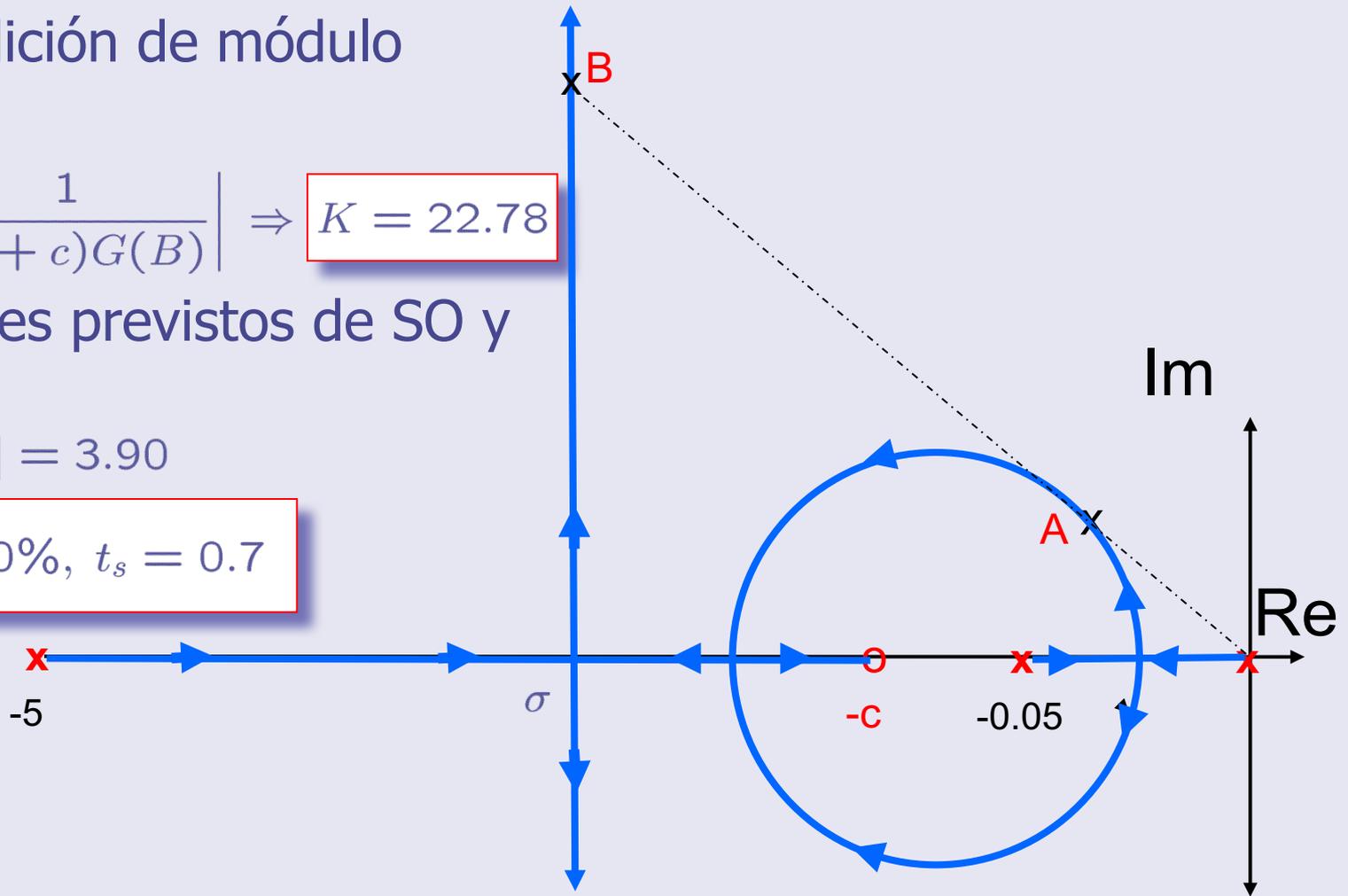
- Condición de módulo

$$K = \left| \frac{1}{(B + c)G(B)} \right| \Rightarrow K = 22.78$$

- Valores previstos de SO y t_s

$$\omega_n = |B| = 3.90$$

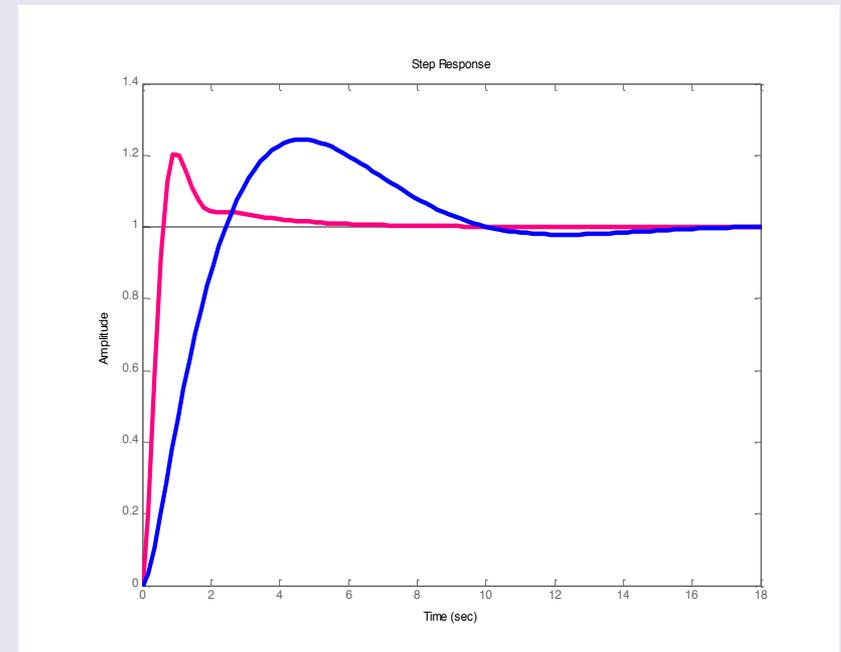
$$SO = 10\%, t_s = 0.7$$



- La respuesta del nuevo sistema controlado (**rojo**) es más rápida que el anterior (**azul**)
- El efecto del cero en $-c$ se cancela parcialmente por un polo en lazo cerrado.

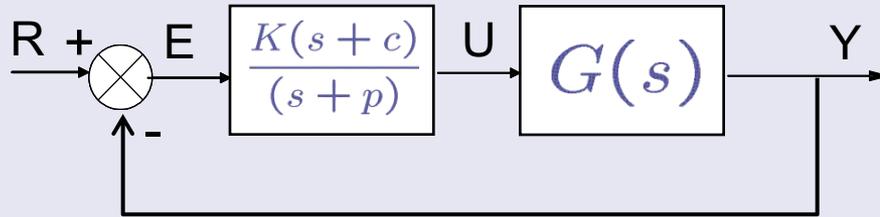
■ $G_{bc}(s)$:

$$\frac{17.085(s + 0.4213)}{(s + 0.4747)(s^2 + 4.575s + 15.16)}$$



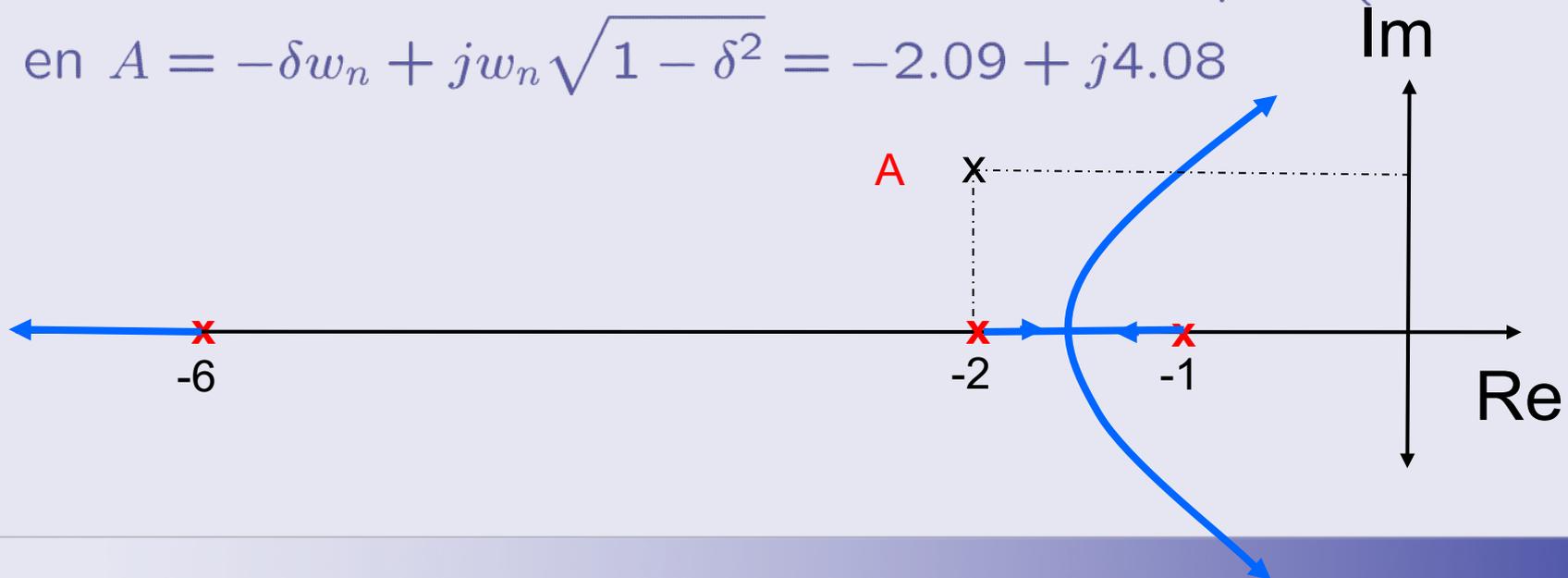
Ejemplo 5:

Red de avance de fase



$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$

- Especificaciones : $SO = 20\%$, $t_s = 0.5$ segundos.
- De aquí, $\delta = 0.4559$ y $\omega_n = 4.5938$
- El sistema en bucle cerrado debera tener un polo (dominante) en $A = -\delta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -2.09 + j4.08$



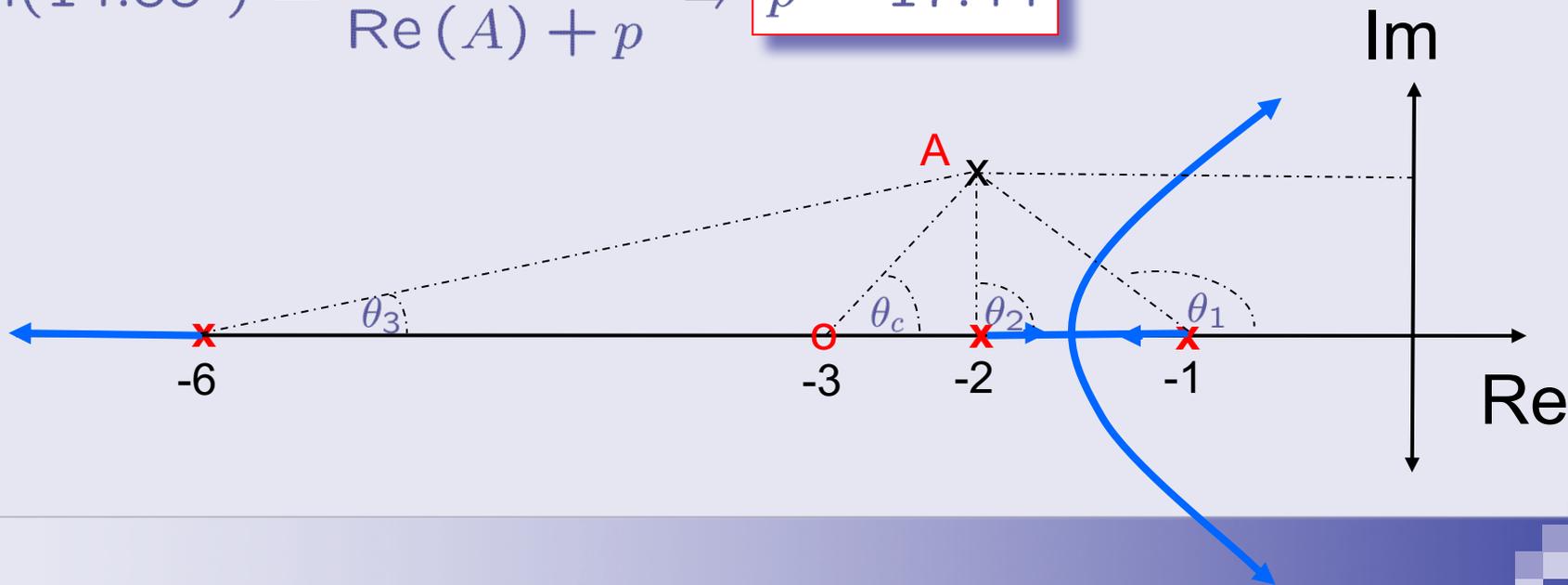
Ejemplo 5: Red de avance de fase

$c \in [\delta w_n, w_n] = [2.09, 4.593]$: por ejemplo, se elige $c = 3$

Criterio del argumento: $\angle\left(\frac{(A+c)}{(A+p)(A+1)(A+2)(A+6)}\right) = 180^\circ$

$$\angle(A+p) = -180 + \theta_c - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 14.885^\circ$$

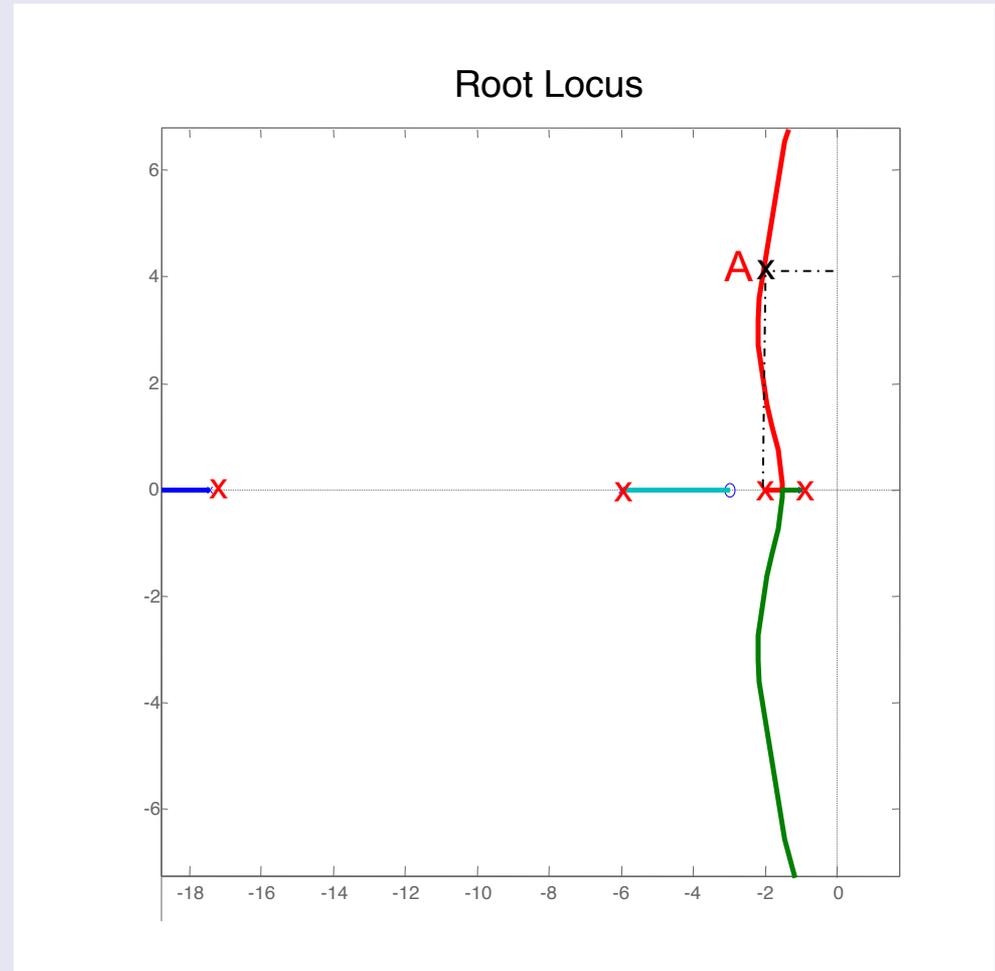
$$\tan(14.88^\circ) = \frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A) + p} \Rightarrow p = 17.44$$



Ejemplo 5: Red de avance de fase

Criterio del módulo:

$$K = \left| \frac{(A + p)(A + 1)(A + 2)(A + 6)}{3(A + c)} \right|$$
$$= 123.36$$



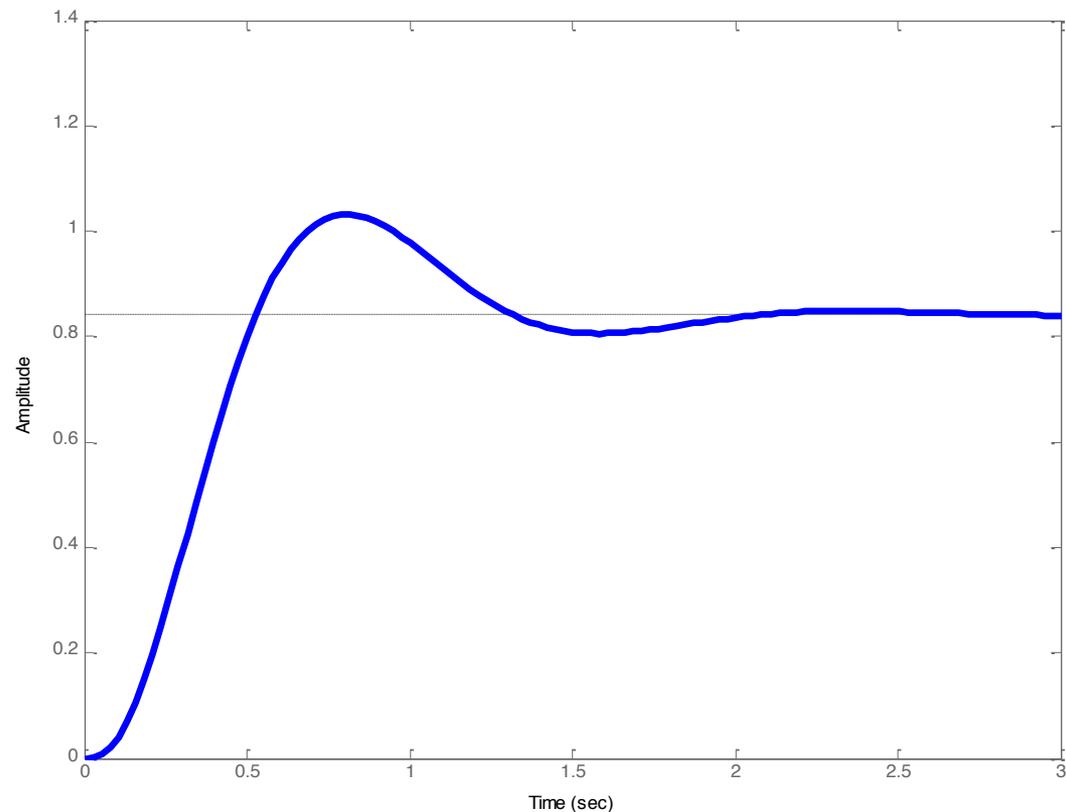
Ejemplo 5: Red de avance de fase

$SO = 22.80\%$
 $t_s \approx 0.5$ segundos

Polos bucle cerrado:

