

Tema 10: Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia

Parte II

Control Automático

Índice

- **Introducción**
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Moldeo de la función de lazo.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Introducción

- ❑ Los métodos en el dominio de la frecuencia son clásicos en ingeniería de control.
- ❑ El lazo de realimentación se analiza considerando que las señales y sistemas se describen mediante una descripción frecuencial.

Qué aprenderemos en este tema?

- ❑ Por qué las técnicas frecuenciales son herramientas útiles para diseñar/analizar controladores.
- ❑ Cómo la estabilidad del sistema realimentado se puede analizar por métodos frecuenciales.
- ❑ Cómo las especificaciones y objetivos de control se trasladan al dominio de la frecuencia.
- ❑ Cómo se pueden diseñar controladores (P, PD, PI, PID) desde un punto de vista diferente (con sus pros y sus contras).

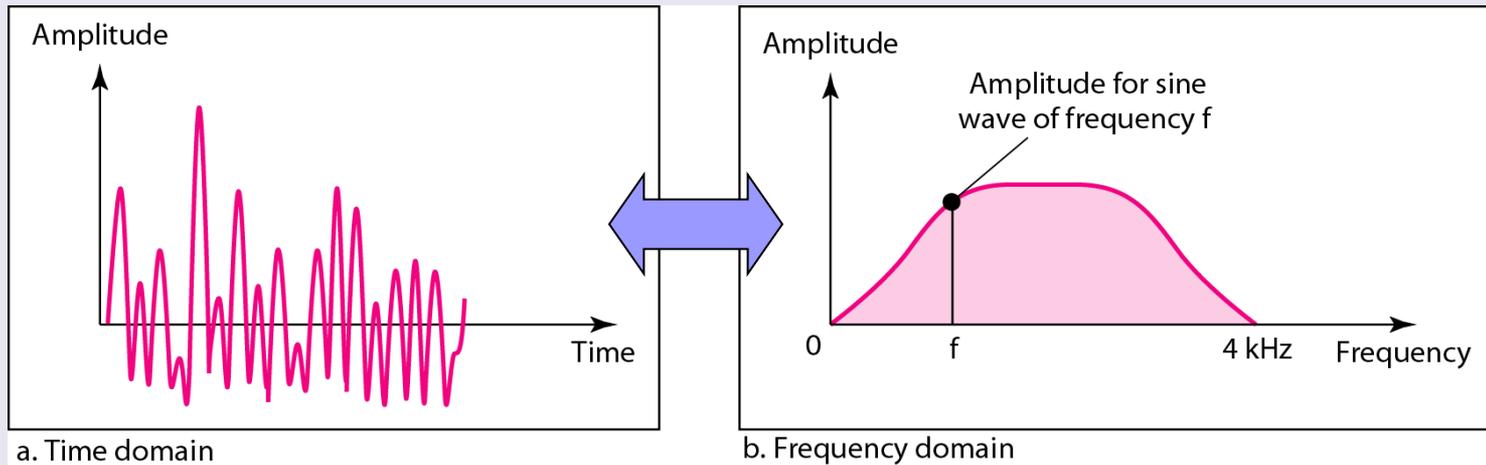
Índice

- Introducción
- **Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia**
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Moldeo de la función de lazo.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia

Por qué el dominio de la frecuencia?

Algunas nociones básicas

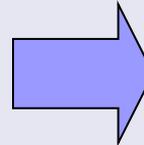


- ❑ Los dominios del tiempo y de la frecuencia son descripciones matemáticas equivalentes de la misma realidad
- ❑ Ambas contienen la misma información

Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia

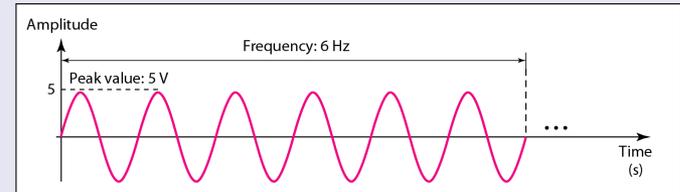
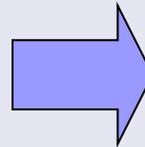
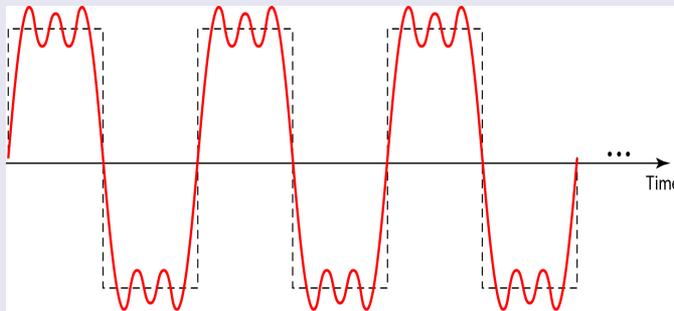
Interpretación del dominio de la frecuencia

- Ejemplo: representación de un seno en el dominio de la frecuencia (DF).
- Información sobre la amplitud y frecuencia en el dominio del tiempo (DT)

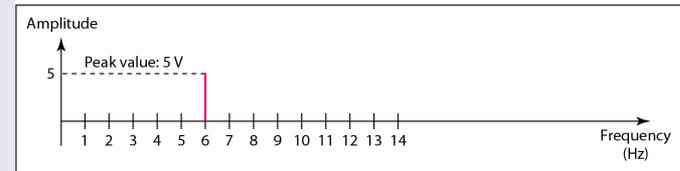


Qué ocurre con señales más complejas?

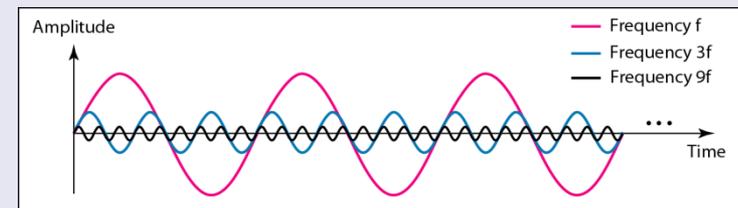
Una señal en el DT puede describirse como una **suma de ondas** con diferentes amplitudes y fases (Propiedad de Linealidad)



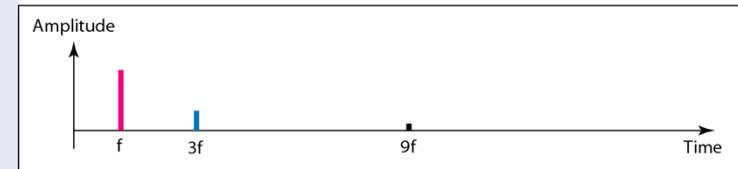
a. A sine wave in the time domain (peak value: 5 V, frequency: 6 Hz)



b. The same sine wave in the frequency domain (peak value: 5 V, frequency: 6 Hz)



a. Time-domain decomposition of a composite signal



b. Frequency-domain decomposition of the composite signal

Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia

¿Cómo se puede calcular las componentes frecuenciales de una señal temporal?

□ Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} x(t) dt$$

Nota: Si la transformada de Fourier converge, ésta es equivalente a la transformada de Laplace de la señal evaluada en $s = j\omega$

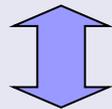
$$\mathcal{F}(x(t))(\omega) = \mathcal{L}(x(t))(s)|_{s=j\omega}$$

Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia

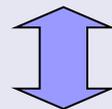
La transformada de Laplace es la herramienta básica para analizar sistemas lineales.

Hay una relación útil entre

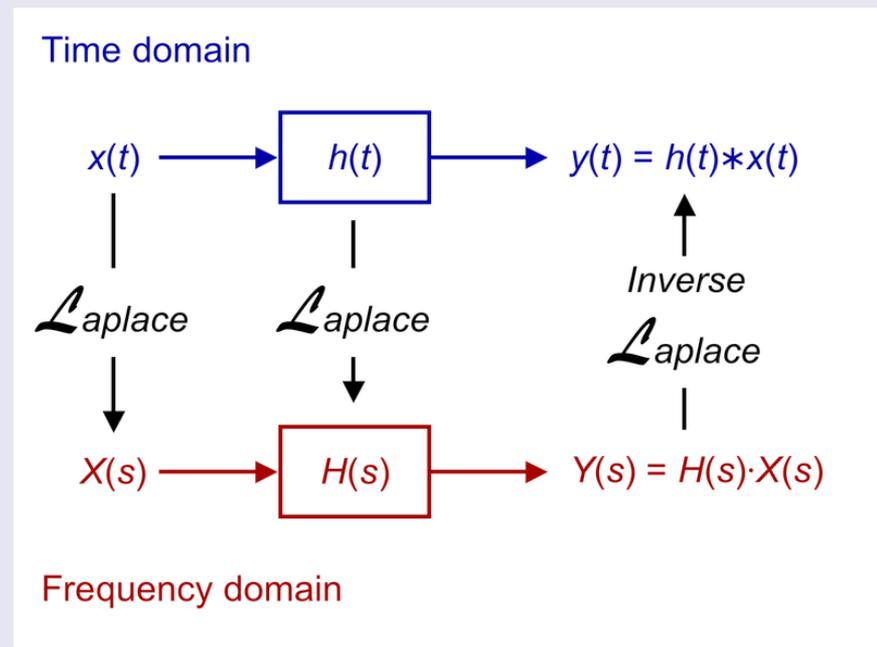
Dominio temporal



Dominio de Laplace



Dominio de Fourier



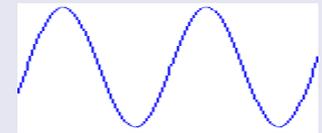
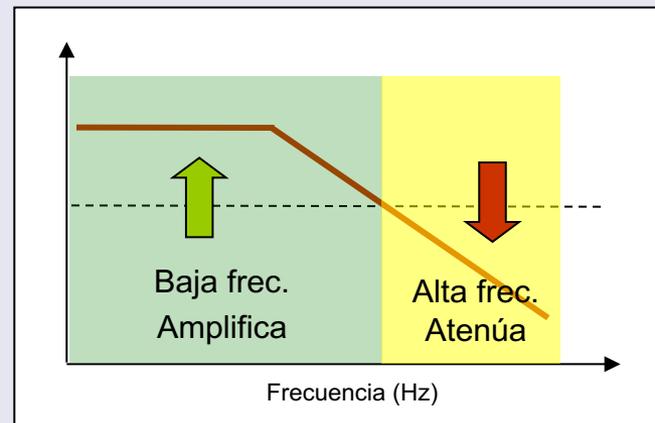
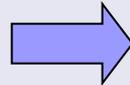
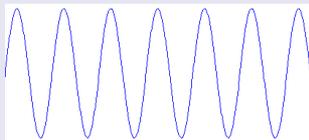
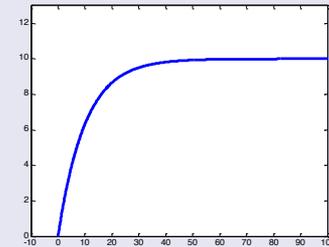
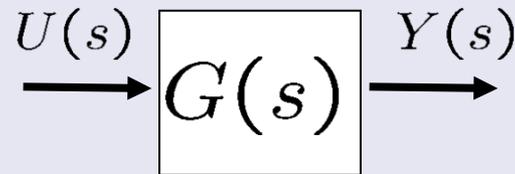
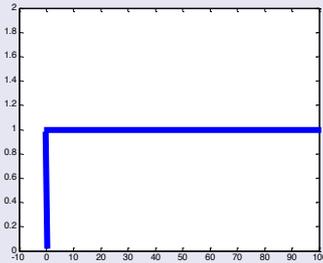
Índice

- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- **Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.**
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Moldeo de la función de lazo.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Sistemas dinámicos como filtros

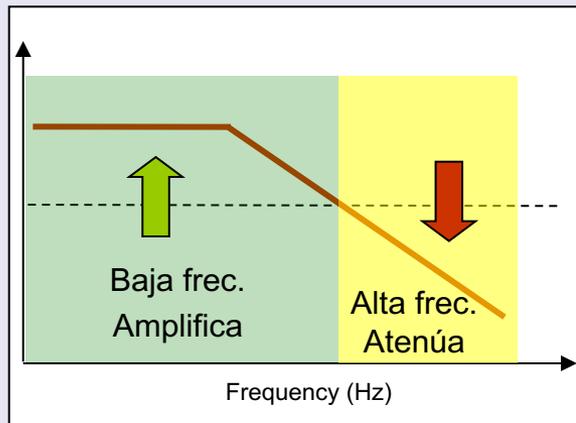
Un sistema dinámico lineal puede interpretarse como un filtro

Los filtros aplican ciertas frecuencias y atenúan otras

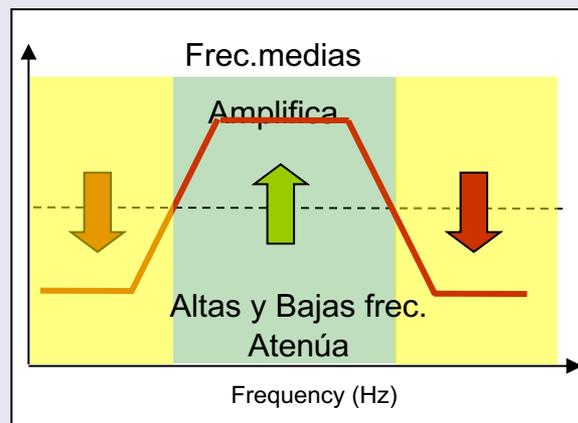


Sistemas dinámicos como filtros

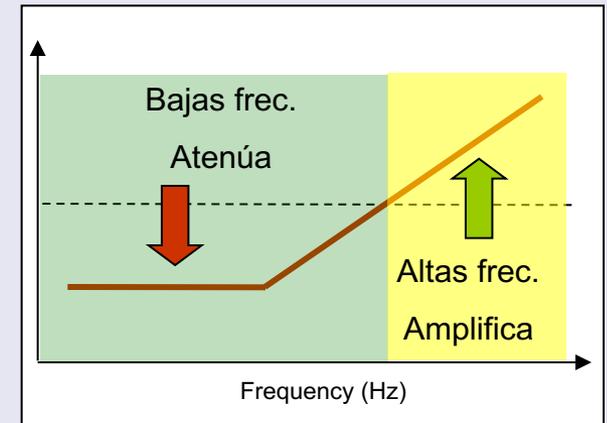
Tipos de filtros según su respuesta frecuencial



Filtro paso bajo



Filtro paso banda



Filtro paso alto

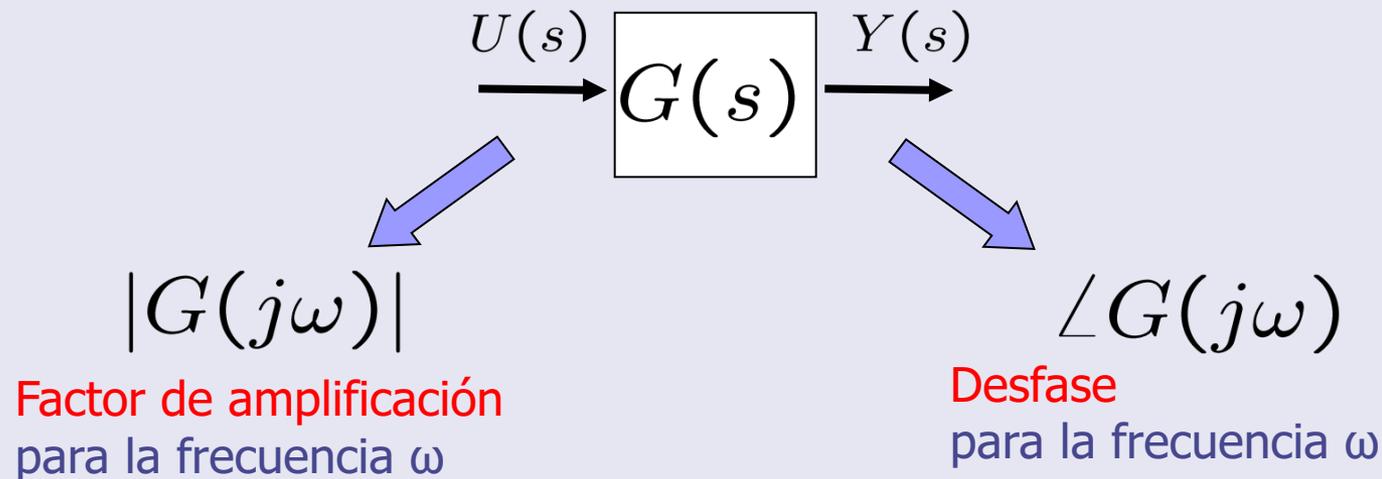
- Frecuencia de corte (ω_c): Máxima frecuencia tal que

$$|G(j\omega_c)|_{dB} = -3dB$$

Trazado de la respuesta frecuencial

¿Cómo podríamos calcular la respuesta frecuencial de un filtro (funciones de transferencia)?

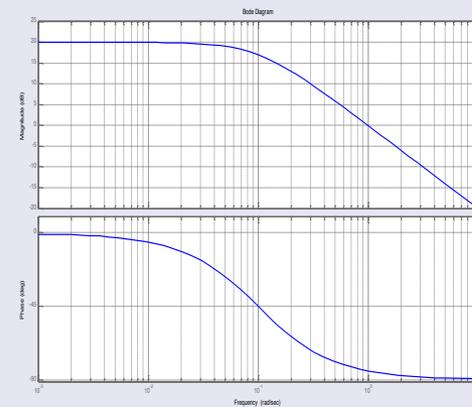
Una vez más, gracias a la transformada de Laplace



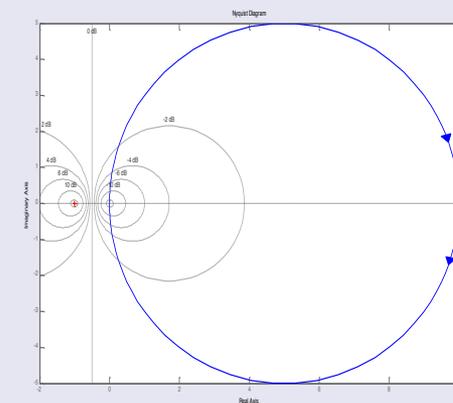
Trazado de la respuesta frecuencial

La información de $G(j\omega)$ se suele mostrar con diferentes representaciones gráficas

□ Diagrama de Bode



□ Diagrama de Nyquist



Representaciones gráficas

- Objetivo: representar gráficamente $G(j\omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

- Diagrama de Bode:

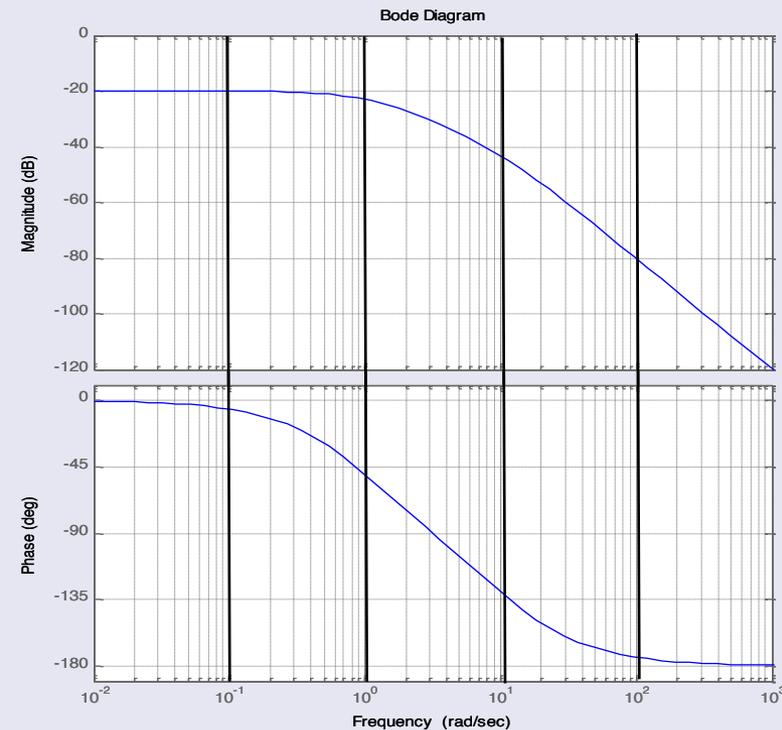
2 Gráficas escalares en escala semilogarítmica

- Módulo

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) \leftrightarrow \omega$$

- Argumento

$$\angle G(j\omega) \leftrightarrow \omega$$



Representaciones gráficas

- Objetivo: representar gráficamente $G(jw) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 - Diagrama de Nyquist
 - Representación en polares
 - Cada punto es un valor de $G(jw)$ para cierta frecuencia w
 - Curva parametrizada

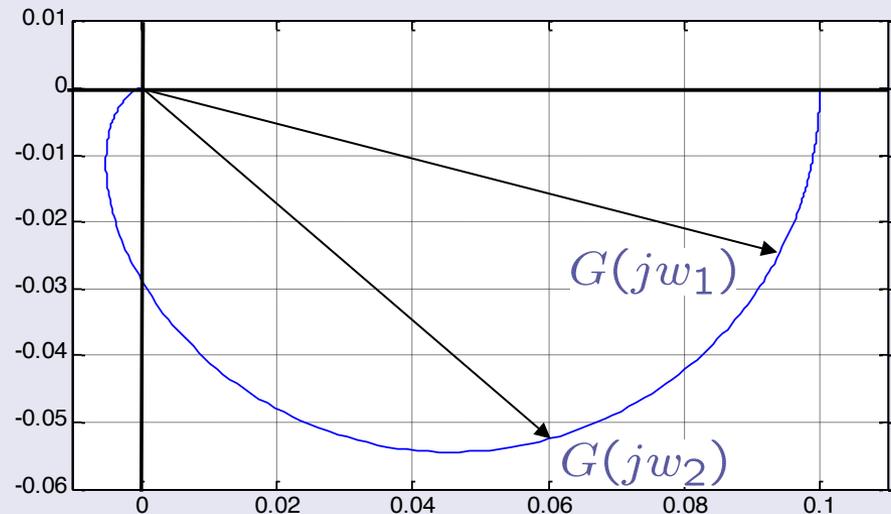


Diagrama de Bode

- Expresar el sistema en *Forma de Bode*

$$G(s) = \frac{K_G(s+c_m)(s-c_n)}{s(s+p_e)(s-p_i)(s^2+2\delta w_n s+w_n^2)}$$

$$G(s) = \frac{K_B \left(\frac{s}{c_m} + 1\right) \left(\frac{s}{c_n} - 1\right)}{s \left(\frac{s}{p_e} + 1\right) \left(\frac{s}{p_i} - 1\right) \left(\left(\frac{s}{w_n}\right)^2 + 2\delta \left(\frac{s}{w_n}\right) + 1 \right)}$$

Ganancia de Bode $K_B = K_G \frac{c_m c_n}{p_e p_i w_n^2}$

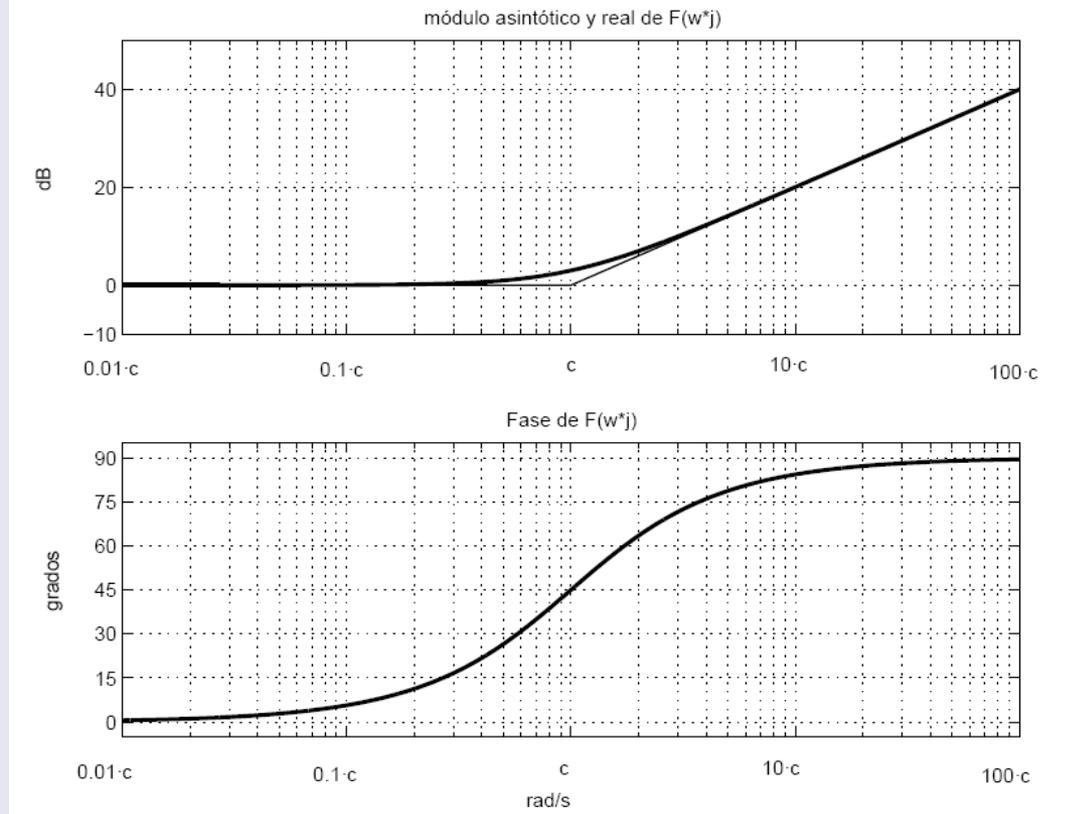
Bode de la Ganancia

$$F(j\omega) = K_B$$

	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$K_B > 0$	$20 \log K_B $	0°
$K_B < 0$	$20 \log K_B $	-180°

Bode de un Cero de fase mínima

$$F(j\omega) = j\frac{\omega}{c_m} + 1$$

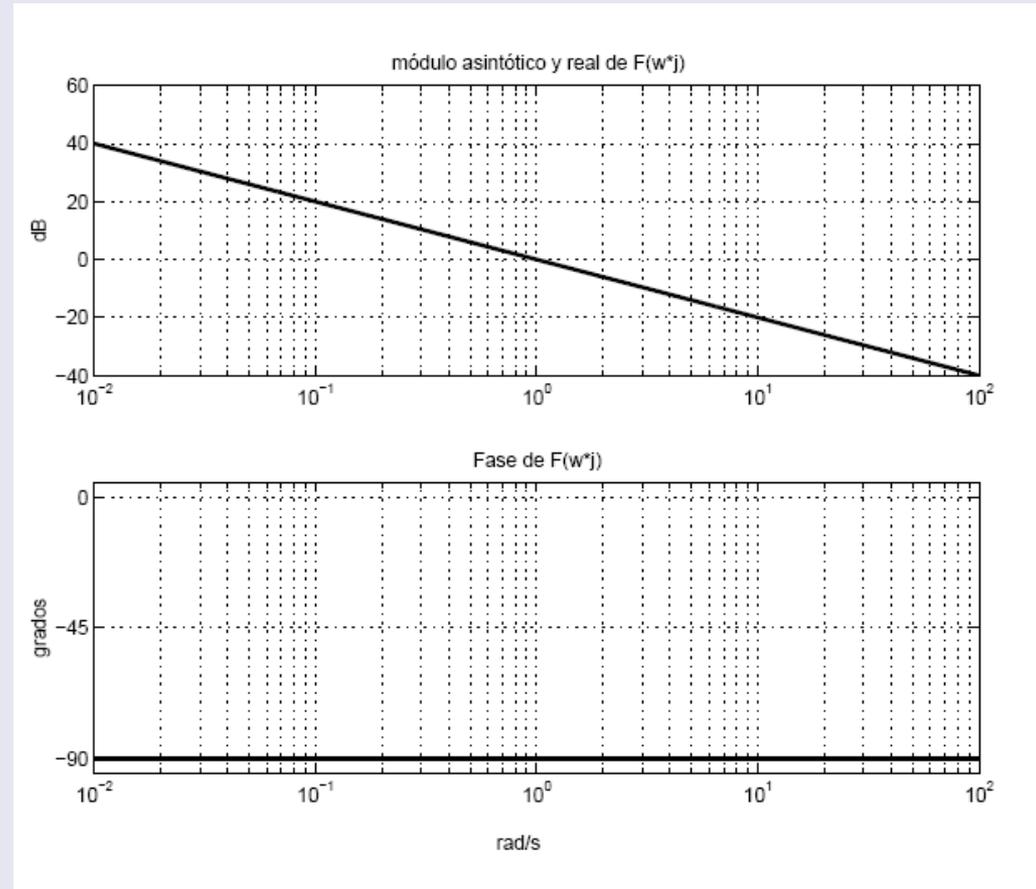


	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll c_m$	$\simeq 1$	0 dB	0°
$\omega = c_m$	$1 + j$	3 dB	45°
$\omega \gg c_m$	$\simeq j\frac{\omega}{c_m}$	$20 \log \omega - 20 \log c_m$ dB	90°

Bode de un integrador

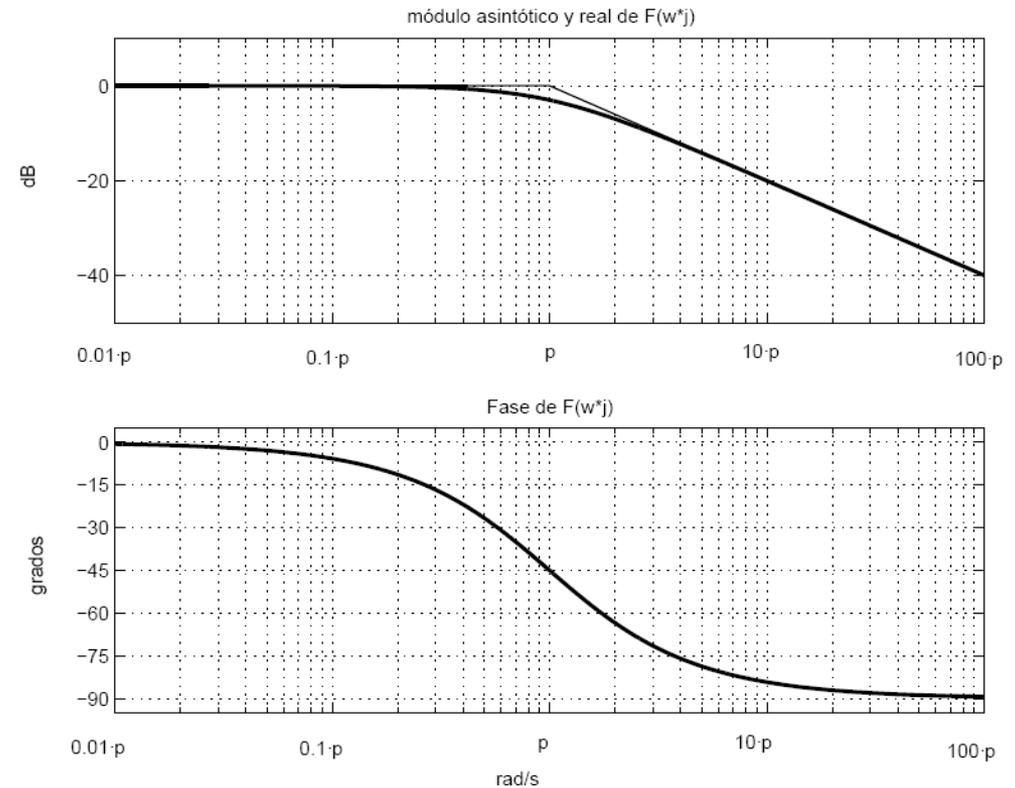
$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\forall \omega$	$-\frac{1}{\omega}j$	$-20 \log \omega$	-90°



Bode de un polo estable

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{p_e} + 1}$$



	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll p_e$	$\simeq 1$	0 dB	0°
$\omega = p_e$	$\frac{1}{j+1}$	-3 dB	-45°
$\omega \gg p_e$	$\simeq -\frac{p_e j}{\omega}$	$20 \log p_e - 20 \log \omega$ dB	-90°

Bode de un Polo Complejo

$$F(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{w_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{j\omega}{w_n}\right) + 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{w_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{\omega}{w_n}\right)j}$$

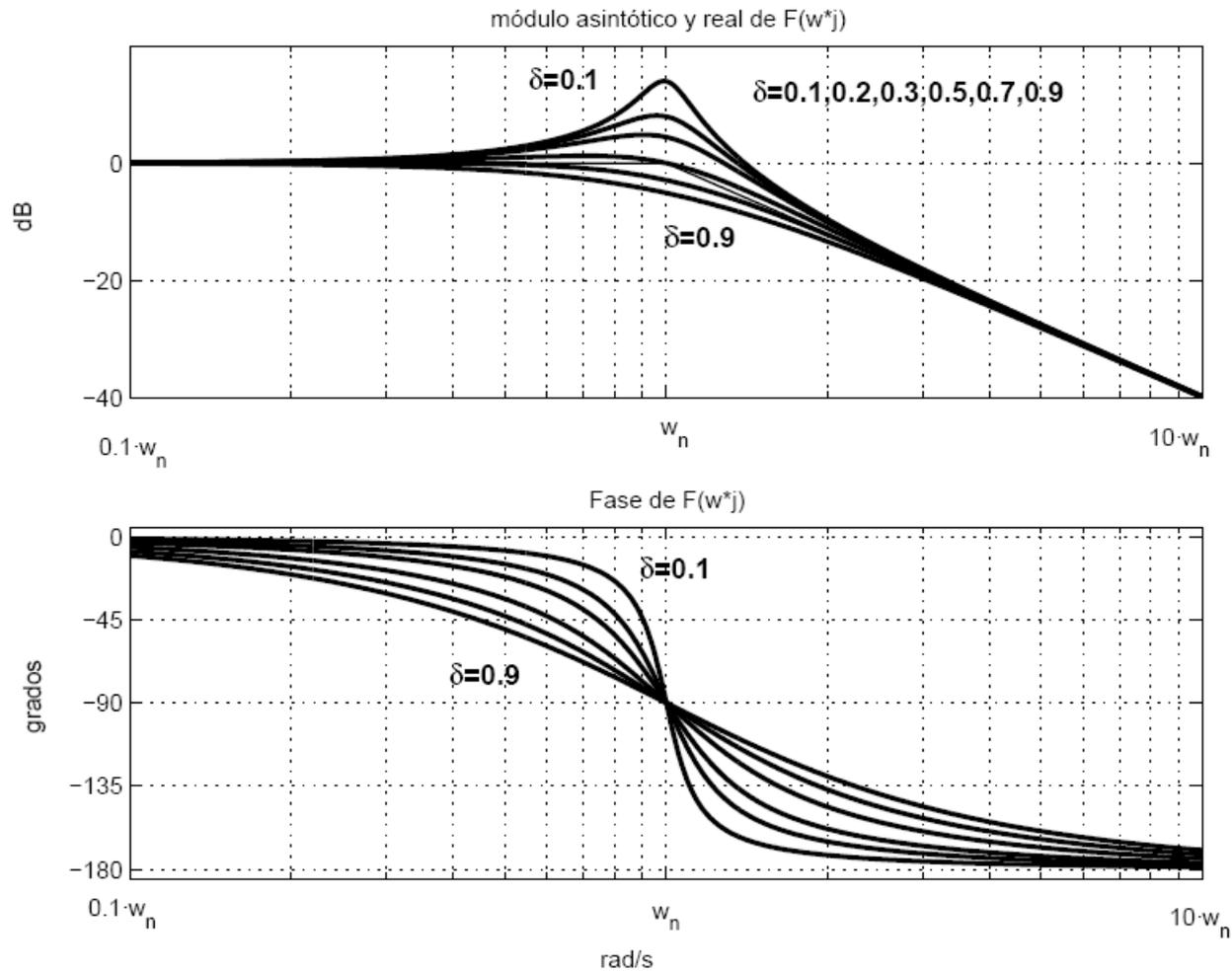
	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) _{dB}$	$\arg F(j\omega)$
$\omega \ll w_n$	$\simeq 1$	0 dB	0°
$\omega = w_n$	$\frac{1}{2\delta j}$	$-20 \log(2\delta)$ dB	-90°
$\omega \gg w_n$	$\simeq -\left(\frac{w_n}{\omega}\right)^2$	$40 \log w_n - 40 \log \omega$ dB	-180°

- Depende de δ
- El módulo presenta un máximo para $\delta \leq 0.707$

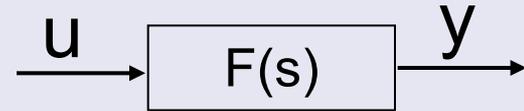
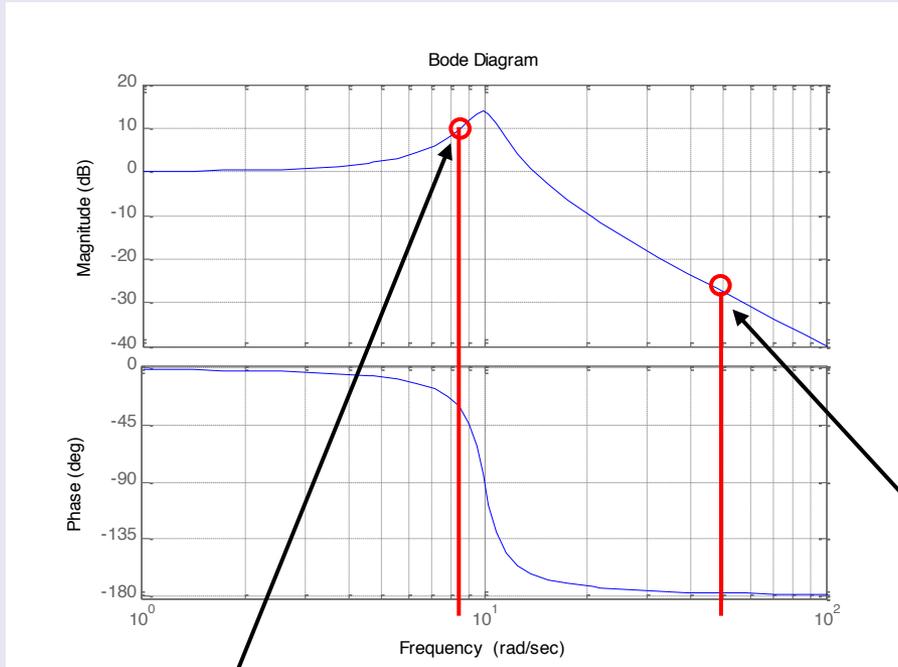
Pico de Resonancia

$$\omega_r = w_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$
$$M_r = |F(j\omega_r)| = \frac{1}{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}$$

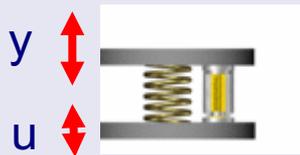
Bode de un Polo Complejo



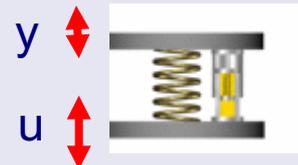
Interpretación de un Diagrama de Bode



$$F(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\delta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$



- Cerca del pico de resonancia:
Altas amplitudes
Ganancia > 0dB



- Altas frecuencias:
Pequeñas amplitudes
Ganancia < 0dB

Índice

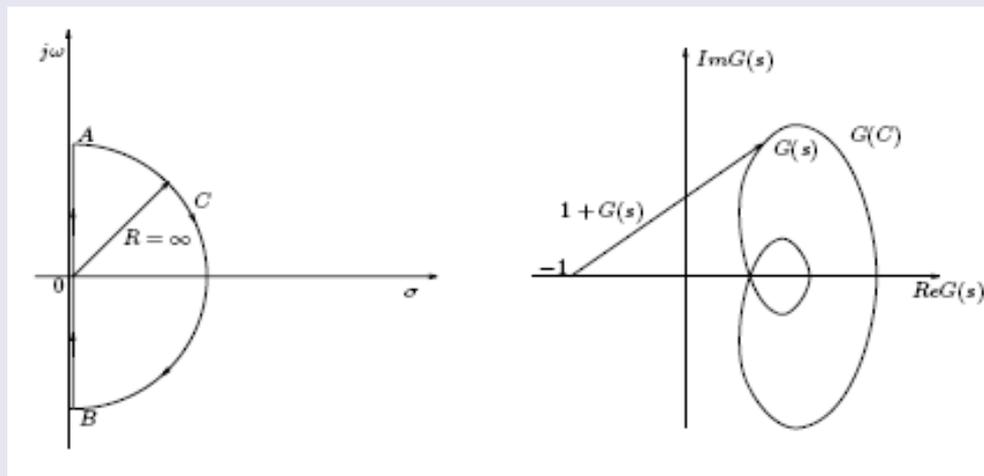
- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- **Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.**
- Moldeo de la función de lazo.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Criterio de estabilidad de Nyquist



¿Es $G_{lc}(s)$ estable?