$-18.94, -3.3311,$
 $-2.09 \pm 4.08j$

Respuesta escalón sistema compensado



Contenido

- Introducción al lugar de las raíces.
- Trazado del LR para $K > 0$
- Diseño de la ganancia del controlador
- **Mejora del comportamiento en lazo cerrado:**
 - **Respuesta transitoria**
 - **Respuesta en régimen permanente**
 - **Diseño de controladores**
- Extensiones:
 - Trazado del LR para $K < 0$
 - El LR generalizado

Diseño para régimen permanente

- Hipótesis: Ya se ha diseñado un controlador (P,PD o RA) para mejorar SOLO la respuesta transitoria
 - el LR pasa por el punto deseado A y es polo dominante.
- Entonces, es posible mejorar su respuesta en régimen permanente añadiendo un PI o una Red de Retardo en serie.
- Idea:
 - Añadir parejas de polo y cero muy próximos al origen prácticamente NO modifica el LR en las proximidades de A.
 - Para ello, basta con que el cero esté a la derecha de $-|A|/10$
 - La razón entre el cero y el polo aumenta la constante de error.

Mejora del régimen permanente

- Se parte del sistema compensado en transitorio

$$\angle G(s_0) + \angle C_t(s_0) = \pi$$

$$K = \frac{1}{|G(s_0)||C_t(s_0)|}$$

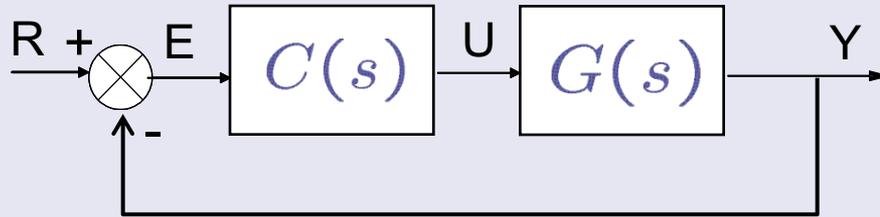
- Se diseña otro controlador tal que

- Mantenga el transitorio $\angle C_p(s_0) \simeq 0$

$$|C_p(s_0)| \simeq 1$$

- $C_p(0)$ garantice la constante de error deseada

Ejemplo 6: Controlador PI



$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$

- Especificaciones de transitorio: $SO = 20\%$, $t_s = 0.5$.
- De aquí, $\delta = 0.4559$ y $w_n = 4.5938$
- El sistema en bucle cerrado debería tener un polo (dominante) en $A = -\delta w_n + jw_n \sqrt{1 - \delta^2} = -2.09 + j4.08$
- Especificación en régimen permanente: error en posición igual a cero

Ejemplo 6: Controlador PI

$$C(s) = K \underbrace{\left(\frac{s+c}{s+p} \right)}_{\text{Red de avance}} \underbrace{\left(\frac{s+c_{PI}}{s} \right)}_{\text{PI}}$$

Red de avance PI \Rightarrow garantiza error posición igual a cero

Red de avance:
(transitorio)

se ajusta de forma que $1 + K \left(\frac{s+c}{s+p} \right) G(s) = 0$
tenga un polo (dominante) en A .

Controlador PI:
($e_p = 0$)

El cero del PI se elige en el intervalo

$$c_{PI} \in \left[\frac{w_n}{30}, \frac{w_n}{10} \right] = \left[\frac{|A|}{30}, \frac{|A|}{10} \right]$$

como el cero del PI es pequeño comparado con $|A|$, $\frac{A+c_{PI}}{A} \approx 1$ y

$$1 + K \left(\frac{s+c}{s+p} \right) \left(\frac{s+c_{PI}}{s} \right) G(s) = 0$$

también tiene un polo (dominante) próximo a A .

Ejemplo 6: Controlador PI

Red de avance:

Como se mostró en el ejemplo 5, la red de avance que garantiza $1 + K \left(\frac{A + c}{A + p} \right) G(A) = 0$ es $123.36 \left(\frac{s+3}{s+17.44} \right)$.

Controlador PI: En este caso, tomamos el cero igual a $-\frac{w_n}{10}$: $c_{PI} = 0.4584$.

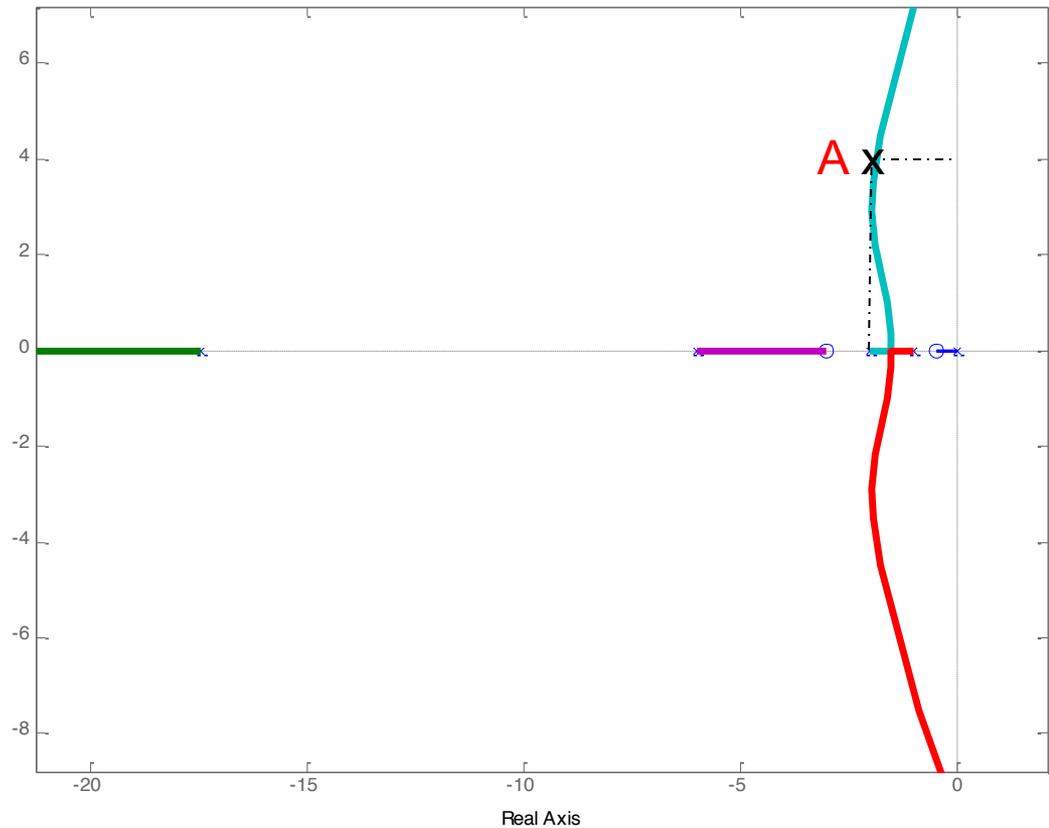
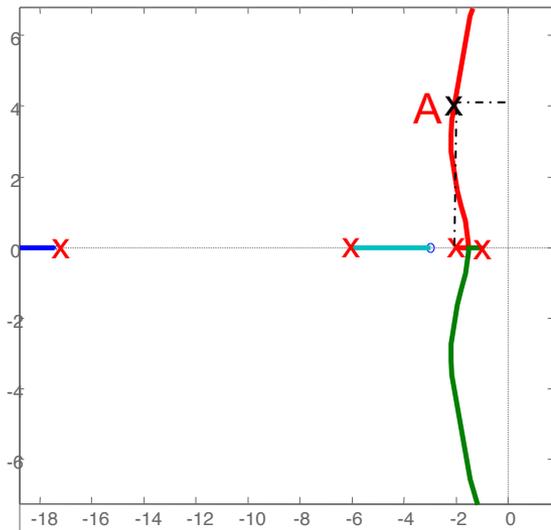
$$C(s) = 123.36 \underbrace{\left(\frac{s + 3}{s + 17.44} \right)}_{\text{Red de Avance}} \underbrace{\left(\frac{s + 0.4584}{s} \right)}_{\text{PI}}$$