Analizando sólo $G(s)$



Z =num polos de $G_{lc}(s)$ en C
 P =num polos de $G(s)$ en C
 N =num de vueltas de $G(C)$ en torno al -1 (sent. Horario)

$$N=Z-P$$

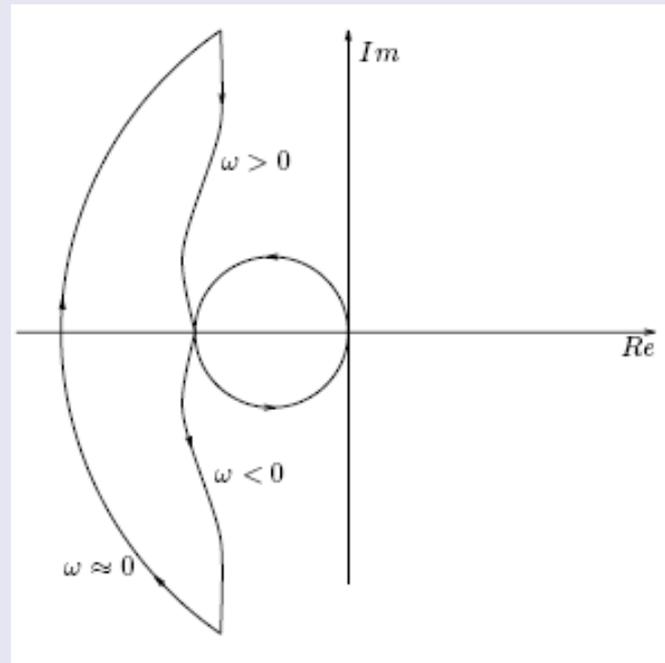
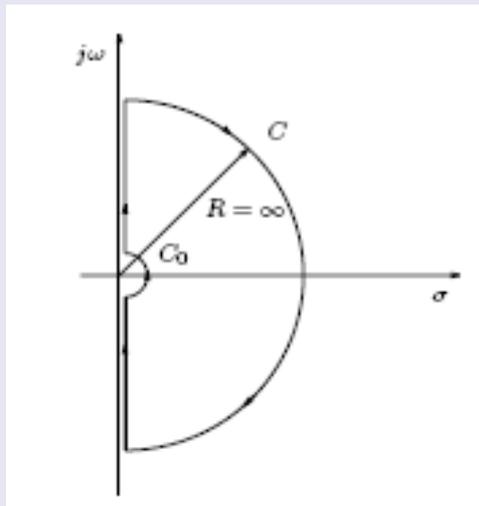
$G_{lc}(s)$ estable si y sólo si $Z=0$ (es decir $N = -P$)

Ejemplo

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s\left(\frac{s}{10} - 1\right)}$$

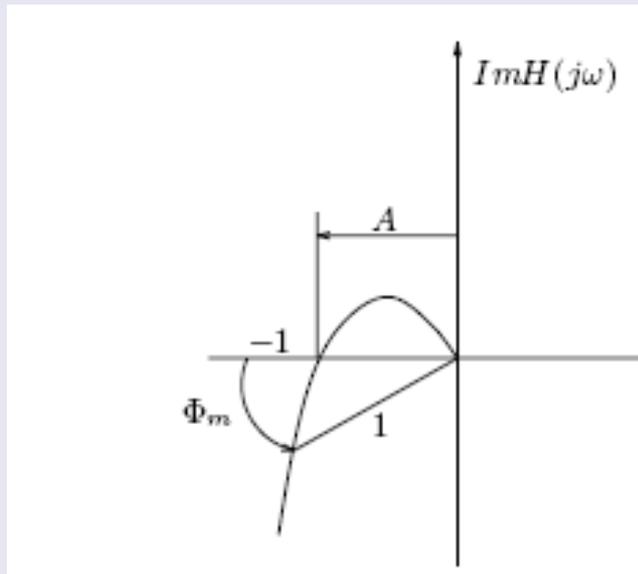
$P=1$

Sistema estable si $N=-1$



Criterio de Nyquist reducido

- Si el Diagrama de Nyquist cierra por la derecha y $P=0$ (Sistemas estables y de fase mínima)



Márgenes de estabilidad

- Margen de fase

$$M_f = \Phi_m = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$$

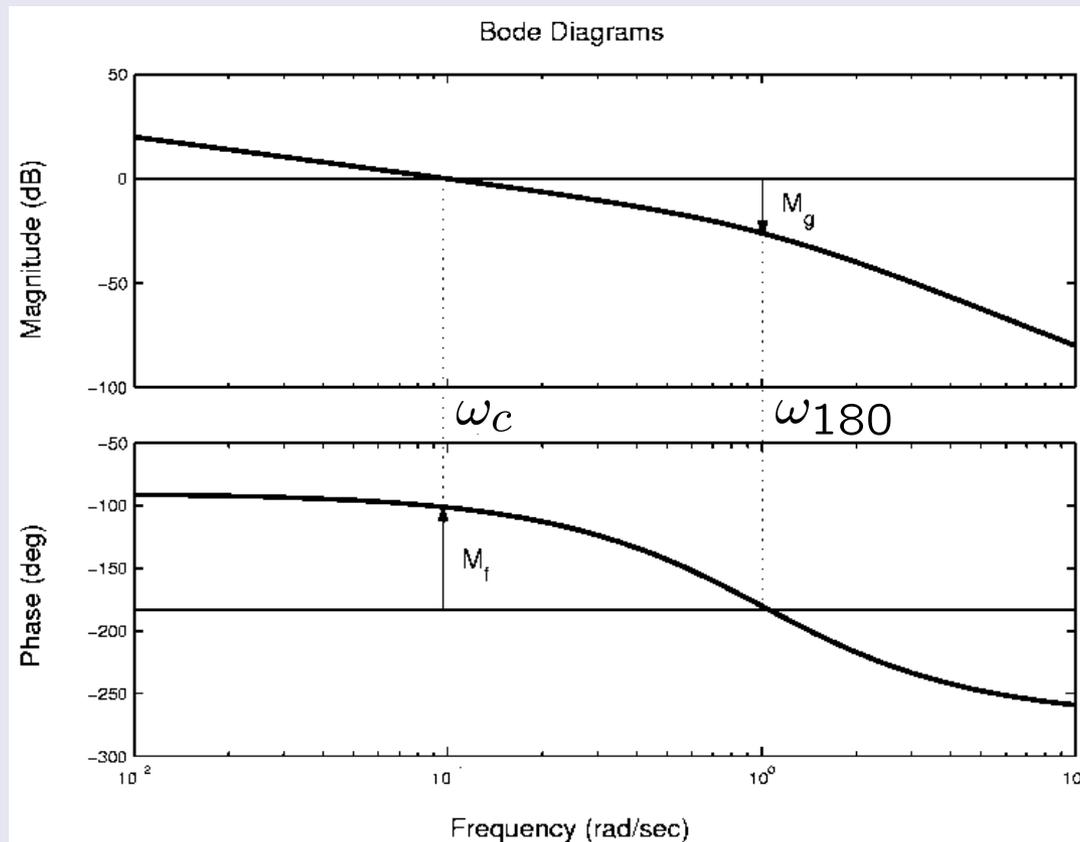
- Margen de ganancia

$$\begin{aligned} M_g &= -20 \log_{10} |A| = \\ &= -20 \log_{10} |G(j\omega_{180})| \end{aligned}$$

$G(s)$ es estable si M_g y M_f son positivos

Criterio reducido de Nyquist

- ¿Cómo se miden el M_g y el M_f en un Diagrama de Bode?



Índice

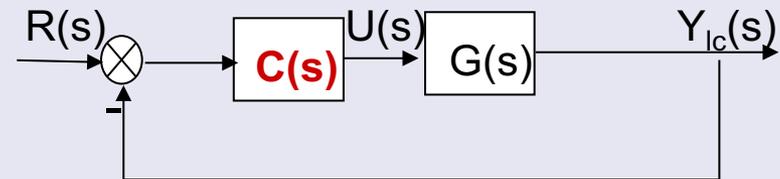
- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- **Moldeo de la función de lazo.**
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Moldeo de Lazo (*Loop shaping*)

El diseño de controladores en el dominio de la frecuencia se puede poner como:

Encontrar un controlador $C(s)$ que modifique (de forma) la respuesta frecuencial del sistema en lazo cerrado de forma que su respuesta cumpla las especificaciones.

Moldeo de Lazo

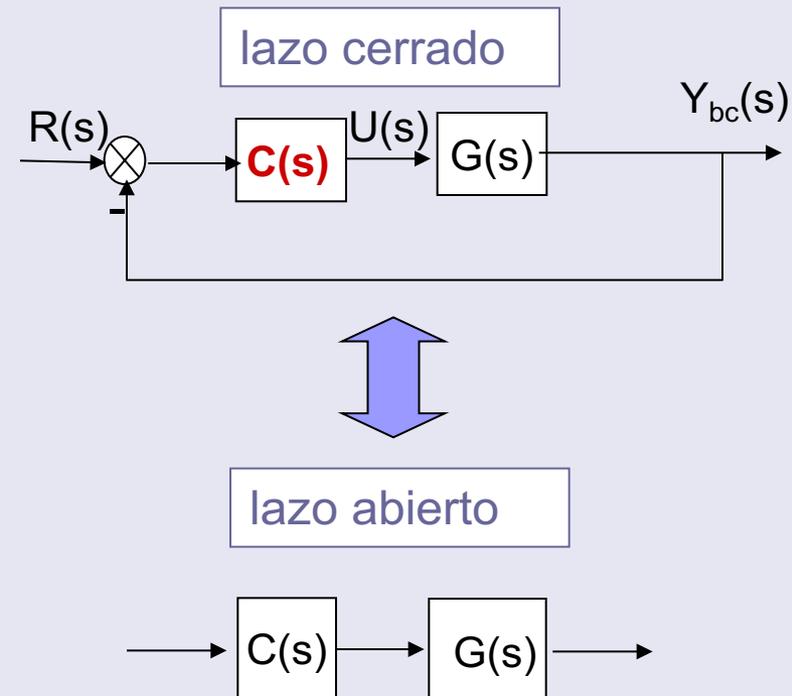


Esto plantea ciertas cuestiones:

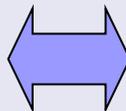
- ¿Cómo se puede manipular la respuesta frecuencial del sistema en lazo cerrado mediante $C(s)$?
- ¿Cómo se pueden estudiar en el dominio de la frecuencia las especificaciones dadas en el dominio del tiempo?
- ¿Qué se considera una “forma adecuada” de la respuesta frecuencial del sistema en lazo cerrado?

Moldeo de Lazo

- En general, es difícil encontrar una relación exacta de cómo $C(s)$ afecta a la respuesta frecuencial en lazo cerrado.
- Las respuestas frecuenciales en lazo abierto y en lazo cerrado están relacionadas.
- El efecto de $C(s)$ en la respuesta frecuencial en lazo abierto es directo usando el Diagrama de Bode.
- La respuesta frecuencial en lazo abierto provee información importante de la respuesta en lazo cerrado (estabilidad, M_g , M_f , etc)



El moldeo de lazo se realiza sobre la función en lazo abierto



El controlador $C(s)$ modifica la respuesta frecuencial de $C(s)G(s)$ e indirectamente los objetivos de control del sistema en lazo cerrado.

Índice

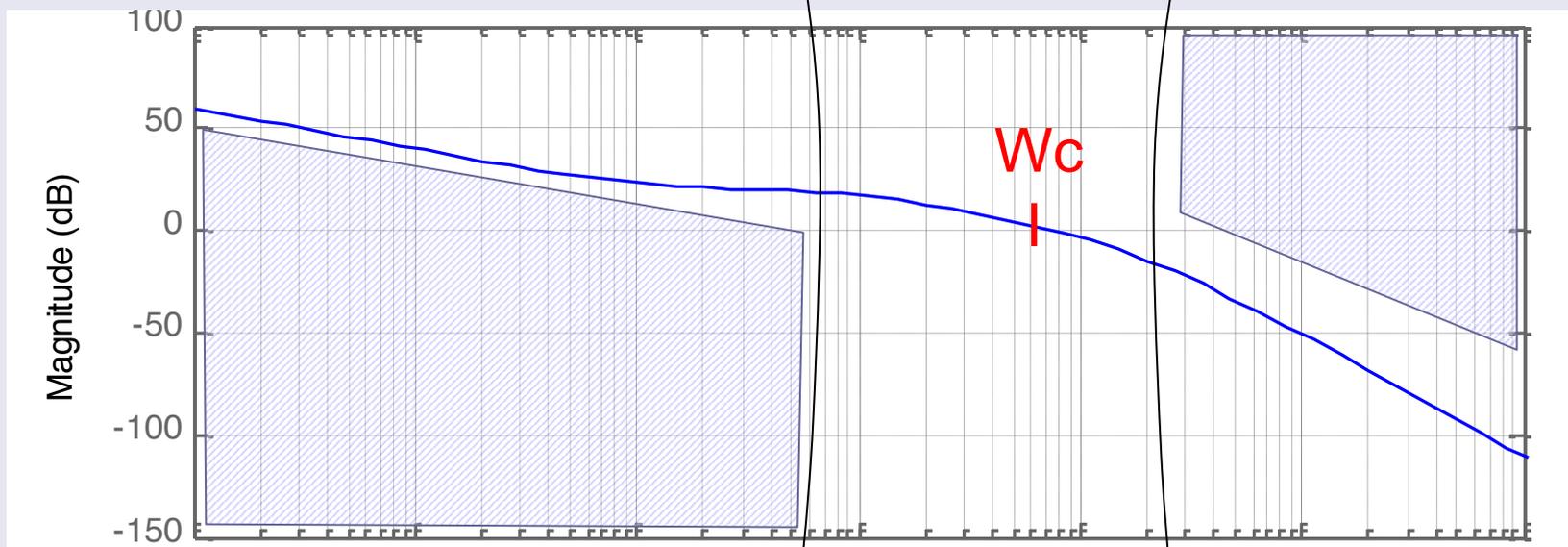
- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Moldeo de la función de lazo.
- **Especificaciones en el dominio de la frecuencia.**
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

- Las especificaciones del controlador se suelen dar en el dominio del tiempo (SO , t_s , t_e , etc)
- Es necesario trasladarlas al dominio de la frecuencia
 - En el método del Lugar de las Raíces: las especificaciones temporales se transforman en límites geométricos en el plano complejo.
- Dos tipos diferentes de especificaciones
 - Régimen permanente
 - Régimen transitorio

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

Las especificaciones afectan a diferentes frecuencias



Baja frecuencia
Régimen permanente

Frecuencia de corte:
Estabilidad y transitorio

Alta frecuencia
Rechazo al ruido

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

- Tipo de un sistema = n° de integradores

Error \ Tipo	0	1	2
Escalón	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
Rampa	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
Parábola	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)G(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2C(s)G(s)$$

- Las especificaciones en régimen permanente se suelen transformar en un mínimo valor de la ganancia (o de su pendiente) a bajas frecuencias

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

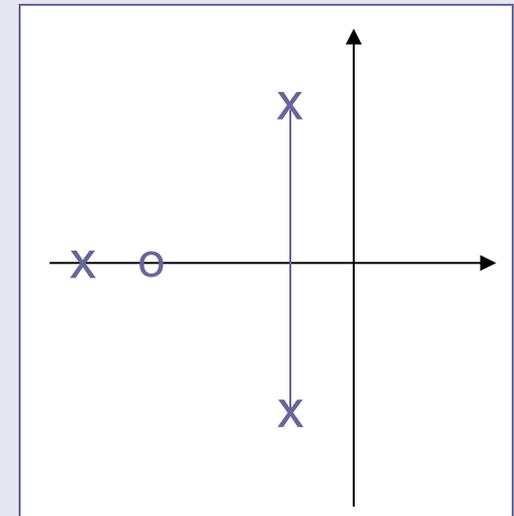
- Condiciones sobre el sistema realimentado
 - Típicamente ante una señal de referencia en escalón
- Para simplificar el diseño:

Respuesta en l.c \Leftrightarrow Forma del sistema en l.a.

- Hipótesis simplificatoria

El sistema realimentado tiene un par de **polos complejos dominantes**

- Hay que comprobar la validez de la hipótesis (Efectos de los ceros y de los polos)



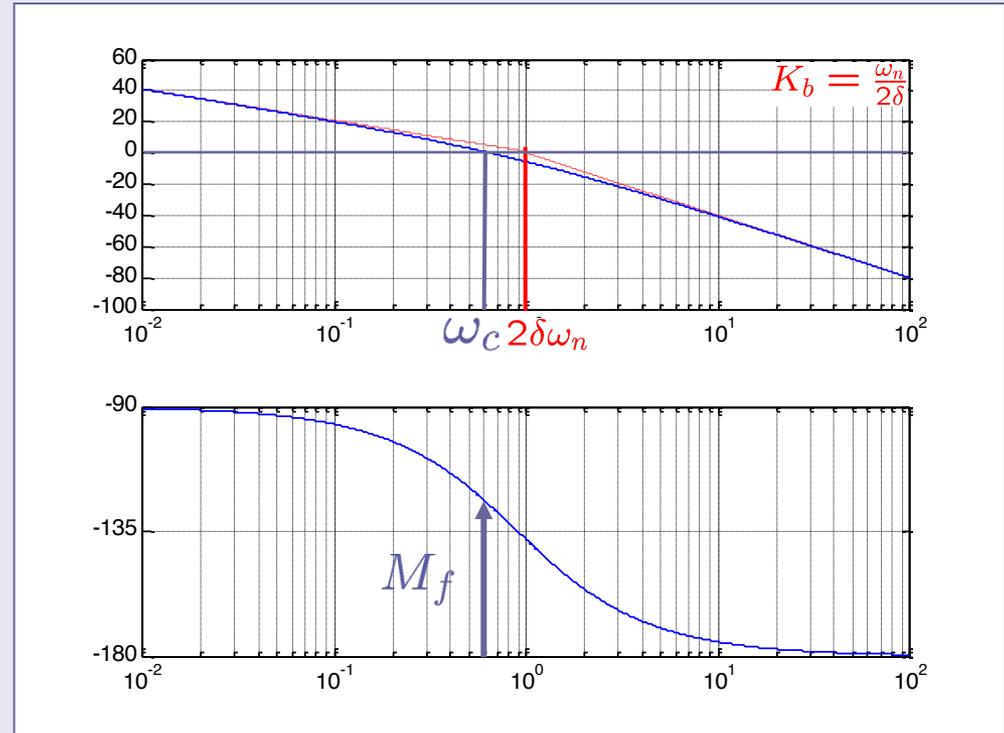
Especificaciones en el dominio de la frecuencia

$$C(s)G(s) \simeq \frac{\omega_n^2}{s(s+2\delta\omega_n)}$$

Respuesta en l.c.

$$SO = 100e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$t_s = \frac{\pi - \arccos(\delta)}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$



Respuesta frecuencial del sistema en l.a.

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\delta^4} - 2\delta^2}$$

$$M_f = \arctan \frac{2\delta}{\sqrt{\sqrt{1+4\delta^4} - 2\delta^2}}$$

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

■ Relación Sobreoscilación – Margen de fase

□ Cualitativamente

(Nyquist)

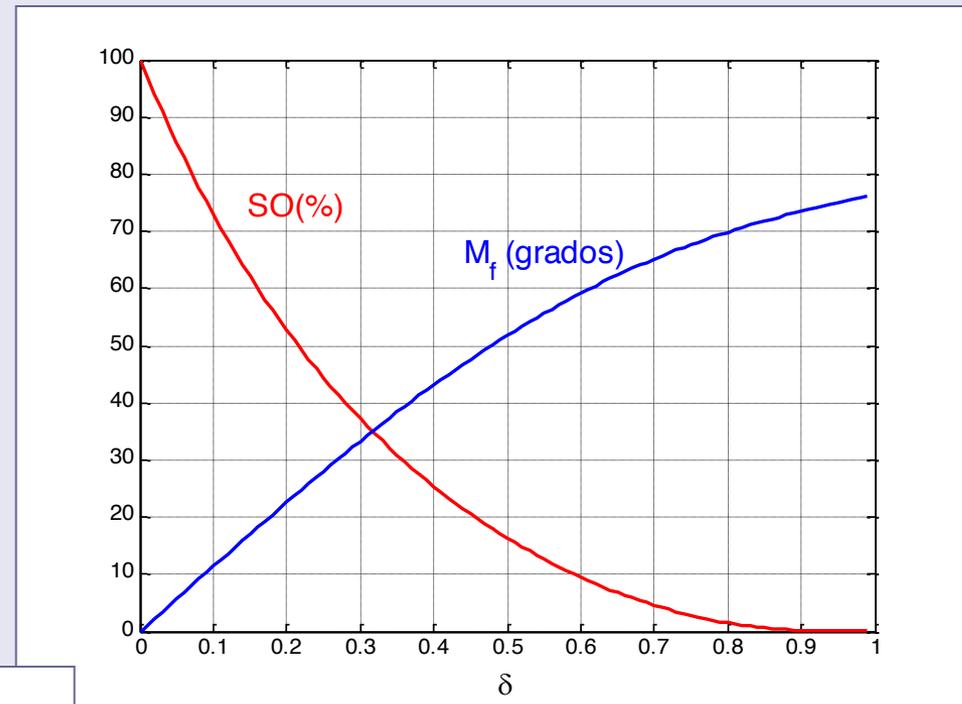
$\uparrow \text{SO} \Rightarrow \downarrow M_f$

□ Cuantitativamente

$M_f(\delta) - \text{SO}(\delta) \Rightarrow \text{Curva}$

■ $M_f(\delta) \sim 100 \delta$

■ $\text{SO} \sim 70 - M_f$



$$M_f = \arctan \frac{2\delta}{\sqrt{\sqrt{1+4\delta^4}-2\delta^2}}$$

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

■ Ancho de Banda (ω_c) frente a tiempo de subida (t_s)

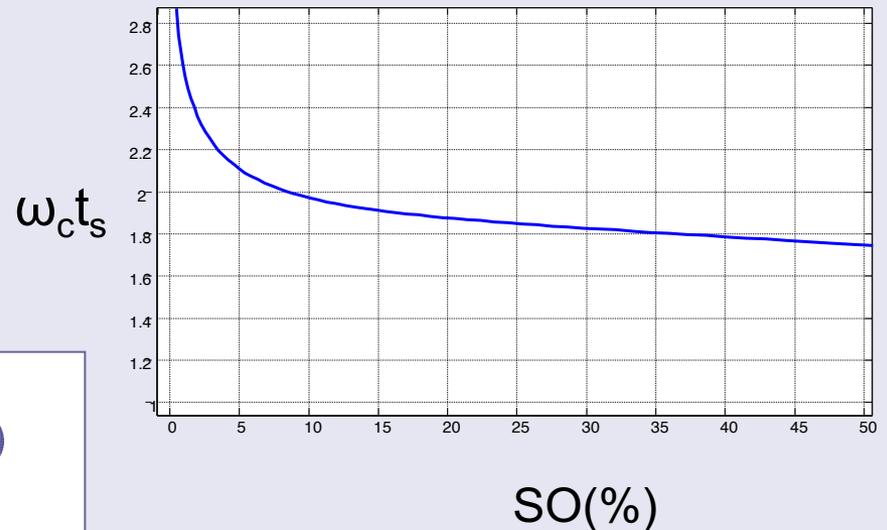
□ Cualitativamente : $\uparrow \omega_c \Rightarrow \downarrow t_s$

□ Cuantitativamente

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\delta^4} - 2\delta^2}$$

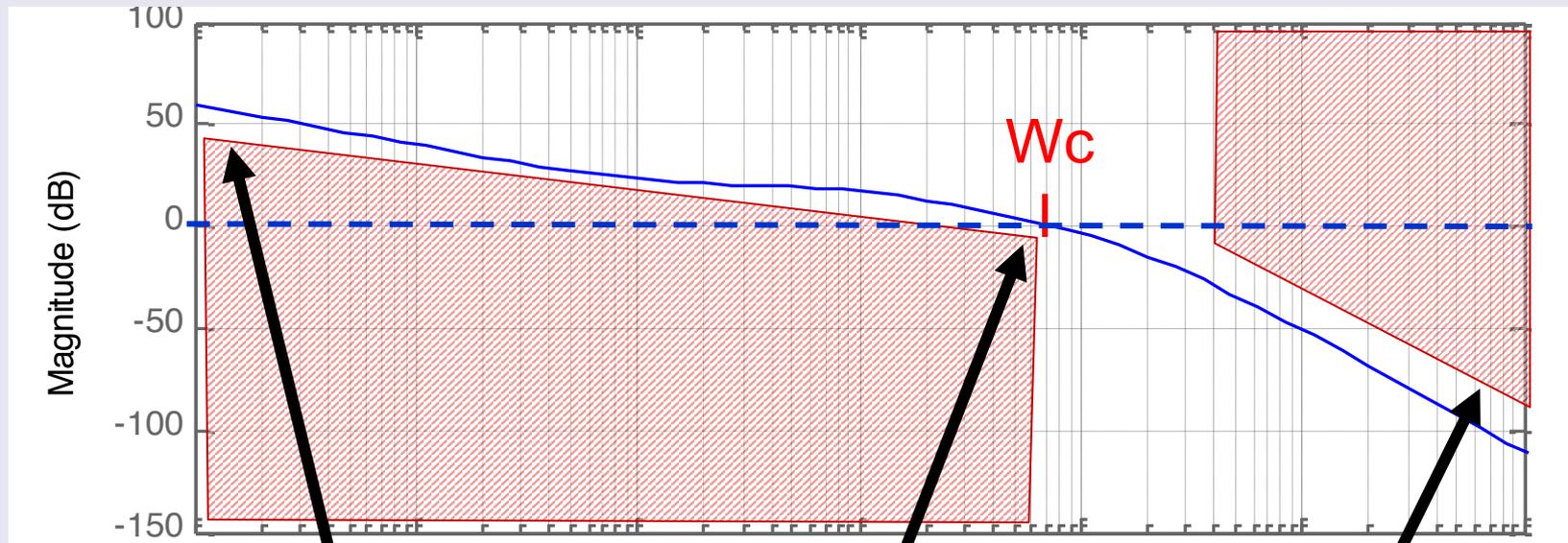
$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \quad \alpha = \arccos(\delta)$$

$$\omega_c \sim \omega_n \Rightarrow t_s \simeq \frac{\pi}{2\omega_c}$$



Especificaciones en el dominio de la frecuencia

- Las especificaciones en el dominio del tiempo se pueden trasladar a restricciones geométricas en la representación frecuencial del sistema en l.a.



Espec. Rég. Permanente
Impone una ganancia mínima
(o una mínima pendiente) a
baja frecuencias

t_s
impone un mínimo del ancho de
banda (W_c)

Disminución de ganancia
a alta frecuencia
Recomendable para reducir
el efecto de los ruidos

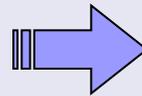
Índice

- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- **Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia**
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Diseño frecuencial de controladores

- Ya sabemos cómo

Especificaciones de $G_{Ic}(s)$
en el dominio del tiempo



Especificaciones de $G_{Ia}(s)$
en el dominio de la frecuencia

- El diseño de controladores en el DF consiste en modificar la respuesta frecuencial de $G_{Ia}(s)$ para que cumpla las especificaciones.

Moldeo de Lazo (*Loop shaping*)

Importante:

El moldeo de lazo sólo se puede aplicar sobre sistemas estables (con integradores en serie).

Esta limitación no se da en el método del lugar de las raíces

Índice

- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - **Control proporcional (P)**
 - Control PD y red de avance
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Control proporcional (P)

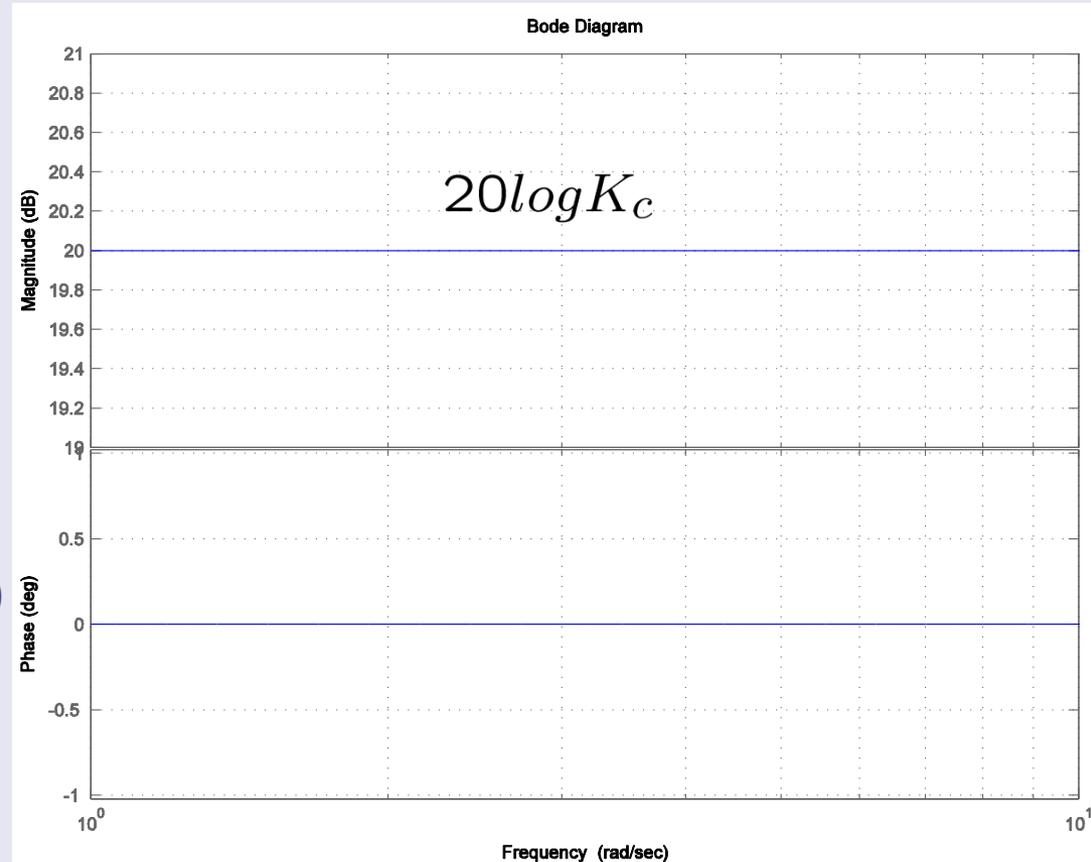
- Ley de Control

$$u(t) = K_c e(t)$$

- Función de transferencia

$$C(s) = K_c$$

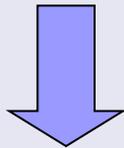
- Modifica la ganancia de $G(s)C(s)$
 - Frecuencia de corte
 - Estabilidad
 - Rapidez
 - Comportamiento



Control proporcional (P)

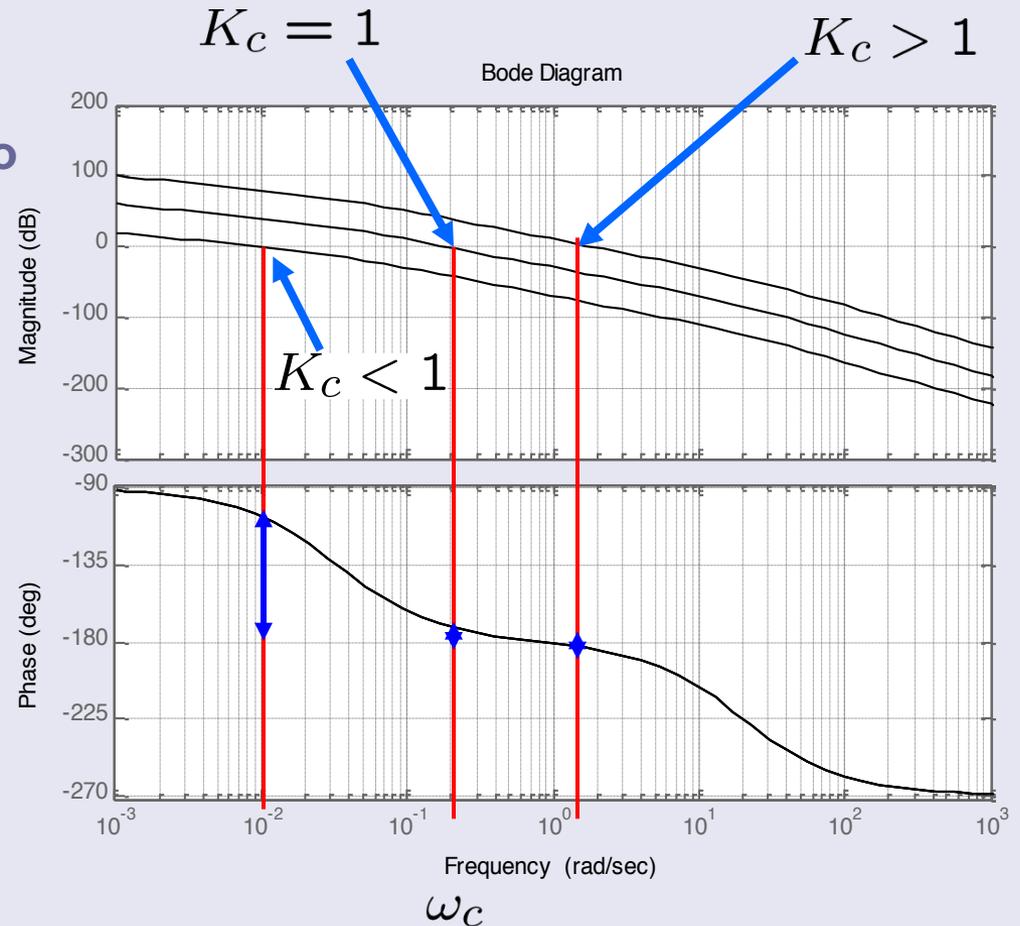
Efecto sobre el sistema

- Puede subir o bajar el módulo
- No afecta a la fase



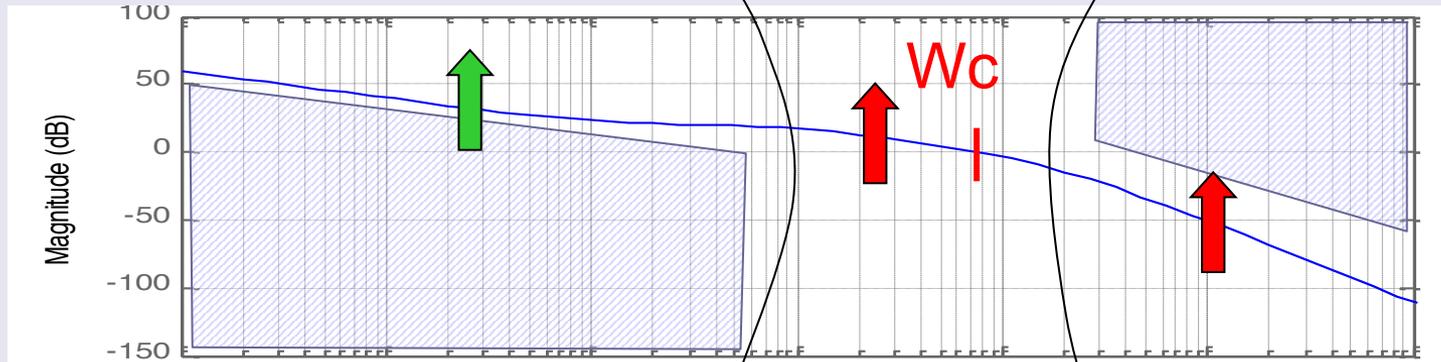
$K_c > 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_c \text{ aumenta} \\ M_f \text{ disminuye} \end{array} \right.$

$K_c < 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_c \text{ disminuye} \\ M_f \text{ aumenta} \end{array} \right.$



Control proporcional (P)

Análisis según la forma de lazo



Baja Frecuencia

Régimen permanente: **Mejora**

- Menor error en régimen permanente
- Mejores propiedades de seguimiento

Frecuencia de Corte

- Estabilidad: **empeora**
(Disminuyen los márgenes)
- Rapidez del transitorio: **mejora**
- Sobreoscilación: **empeora**

Alta frecuencia

Efecto del ruido: **empeora**
(Mayor ganancia a alta frecuencia)

$K_c \uparrow$

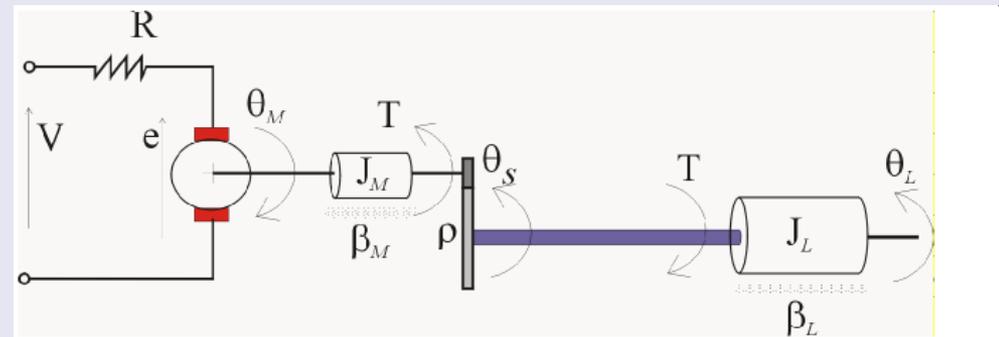
Ejemplo

Servomecanismo

- Sistema de control de la posición (o velocidad) de un sistema mecánico por realimentación.



- Función de transferencia



$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(a \cdot s + b)}$$

$$\theta(s) = \mathcal{L}\{\theta_L(t)\}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{V(t)\}$$

$$k = \frac{K_T}{R}$$

$$a = J_M + \rho^2 J_L$$

$$b = \beta_M + \rho^2 \beta_L + \frac{K_T K_e \rho}{R}$$

Ejemplo

Especificaciones de control $k=0.5$; $a=3.33$; $b=0.167$

$$t_s \leq 5 \text{ seg}; \quad SO \leq 10\%; \quad e_{vel} = 1\%$$

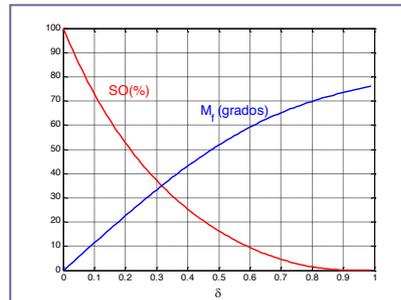
Especificaciones
en el
dominio del tiempo

$$t_s \approx \frac{\pi}{2 \cdot \omega_c}$$



$$\omega_c \geq 0.314 \text{ rad/s}$$

$$SO \leq 10\% \Rightarrow M_f \geq 58$$



$$e_{vrp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+C(s)G(s)} \frac{1}{s^2}$$
$$= \frac{b}{k \cdot K_c}$$

$$e_{vel} = 1\% \Rightarrow K_c > 33.3$$

Ganancia del controlador
 $K_c > 33.3$ (30.5 dB)

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

Control proporcional (P)

Diseño para el servomecanismo de posición

- Ajustar K_c para cumplir las especificaciones

$$e_{vel} \leq 1\% \Rightarrow K_c \geq 33.30 = 30.5dB$$

$$\omega_c \geq 0.314 \Rightarrow K_c \geq 0.67 = -3.5dB$$

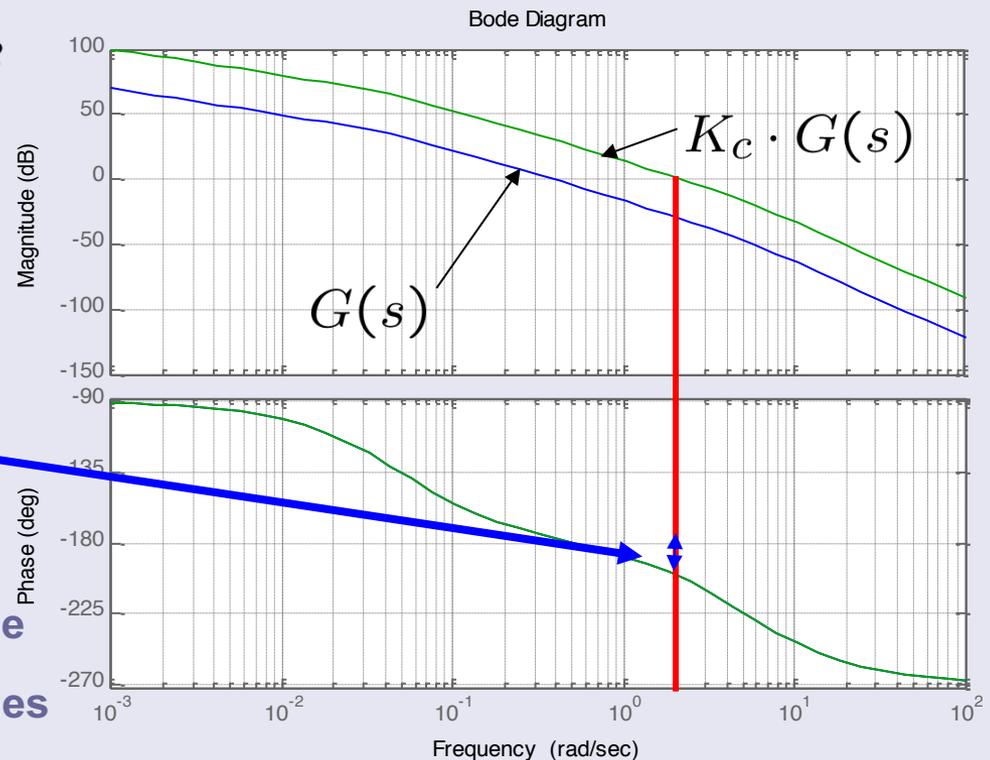
Tomamos el valor mayor

$$K_c = 30.5 \text{ dB}$$

$$M_f(K_c \cdot G(s)) \approx -22^\circ$$

Inestable

Un simple Controlador P no puede
satisfacer todas las especificaciones



Control proporcional

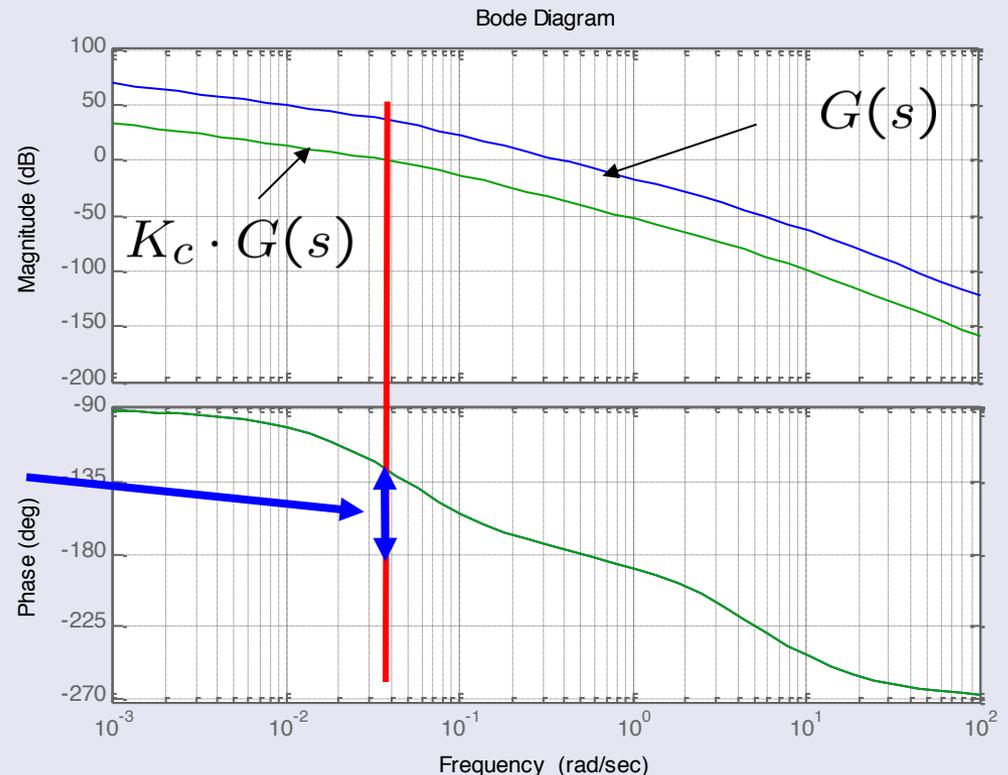
Diseño para el servomecanismo de posición

- Dado que todas las especificaciones no se pueden cumplir, sería posible diseñar el controlador para cumplir sólo la de sobreoscilación.

$$M_f \geq 58^{\circ} \Rightarrow \omega_c = 0.036 \text{ rad/s}$$

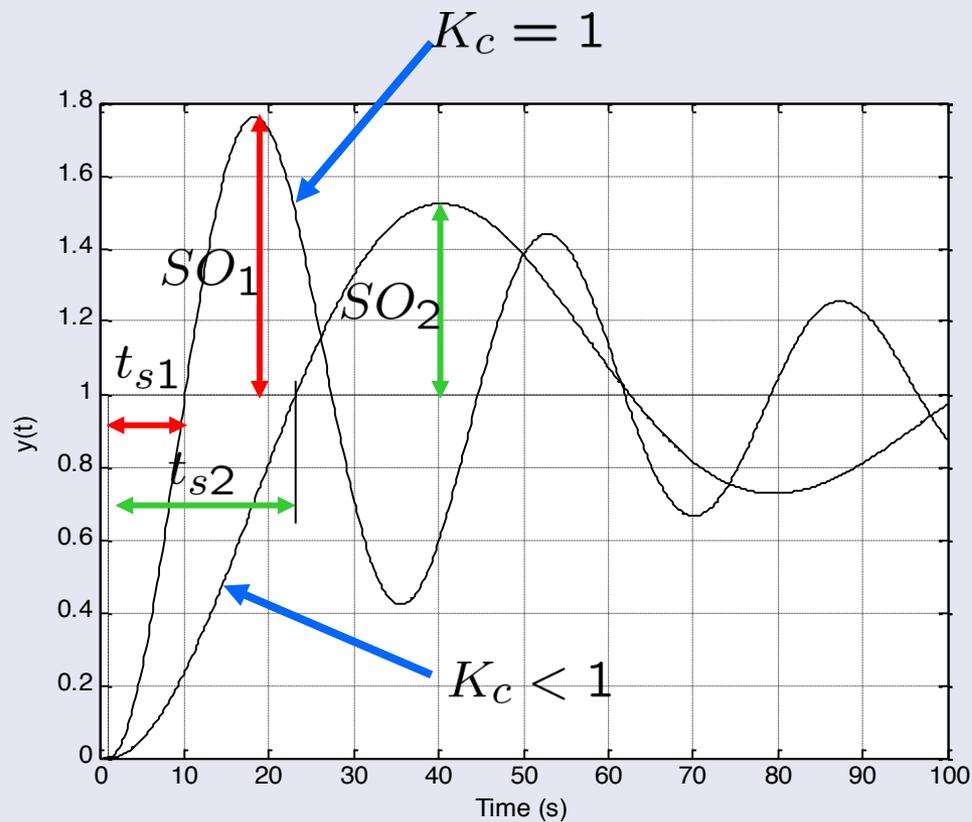
$$K_c = 0.015 = -36.3 \text{ dB}$$

Esta ganancia es menor que la necesaria para cumplir las especificaciones de régimen permanente y de tiempo de subida



Control proporcional (P)

¿Sería posible desacoplar el t_s y la SO ?



Índice

- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - **Control PD y red de avance**
 - Control PI y red de retardo
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Control proporcional derivativo (PD)

$$u(t) = K_c \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$C(s) = K_c(1 + T_d s)$$

■ Bajas frecuencias

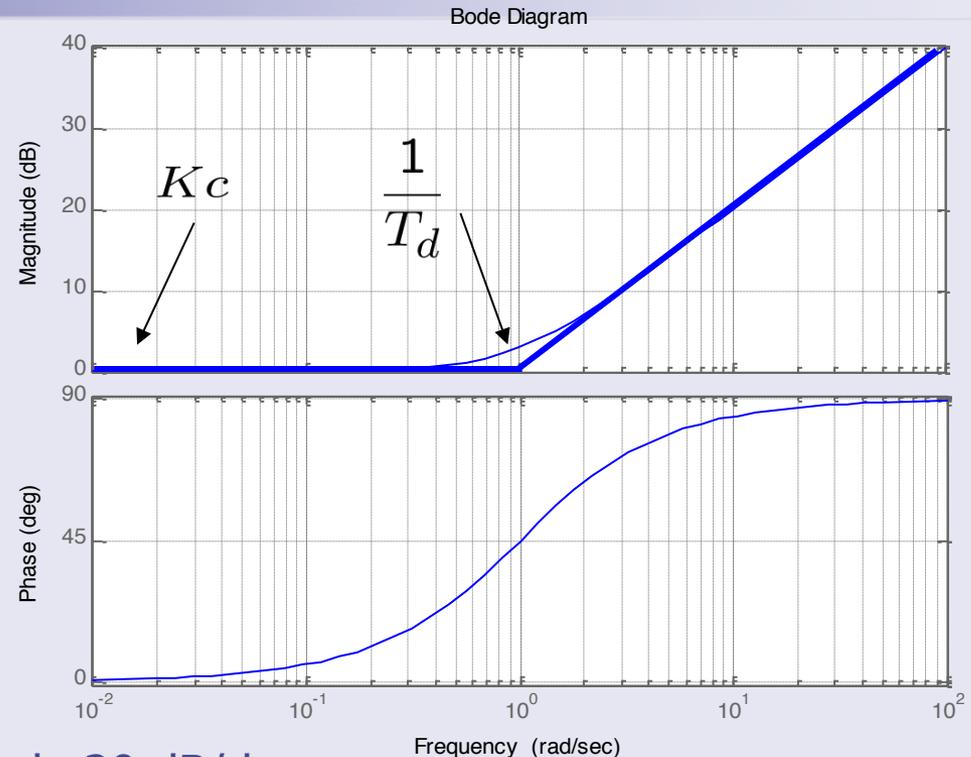
- Ganancia como un P
- Fase aprox. Igual

■ Altas frecuencias

- Ganancia aumenta a razón de 20 dB/dec
- Fase sube 90°

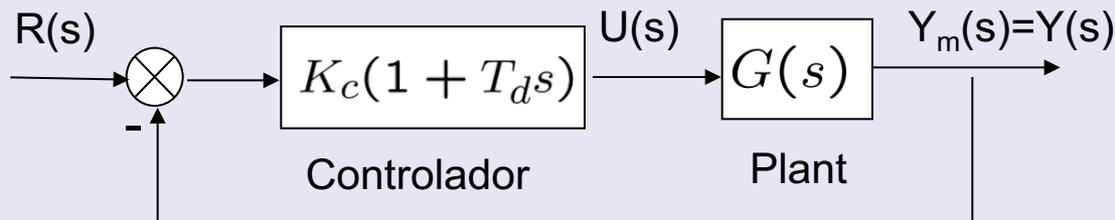
■ Implementación:

- Filtro de derivadas $C(s) = K_c \frac{1+T_d s}{1+\alpha T_d s}$ siendo $\alpha \in [0, 1]$

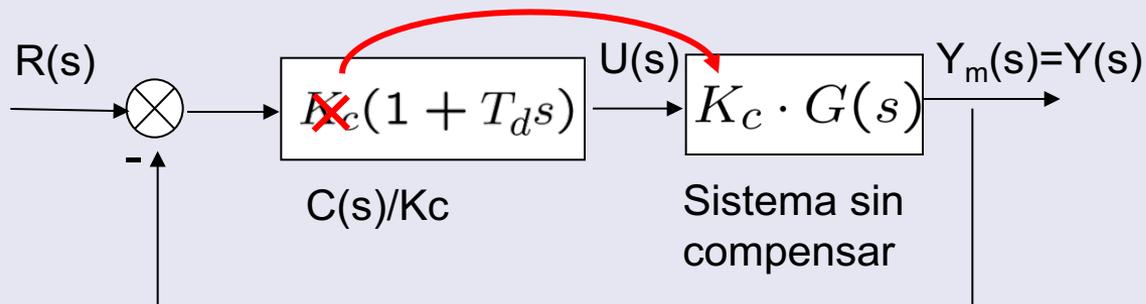


Control proporcional derivativo (PD)

- Factorización del problema



- Generalmente K_c se fija a partir de las especificaciones en régimen permanente (el **menor** de valor de K_c que satisface la especificación)
- El valor de K_c se agrupa con $G(s)$, formando el **sistema sin compensar** $K_c G(s)$



- A partir del diagrama de Bode de $K_c G(s)$ se diseña $C(s)/K_c$

Control proporcional derivativo (PD)

Efecto sobre el sistema

- A bajas frecuencias como un P
- A altas frecuencias aumenta
 - El módulo 20 dB/dec
 - La fase sube 90°

Dos casos:

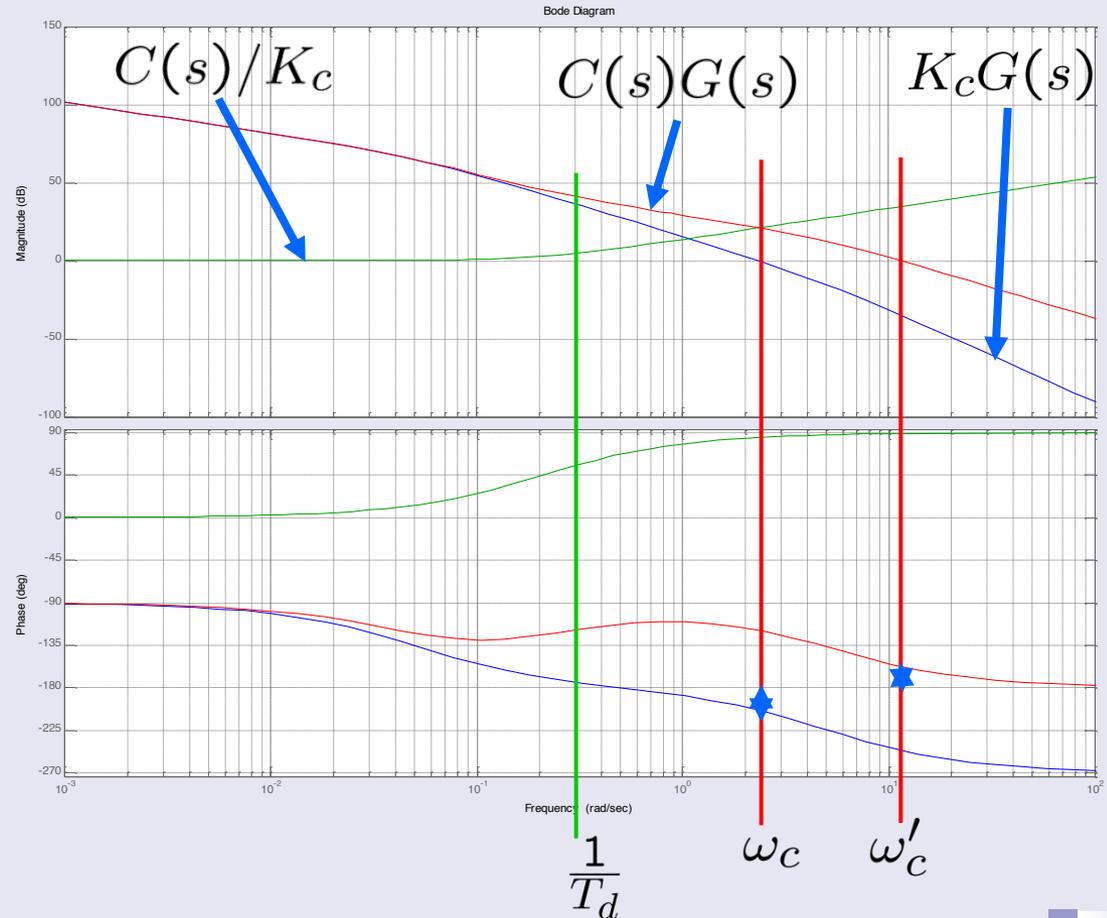
Si $\frac{1}{T_d} < \omega_c$



ω_c aumenta
 M_f disminuye



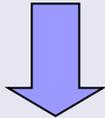
**Respuesta más rápida
y menos oscilatoria**



Control proporcional derivativo (PD)

Efecto sobre la respuesta temporal en l.c

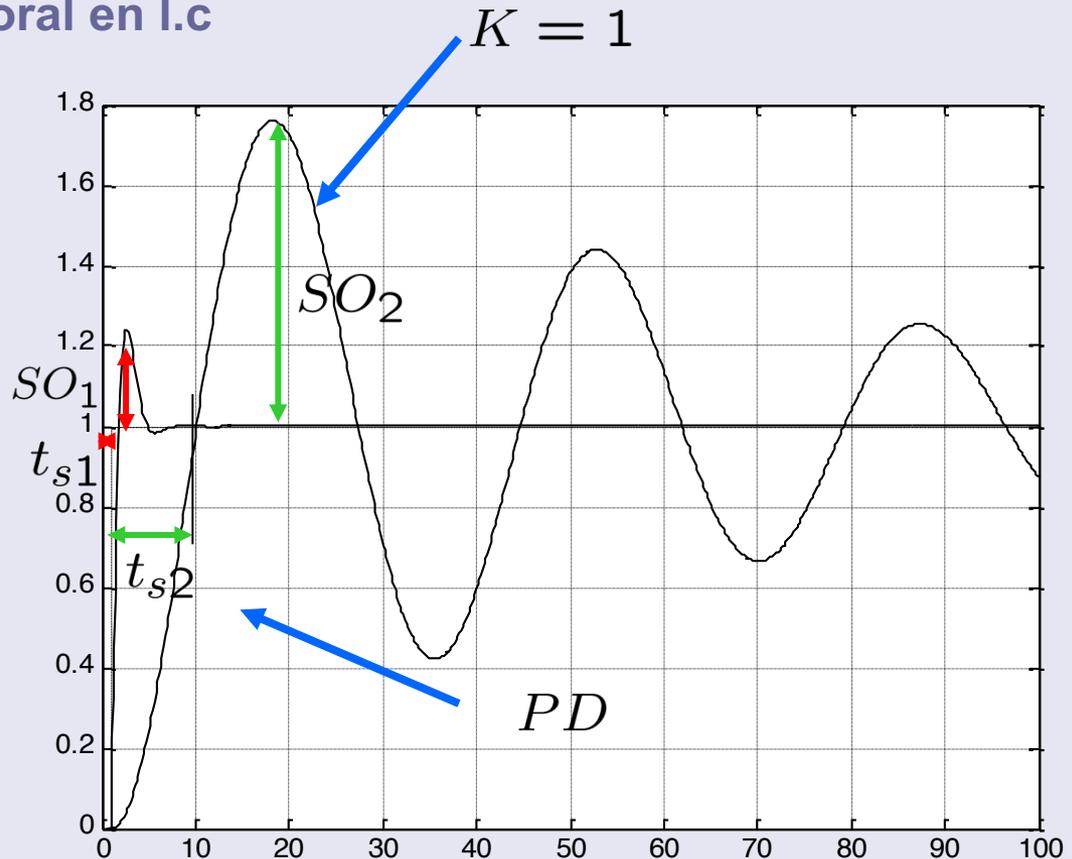
Si $\frac{1}{T_d} < \omega_c$



$$\omega_c \uparrow \Rightarrow t_s \downarrow$$
$$M_f \uparrow \Rightarrow SO \downarrow$$

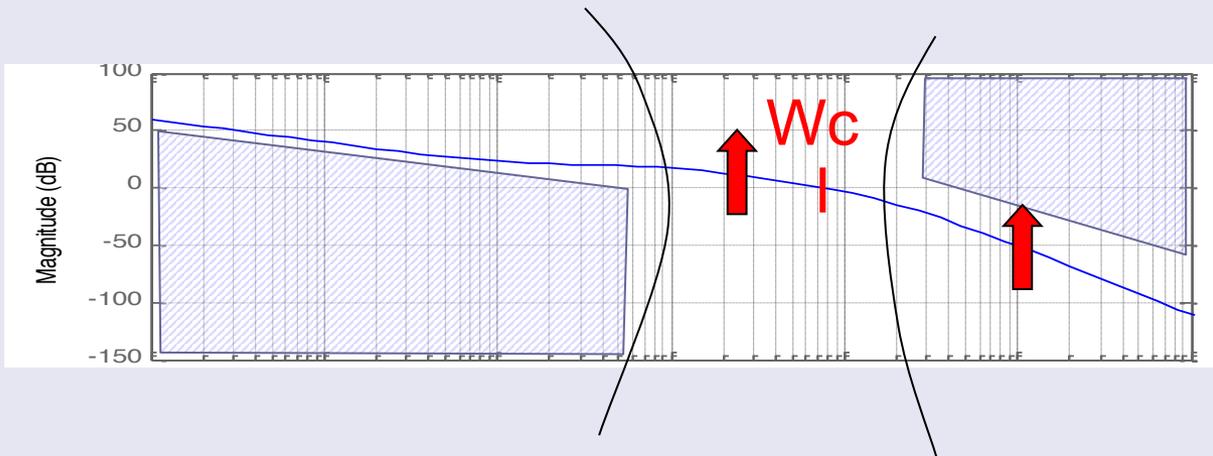


Un buen ajuste puede proporcionar una respuesta más rápida y menos oscilatoria



Control proporcional derivativo (PD)

Análisis del moldeo de lazo



+20dB/dec!!!

Baja Frecuencia

Régimen permanente: **Mejora**
(Igual que el control P)

- Menor error en régimen permanente
- Mejores propiedades de seguimiento

Frecuencia de Corte

- Estabilidad: **mejora**
(Aumentan los márgenes)
- Rapidez del transitorio: **mejora**
- Sobreoscilación: **mejora**

Alta frecuencia

Efecto del ruido: **empeora**

(La pendiente aumenta 20 dB/dec)

Control proporcional derivativo (PD)

Caso 1: K_c fijada por las especificaciones

Paso 1: Tomar un valor de K_c tal que el sistema sin compensar $K_c G(s)$ cumpla las especificaciones en régimen permanente y de frecuencia de corte.

Sea $\hat{G}(s) = K_c G(s)$ y $\hat{C}(s) = C(s)/K_c = (1 + T_d s)$.

Sea ω_c la frecuencia de corte del sistema sin compensar $\hat{G}(s)$

Paso 2: T_d se elige para que se cumpla la condición de margen de fase.

$$\begin{aligned} M_{fd} &= M_f(K_c \cdot G(j\omega'_c)) + \angle(1 + j \cdot T_d \omega'_c) \\ &= (180^\circ + \angle G(j\omega'_c)) + \angle(1 + j \cdot T_d \omega'_c) \end{aligned}$$

siendo ω'_c la frecuencia de corte del sistema compensado $C(s)G(s)$.

Control proporcional derivativo (PD)

- En general $\omega_c \neq \omega'_c$ dado que la adición del cero podría modificar la frecuencia de corte.