Ejemplo 6: Controlador PI

El PI no modifica (sustancialmente) el lugar de las raíces en las proximidades de **A**

Lugar de las raíces (Red de avance + PI)

Lugar de las raíces (Red de avance)



Ejemplo 6: Controlador PI

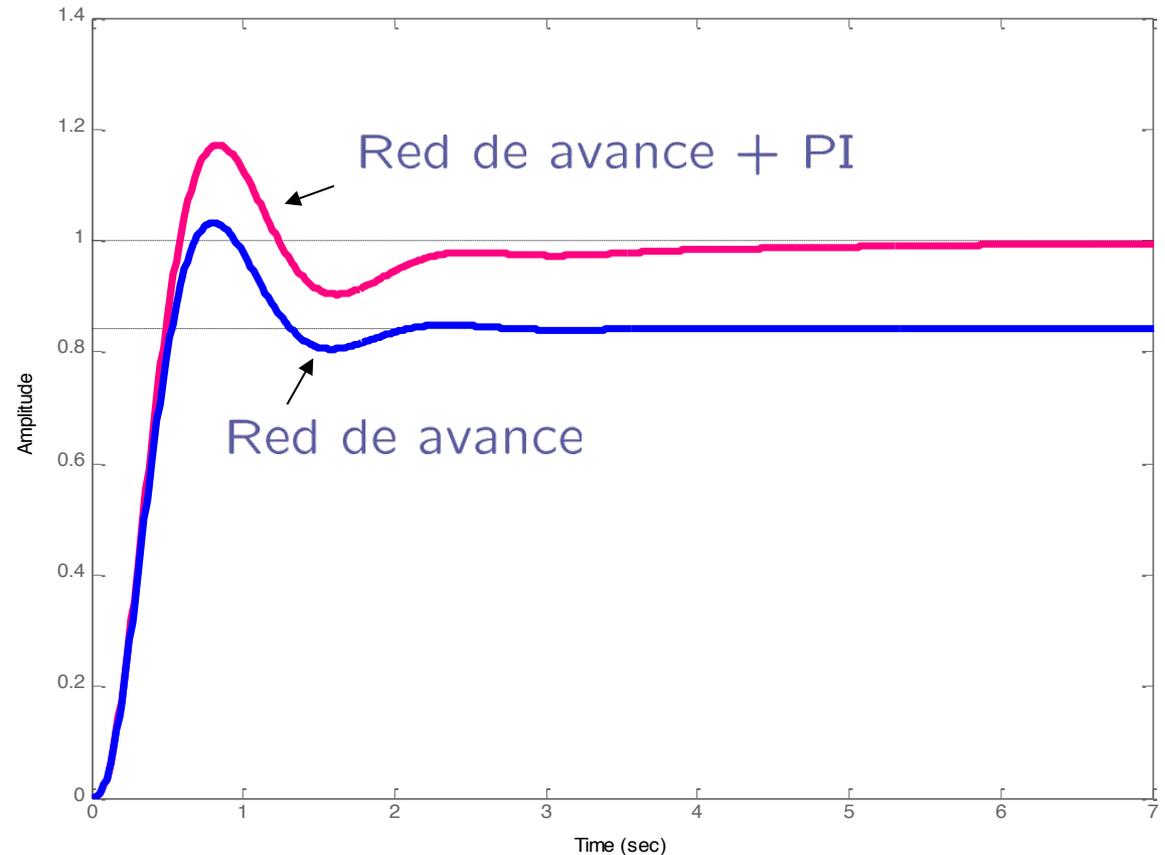
Polos bucle cerrado:

$-18.91, -3.37, -0.42,$
 $-1.86 \pm 3.9352j$

Ceros bucle cerrado:

$-3, -0.4584$

Respuesta escalón



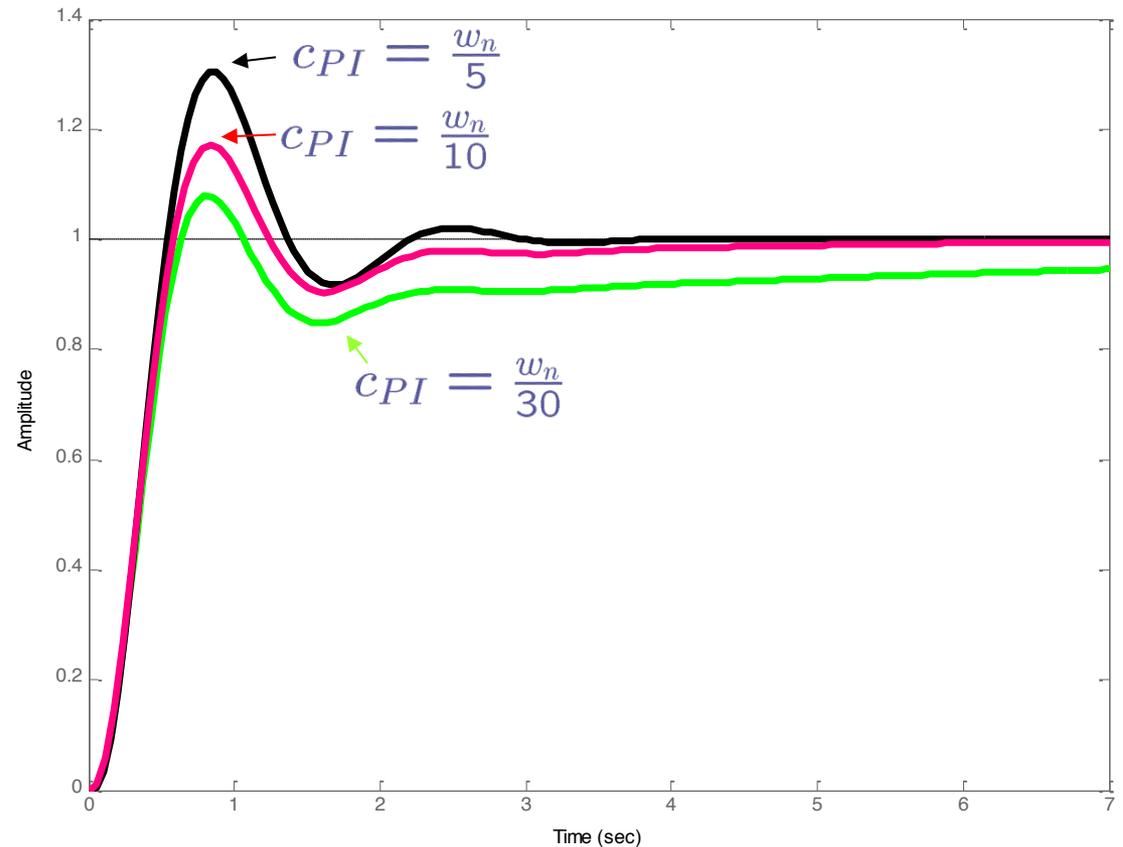
Ejemplo 6: Controlador PI

El lento tiempo de establecimiento es debido al polo lento cercano al origen

Tiempo establecimiento

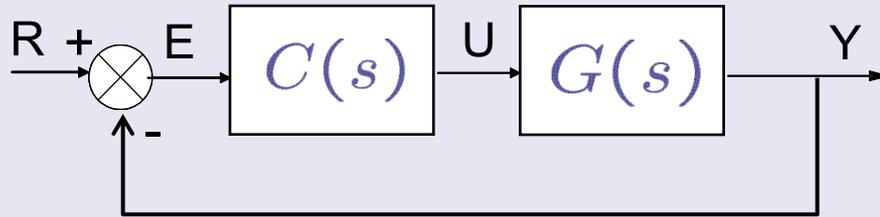
$$T_{5\%} \approx \frac{3}{C_{PI}}$$

Respuesta escalón



Ejemplo 7:

Red de retardo de fase



$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$

- Especificaciones de transitorio: $SO = 20\%$, $t_s = 0.5$.
 - De aquí, $\delta = 0.4559$ y $w_n = 4.5938$
 - El sistema en bucle cerrado debería tener un polo (dominante) en $A = -\delta w_n + jw_n \sqrt{1 - \delta^2} = -2.09 + j4.08$
- Especificaciones en régimen permanente:
Error de posición igual a 5%.

Ejemplo 7:

Red de retardo de fase

$$C(s) = K \underbrace{\left(\frac{s + c_1}{s + p_1} \right)}_{\text{Red de avance}} \underbrace{\left(\frac{s + c_2}{s + p_2} \right)}_{\text{Red de retardo}}$$

Red de avance Red de retardo

Red de avance:
(transitorio)

se diseña de forma que $1 + K \left(\frac{s + c_1}{s + p_1} \right) G(s) = 0$
tenga un polo (dominante) en A .

Red de retardo:
(régimen permanente)

El cero de la red de retardo se elige en el intervalo

$$c_2 \in \left[\frac{w_n}{30}, \frac{w_n}{10} \right] = \left[\frac{|A|}{30}, \frac{|A|}{10} \right]$$

El polo de la red de retardo (p_2) se elige de forma que se cumplan las especificaciones de régimen permanente

Como c_2 y p_2 son pequeños comparados con $|A|$, $\frac{A+c_2}{A+p_2} \approx 1$ y

$$1 + K \left(\frac{s + c_1}{s + p_1} \right) \left(\frac{s + c_2}{s + p_2} \right) G(s) = 0$$

también tendrá un polo (dominante) próximo a A .

Ejemplo 7:

Red de retardo de fase

Red de avance:

Como se mostraron en el ejemplo 5, la red de avance que garantiza $1 + K \left(\frac{A + c_1}{A + p_1} \right) G(A) = 0$ es $123.36 \left(\frac{s+3}{s+17.44} \right)$.

Red de retardo:

En este caso, se toma el cero igual a $-\frac{w_n}{10}$: $c_2 = 0.4584$.

$$e_p = 0.05 \Rightarrow \frac{1}{1+K_p} = 0.05 \Rightarrow K_p = 19$$

$$k_p = \left(\frac{Kc_1}{p_1} \right) \left(\frac{c_2}{p_2} \right) \left(\frac{3}{12} \right) = \frac{2.4318}{p_2} \Rightarrow p_2 = 0.128$$

$$C(s) = 123.36 \underbrace{\left(\frac{s+3}{s+17.44} \right)}_{\text{Red de avance}} \underbrace{\left(\frac{s+0.4584}{s+0.128} \right)}_{\text{Red de retardo}}$$

Red de avance

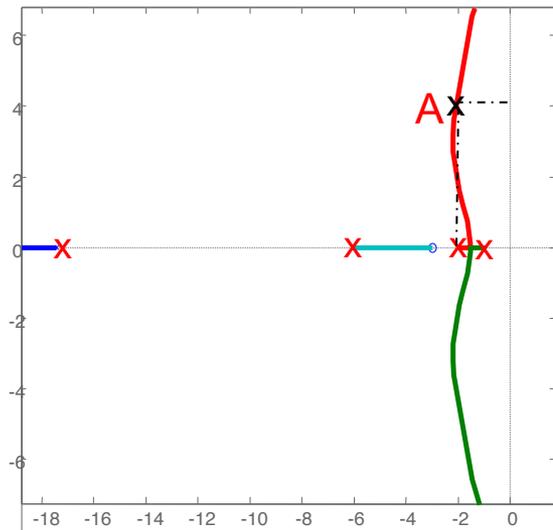
Red de retardo

Ejemplo 7:

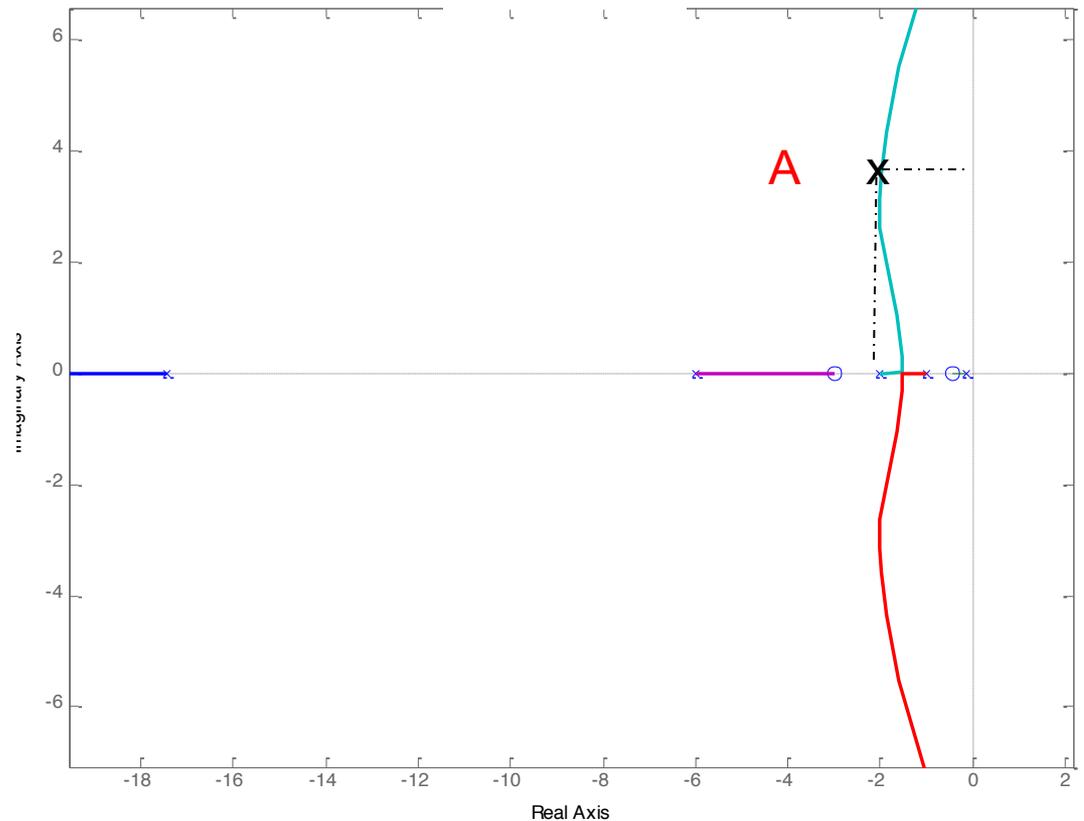
Red de retardo de fase

La red de retardo no modifica (sustancialmente) el lugar en las proximidades de **A**

Lugar de las raíces (Red de avance)



Lugar de las raíces (Red de avance + red de retardo)



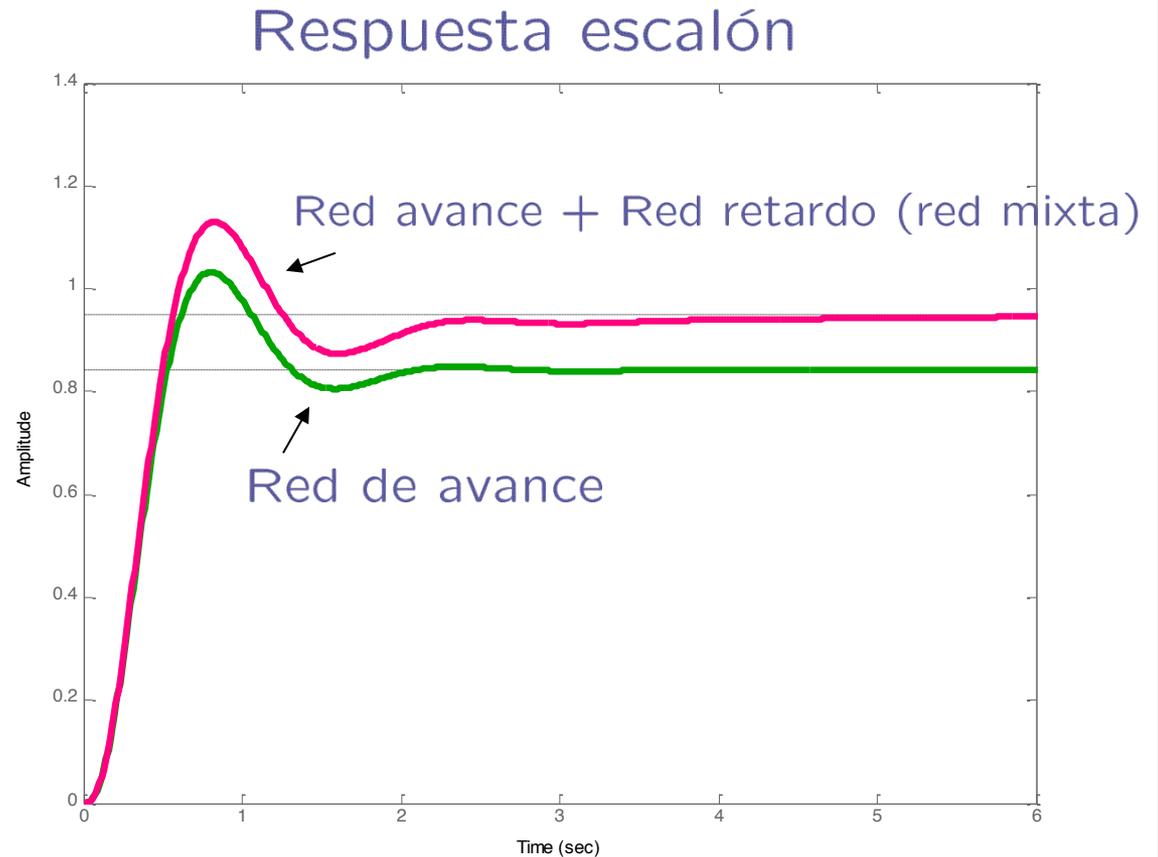
Ejemplo 7: Red de retardo

Polos bucle cerrado:

$-18.92, -3.359, -0.4314,$
 $-1.93 \pm 3.97j$

Ceros bucle cerrado:

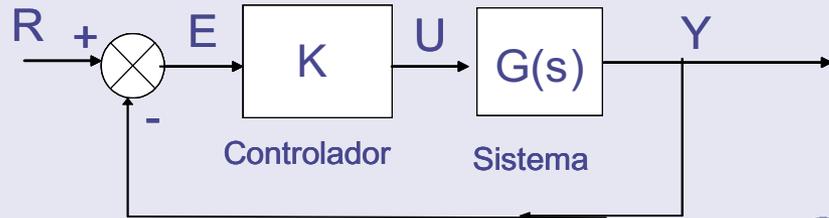
$-3, -0.4584$



Contenido

- Introducción al lugar de las raíces.
- Trazado del LR para $K > 0$
- Diseño de la ganancia del controlador
- Mejora del comportamiento en lazo cerrado:
 - Respuesta transitoria
 - Respuesta en régimen permanente
 - Diseño de controladores
- Extensiones:
 - **Trazado del LR para $K < 0$**
 - El LR generalizado

Lugar de las raíces para $K < 0$

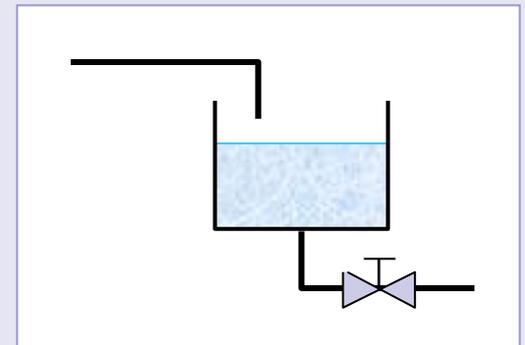


$$G(s) = \frac{(s+c_1)(s+c_2)\dots(s+c_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$$G_{bc}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \quad K < 0$$

En algunos casos sin embargo nos interesa $K < 0$

- Acción inversa:
Si $\uparrow u \Rightarrow \downarrow y$, entonces $\uparrow e \Rightarrow \downarrow u$
(Ganancia del controlador negativa)

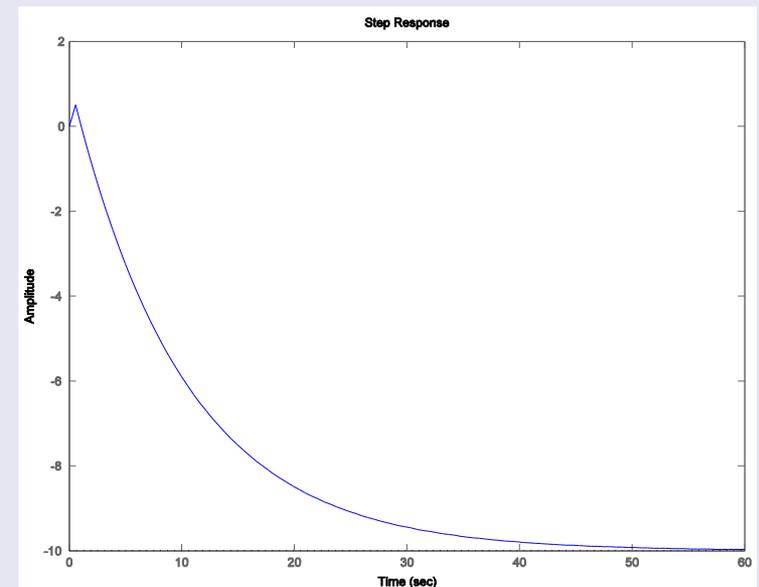


Ejemplo

$$G(s) = \frac{10(s - 1)}{(s + 10)(s + 0.1)} = \frac{-10(-s + 1)}{(0.1s + 1)(10s + 1)}$$

Ganancia de Bode negativa!

Para garantizar lazo de realimentación negativa necesitamos acción inversa $K < 0$



Caracterización de las raíces

$$d_{bc}(s) = d(s) + Kn(s) = 0 \Rightarrow \frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}$$

- Criterio del argumento

$$s_0 \in LR \text{ si } \angle \frac{n(s_0)}{d(s_0)} = \angle K = \begin{cases} \pi & \text{si } K > 0 \\ 0 & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

- Criterio del módulo

$$s_0 \text{ es polo para } K \text{ tal que } \left| \frac{n(s_0)}{d(s_0)} \right| = \frac{1}{|K|}$$

Lugar de las raíces para $K < 0$

1- Ubicar polos y ceros

Igual

2- Lugar sobre el eje real

s_0 2 LR si deja a la derecha un número par de polos y ceros **reales**.

3- Puntos de ingreso y separación

4- Asíntotas y centroide

$$\gamma_k = \frac{360 \times k}{n - m}, \quad \sigma = \frac{\sum(-p_i) - \sum(-c_k)}{n - m}$$

5- Puntos de corte con eje imaginario

6- Ángulos de salida y llegada a polos (ceros) complejos

$$\theta_p = 360 - \sum \phi_{p_i} + \sum \phi_{c_k}$$

$$\theta_c = 360 + \sum \phi_{p_i} - \sum \phi_{c_k}$$

Ejemplo

$$G(s) = K \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 3.25}, \quad K < 0$$

Paso 1. Ubicar polos y ceros

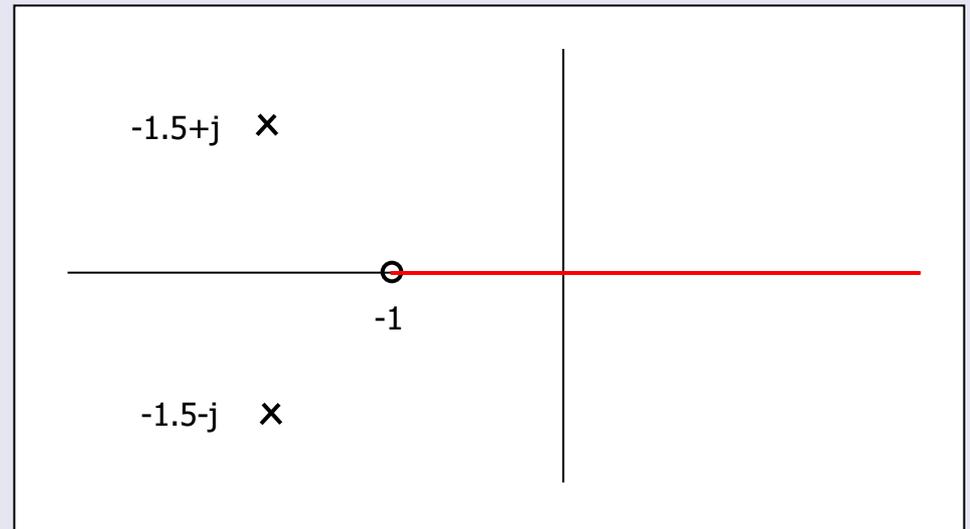
$$c_1 = -1$$

$$p_1 = -1.5 + j$$

$$p_2 = -1.5 - j$$

Paso 2. Lugar eje real

$$s \in [-1, \infty)$$



Ejemplo

Paso 3. Puntos de separación e ingreso

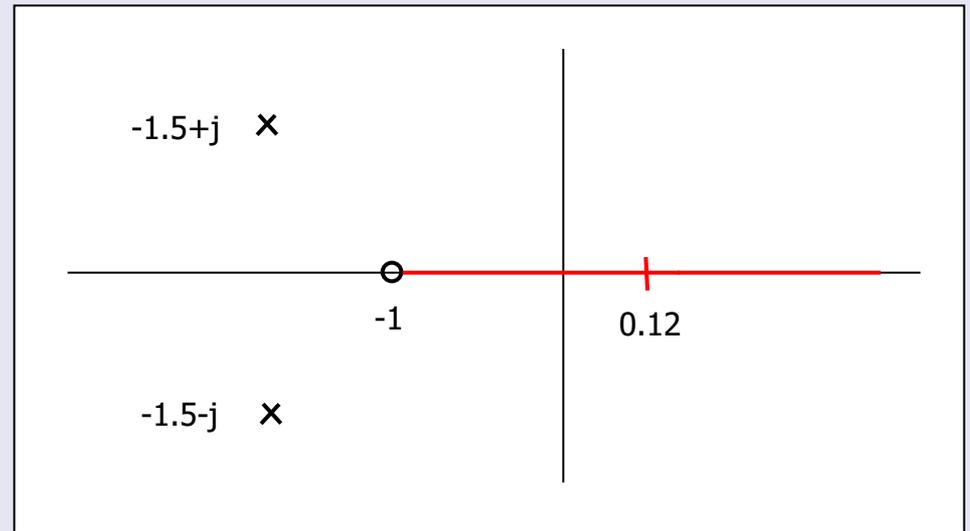
$$d'(s)n(s) - d(s)n'(s) = s^2 + 2s - 0.25 = 0$$

Raíces de:

$$s^2 + 2s - 0.25 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{5}}{2} = -2.12, 0.12$$