- El cálculo de T_d es complejo

- Simplificación

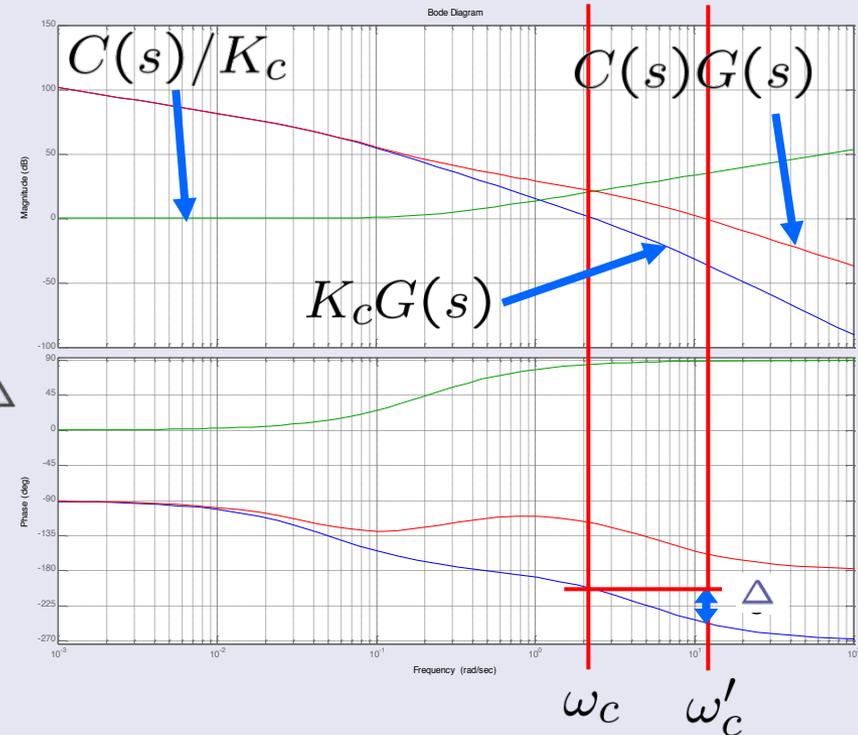
$$\angle(1 + j \cdot T_d \omega_c) \approx M_{fd} - M_f(K_c \cdot G(j\omega_c)) + \Delta$$

siendo

$$\Delta = (\angle L(j\omega_c) - \angle L(j\omega'_c))$$

Típicamente

$$\Delta \in [5, 10]^\circ$$



Control proporcional derivativo (PD)

Diferentes diseños según la fase que debe aportar

Caso a) $\Delta M_f < 45^\circ$

$$\frac{1}{T_d} > \omega_c$$

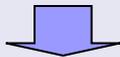
La frecuencia de corte no se modifica

$$\omega'_c = \omega_c \Rightarrow \Delta = 0$$

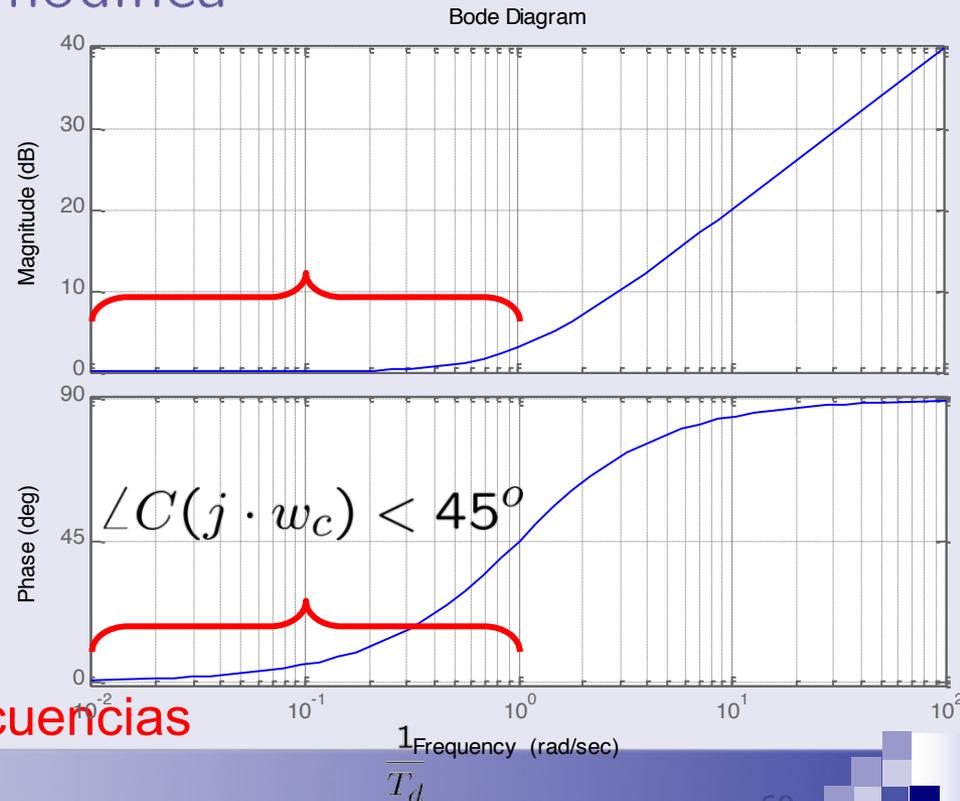
$$\Delta M_f = M_{fd} - M_f(K_c G(j\omega_c))$$

$$\begin{aligned} \Delta M_f &= \angle(1 + T_d \omega_c) \\ &= \text{atan}(\omega_c T_d) \end{aligned}$$

Elegir el menor T_d posible



Minimizar la amplificación a altas frecuencias



Control proporcional derivativo (PD)

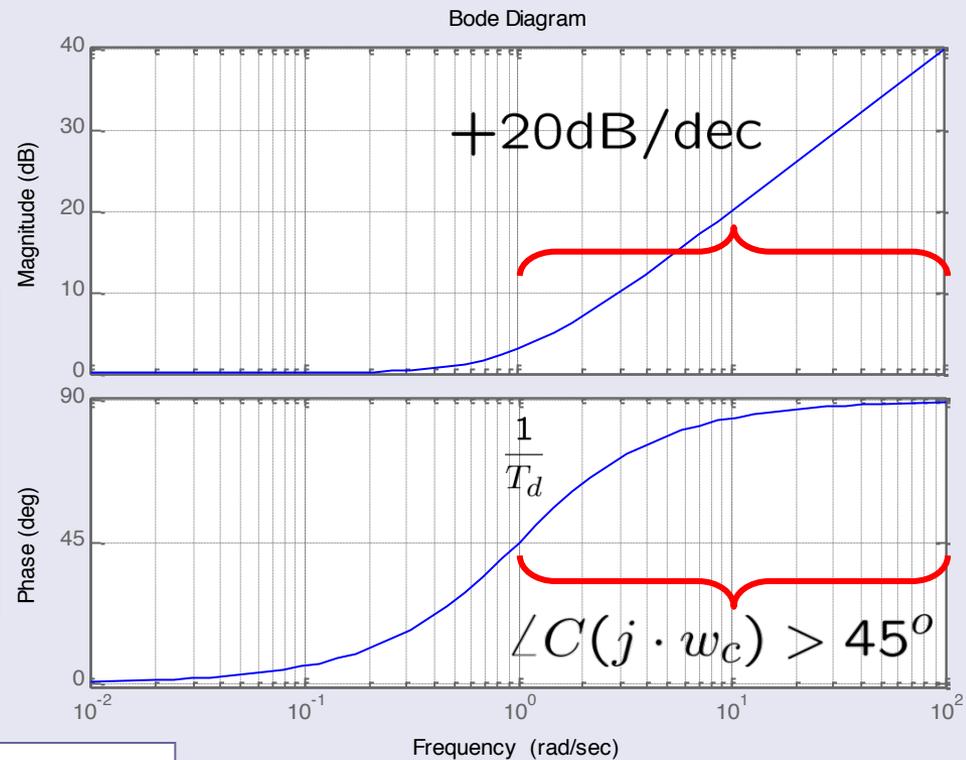
Caso b) $\Delta M_f \geq 45^\circ$

$$\frac{1}{T_d} \leq \omega_c$$

La frecuencia de corte varía

$$\omega'_c \neq \omega_c \Rightarrow \Delta \neq 0$$

$$\begin{aligned} \Delta M_f &= M_{fd} - M_f(K_c G(j\omega_c)) + \Delta \\ \Delta &\in [5, 10] \\ \Delta M_f &= \angle(1 + T_d \omega_c) \\ &= \text{atan}(\omega_c T_d) \end{aligned}$$



Aproximación \rightarrow ajustar iterando

Ejemplo PD

$$G(s) = \frac{(s + 5)}{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Especificaciones:

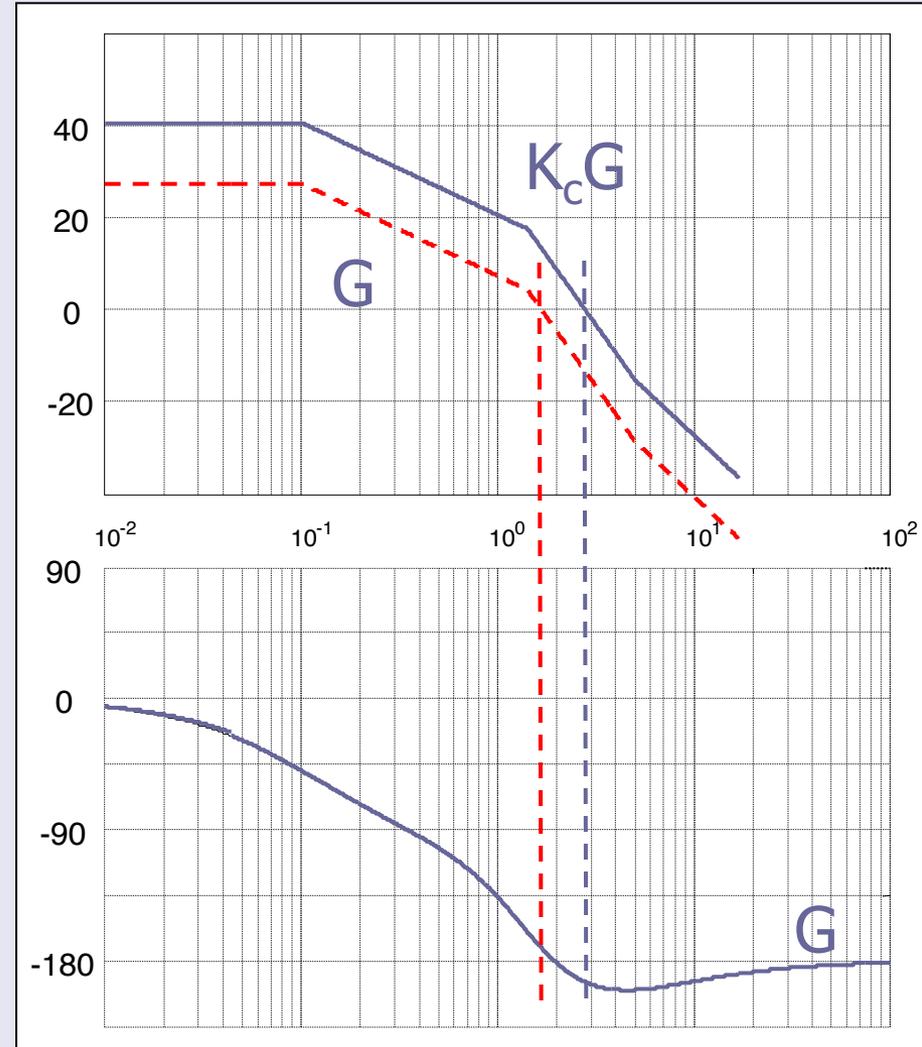
- erp ante escalón < 1%
- SO < 20%

Especificación en ep_{rp}

$$K_p > 99, \text{ como } K_p = 25 K_c \\ \Rightarrow K_c \geq 4 \text{ se toma } K_c = 4$$

No se puede controlar con un P.

Un PD introduce fase por lo que es una buena posibilidad.

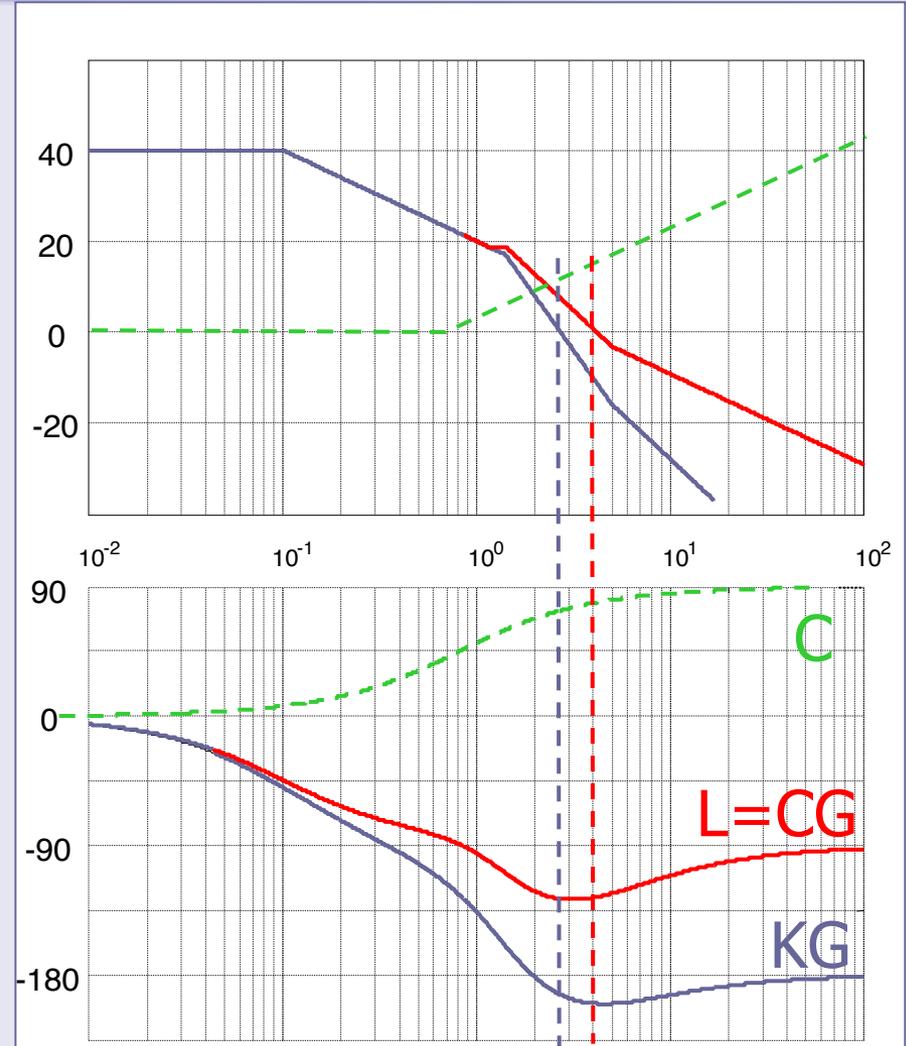


Ejemplo PD

$$G(s) = \frac{(s+5)}{(s+0.1)(s^2+2s+2)}$$

$$e_{p_{rp}} < 1\%, SO < 20\%$$

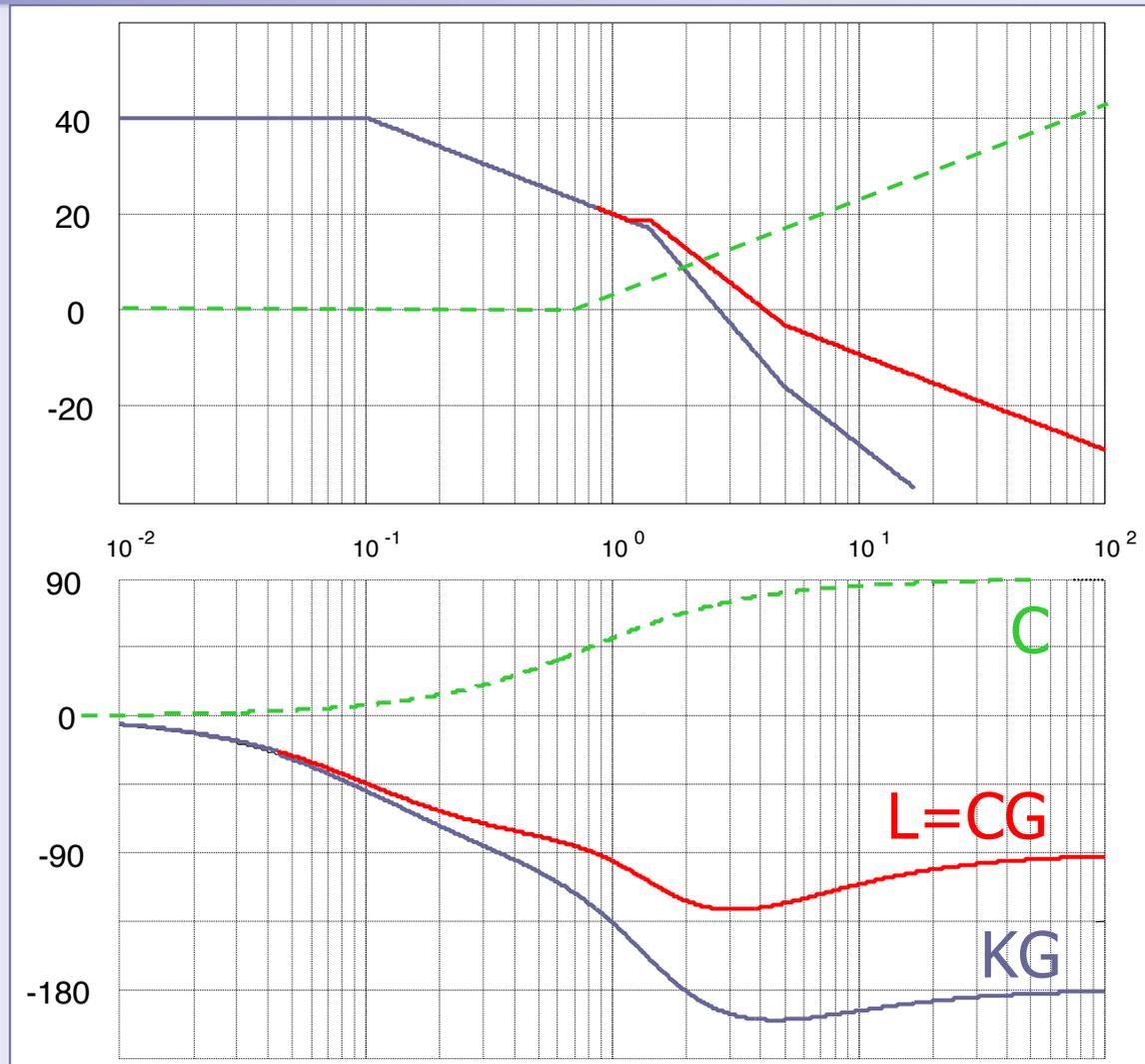
- Se toma $K_c=4$
- Especificación en SO
 $M_{fd}=50^\circ$
 $M_f=-15^\circ$, $w_c=2.6$ rad/s
 $\Delta M_f=50^\circ-(-15^\circ)>45$
Lo que implica caso b) $1/T_d < w_c$
Tomando $\delta=10$
 $\Delta M_f=50^\circ-(-15^\circ)+(10^\circ)=75^\circ$
 $T_d=\tan(75^\circ)/2.6=1.43$
 $1/T_d = 0.7$ rad/s



Ejemplo PD (cont.)

El resultado obtenido se caracteriza por:

- $M_f = 66^\circ$
- $M_g = \text{inf}$
- $w_c' = 4 \text{ rad/s}$



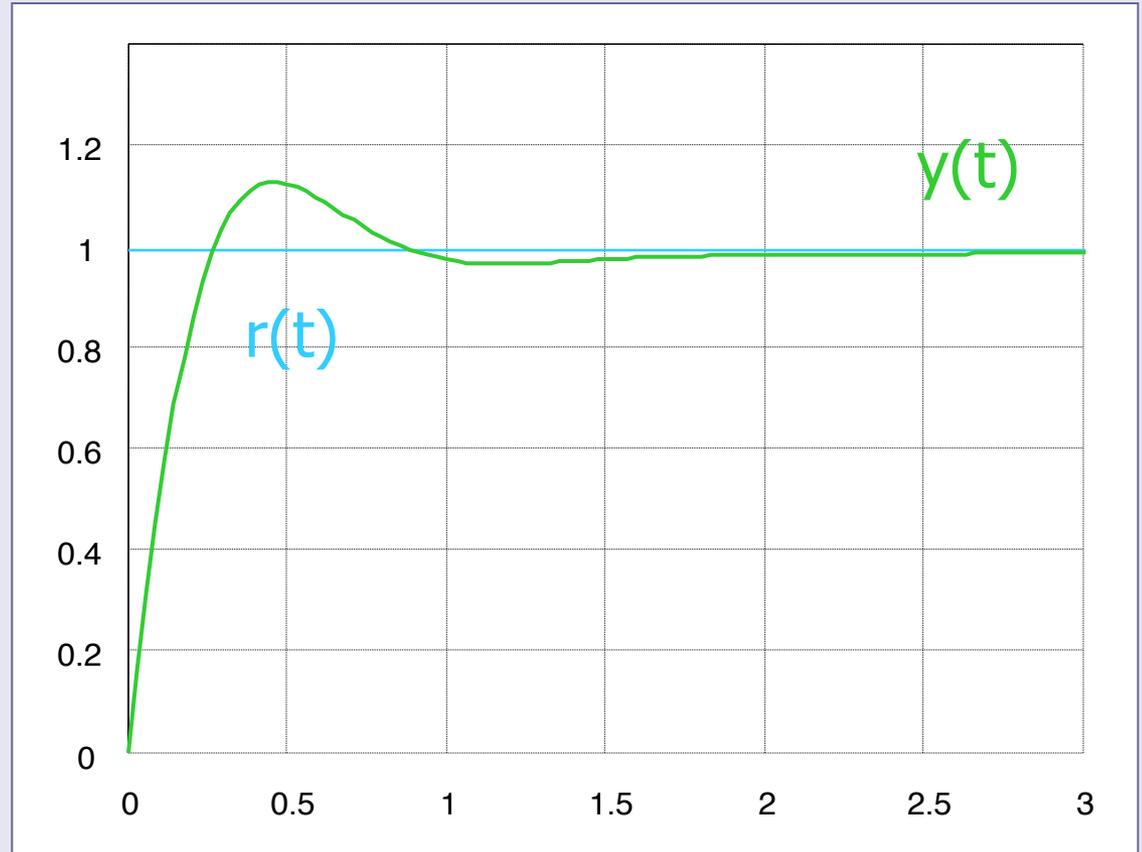
Ejemplo PD (cont.)

El resultado obtenido se caracteriza por:

- $M_f = 66^\circ$
- $M_g = \text{inf}$
- $w_c = 4 \text{ rad/s}$

Mediante simulación es posible obtener:

- $SO = 13\%$
- $t_s = 0.28 \text{ s}$



Control proporcional derivativo (PD)

Caso 2: K_c NO fijada por las especificaciones

Paso 1: Seleccionar la frecuencia de corte ω'_c de las especificaciones (tiempo de subida o tiempo de establecimiento)

Nota: Si las especificaciones no fijan un valor de ω'_c , entonces se puede elegir como la mayor posible tal que requiera un ΔM_f realizable (es decir, inferior a 90°)

Paso 2: Seleccionar T_d para satisfacer la condición de margen de fase para la frecuencia de corte ω'_c anteriormente fijada.

$$M_{fd} = M_f(K_c \cdot G(j\omega'_c)) + \angle(1 + j \cdot T_d \omega'_c)$$

$$M_{fd} = (180^\circ + \angle G(j\omega'_c)) + \angle(1 + j \cdot T_d \omega'_c)$$

Paso 3: Ajustar K_c para garantizar que la frecuencia de corte ω'_c es la del paso 1.

$$|K_c(1 + T_d \omega'_c j)G(j\omega'_c)| = 0dB$$

Ejemplo PD (Caso 2)

Ejemplo de diseño

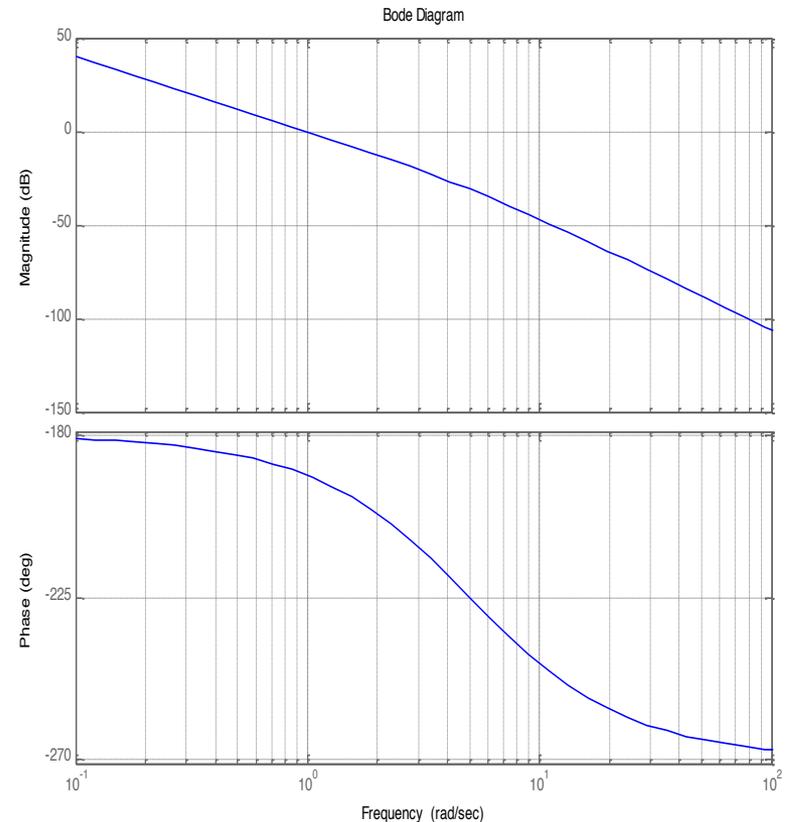
$$G(s) = \frac{5}{s^2(s+5)}$$

Especificaciones

- $ev_{rp} \leq 1\%$
- $SO \leq 20\% \rightarrow M_f \geq 45^\circ$

El sistema realimentado unitariamente es inestable pues $M_f = -11^\circ < 0$

Además este sistema no se puede controlar con un P, pues la fase del sistema es siempre inferior a -180°



Ejemplo PD (Caso 2)

$$G(s) = \frac{5}{s^2(s+5)}$$

- El sistema es tipo 2, por lo que se cumple la especificación en régimen permanente para todo K_c
- La frecuencia de corte ω'_c se fija como la máxima que permita el PD
Por ejemplo, como $M_{fd}=50^\circ$, si imponemos $\Delta M_f=75^\circ$, entonces $\omega'_c=2.3$ rad/s.

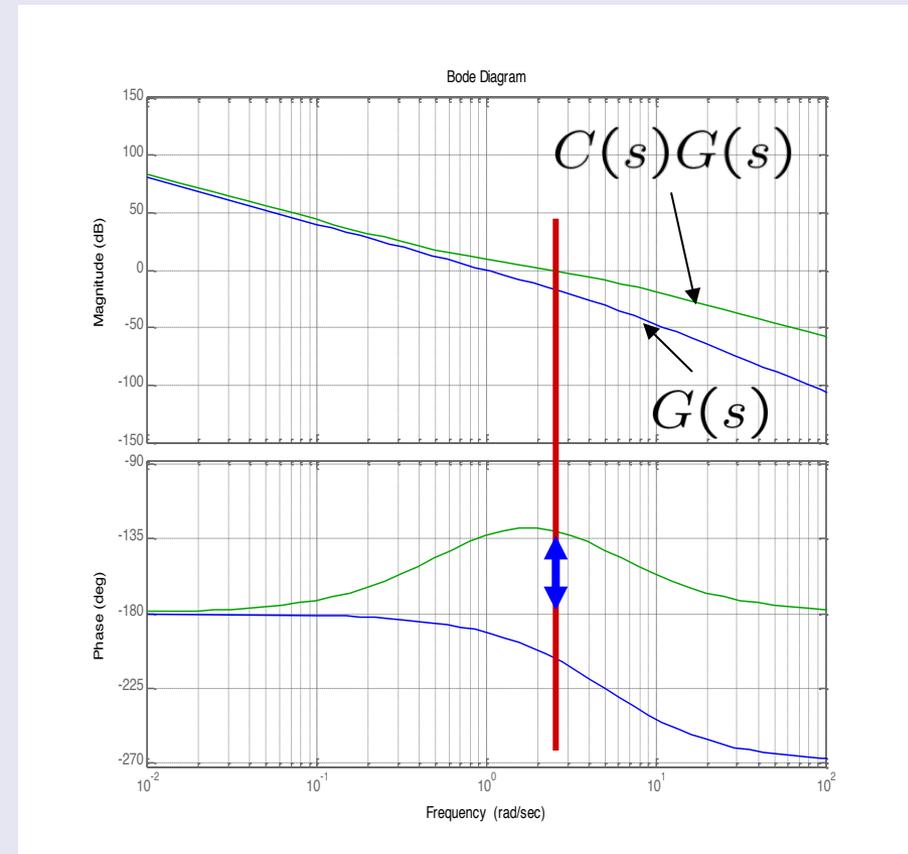
$$T_d = \tan(75^\circ)/2.3 = 1.62$$

$$1/T_d = 0.62 \text{ rad/s}$$

- Finalmente, K_c se toma para que la frecuencia de corte sea $\omega'_c=2.3$ rad/s.

$$|K_c G(j\omega'_c)(1+T_d\omega'_c j)| = 0\text{dB}$$

$$K_c = 3.6\text{dB} \equiv 1.51$$



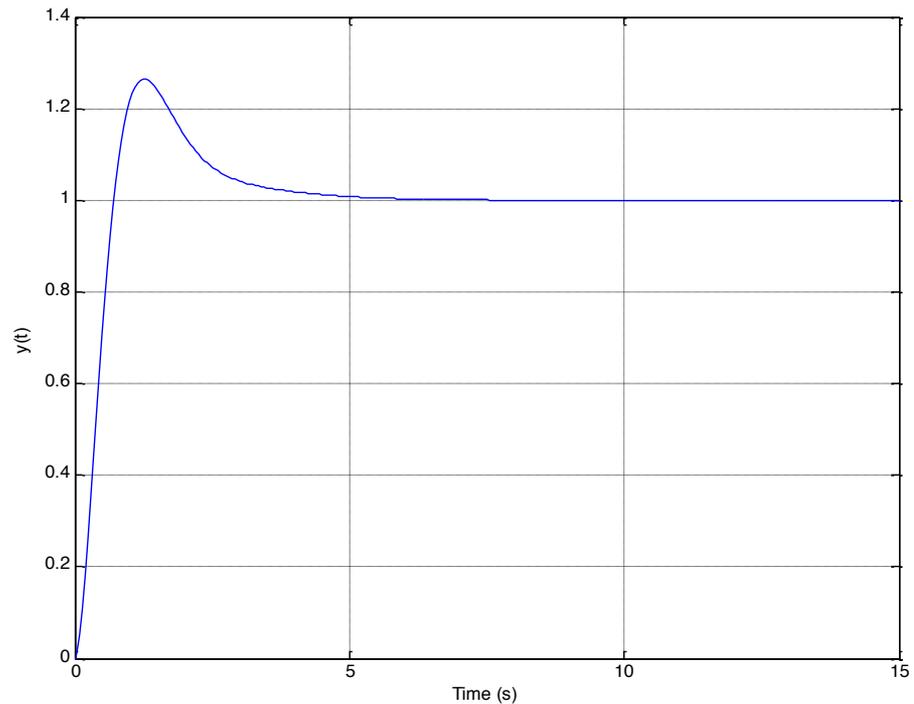
Ejemplo PD (Caso 2)

La respuesta ante escalón del sistema controlado en lazo cerrado es tal que

- $SO = 26\%$
- $t_s = 0.9 \text{ s}$

La sobreoscilación mayor que la deseada se debe al cero que añade el controlador PD.

Posible solución: rediseñar con una restricción de SO más exigente.



Red de avance de fase

Estructura del controlador:

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha < 1$$

Frecuencias bajas

- La ganancia se afecta por K_c (proporcional)
- Desfase nulo

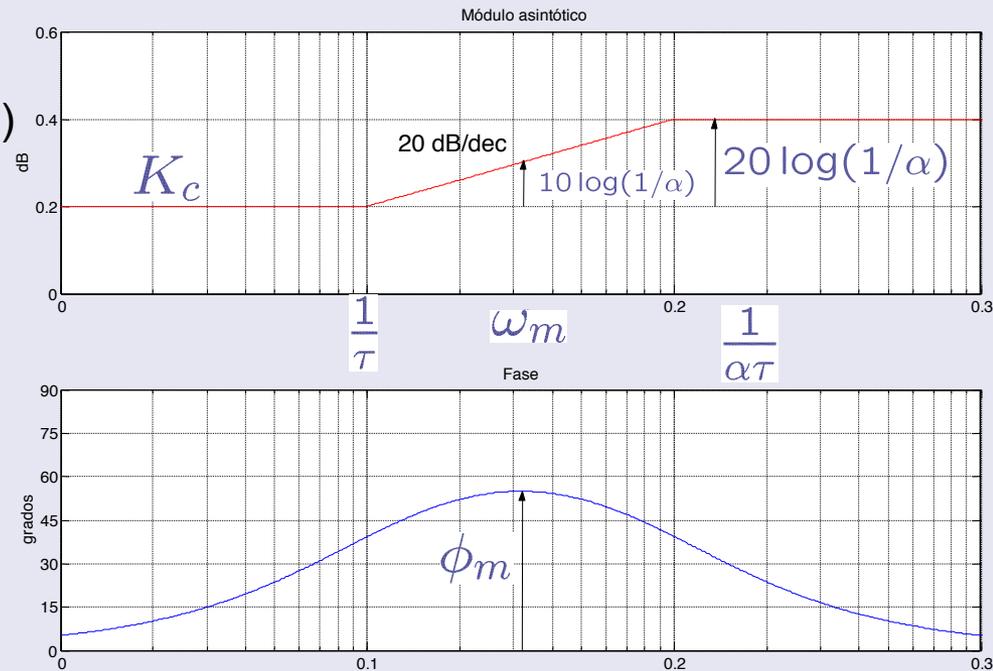
Frec. intermedias

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\alpha \tau}}$$

- Pendiente en el módulo de 20 dB/dec.
- Desfase máximo Φ_m

Frec. Altas

- Módulo aumenta hasta un valor máximo
- Desfase nulo



Red de Avance

Algunas expresiones

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha < 1$$

Máximo avance de fase Φ_m en $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}$

$$\text{sen}\Phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

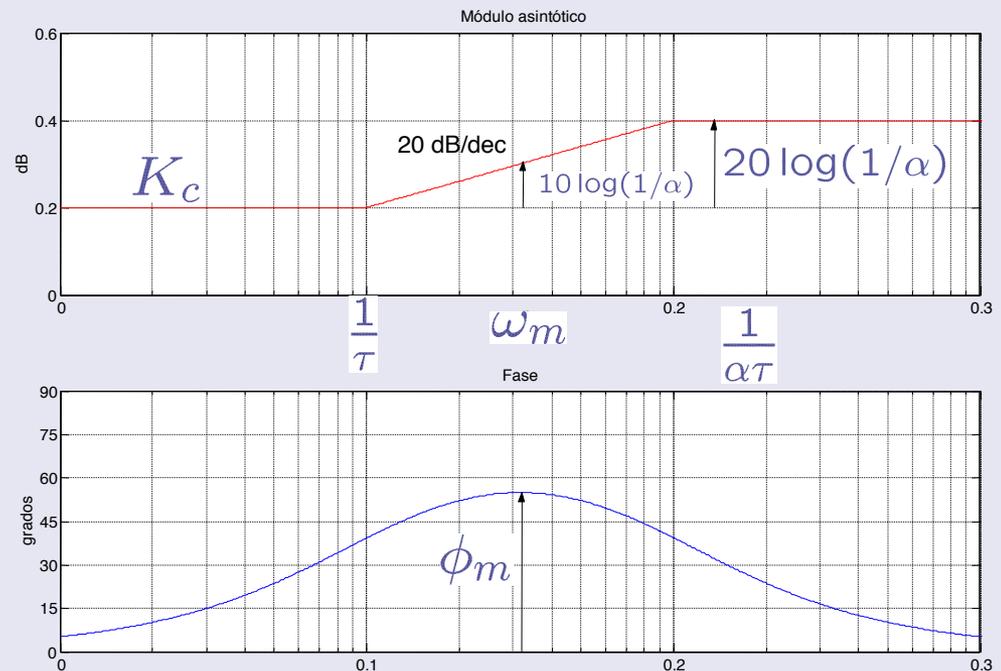
$$\alpha = \frac{1 - \text{sen}\Phi_m}{1 + \text{sen}\Phi_m}$$

Módulo en ω_m

$$K_c|_{dB} + 10 \log(1/\alpha) \text{ (dB)}$$

Ganancia máxima

$$K_c|_{dB} + 20 \log(1/\alpha) \text{ (dB)}$$

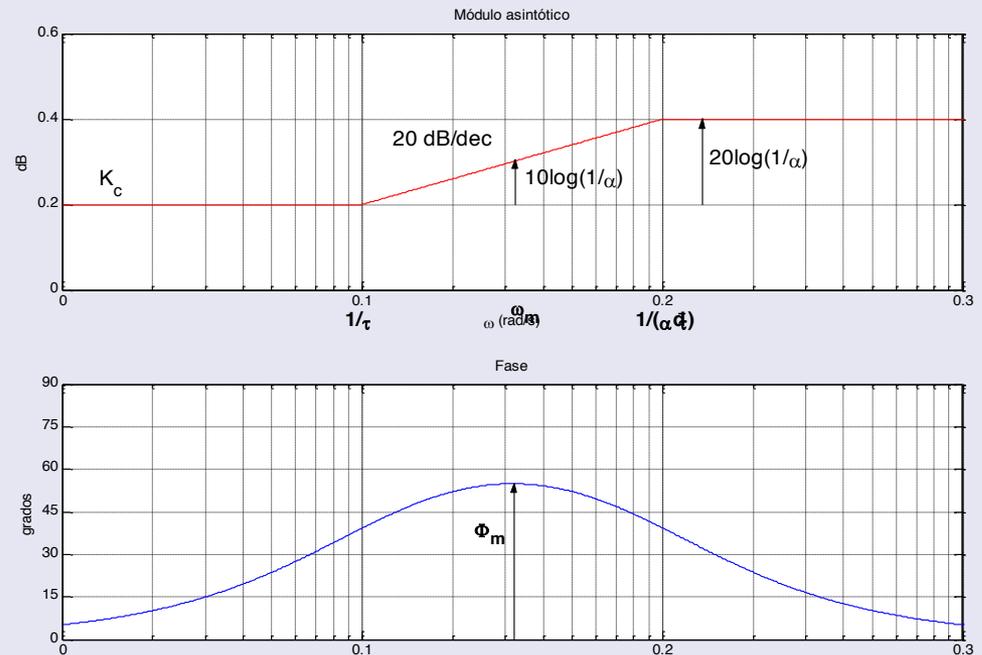


Red de Avance

Efectos prácticos

- La RA **añade fase** en un rango determinado de frecuencias
- El **máximo módulo está limitado**. Beneficioso para el efecto de los ruidos
- El **efecto es similar al del PD** con una módulo limitado

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha < 1$$



Red de Avance

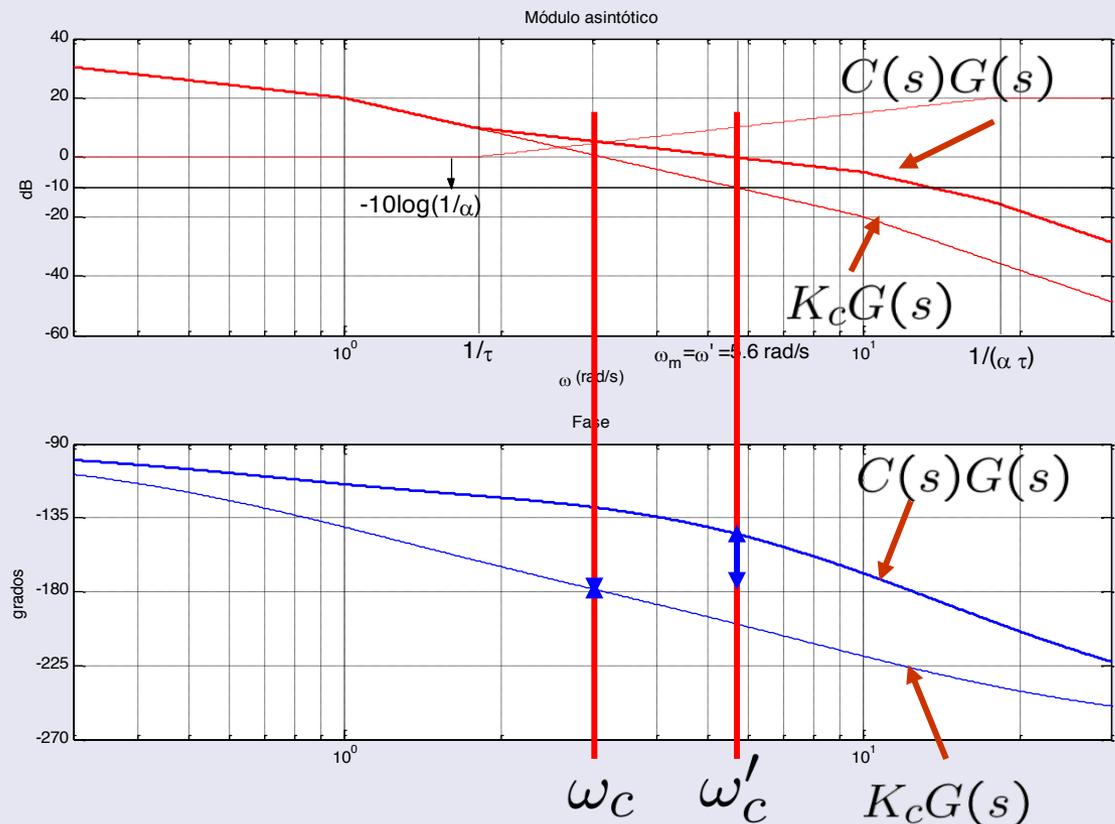
Efectos en el dominio de la frecuencia

ω_c aumenta

M_f aumenta

Sistema más rápido y menos oscilatorio.