Posición en el eje real de $K < 0$

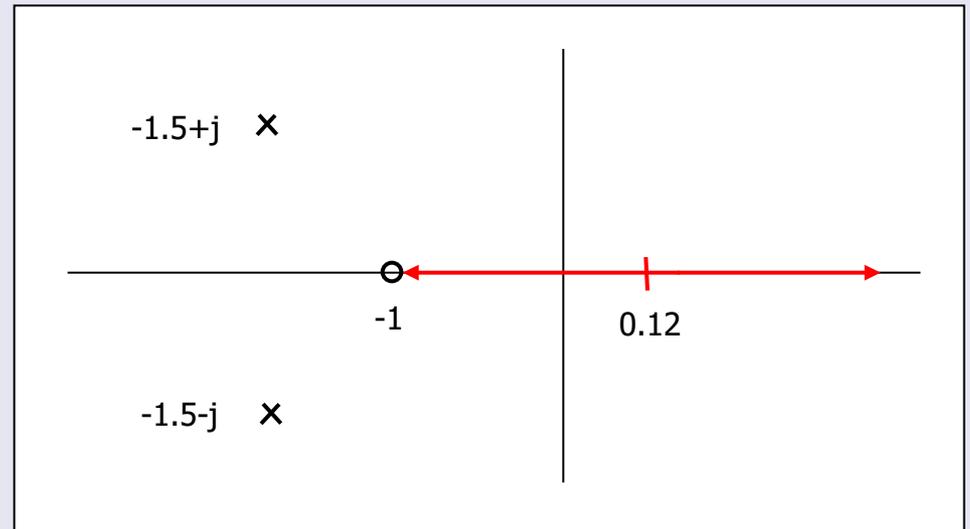


Ejemplo

Paso 4. Asíntotas y centroide

$n=2, m=1$ implica la existencia de una única asíntota

$$\gamma_0 = \frac{360 \times 0}{n - m} = 0^\circ$$



Ejemplo

Paso 5. Corte con eje imaginario

$$\begin{array}{l|l} \text{Routh-Hurwitz} & s^2 \quad 1 \qquad 3.25 + K \\ & s^1 \quad 3 + K \\ & s^0 \quad 3.25 + K \end{array}$$

Ecuación subsidiaria $K=-3$

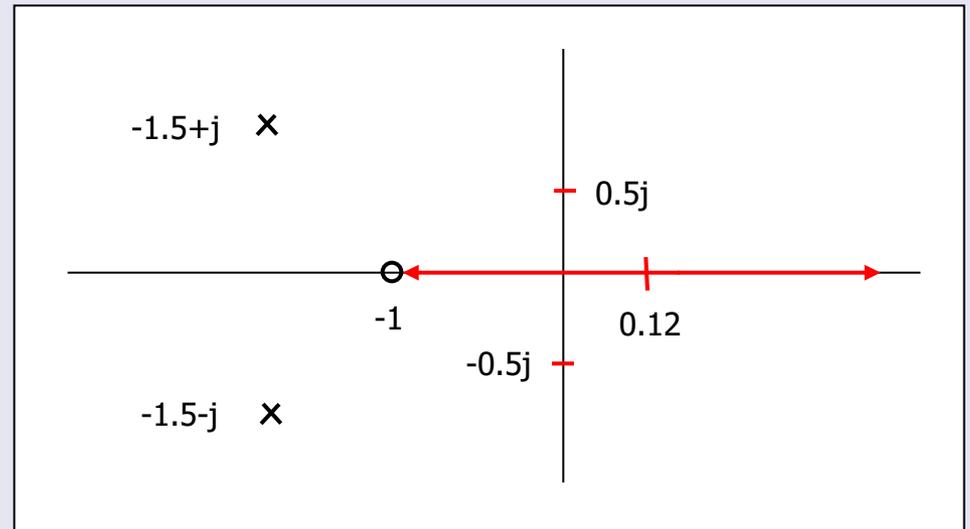
$$s^2 + 3.25 + K = 0$$

$$s_c = \pm 0.5j$$

Ecuación subsidiaria $K=-3.25$

$$(3 + K)s = 0$$

$$s_c = 0$$

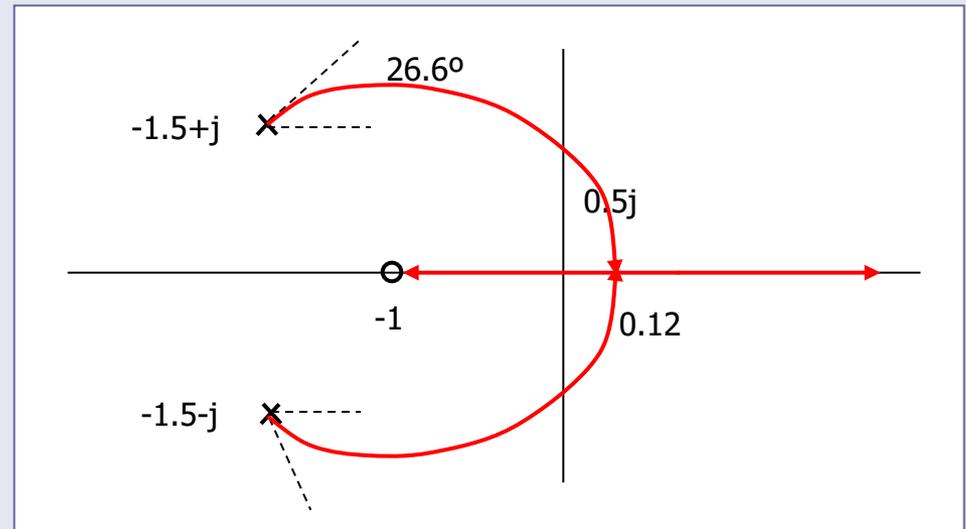
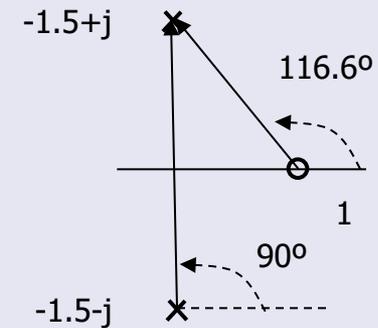


Ejemplo

Paso 5. Ángulo de salida de ceros complejos

$$\theta_p = 360 - \sum \phi_{p_i} + \sum \phi_{c_k}$$

$$\theta = 116.6^\circ - 90^\circ = 26.6^\circ$$

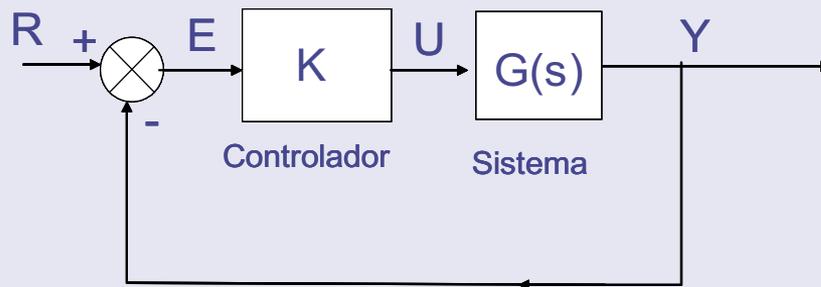


Contenido

- Introducción al lugar de las raíces.
- Trazado del LR para $K > 0$
- Diseño de la ganancia del controlador
- Mejora del comportamiento en lazo cerrado:
 - Respuesta transitoria
 - Respuesta en régimen permanente
 - Diseño de controladores
- Extensiones:
 - Trazado del LR para $K < 0$
 - **El LR generalizado**

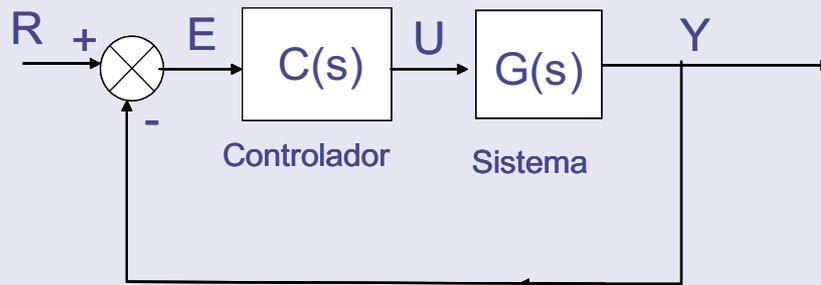
Lugar de las raíces generalizado

Lugar de las raíces



$$G_{bc}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Lugar de las raíces generalizado: Parámetros diferentes de K



$$G_{bc}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

Ejemplo: $C(s) = PD, PI, PID...$

Lugar de las raíces generalizado

El sistema realimentado depende de un parámetro α de forma que

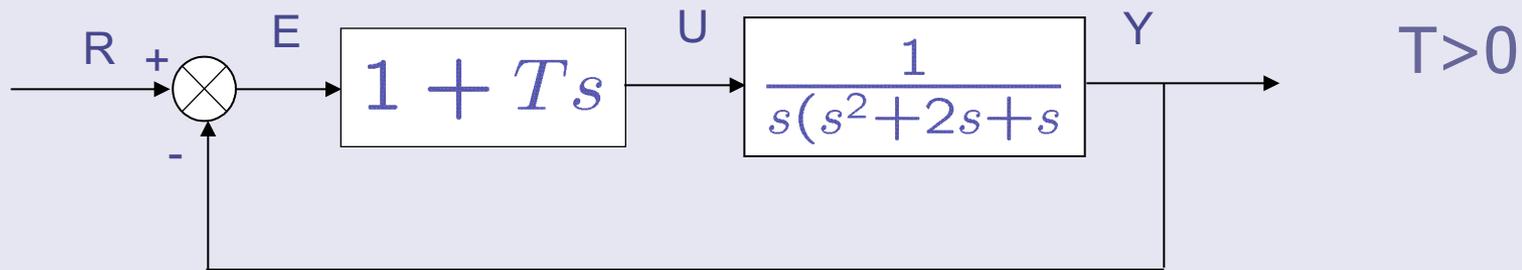
$$d_{bc}(s) = \hat{d}(s) + \alpha \hat{n}(s) \quad \text{ord}(\hat{d}(s)) \geq \text{ord}(\hat{n}(s))$$

La misma estructura que hemos estudiado:

Problema canónico con $\hat{G}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \neq G(s)$

Podemos usar las mismas herramientas

Ejemplo



Estudiar la influencia del parámetro T en los polos del sistema en lazo cerrado.