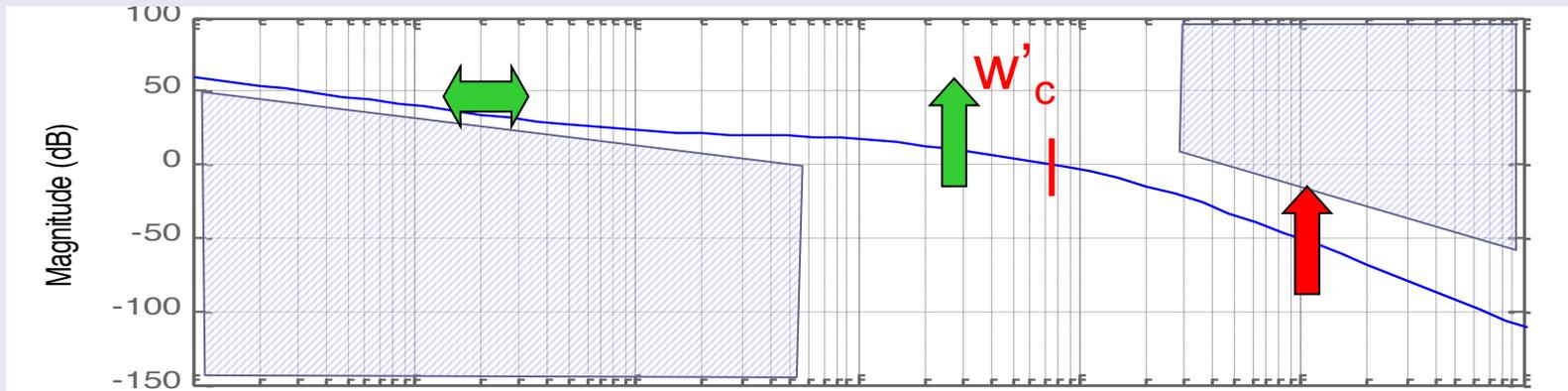
$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha < 1$$



- Efecto en el dominio del tiempo similar al del PD, pero con una **amplificación limitada del ruido**.

Ánálisis de Lazo de la red de avance

Análisis de la función de lazo



Baja Frecuencia

Régimen permanente: **Mejora**
(Por el efecto de K_c)

- Menor error en régimen permanente
- Mejores propiedades de seguimiento

Frecuencia de Corte

- Estabilidad: **mejora**
- (Disminuyen los márgenes)
- Rapidez del transitorio y sobreoscilación: **mejoran**

Alta frecuencia

Empeora como en PD
(ganancia limitada a altas frecuencias)

Red de Avance

Un procedimiento de ajuste de una RA:

Caso a) (K_c fijada por las especificaciones)

Paso 1: K_c se elije para satisfacer las especificaciones en régimen permanente y frecuencia de corte. Se calcula la frecuencia de corte ω_c y margen de fase M_f del sistema sin compensar $K_c G(s)$

Paso 2: Calcular el incremento de margen de fase $\Phi_m = M_{fd} - M_f + \Delta$
con $\Delta \in (5^\circ, 10^\circ)$

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen}\Phi_m}{1 + \text{sen}\Phi_m}$$

Importante: Incremento de fase máximo $\Phi_{max} = 78.5^\circ$

si Φ_m es negativo o mayor que Φ_{max} , la RA no se podrá diseñar.

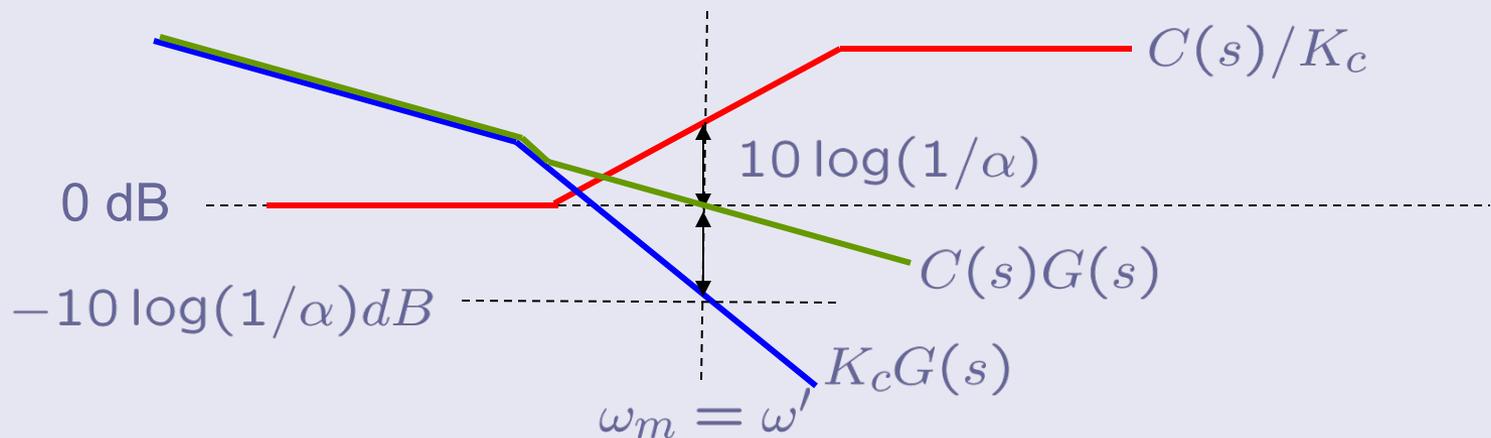
Red de Avance

Paso 3: Calcular τ para garantizar que el avance de fase Φ_m se produce en la frecuencia de corte.

Se sabe que el máximo de frecuencia está en ω_m y

$$|C(j\omega_m)/K_c| = 10 \log_{10} \frac{1}{\alpha}$$

Así que se busca la frecuencia ω' tal que $|K_c G(j\omega')| = -10 \log_{10} \frac{1}{\alpha} \text{ dB}$



Red de Avance

Se sabe que $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} = \omega'$

Si $\omega' < \omega_{cd}$, se debe rediseñar.

La forma más sencilla es volver al Paso 1 y tomar K_c de forma tal que la frecuencia de corte de $K_c G(s)$ sea ω_{cd} .

Como ω' es siempre mayor que ω_c , la condición se satisface (Se está forzando que $\omega_c = \omega_{cd}$).

No obstante, aumentando K_c , también se reduce el margen de fase de $K_c G(s)$ así que se requieren valores mayores de Φ_m (Recuérdese que está limitado a 78.5°)

Red de Avance

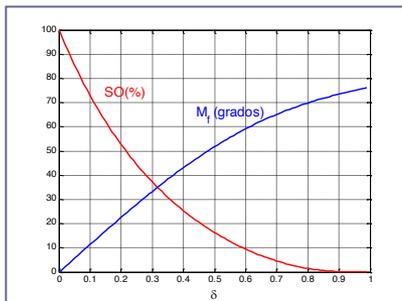
Ejemplo:

$$G(s) = \frac{(s + 5)}{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Especificaciones:

- Error en posición $\leq 1\%$
- SO $\leq 20\%$

$$SO \leq 20\% \Rightarrow M_f \geq 48^\circ$$



$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)C(s) = 25K_c$$

$$e_{pos} = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow K_c > 4$$

Ganancia estática del controlador $\geq 4 = 12.04$ dB

Red de Avance

Ejemplo:
$$G(s) = \frac{(s+5)}{(s+0.1)(s^2+2s+2)}$$

Paso 1 (Ajuste de la ganancia del controlador)

$$e_{pos} \leq 1\% \Rightarrow K_c = 4$$

Paso 2 (Estimar el incremento de margen de fase necesario)

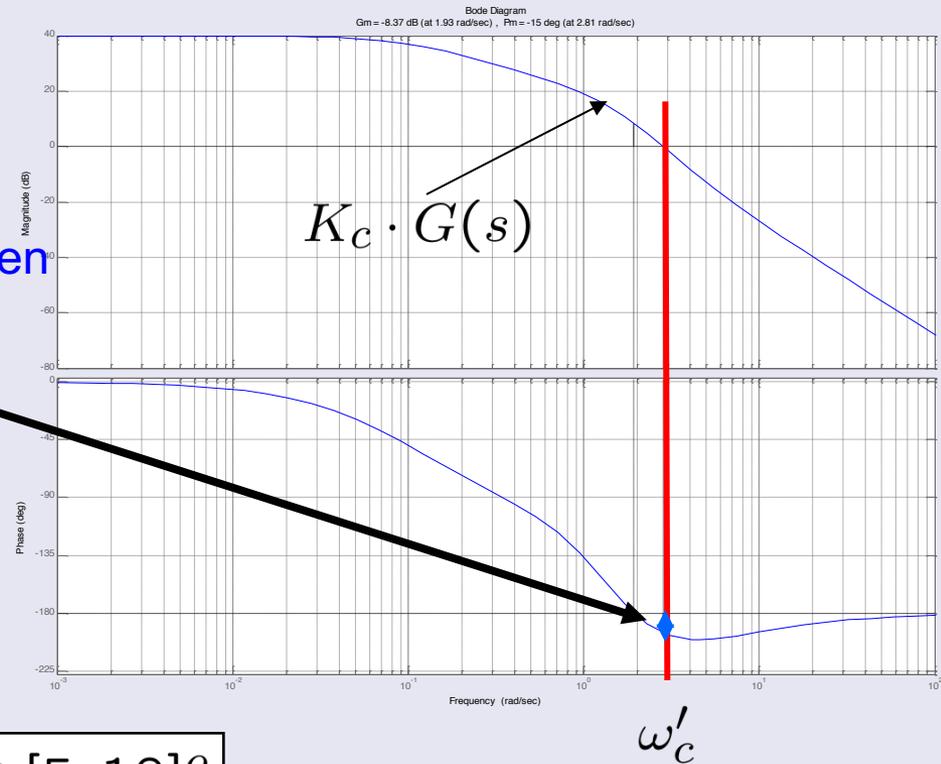
$$M_f(K_c \cdot G(j\omega'_c)) \approx -15^\circ$$

Incremento de M_f

$$\begin{aligned} \Phi_m &= M_{fd} - M_f + \Delta = \\ &= 48^\circ - (-15^\circ) + 5^\circ = 68^\circ \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\Phi_m)}{1 + \sin(\Phi_m)} = 0.038$$

$$\Delta \in [5, 10]^\circ$$



Red de Avance

Paso 3 (Cálculo de τ)

Fijar τ tal que $\omega_m = \omega'_c$ (deseada)

Dado que $|C(j\omega_m)| = 10 \log(1/\alpha)$

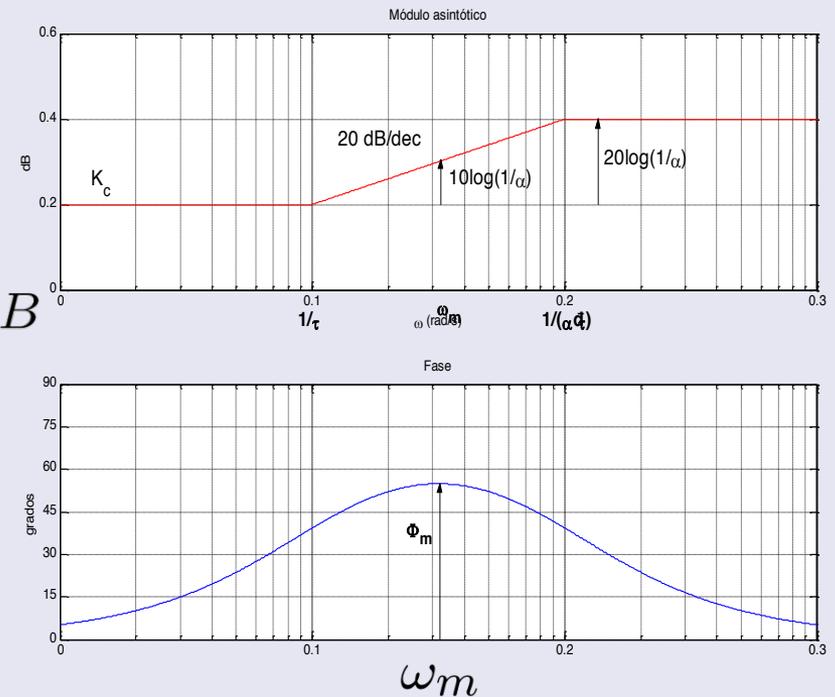
Se busca la frecuencia ω' tal que

$$|K_c G(j\omega')| = -10 \log(1/\alpha) = -14.22 \text{ dB}$$

Así $\omega' = 5.3 \text{ rad/s}$

$$\text{Tomando } \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} = \omega'$$

$$\tau = 0.97 \text{ s}$$



Red de Avance

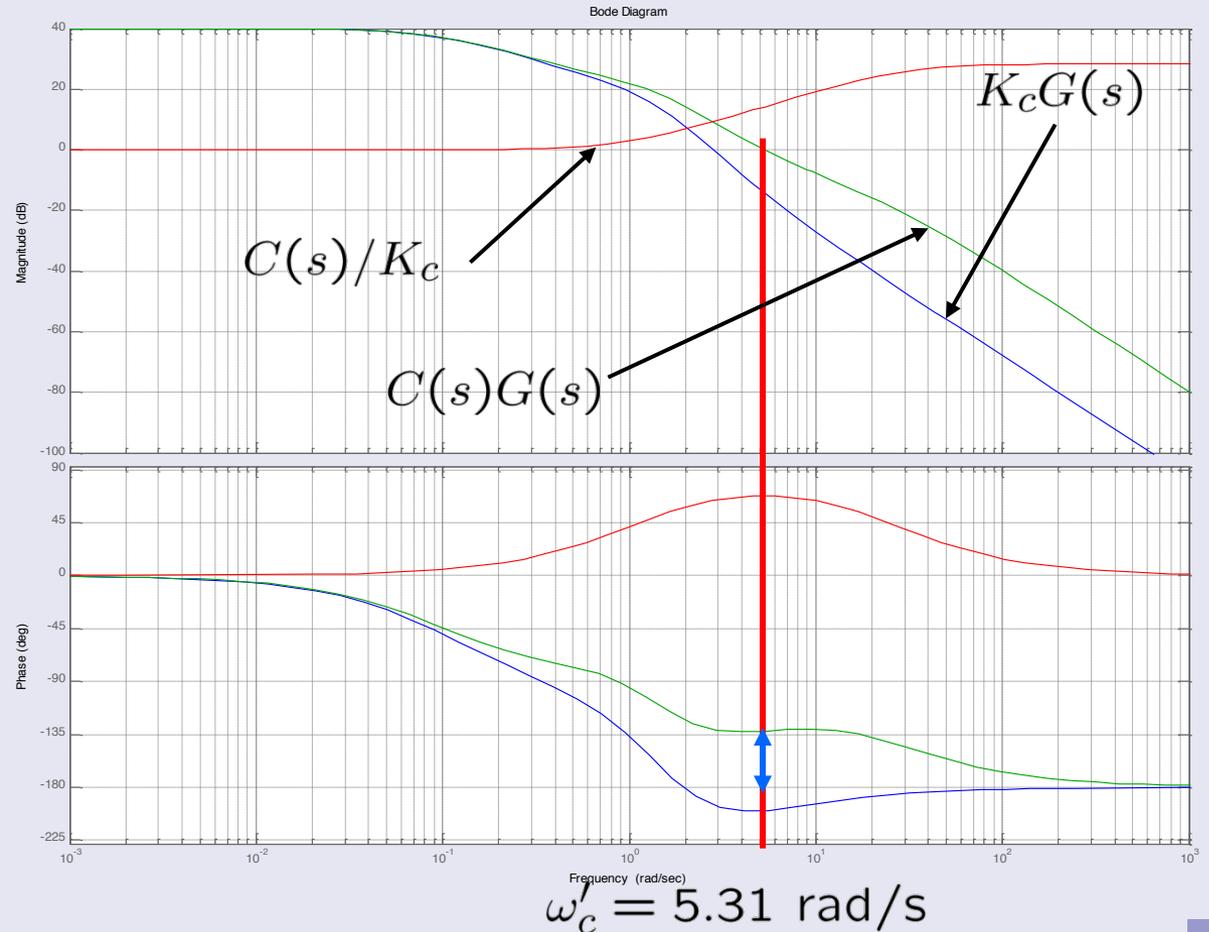
Diseño final

$$C(s) = 4 \frac{1+0.97 \cdot s}{1+0.037 \cdot s}$$

$$K_c = 4; \quad \checkmark$$

$$\omega'_c = 5.31 \text{ rad/s}$$

$$M_f = 48^\circ = 48^\circ(M_{fd}) \quad \checkmark$$

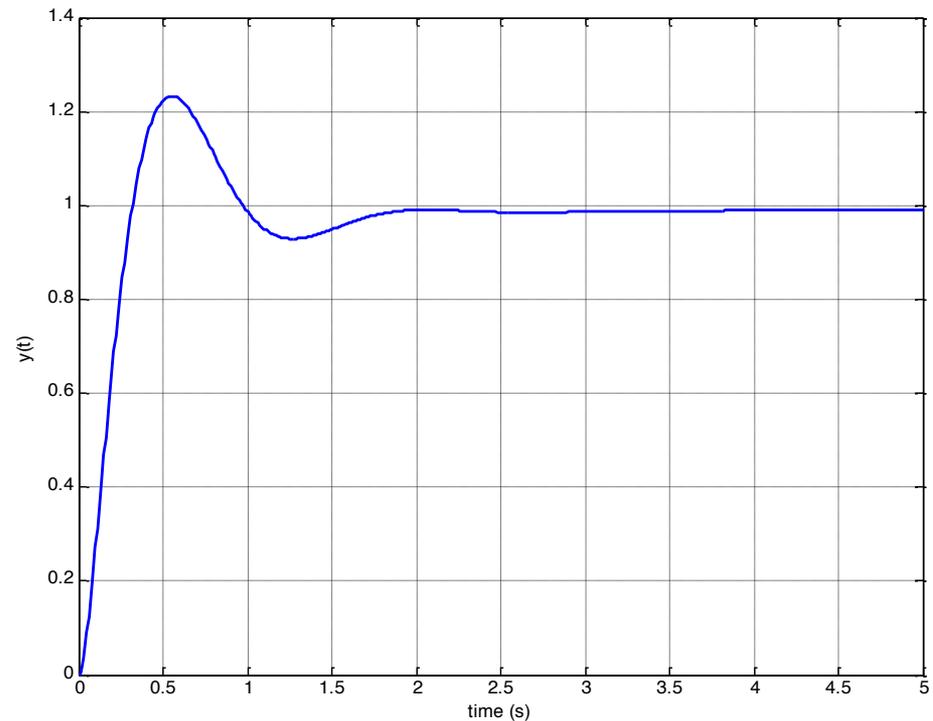


Red de Avance

Respuesta en escalón del sistema controlado:

- $SO = 23\%$
- $t_s = 0.28 \text{ s}$

Requiere ajuste



Red de Avance

Un procedimiento de diseño de la RA

Caso b) (K_c NO viene fijada por las especificaciones)

Paso 1: Seleccionar la frecuencia de corte desada ω'_c de las especificaciones (tiempo de subida o de establecimiento)

Nota: Si las especificaciones no imponen un valor específico de la frecuencia de corte ω'_c , ésta se puede elegir libremente. Una posible opción es tomar la mayor posible, es decir, la mayor frecuencia que requiera un $\Phi_m \leq \Phi_{max}$

Paso 2: Calcular el incremento de margen de fase necesario

$$\Phi_m = M_{fd} - \angle G(j\omega'_c) - 180^\circ \quad \alpha = \frac{1 - \text{sen}\Phi_m}{1 + \text{sen}\Phi_m}$$

Si Φ_m es negativo o mayor que Φ_{max} , la RA no es adecuada

Red de Avance

Paso 3: Determinar τ para garantizar que el pico de incremento de fase Φ_m se produce en la frecuencia de corte.

$$\omega'_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}$$

Paso 4: Ajustar la ganancia K_c para fijar la frecuencia de corte exactamente en ω'_c

$$|K_c|_{dB} = 10 \log_{10} \alpha - |G(j\omega'_c)|_{dB}$$

Red de Avance

Ejemplo de diseño

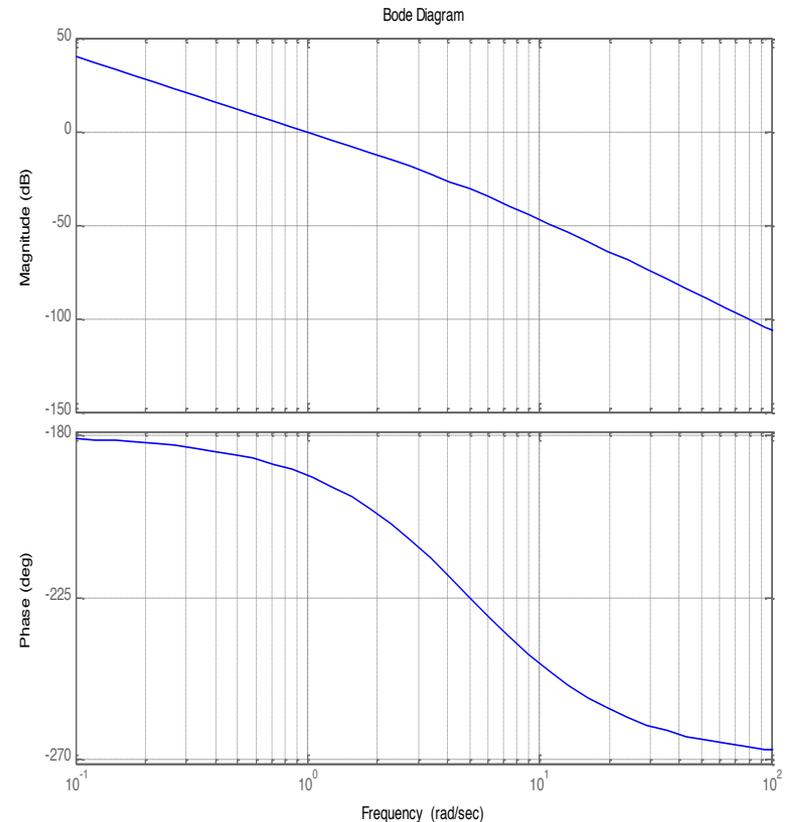
$$G(s) = \frac{5}{s^2(s+5)}$$

Especificaciones:

- $\text{evrp} \leq 0.01$
- $\text{SO} \leq 20\%$

El sistema es inestable cuando se realimenta unitariamente.

Con un controlador P es imposible estabilizar el sistema.
(El P no añade fase)



Red de Avance

$$G(s) = \frac{5}{s^2(s+5)}$$

El sistema es de tipo 2. Por lo tanto $\text{evrp}=0$ y las especificaciones se cumplen para cualquier valor de K_c

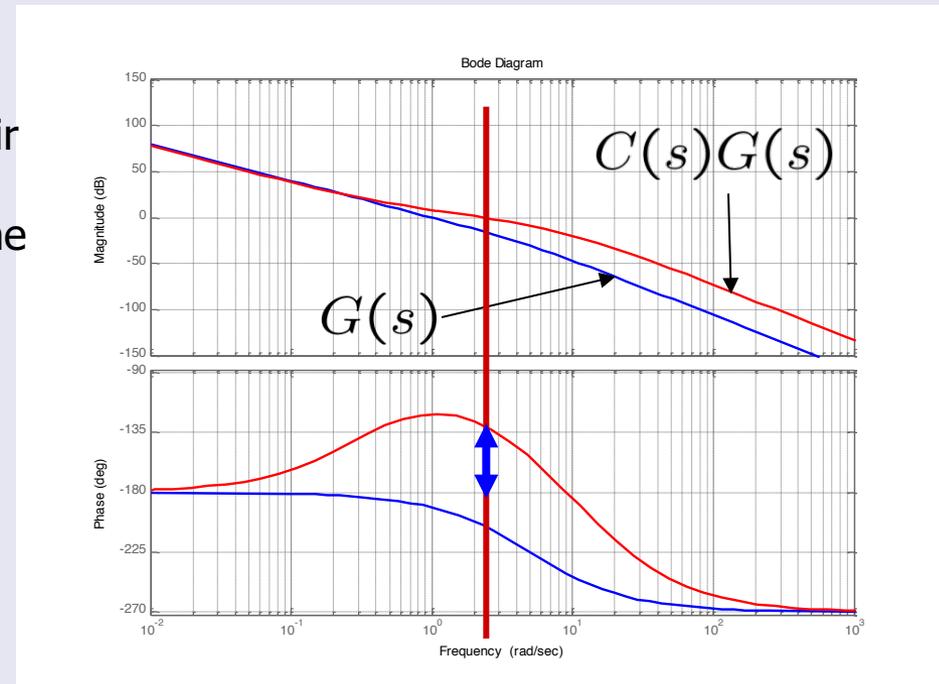
- Por lo tanto, ω'_c se puede fijar para permitir que la RA se pueda diseñar. Por ejemplo, dado que $M_{fd}=50^\circ$, si se impone que $\Phi_m=75^\circ$, entonces podríamos tomar $\omega'_c=2.3$ rad/s.

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Phi_m}{1 + \sin \Phi_m} = 0.017$$

$$\omega'_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} \Rightarrow \tau = 3.3s$$

- Finalmente se calcula K_c para que la frecuencias de corte sea $\omega'_c=2.3$ rad/s.

$$|K_c|_{dB} = 10 \log_{10} \alpha - |G(j\omega'_c)|_{dB} = -2.32dB = 0.766$$

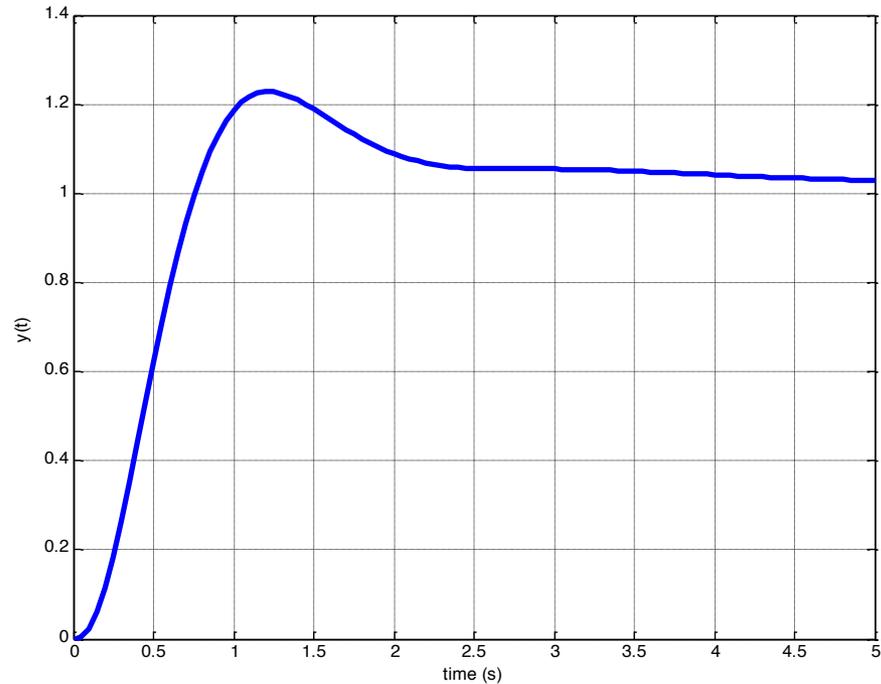


Red de Avance

Respuesta en escalón del sistema controlado

- $SO = 23\%$
- $t_s = 0.8 \text{ s}$

La condición de SO se sobrepasa ligeramente.
Se debe reajustar o rediseñar.



Índice

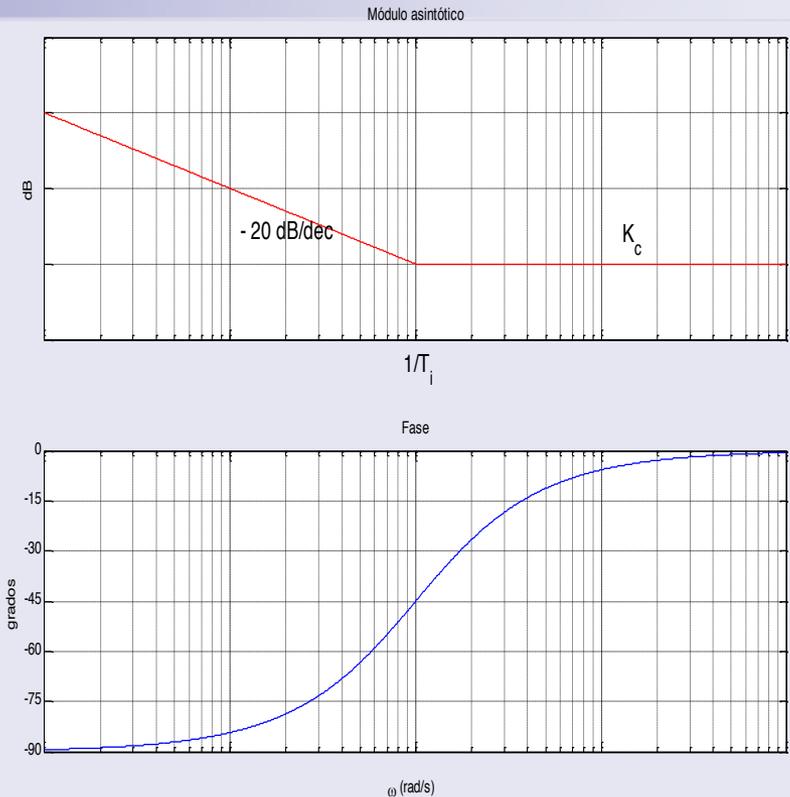
- Introducción
- Análisis de la respuesta temporal en el dominio de la frecuencia
- Sistemas dinámicos como filtros. Diagramas de Bode y Nyquist.
- Estabilidad en el dominio de la frecuencia. Márgenes de estabilidad.
- Especificaciones en el dominio de la frecuencia.
- Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia
 - Control proporcional (P)
 - Control PD y red de avance
 - **Control PI y red de retardo**
 - Control PID y red mixta
- Conclusiones y comentarios

Control PI

$$u(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$
$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_c \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

Efectos:

- Incrementa el tipo del sistema (número de polos en el origen)
- Reduce la fase a frecuencias menores a $1/T_i$
- Puede presentar problemas en presencia de saturación de los actuadores (Red de Retardo)



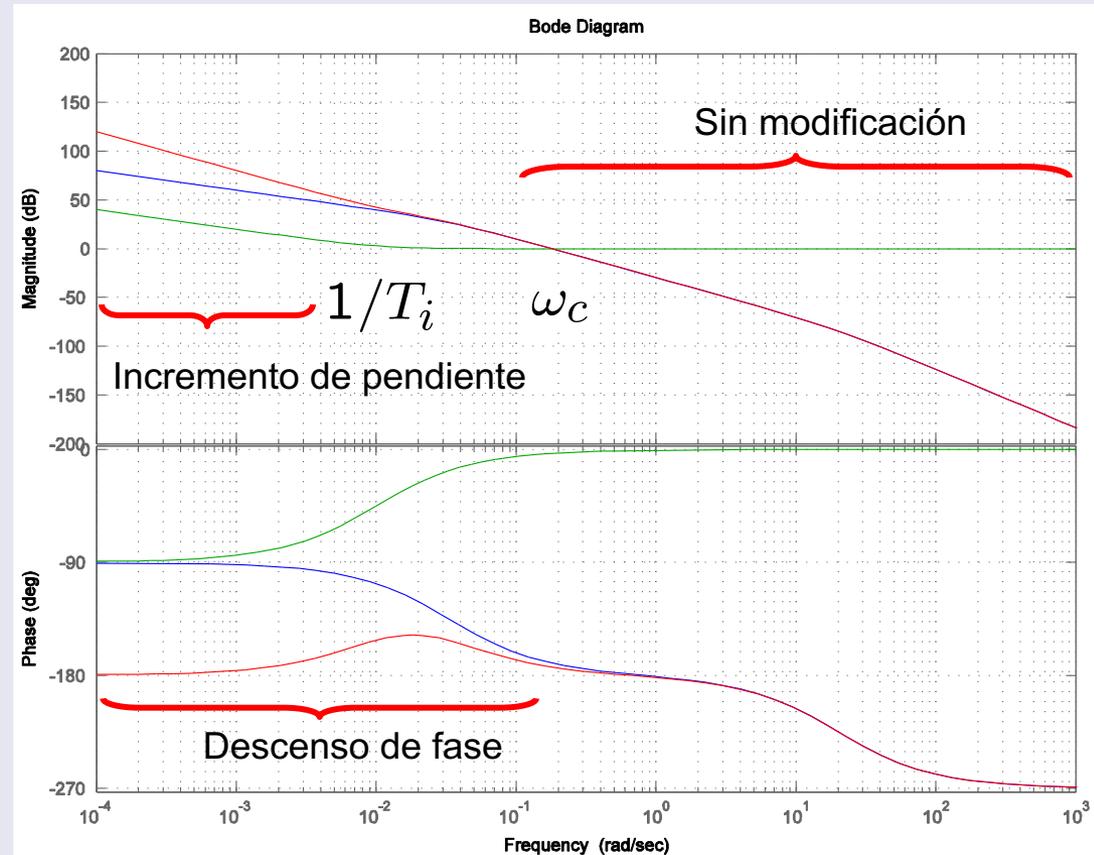
Control PI

Efectos en el sistema

- A bajas frecuencias la magnitud sube debido al polo en el origen.
- A altas frecuencias la magnitud no se modifica.
- Para frecuencias inferiores a $1/T_i$ la fase decrece.

Mejora el rechazo a perturbaciones y las propiedades de seguimiento de referencia

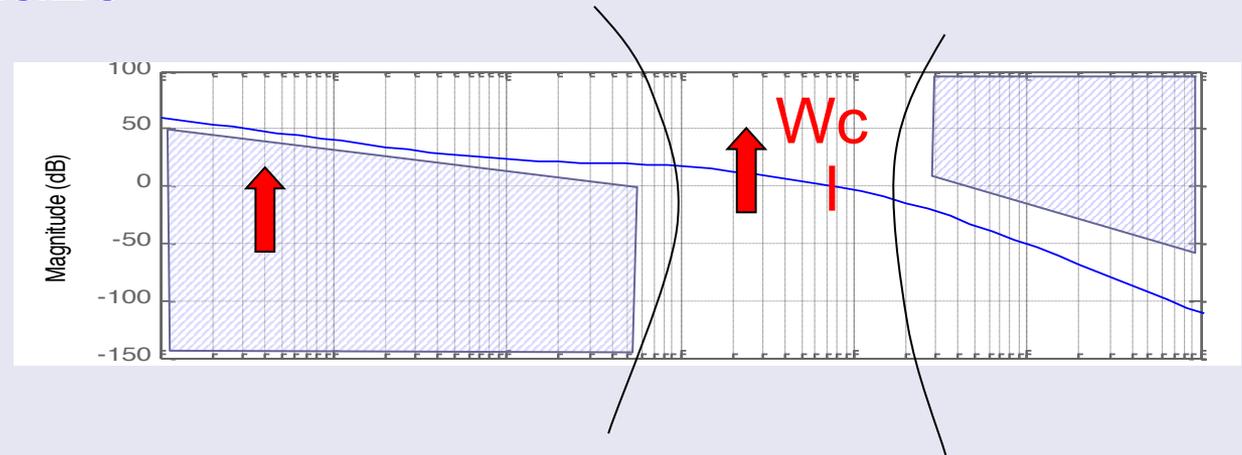
Puede introducir inestabilidad
(menor margen de fase)



Análisis de Lazo del controlador PI

Análisis de Lazo

-20 dB/dec



Baja frecuencia:

-A baja frecuencia la respuesta mejora. La pendiente se incrementa en -20dB/dec.

-Rechazo a perturbaciones **mejora**

-Seguimiento **mejora**

Frecuencia de Corte

- El margen de estabilidad **puede empeorar**
- El margen de fase decrece para bajas frecuencias. La **sobreoscilación puede aumentar.**

Alta frecuencia

La respuesta a altas frecuencias no se modifica.

Control PI

Procedimiento de diseño de un controlador PI

$$C(s) = K_c \frac{(1 + T_i s)}{T_i s}$$

Ajuste de K_c y T_i

El problema de diseño se puede plantear como el de un controlador PD

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c}{T_i} \frac{G(s)}{s} (1 + T_i s) = K G'(s) (1 + T_i s)$$

$$G'(s) = \frac{1}{s} G(s), \quad K = \frac{K_c}{T_i}$$

K_c no es la ganancia de Bode del controlador!

Diseño de un PI

Caso a) $K=K_c/T_i$ no está fijada por especificaciones de error en régimen permanente

$$C(s) = K_c \frac{(1 + T_i s)}{T_i s}$$

- Ajuste

Paso 1: Elegir ω'_c para satisfacer las especificaciones de respuesta transitoria

Paso 2: Elegir $1/T_i < \omega'_c$ para evitar un descenso elevado del margen de fase

Paso 3: Determinar K_c que satisfaga $|C(j\omega'_c) \cdot G(j\omega'_c)| = 1$
o aproximadamente. $|K_c \cdot G(j\omega'_c)| = 1$

$$\frac{1}{T_i} \in \left[\frac{\omega'_c}{30}, \frac{\omega'_c}{10} \right]$$

Un valor de $1/T_i$ bajo implica rechazo a perturbaciones lento y tiempo de establecimiento alto

Elegir T_i lo **más pequeño** posible



Ejemplo de diseño de un PI

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Especificaciones:

- Error frente a entrada en rampa (error en velocidad) ≤ 0.01 (régimen permanente)
- $SO \leq 20\%$

Ejemplo de diseño de un PI

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Error en velocidad ≤ 0.01

Esta especificación fija un límite inferior para la ganancia de bode del controlador $C(s)$

$$K_v = 0.1K_c \geq 100 \Leftrightarrow K_B = 1000$$

Márgen de fase de $1000G(s) = -40^\circ$

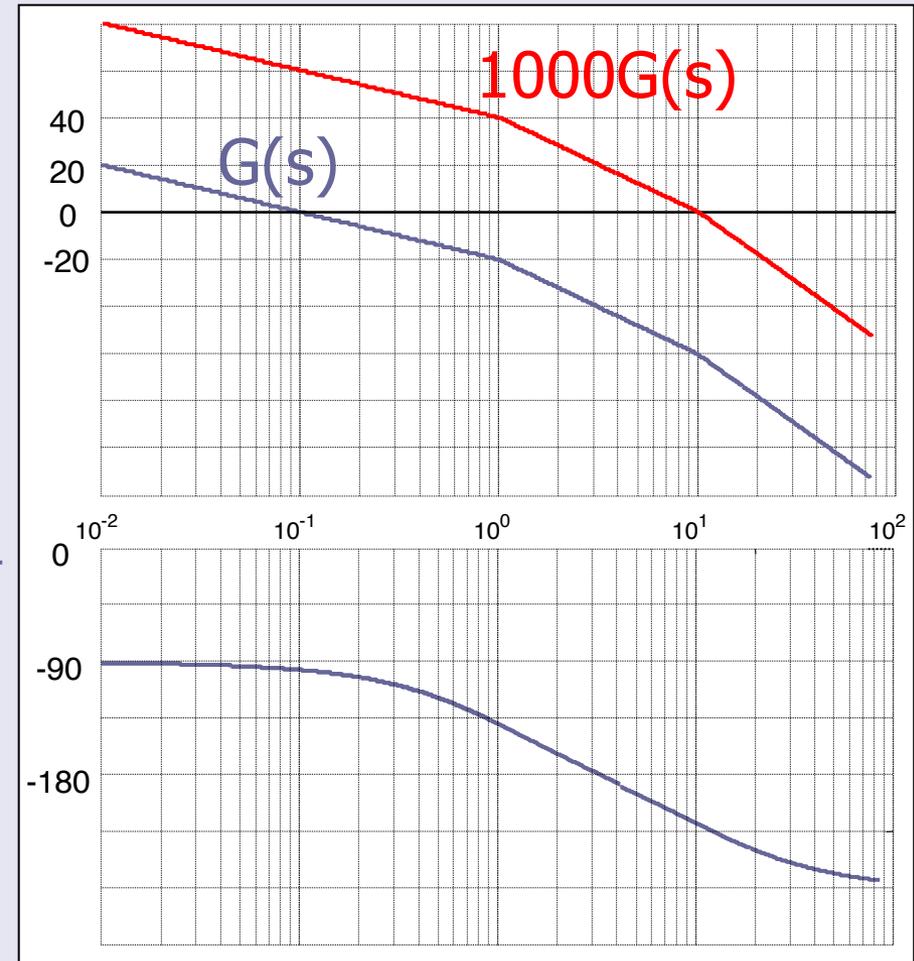
$$SO \leq 20\% \Leftrightarrow M_{fd} \geq 45^\circ$$

Un controlador proporcional no puede estabilizar el sistema y satisfacer las especificaciones de error en velocidad

Se puede incrementar la fase añadiendo un PD?

$$\begin{aligned} \Delta M_f &= M_{fd} - M_f + \Delta \\ &= 45 - (-40) + 10 = 95^\circ \end{aligned}$$

No se puede usar un PD porque K_c es demasiado alta



Ejemplo de diseño de un PI

Solución: Usar un controlador PI

El PI incrementa el tipo de la función de transferencia en lazo abierto y por lo tanto la especificación de error en régimen permanente se satisface automáticamente.

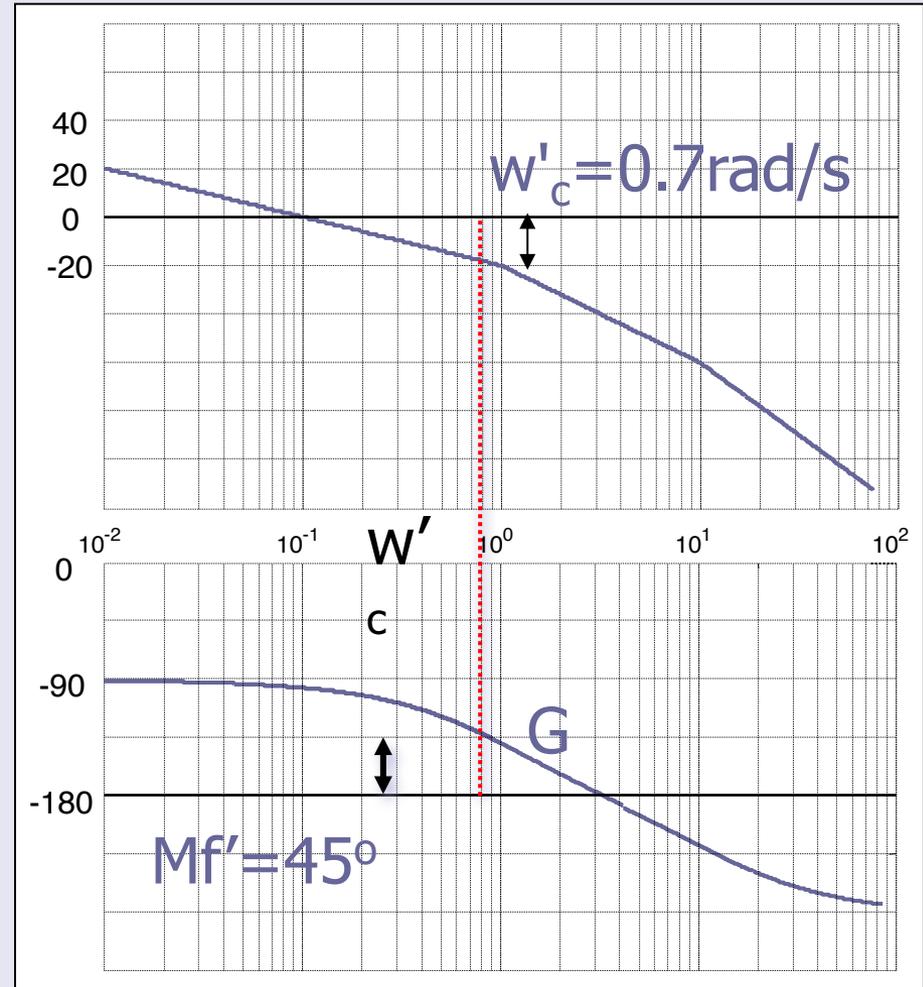
Se pueden elegir los parámetros K_c y T_i para cumplir el resto de las especificaciones.

Para obtener un sistema en lazo cerrado rápido elegimos la frecuencia de corte máxima que nos da el margen de fase requerido.

$M_{fd}=45^\circ$, $w'_c=0.7\text{rad/s}$, $|G(j w'_c)|=-18\text{ dB}$

K_c se elige para obtener la w'_c deseada

$K_c=18\text{ dB}$ ($K_c=8$)



Ejemplo de diseño de un PI

Ti se elige para garantizar que el término integral no disminuye el margen de fase del sistema controlado:

$$1/T_i < \omega'_c/10 = 0.05$$

$$T_i = 20$$

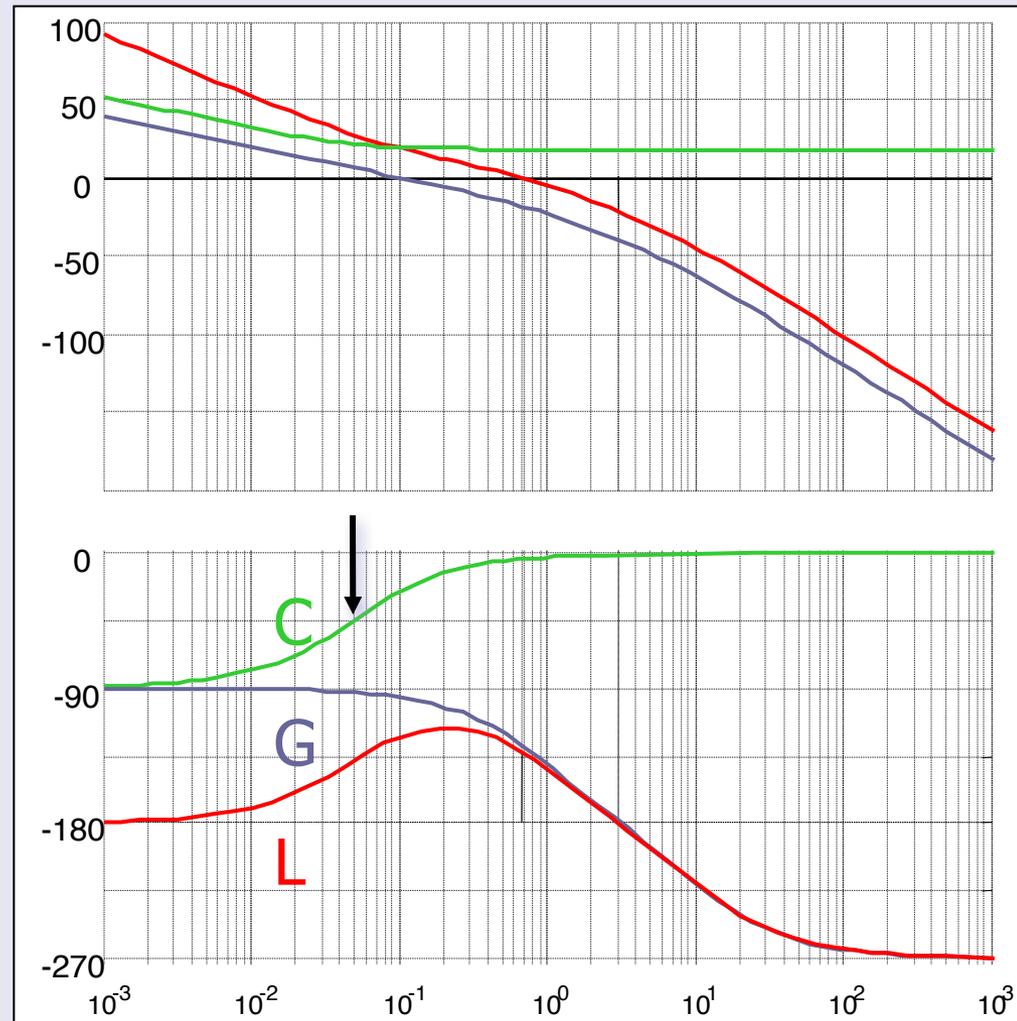
$$\begin{aligned} C(s) &= (K_c/T_i) (1+T_i s) / s \\ &= 8 \cdot 0.05 (1+ 20s) / s \\ &= 0.4 (1+ 20s) / s \end{aligned}$$

Respuesta frecuencial de $C(s)G(s)$

$$M_f = 48^\circ$$

$$M_g = 22 \text{ dB}$$

$$\omega_c = 0.7 \text{ rad/s}$$



Ejemplo de diseño de un PI

Respuesta temporal del sistema en lazo cerrado:

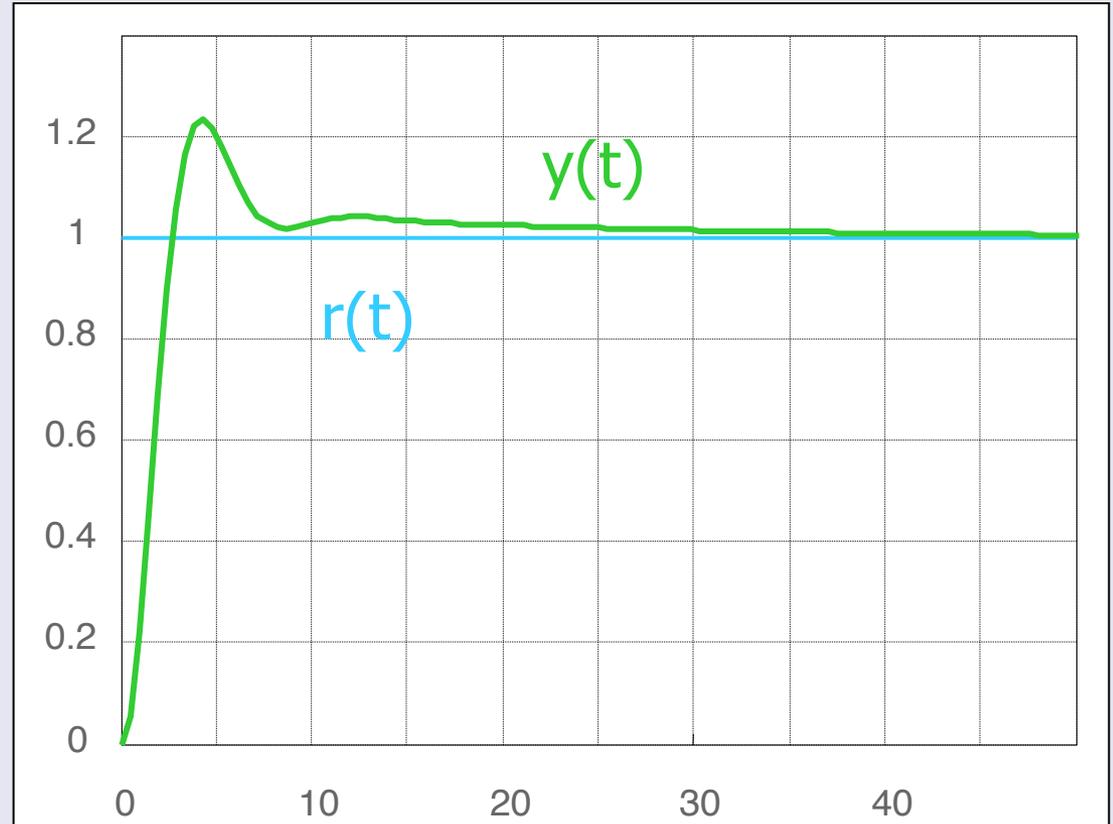
$$SO = 22\%$$

$$t_s = 2.7 \text{ s}$$

El tiempo de establecimiento es mayor que el de subida.

El tiempo de establecimiento depende de la respuesta a bajas frecuencias de $L(s) = C(s)G(s)$ y en particular de la situación del cero del PI.

Menor T_i implica menor tiempo de establecimiento (y mayores problemas de estabilidad)



Controlador PI

Caso b): $K_B = K_C/T_i$ está fijada por las especificación de error en régimen permanente

Ajuste:

Paso 1: Elegir K_B para satisfacer las especificaciones de error en régimen permanente

Paso 2: Diseñar un controlador $C(s)$ para el sistema $G'(s)$

$$G'(s) = \frac{1}{s}K_B G(s), \quad C(s) = (1 + T_i s) \quad \begin{array}{l} \text{¡El diagrama de bode de } G'(s) \\ \text{Es diferente del de } G(s)! \end{array}$$

Paso 3: Una vez elegido T_i , K_C se obtiene de $K_C = K_B \cdot T_i$

Nota: En general T_i se elige tal que $1/T_i$ es menor que la frecuencia de corte.

Ejemplo de diseño de un PI

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Especificaciones:

- Error frente a entrada en parábola (error en aceleración) ≤ 0.01 (régimen permanente)
- $SO \leq 20\%$

Ejemplo de diseño de un PI

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Especificaciones

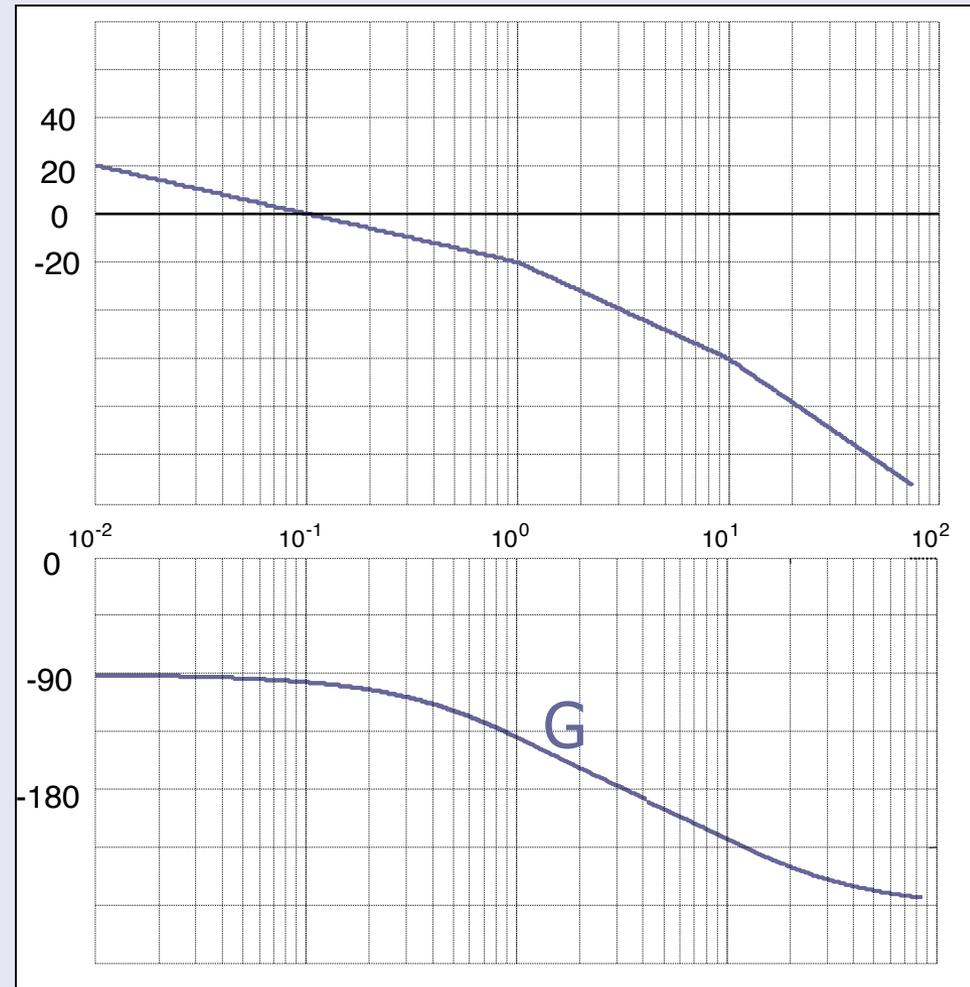
Error en aceleración < 0.01

SO $< 20\%$

$G(s)$ tiene $M_f=80^\circ$, $M_g=40\text{dB}$

$G(s)$ es de tipo 1
(un polo en el origen)

Para satisfacer las especificaciones de permanente hay que usar un controlador PI.



Ejemplo de diseño de un PI

Error en aceleración ≤ 0.01 fija la mínima ganancia de bode K_B del controlador:

Error en aceleración = $1/K_a$

$K_a = 0.1K_c/T_i$

$K_c/T_i \geq 1000$

Respuesta frecuencial de sistema modificado

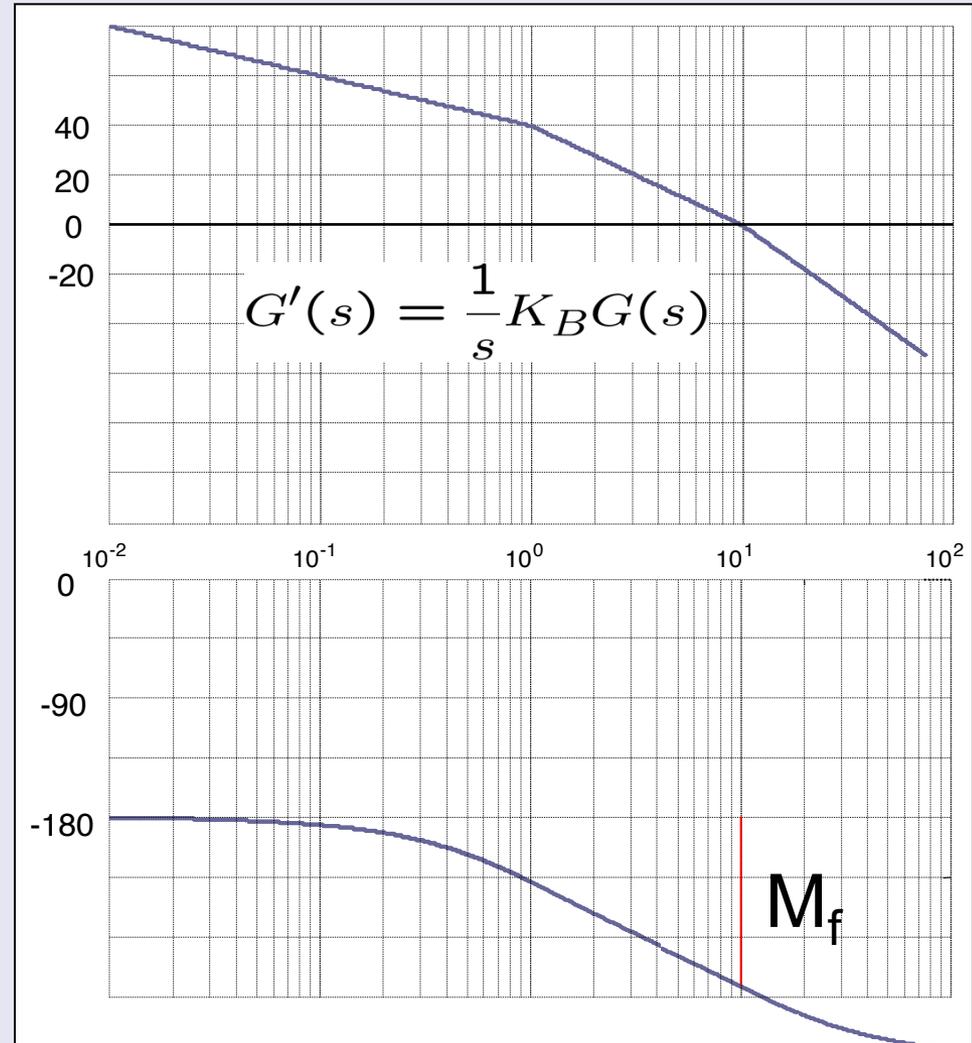
$G' = K_B G/s$

$M_f = -80^\circ$, $\omega_c = 10$ rad/s

$\Delta M_f = 50 - (-80) + \Delta > 90^\circ$

EL margen de fase es demasiado pequeño

Es imposible cumplir todas las especificaciones



Ejemplo de diseño de un PI

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

Especificaciones

- Error frente a entrada en rampa (velocidad) < 0.01
- $SO < 60\%$

Ejemplo de diseño de un PI

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

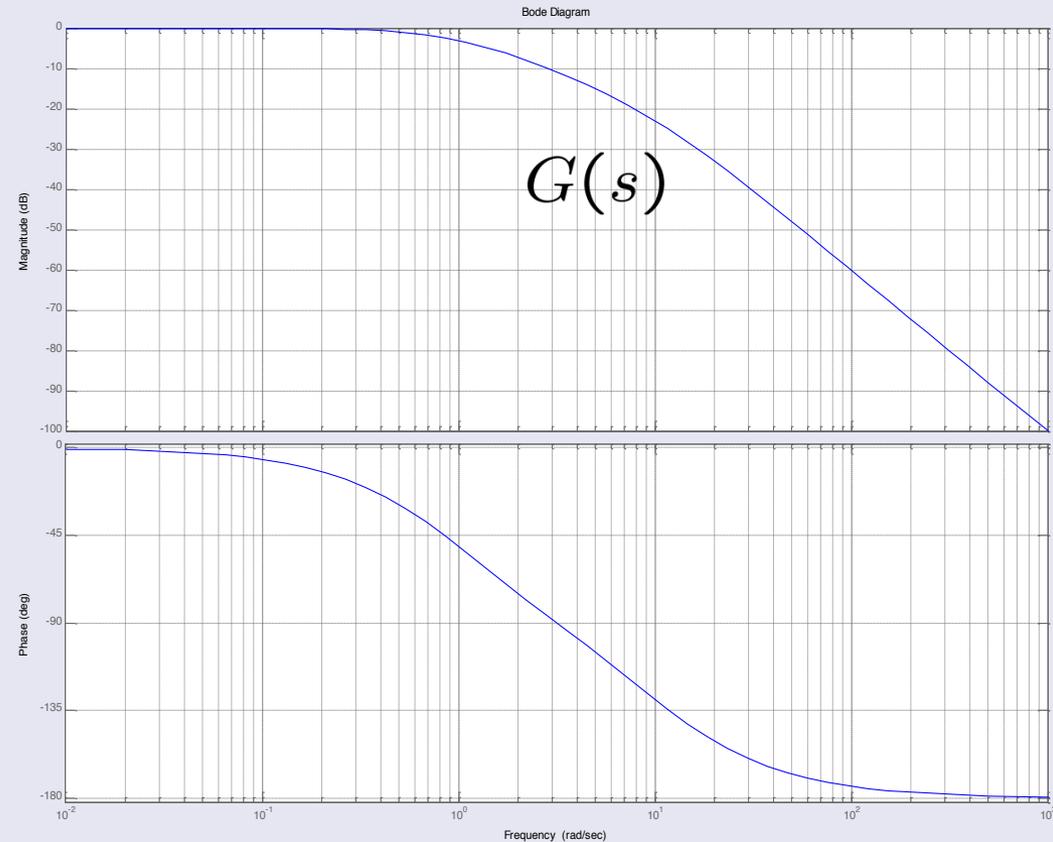
Especificaciones

Error en velocidad < 0.01

SO $< 60\%$

$G(s)$ es de tipo 0
(sin polos en el origen)

Para satisfacer las especificaciones de permanente hay que usar un controlador PI.



Ejemplo de diseño de un PI

Error en velocidad ≤ 0.01 fija la mínima ganancia de bode K_B del controlador:

Error en velocidad = $1/K_v$

$K_v = K_c/T_i$

$K_c/T_i \geq 100$

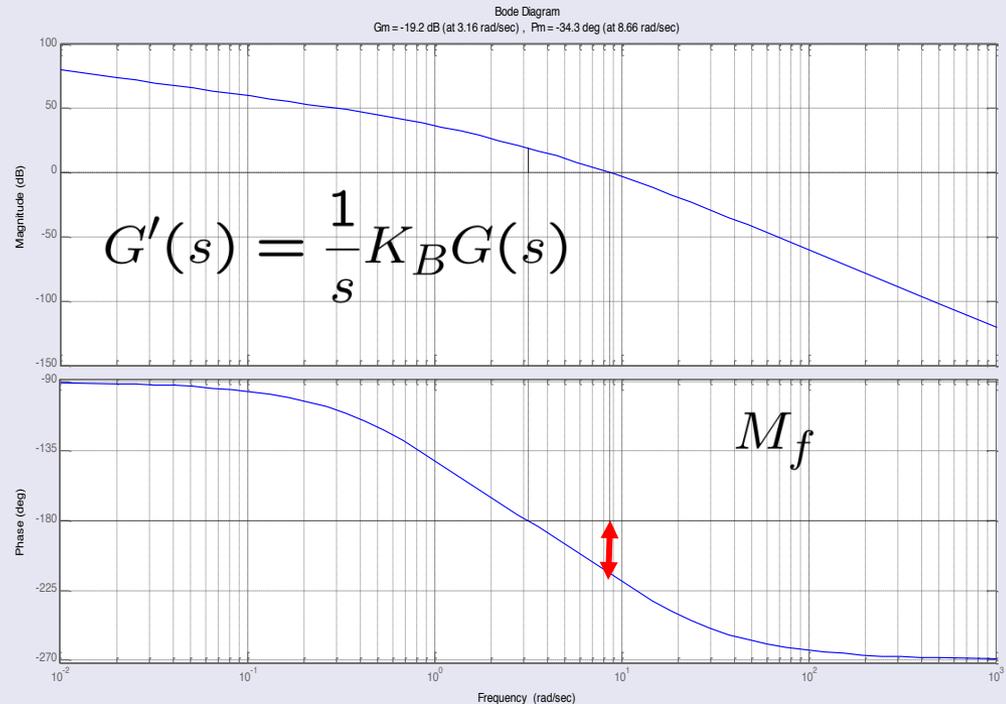
Respuesta frecuencial del sistema modificado $G' = K_B G/s$

$M_f = -34.3^\circ$, $w_c = 8.66$ rad/s

$\Delta M_f = 20 - (-34.3) + \delta = 25 - (-34.3) + 10.7 = 65^\circ$

Ese es el margen de fase a añadir con el cero del controlador PI

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$



Ejemplo de diseño de un PI

$SO \leq 60\%$ implica que el mínimo M_f es $M_f' = 20^\circ$

$$\Delta M_f = M_{fd} - M_f + \delta = 20 - (-34.3) + 10.7 \Rightarrow \Delta M_f = 65^\circ$$

Teniendo en cuenta el Bode del cero en $-1/T_i$

$$\omega_c T_i = \tan(\Delta M_f) = \tan(65^\circ) = 2.14$$

$$T_i = 2.14 / 8.66 = 0.247$$

Finalmente, $K_c = K_B \cdot T_i = 24.7$.