1) Calculamos la ecuación característica

$$G_{bc}(s) = \frac{1+Ts}{s(s^2+2s+2)+(1+Ts)} \rightarrow s^3 + 2s^2 + 2s + 1 + Ts = 0$$

2) Determinar $\hat{G}(s)$

$$1 + T\hat{G}(s) = 0 \rightarrow 1 + T \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = 0$$

Ejemplo

$$1 + T \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = 0 \quad T > 0$$

Paso 1. Ubicar polos y ceros

$$c_1 = 0$$

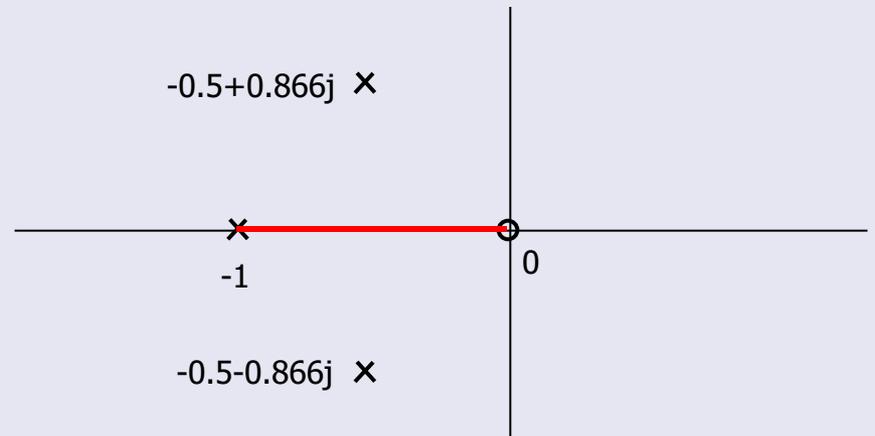
$$p_1 = -0.5 + 0.866j$$

$$p_2 = -0.5 - 0.866j$$

$$p_3 = -1$$

Paso 2. Lugar eje real

$$s \in [-1, 0]$$



Ejemplo

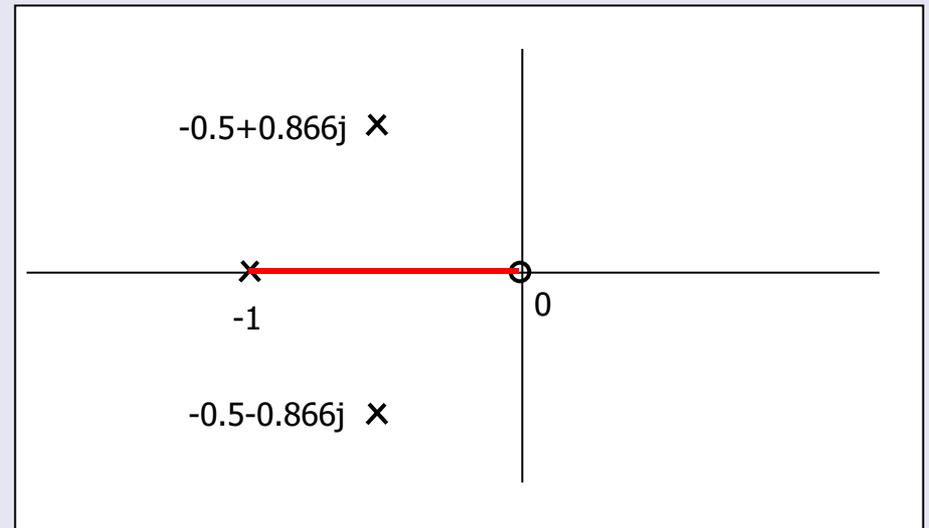
Paso 3. Puntos de separación e ingreso

$$\hat{d}'(s)\hat{n}(s) - \hat{n}'(s)\hat{d}(s) = 2s^3 + 2s^2 - 1$$

Raíces de:

$$2s^3 + 2s^2 - 1 = 0$$

$$s = \begin{cases} -0.7826 \pm 0.5217j \\ 0.5652 \end{cases}$$



No pertenecen a el eje real del lugar de las raíces para $T > 0$

No hay puntos de separación

Ejemplo

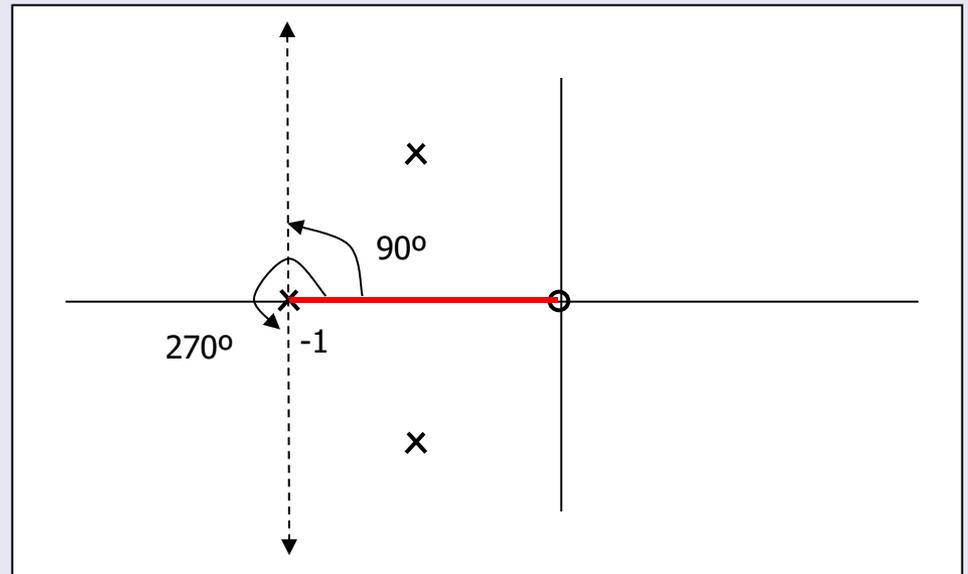
Paso 4. Asíntotas y centroide

$n=3, m=2$ implica la existencia de dos asíntotas

$$\gamma_{1,2} = 90^\circ, 270^\circ$$

Centroide

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum c_i}{n - m} = -1$$



Ejemplo

Paso 5. Corte con eje imaginario

Routh-Hurwitz

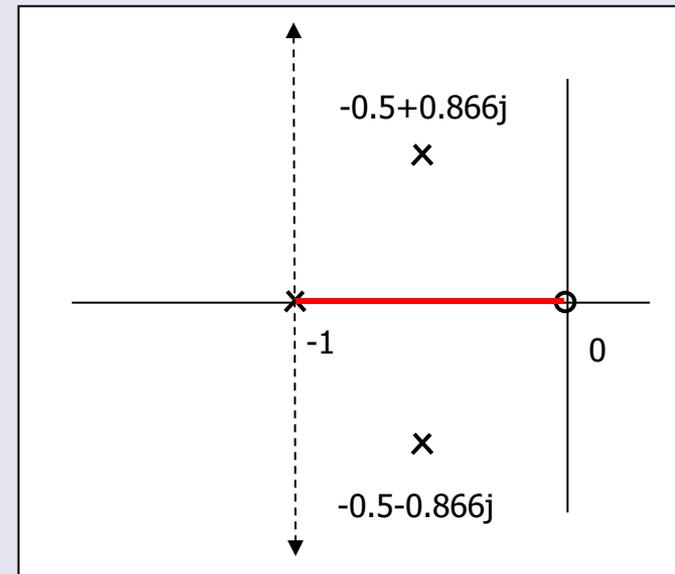
$$\begin{array}{c|l} s^3 & 1 \\ s^2 & 2 \\ s^1 & \frac{2(2+T)-1}{2} \\ s^0 & 1 \end{array}$$

$$2 + T \\ 1$$

Cambio de signo
(corte con eje imaginario)

$$T = -3/2$$

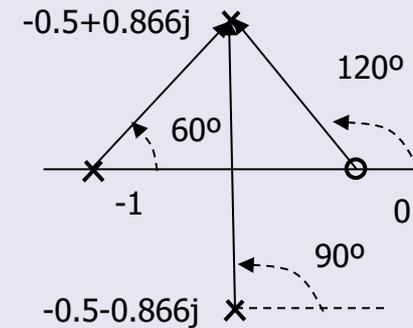
El lugar de las raíces de $T > 0$ no corta el eje imaginario.



Ejemplo

Paso 5. Ángulo de salida de ceros complejos

$$\theta_p = 180 - \sum \phi_{p_i} + \sum \phi_{c_k}$$



$$120^\circ = 180 - \arctan \frac{0.866}{0.5}$$

$$60^\circ = \arctan \frac{0.866}{0.5}$$

$$\theta_p = 180 - 60 - 90 + 120 = 150^\circ$$