El controlador PI tiene la siguiente función de transferencia

$$G(s) = 2.47 \frac{0.247s + 1}{0.247s}$$

Margen de fase resultante:

$$M_f = 22.3^\circ > 20^\circ \quad \mathbf{OK}$$

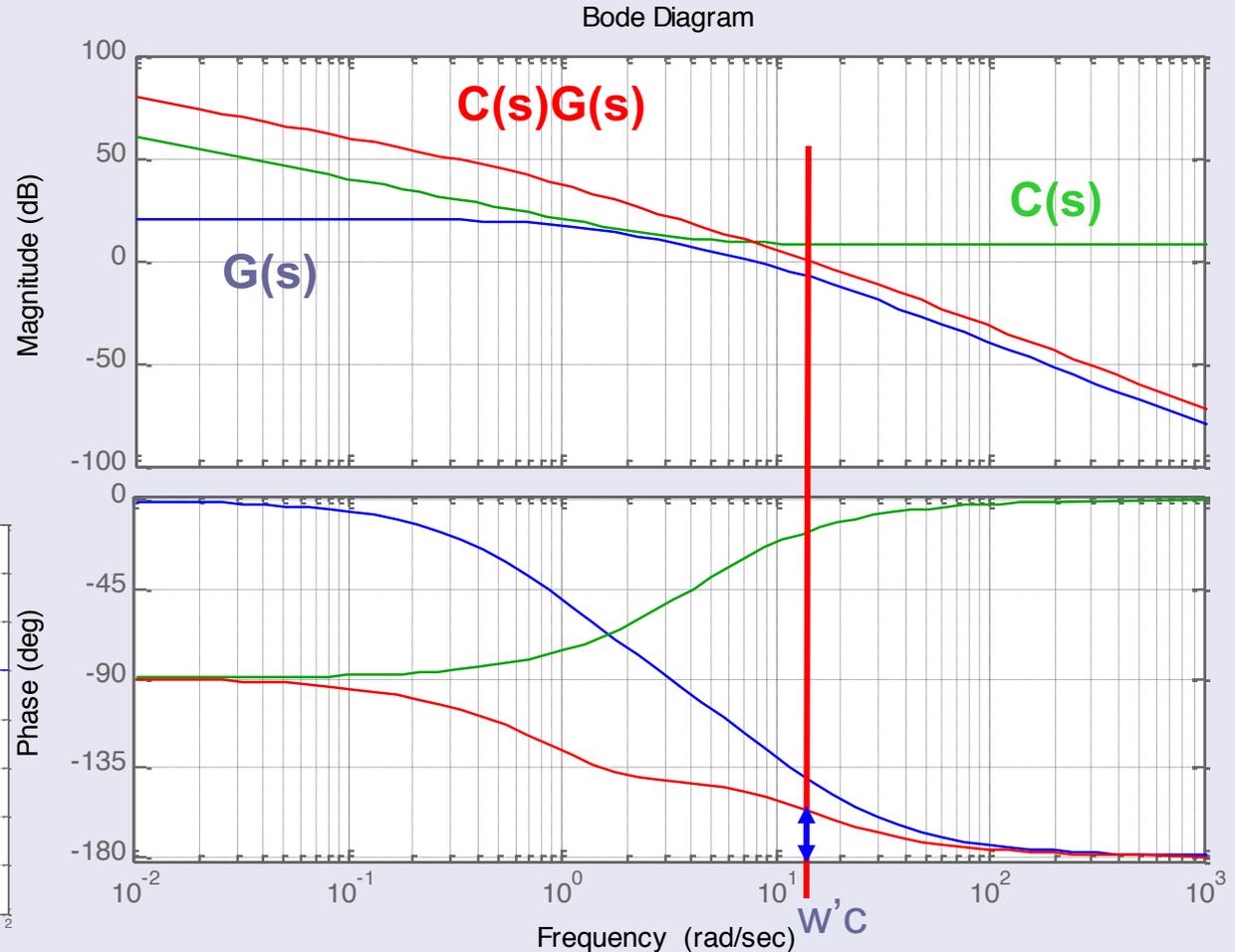
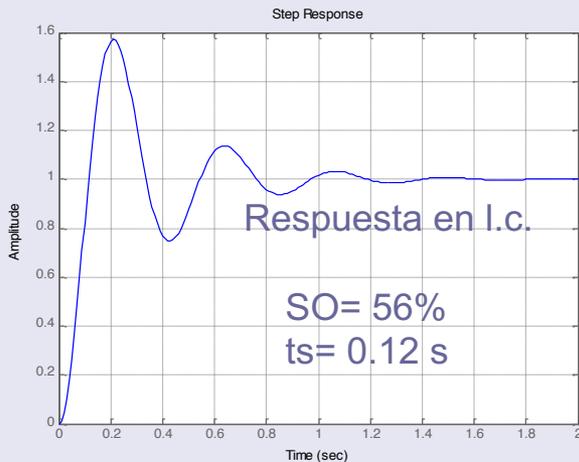
Ejemplo de diseño de un PI

Respuesta frecuencial
de la función de Lazo

$$M_f = 22.3^\circ$$

$$M_g = \infty \text{ dB}$$

$$\omega'_c = 14.5 \text{ rad/s}$$



Red de Retardo

Estructura del controlador:

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha > 1$$

Bajas frecuencias

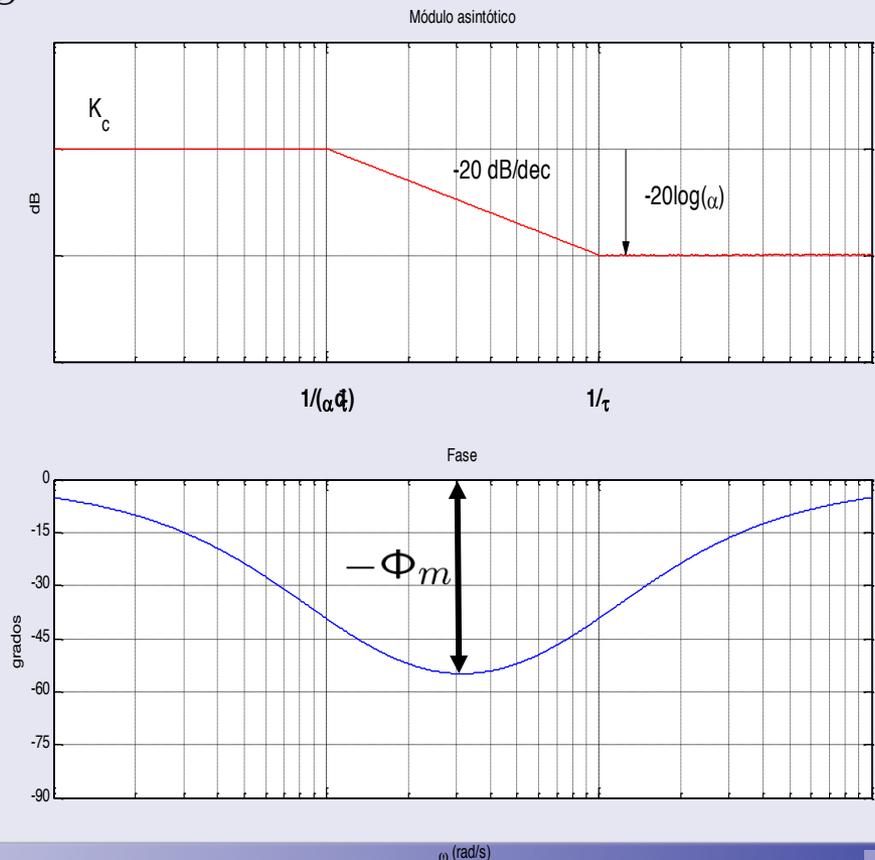
- Ganancia afectada por K_c (Proporcional)
- Incremento de fase 0

Frecuencias intermedias $\approx \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}$

- Pendiente del módulo -20 dB/dec.
- Disminución de fase Φ_m

Altas frecuencias

- Ganancia alcanza un valor mínimo
- Incremento de fase 0



Red de Retardo

Algunas expresiones

Ganancia máxima

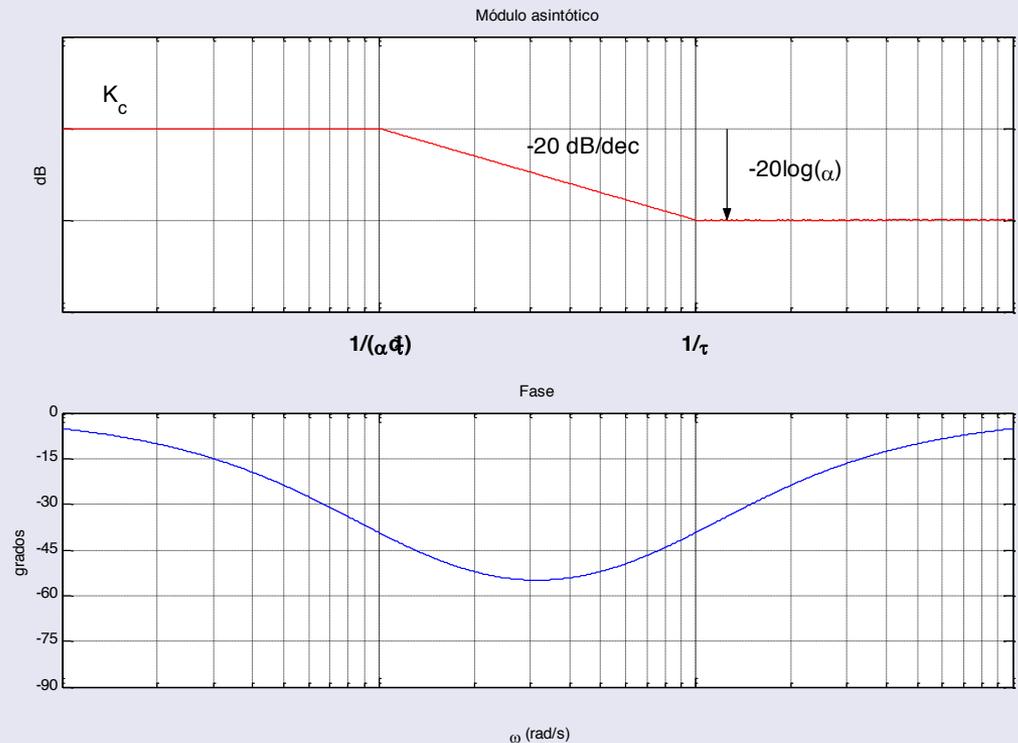
$$K_c|_{dB}$$

Ganancia mínima

$$K_c|_{dB} - 20 \log(\alpha) \text{ (dB)}$$

- La caída de fase no es deseable
- La Red de Retardo se diseña para **incrementar el módulo a bajas frecuencias**, y la caída de fase se debe alejar de la frecuencia de corte.

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha > 1$$

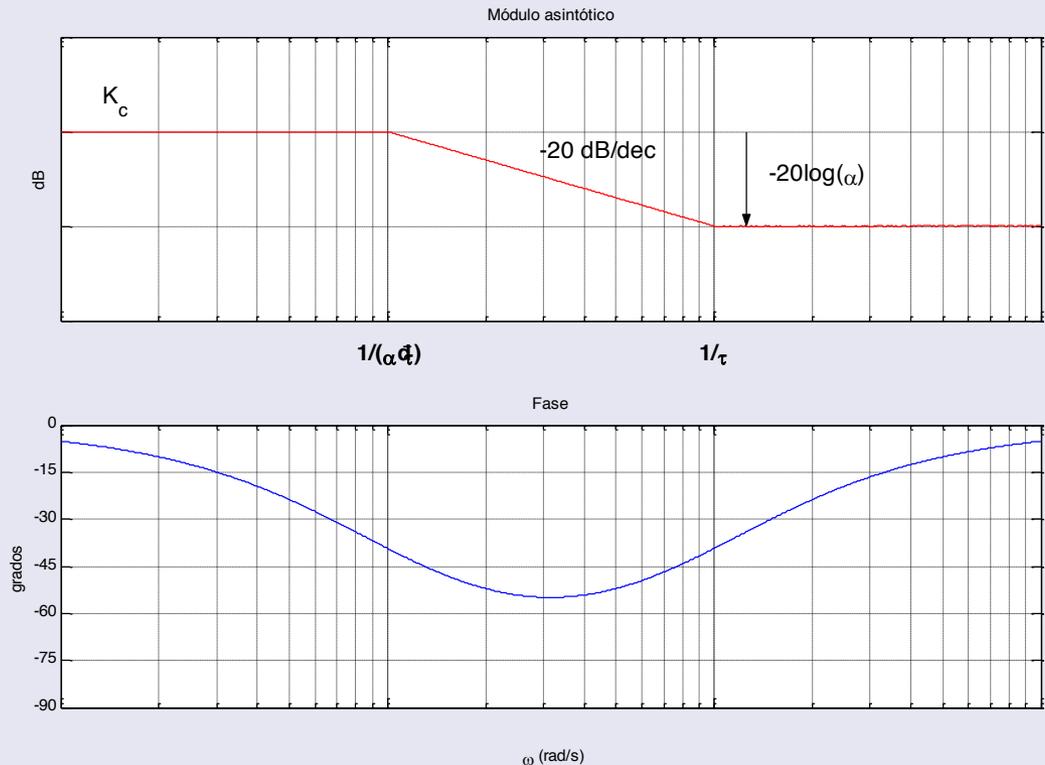


Red de Retardo

Efectos prácticos:

- La Red de Retardo **resta fase** en un rango determinado de frecuencias.
- Se puede usar para **aumentar la ganancia a baja frecuencia**.
(Beneficioso para el régimen permanente)
- El efecto es **similar al controlador PI** pero con una ganancia limitada a baja frecuencia

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha > 1$$

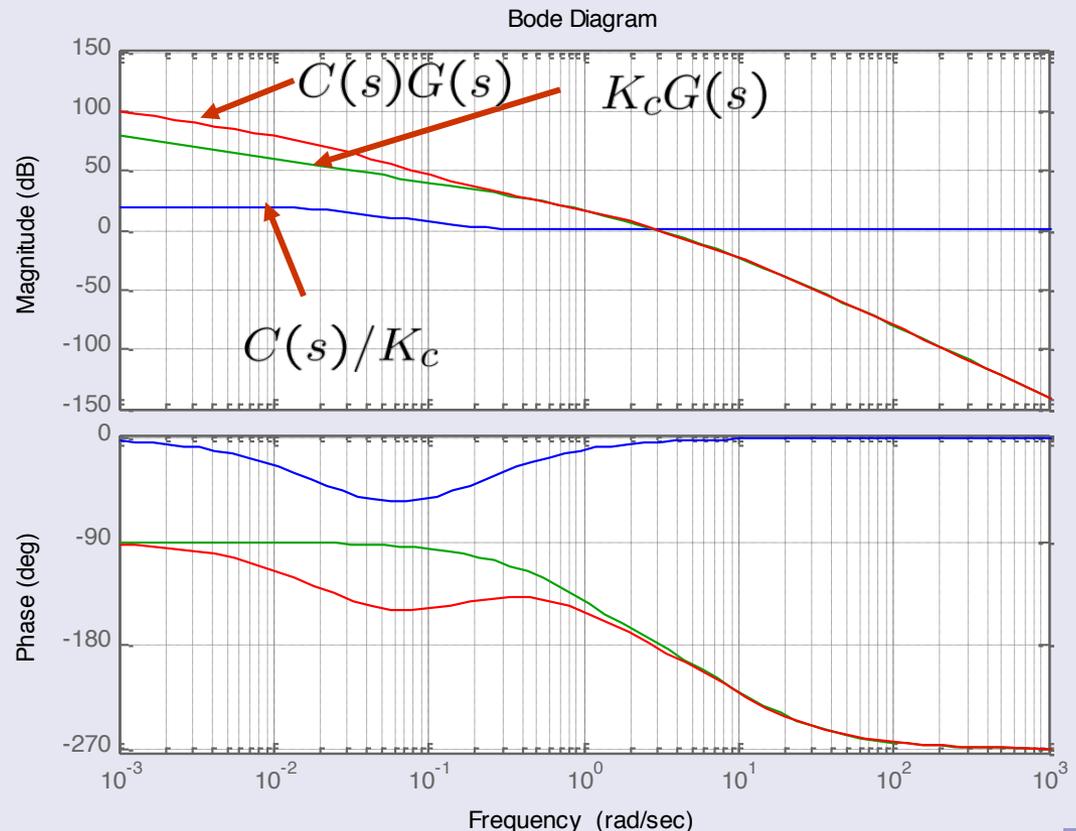


Red de Retardo

Efectos en el dom. de la frecuencia:

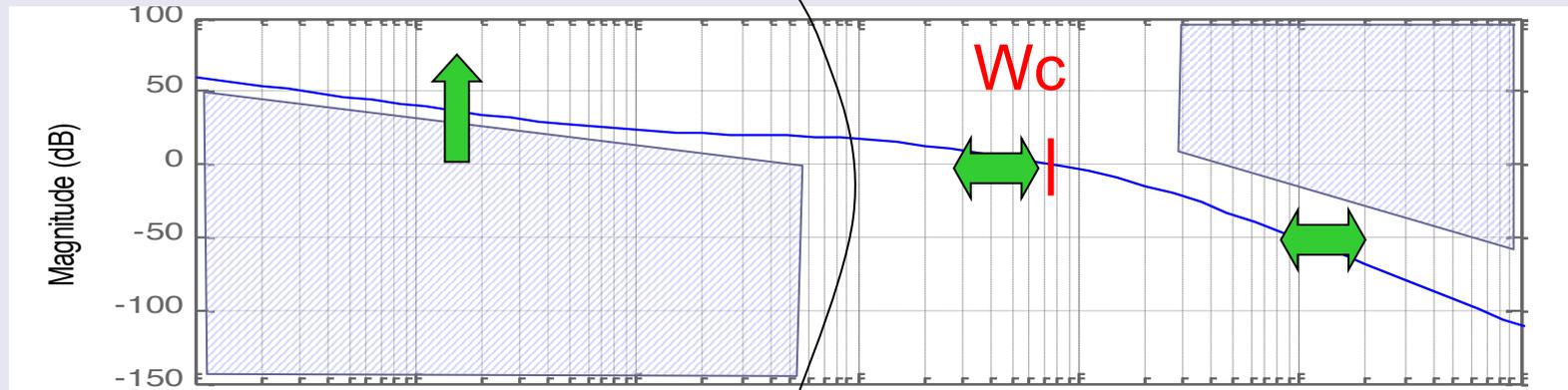
- La ganancia a baja frecuencia se aumenta, manteniendo el módulo a frecuencias intermedias y altas
Mejora del Reg. Permanente
- La caída de fase se ubica en las bajas frecuencias => Margen de fase no se altera

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha > 1$$



Ánálisis de Lazo de la red de retardo

Análisis de la función de lazo



Baja Frecuencia

Frecuencia de Corte

Alta frecuencia

Régimen permanente: **Mejora**
(Por el efecto de K_c)

- Menor error en régimen permanente
- Mejores propiedades de seguimiento

- Estabilidad: **prácticamente constante**
- (podría mejorar según el sistema)
- (pueden disminuir los márgenes)

Prácticamente constante

Red de Retardo: diseño

Especificaciones: Mínima ganancia del controlador (K_{cd}),
Mínima frecuencias de corte (w_{cd}) y Mínimo margen de fase (M_{fd})

$$C(s) = K_c \frac{1+\tau s}{1+\alpha \tau s}, \text{ with } \alpha > 1$$

- Procedimiento de diseño

Paso 1: Tomar $K_c = K_{cd}$

(para garantizar la especificación en régimen permanente)

Paso 2: Tomar la frecuencia de corte w'_c donde $M_{fd} = M_f(K_c G(s)) + \Delta$.

Es decir, como el margen de fase no se puede incrementar con una red de retardo, tomamos la frecuencia en la que $K_c G(s)$ tiene el margen de fase deseado (más un término adicional Δ que compensa la pérdida de fase que introduce el controlador) $\Delta \in (5^\circ, 10^\circ)$

Si $w'_c < w_{cd}$, el sistema no se puede controlar con una red de retardo.

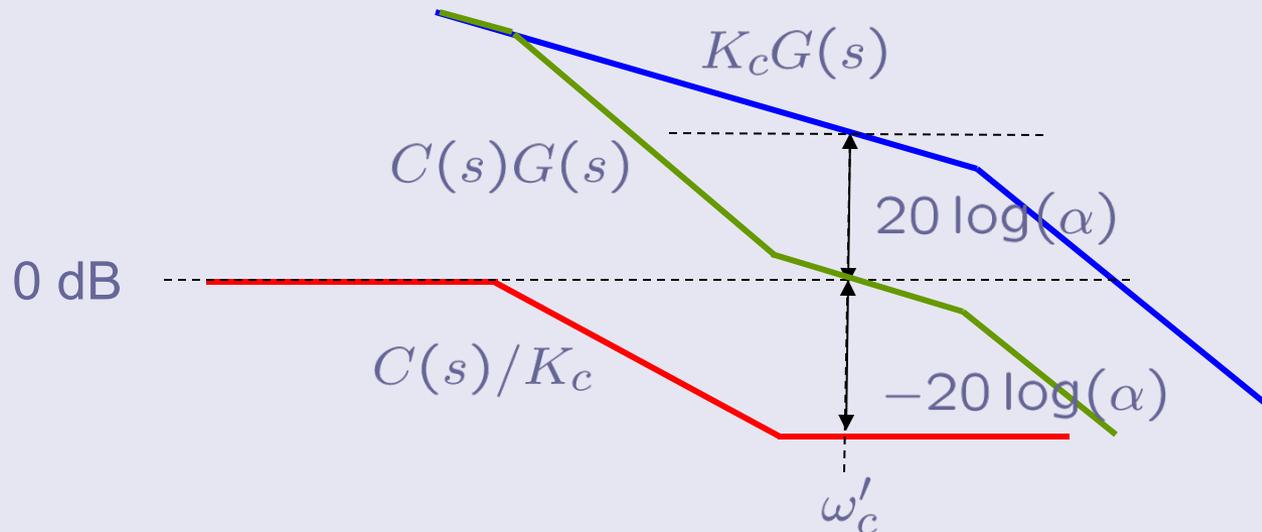
Red de Retardo: diseño

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \text{ with } \alpha > 1$$

- Procedimiento de diseño (CONT.)

Paso 3: Calcular α , para hacer que w'_c sea la frecuencia de corte.

$$|C(jw'_c)/K_c| + |K_c \cdot G(jw'_c)| = 0 \Rightarrow 20 \log(\alpha) = |K_c G(jw'_c)|$$



Paso 4: Calcular τ para introducir el menor descenso de fase posible

en la frecuencia de corte. $1/\tau \in [w'_c/30, w'_c/10]$

Red de Retardo: Ejemplo

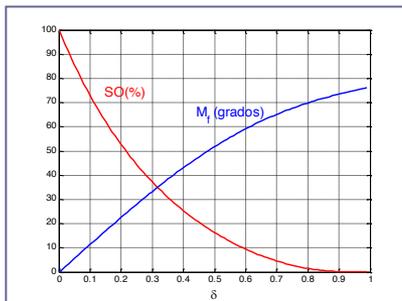
Sistema:

$$G(s) = \frac{(s + 5)}{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Especificaciones:

- Error frente a entrada en escalón (posición) < 1%
- SO < 20%

$$SO \leq 20\% \Rightarrow M_f \geq 48^\circ$$



$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)C(s) = 25K_c$$

$$e_{pos} = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow K_c > 4$$

Ganancia estática del controlador > 4 = 12.04 dB

Red de Retardo: Ejemplo

Ejemplo: $G(s) = \frac{(s+5)}{(s+0.1)(s^2+2s+2)}$

Paso 1 (Ajuste de la ganancia del controlador)

$$e_{pos} \leq 1\% \Rightarrow K_c \geq 4$$

Paso 2 (Cálculo de α)

$$w'_c: M_f(w'_c) = M_{fd} + \Delta = 48^\circ + 7^\circ = 55^\circ$$

Por lo tanto

$$w'_c = 0.8 \text{ rad/s}$$

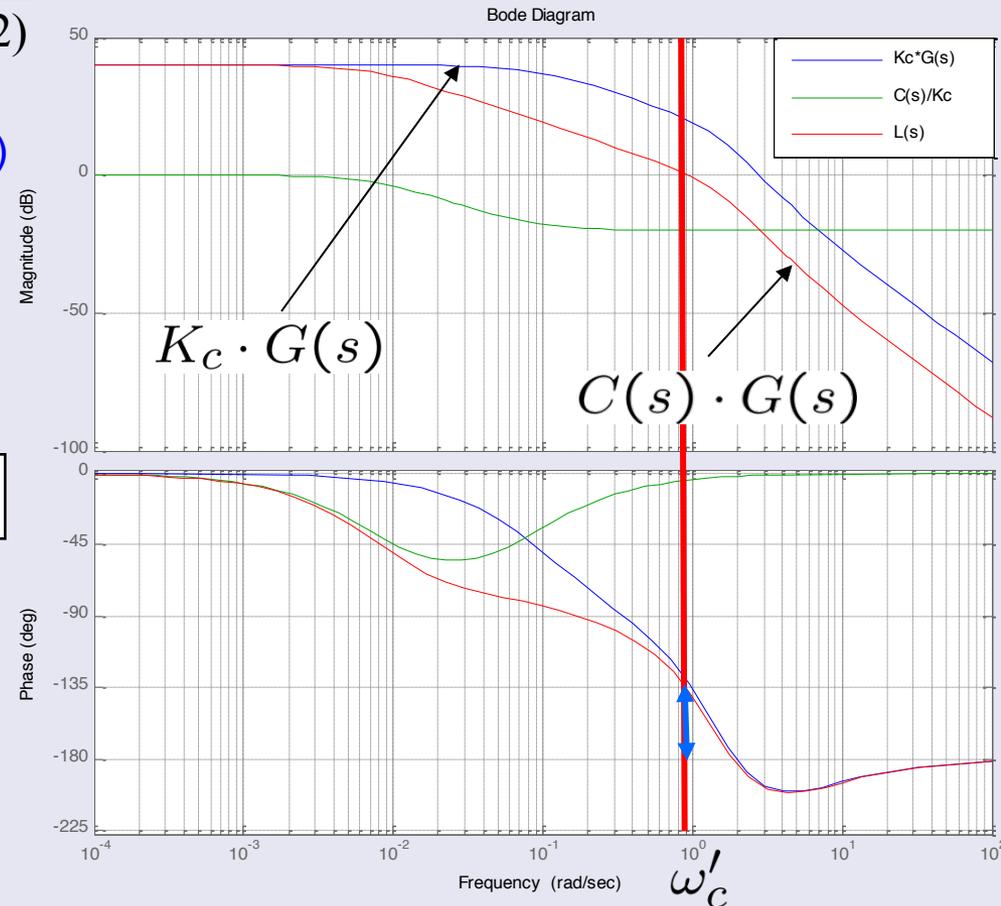
$$\Delta \in [5, 10]^\circ$$

$$20 \log(\alpha) = |K_c G(0.8j)| = 20 \text{ dB}$$

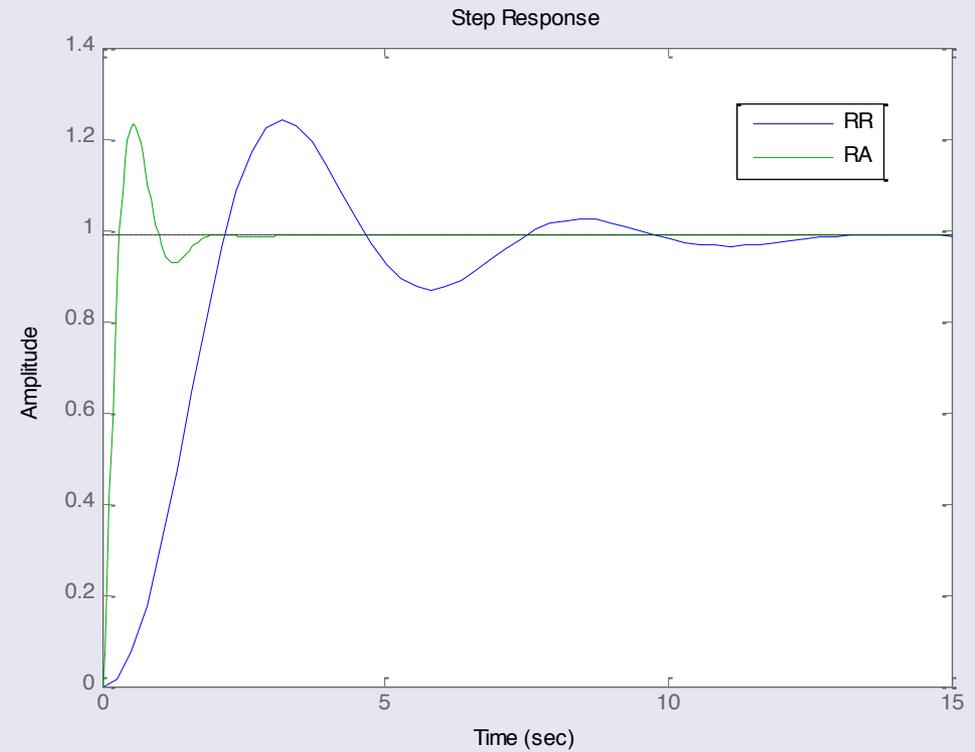
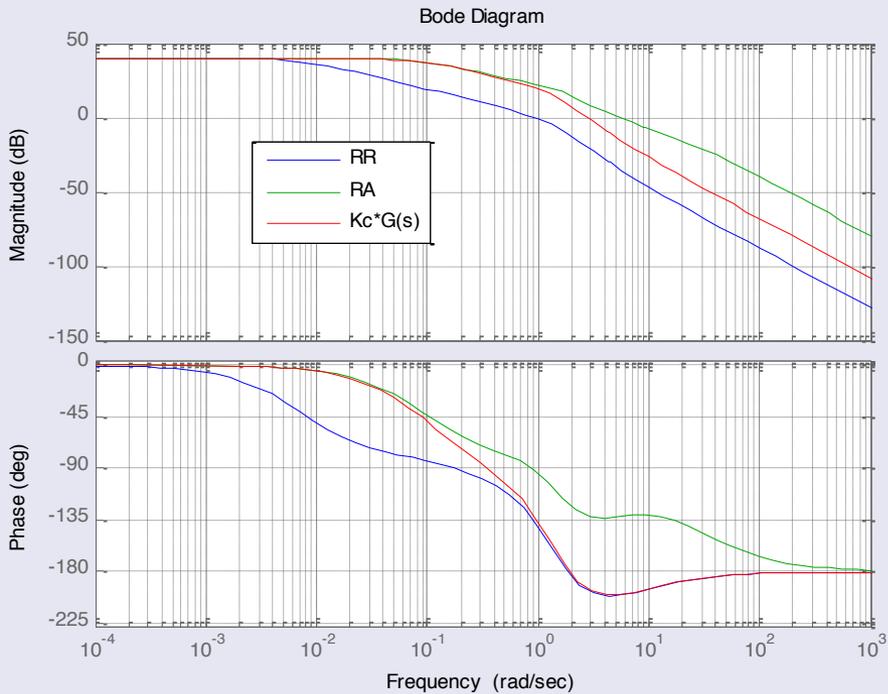
$$\alpha = 10$$

Paso 3 (Cálculo de τ)

$$1/\tau = 0.8/10 \Rightarrow \tau = 12.5$$

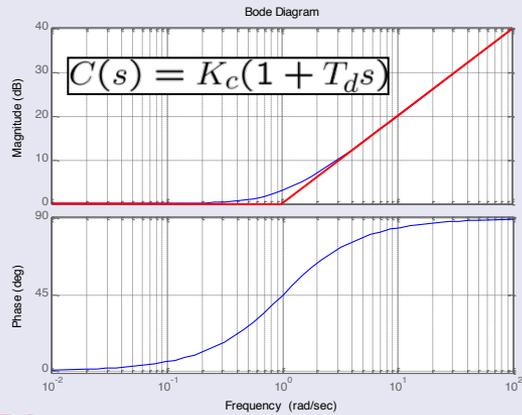


Comparación con la RA

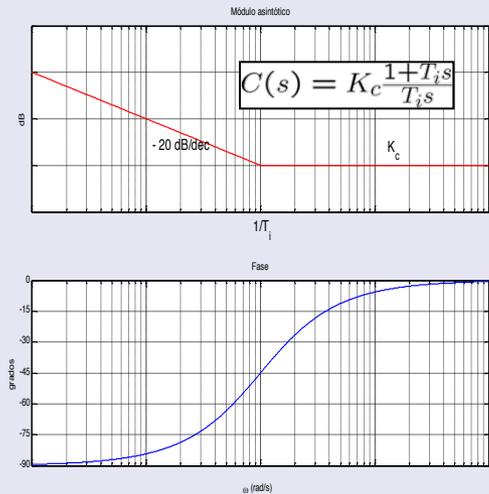


Repaso de controladores

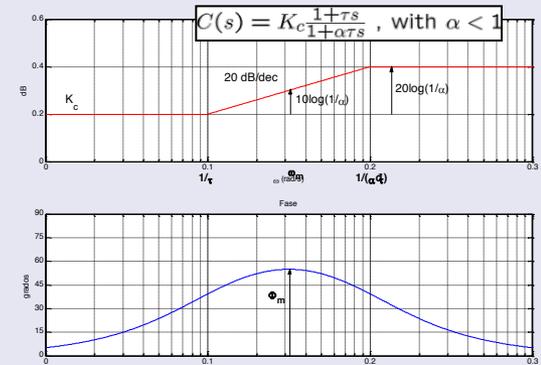
PD



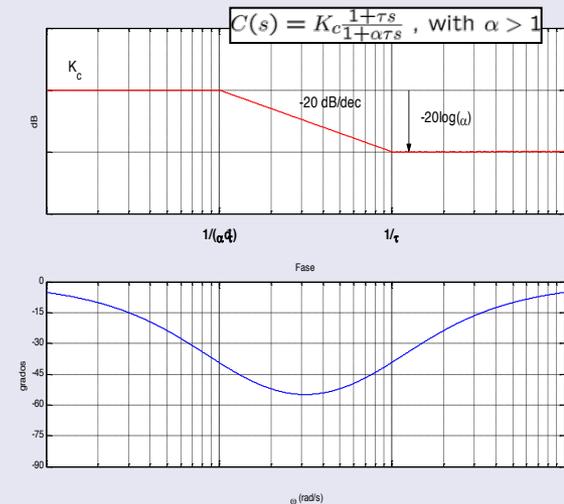
PI



Red de Avance



Red de Retardo



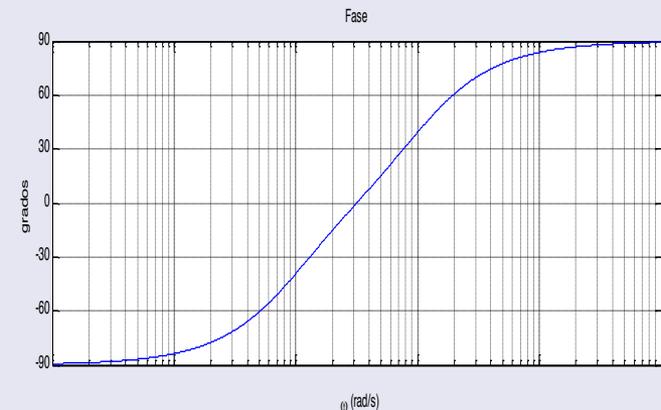
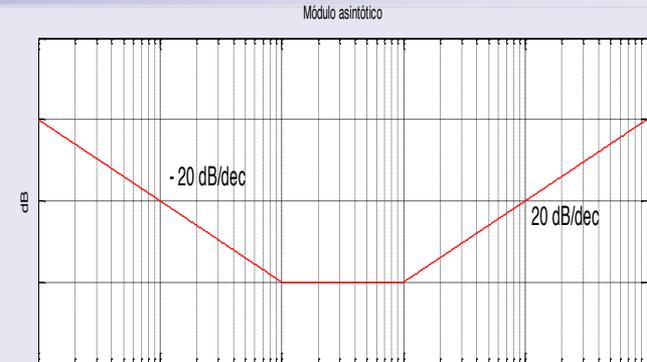
Controlador PID

$$C(s) = K_c \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = K_c \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

- Ceros reales o complejos (Si $T_i > 4T_d$ ceros reales)
- T_i y T_d son diferentes a los del PD y PI
- PID tiene el mismo problema que el PD
 - Amplificación de ruido
 - No implementable (Red mixta)

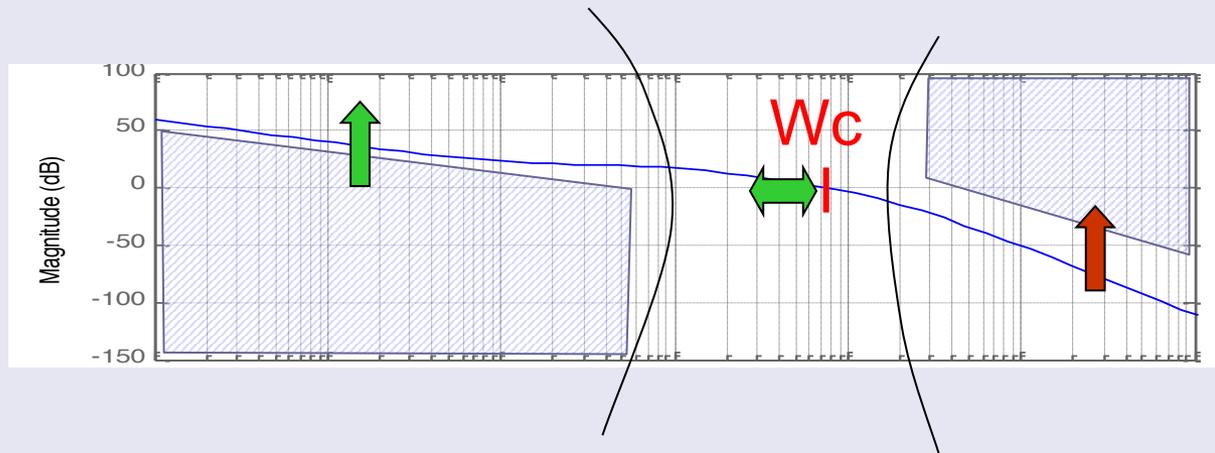
Efectos:

- Incrementa el tipo del sistema (mejora del régimen permanente)
- Incrementa el margen de fase (menor sobreoscilación)
- Incrementa la frecuencia de corte (menor tiempo de subida)



Controlador PID

Análisis de lazo



Baja frecuencia:

Aumenta la magnitud

Efecto similar al del PI

Importante:

AUMENTA el tipo del sistema

Frecuencia de corte

- Estabilidad **mejora** (Ligeramente menor margen de fase)
- ω_c Puede ser maximizada (en general), añadiendo fase con la parte PD del controlador

Rapidez del sistema **mejora**

Alta frecuencia

- La ganancia sube .
(**Amplificación de ruido**)

Controlador PID: diseño

Caso 1: K_c/T_i no está fijado por las especificaciones de permanente.

Expresar el PID como un PI en serie con un PD

$$C(s) = K \frac{1+T_1s}{T_1s} (1+T_2s)$$

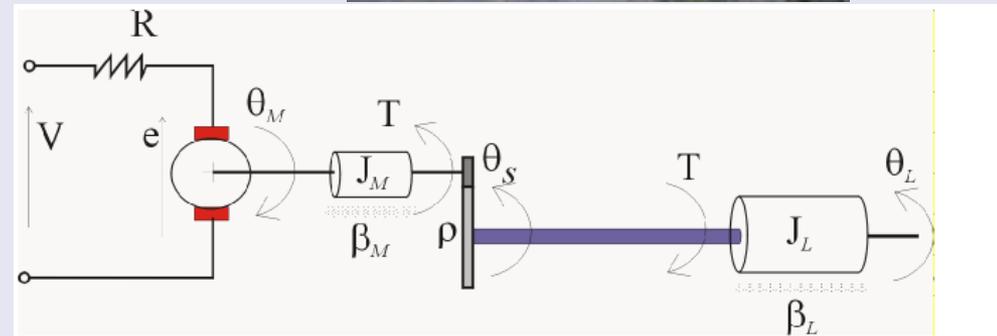
- Habitual para restricciones severas en permanente
- Elegir w'_c y calcular $\Delta M_f = M_{fd} - M_f(w'_c)$
- Diseñar un PD tal que M_{fd} se cumpla: $w'_c \cdot T_2 = \tan(\Delta M_f)$
- Calcular K para fijar w'_c : $K + 20 \cdot \log(w'_c \cdot T_2) = -|G(jw'_c)|$
- Elegir T_1 tal que $1/T_1 \in [w'_c/30, w'_c/10]$
- Calcular los parámetros del PID

$$K_c = K \frac{T_1 + T_2}{T_1}, \quad T_i = T_1 + T_2, \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

Controlador PID: Ejemplo

Servomecanismo

- Sistema de control de la posición (o velocidad) de un sistema mecánico por realimentación.



- Función de transferencia

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(a \cdot s + b)}$$

$$\theta(s) = \mathcal{L}\{\theta_L(t)\}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{V(t)\}$$

$$k = \frac{K_T}{R}$$

$$a = J_M + \rho^2 J_L$$

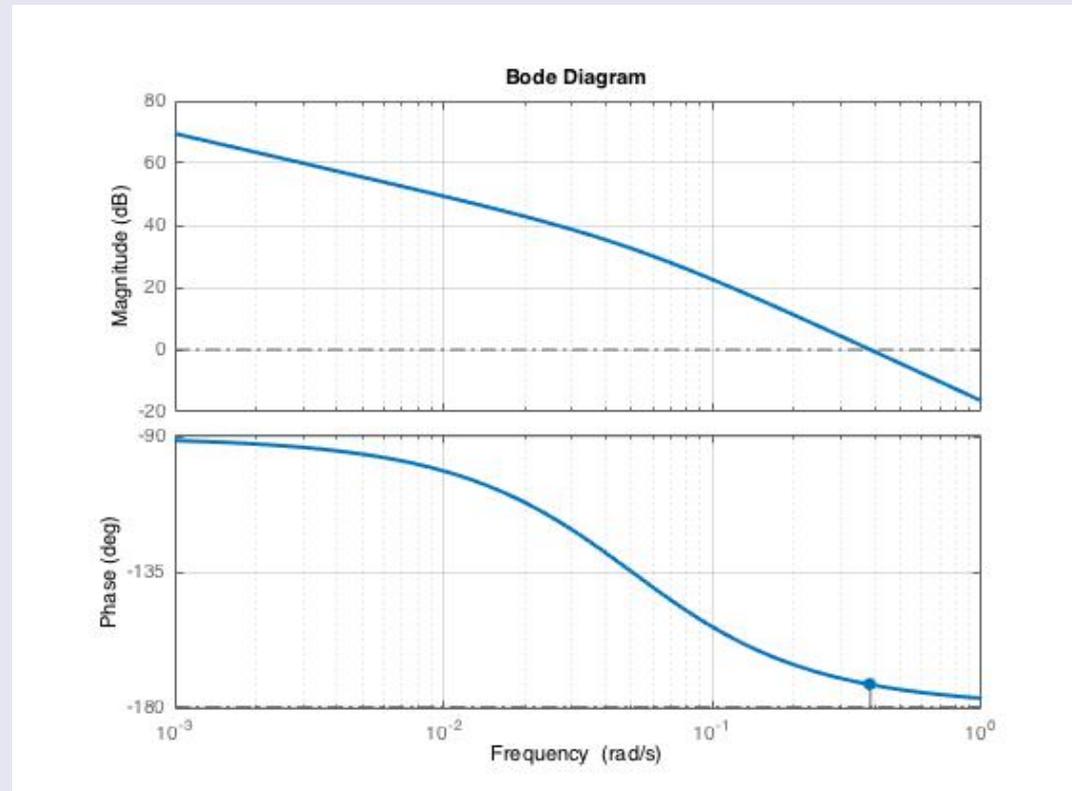
$$b = \beta_M + \rho^2 \beta_L + \frac{K_T K_e \rho}{R}$$

Controlador PID: Ejemplo

Control de un servomecanismo con los siguientes parámetros

$$k=0.5; \quad a=3.33; \quad b=0.167$$

$$G(s) = \frac{0.15}{s(s + 0.05)}$$



Controlador PID: Ejemplo

Especificaciones de control

$$t_s \leq 5 \text{ seg}; \quad SO \leq 10\%; \quad e_{vel} = 1\%$$

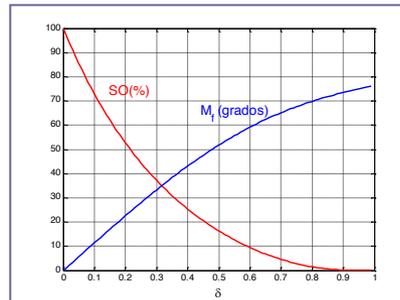
Especificaciones
en el
dominio del tiempo

$$t_s \approx \frac{\pi}{2 \cdot \omega_c}$$



$$\omega_c \geq 0.314 \text{ rad/s}$$

$$SO \leq 10\% \Rightarrow M_f \geq 58$$



$$e_{vrp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s^2}$$
$$= \frac{b}{k \cdot K_c}$$

$$e_{vel} = 1\% \Rightarrow K_c > 33.3$$

Ganancia del controlador
 $K_c > 33.3$ (30.5 dB)

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

Controlador PID: Ejemplo

Diseño de un PID para el servomecanismo

Con un PID el sistema se hace de tipo 2.
Por lo tanto $e_{vrp}=0$ (las especificaciones en permanente se cumplen para cualquier K_c/T_i)

Es el caso 1 del problema de diseño de PID's

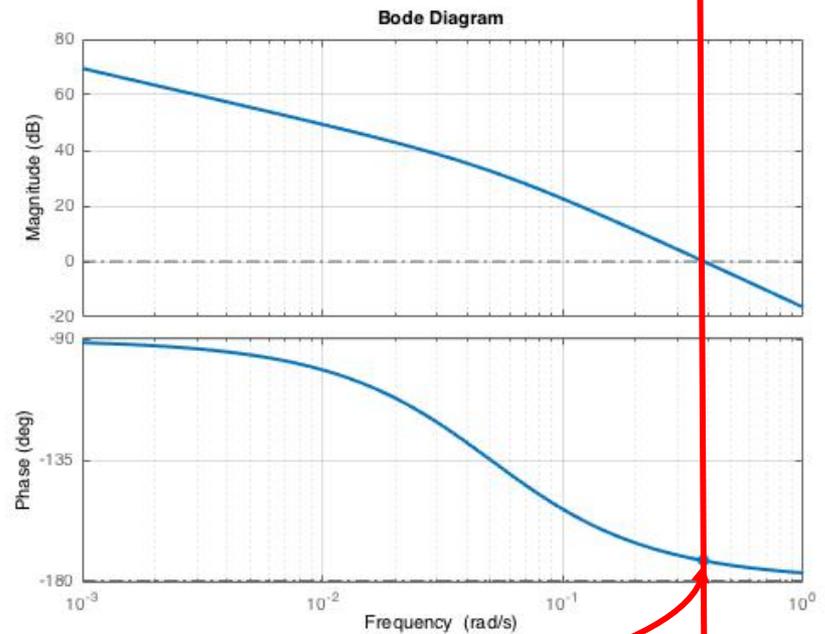
- Tomemos $\omega'_c > \omega_{cd} = 0.314$ rad/s

Por ejemplo $\omega'_c = 0.4$ rad/s

$$\begin{aligned}\Delta M_f &= M_{fd} - M_f + \delta \\ &= M_{fd} - (-180^\circ - \angle G(j\omega'_c)) + \delta \\ &= 58^\circ - 7^\circ + 10^\circ = 61^\circ\end{aligned}$$

- Calculando la parte de PD

$$T_2 \omega'_c = \tan(\Delta M_f) \Rightarrow T_s = \frac{\tan(61^\circ)}{0.4} = 4.51$$



Controlador PID: Ejemplo

Diseño de un PID para el servomecanismo

- Determinar $K=K_c/T_i$ para fijar la frecuencia de corte deseada. ω'_c

$$|K * PD(j\omega'_c) * G(j\omega'_c)|_{db} = 0$$

$$|K|_{db} = -|PD(j\omega'_c) * G(j\omega'_c)|_{db} = -5.66 db$$

Así se tiene $K=0.5212$

- Por último se elige T_1 de forma que

$$T_1 = 10/\omega_c' = 25 s$$

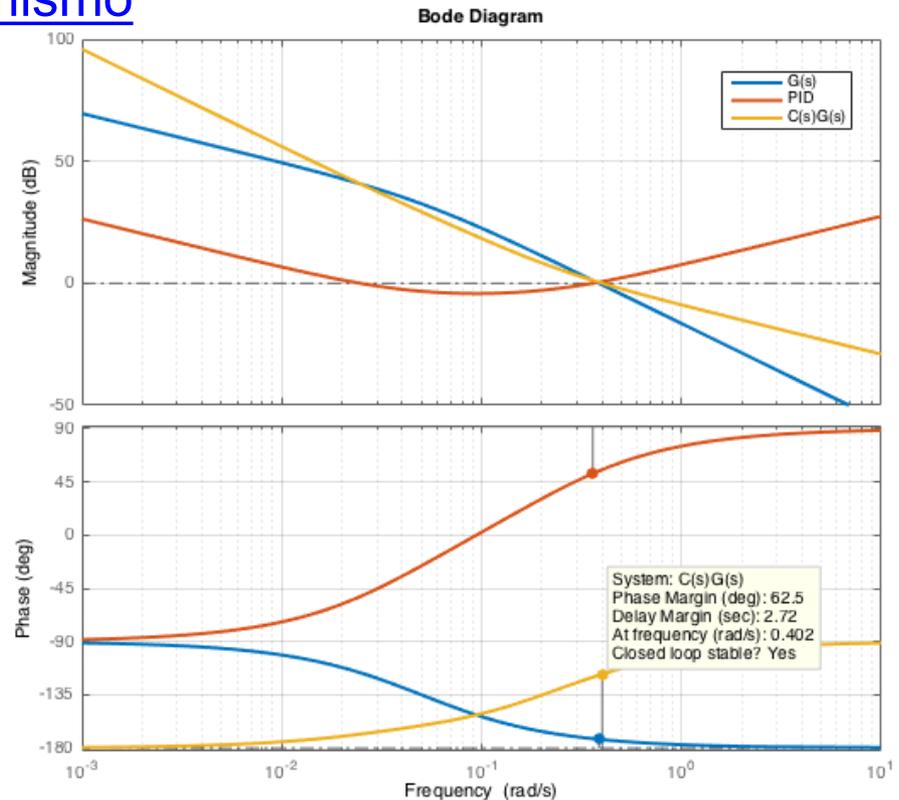
$$K_c = 0.5212 \frac{25 + 4.51}{25} = 0.6152$$

$$T_i = 25 + 4.51 = 29.51$$

$$T_d = \frac{25 \cdot 4.51}{25 + 4.51} = 3.82$$

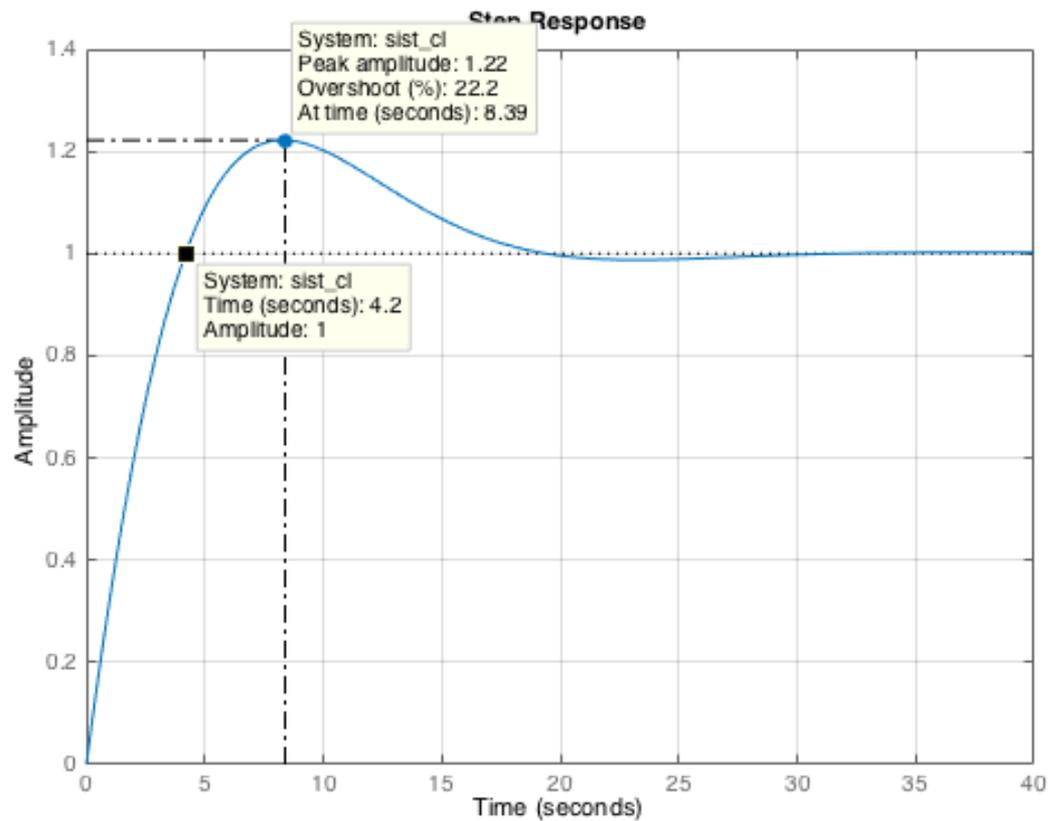
$$M_f = 62.5^\circ$$

$$\omega'_c = 0.402 \text{ rad/s}$$



Controlador PID: Ejemplo

Requiere
reajuste



Controlador PID: diseño

Caso 2: K_c/T_i viene fijado por las especificaciones de permanente.

Expresar el PID como 1 integrador y 2 PD

$$C(s) = K \frac{1}{s} (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$$

- Elegir la mínima K que satisfaga las especificaciones de permanente.
- Dibujar el diagrama de bode de $G'(s) = K/s \cdot G(s)$
- Diseñar los dos PDs para cumplir las especificaciones de transitorio (SO y/o w_c') (Sugerencia: tomar $T_1 = T_2$)
- Calcular los parámetros del PID

$$K_c = K(T_1 + T_2), \quad T_i = T_1 + T_2, \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

Controlador PID: Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Especificaciones:

- Error frente a entrada en parábola ≤ 0.5
- SO $\leq 40\%$

Controlador PID: Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Especificaciones:

- Error frente a entrada en parábola ≤ 0.5
- SO $\leq 40\%$

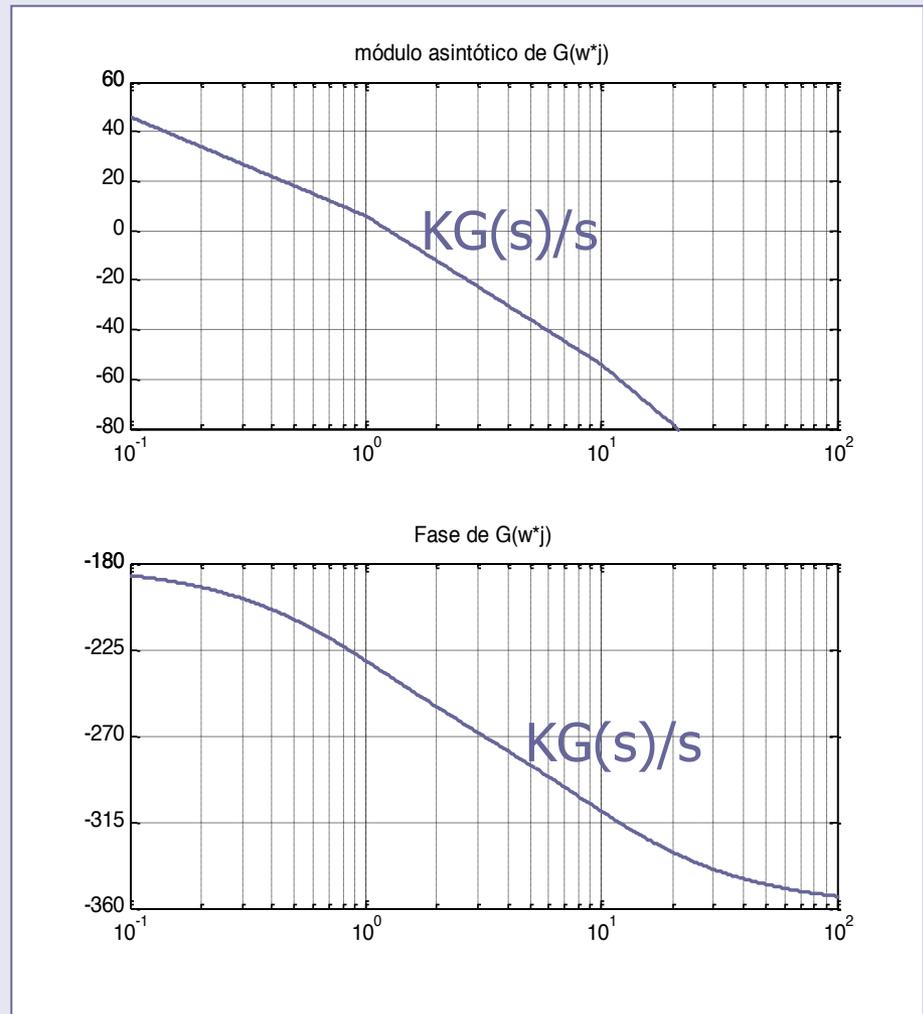
La especificación de error en régimen permanente invita a incrementar el tipo del sistema \Rightarrow PI o PID con ganancia fijada

Del error en régimen permanente, $K=20$
De la especificación en SO., $Mfd=35^\circ$

Del diagrama de bode de $20G(s)/s$

$Mf=-55^\circ$ y $w_c=1.2$ rad/s

(No se puede usar un PI)



Controlador PID: Ejemplo

$$C(s) = K \frac{1}{s} (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)$$

Esto es equivalente a diseñar dos PDs tales que

$$\Delta M_f = M_{fd} - M_f + D = 35 - (-55) + 20 = 110$$

Si tomamos $T_1 = T_2$

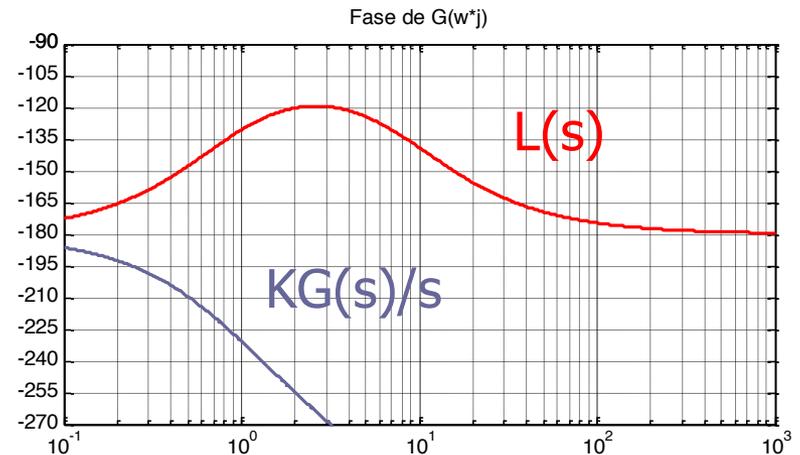
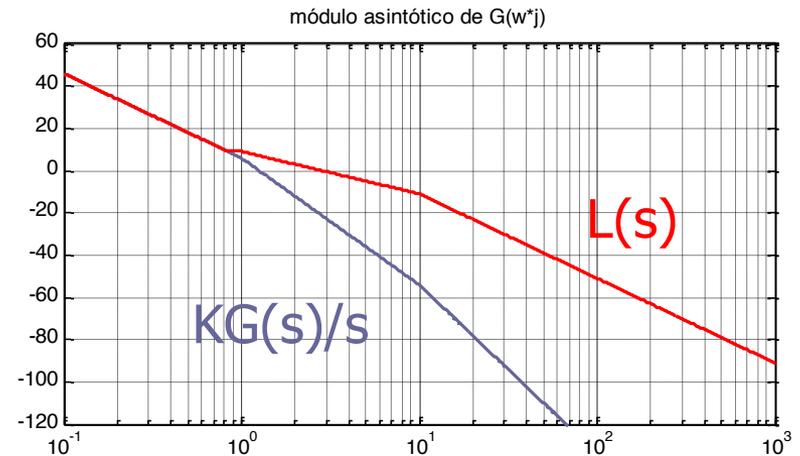
Cada PD debe incrementar la fase en 55°

Tomando $T_1 = T_2 = \tan(55)/1.2 = 1.19$

$$K_c = K(T_1 + T_2) = 20 \cdot 1.19 \cdot 2 = 47.6$$

$$T_i = T_1 + T_2 = 2 \cdot 1.19 = 2.38$$

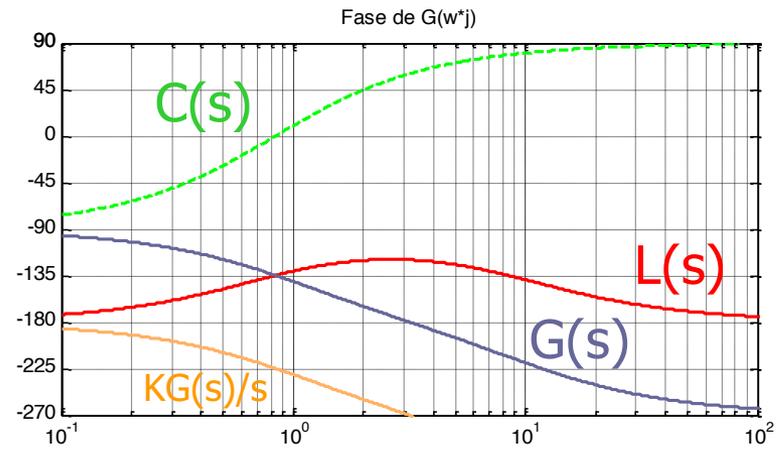
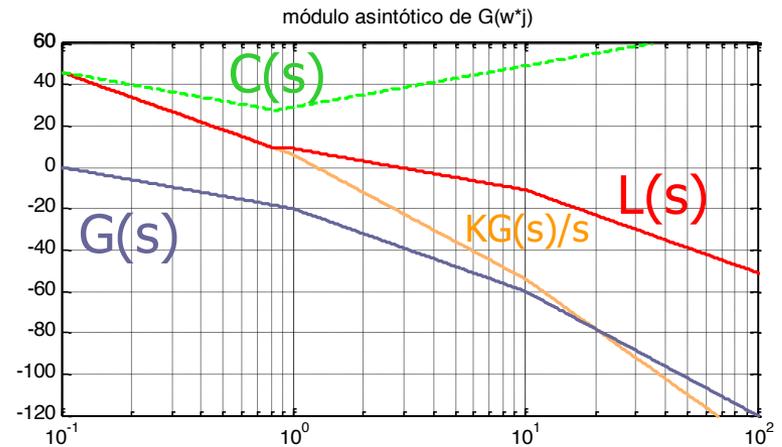
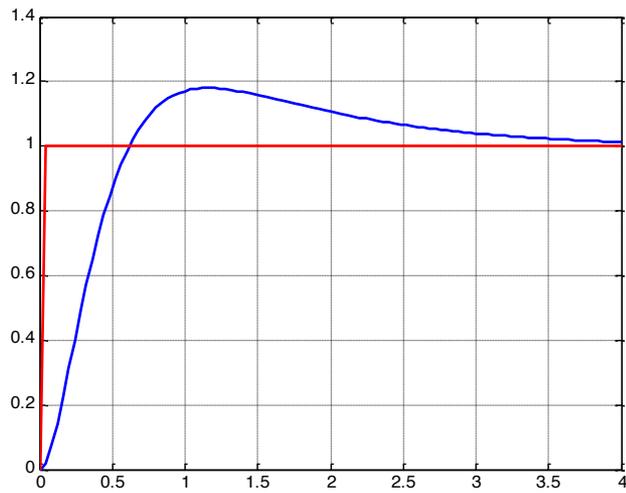
$$T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = \frac{1.19}{2} = 0.6$$



Controlador PID: Ejemplo

$$Mf' = 60.6^\circ$$

$$w'_c = 2.8 \text{ rad/s}$$



Red mixta

Estructura del controlador:

$$C(s) = K_c \frac{1 + \alpha_1 \tau_1 s}{1 + \tau_1 s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s}, \text{ with } 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1 \text{ y } \tau_1 > \tau_2$$

Módulo asintótico

Red de Avance y de Retardo en serie

Bajas frecuencias

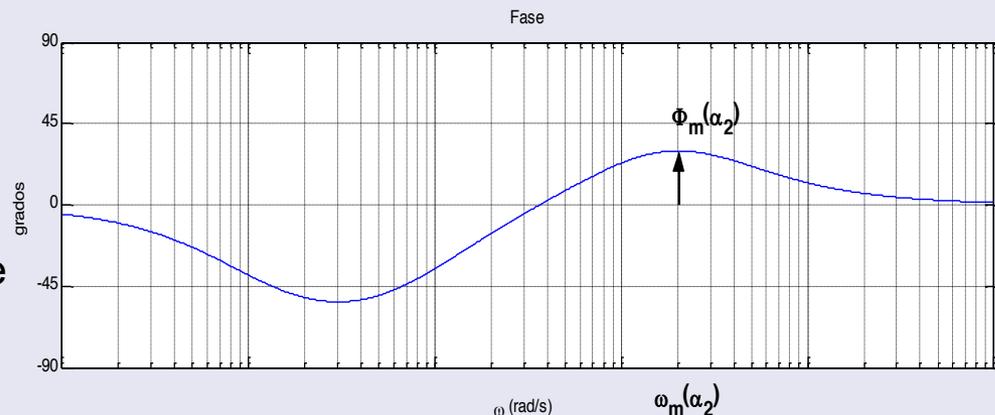
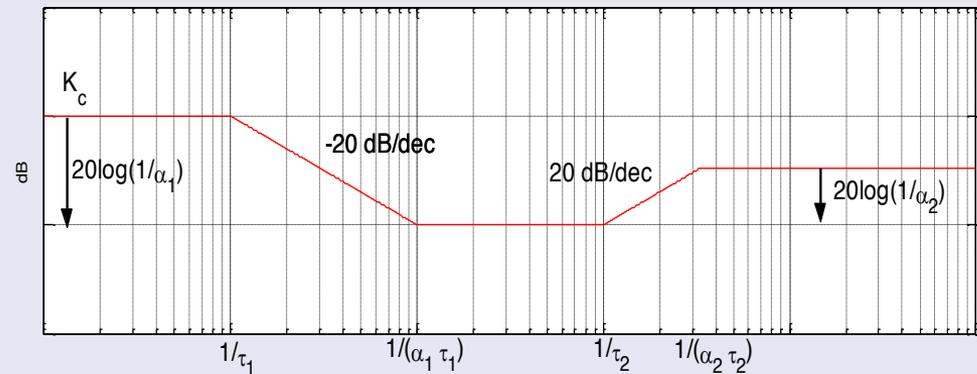
- Comportamiento como red de retardo
- La ganancia es K_c (Proporcional)

Frecuencias intermedias.

- Ganancia próxima a 0 dB
- Incremento de fase

Altas frecuencias

- Comportamiento como red de avance
- Ganancia limitada



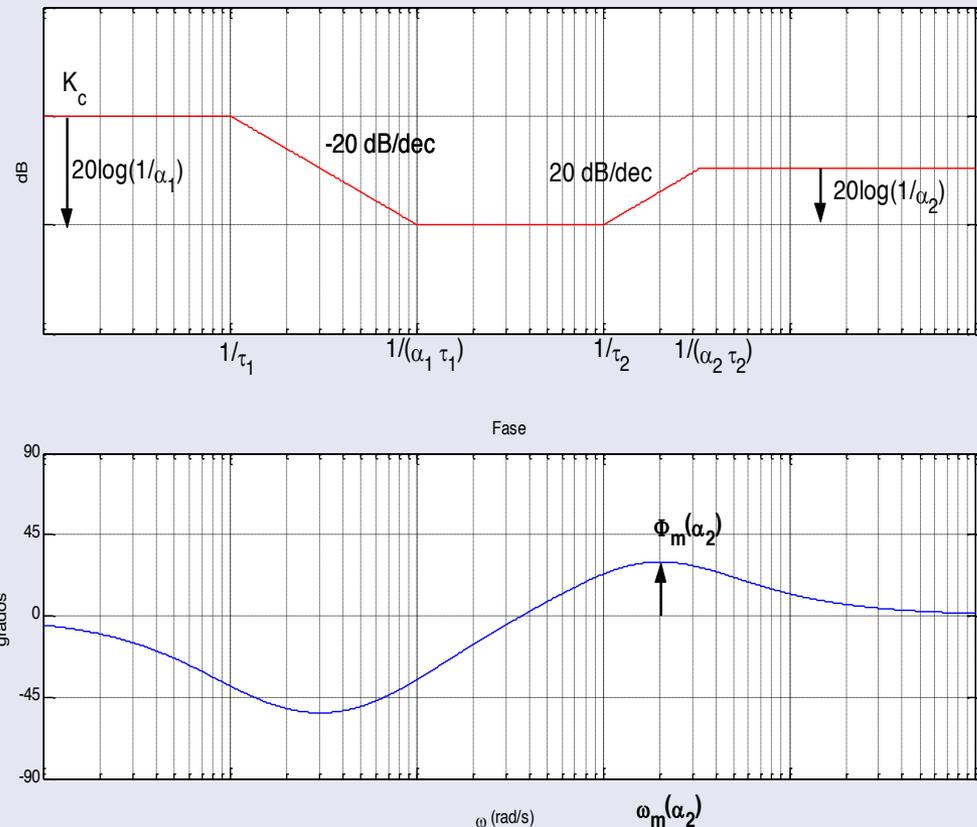
Red mixta

Red mixta:

$$C(s) = K_c \frac{1 + \alpha_1 \tau_1 s}{1 + \tau_1 s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s}, \text{ with } 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1 \text{ y } \tau_1 > \tau_2$$

Módulo asintótico

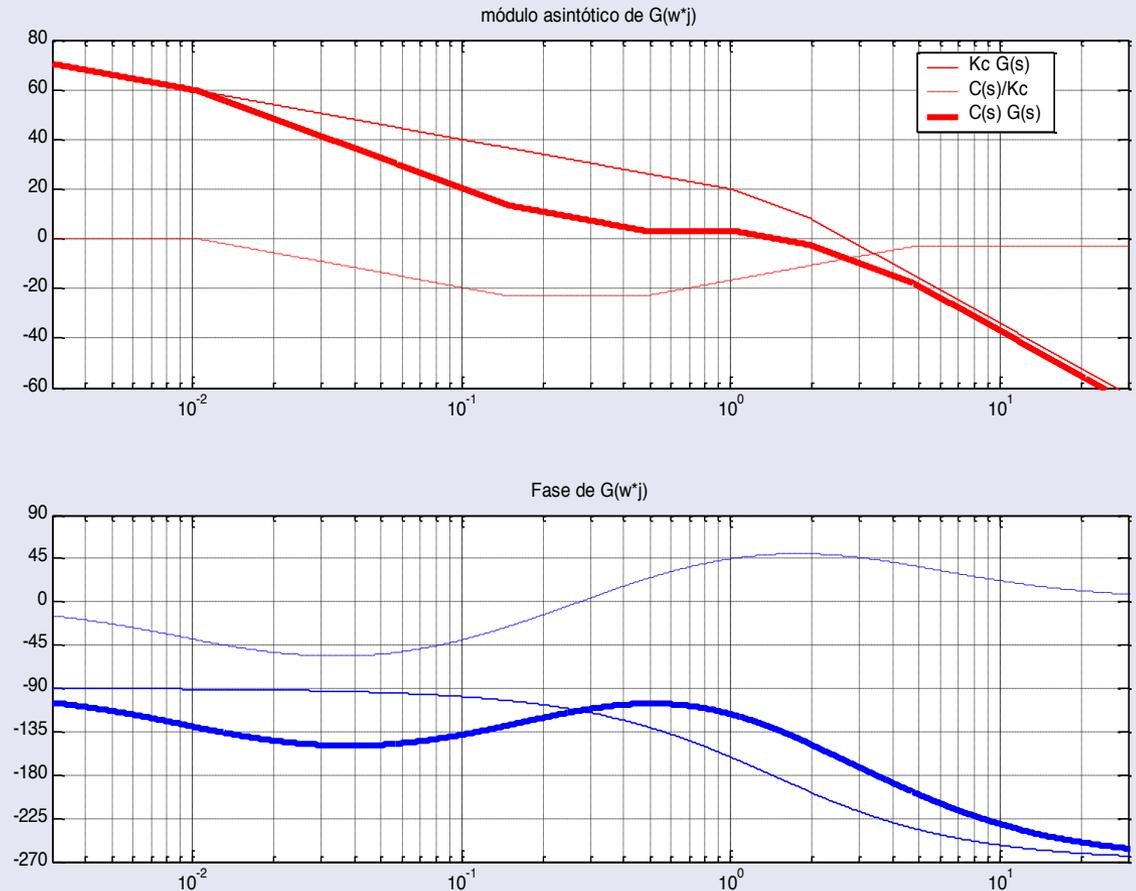
- Con un diseño apropiado la red mixta puede unir los efectos beneficiosos de la red de avance y de retraso.
- La parte de avance se usa para mejorar el transitorio
- La parte de retraso se diseña para mejorar el permanente y el rechazo a perturbaciones



Red mixta

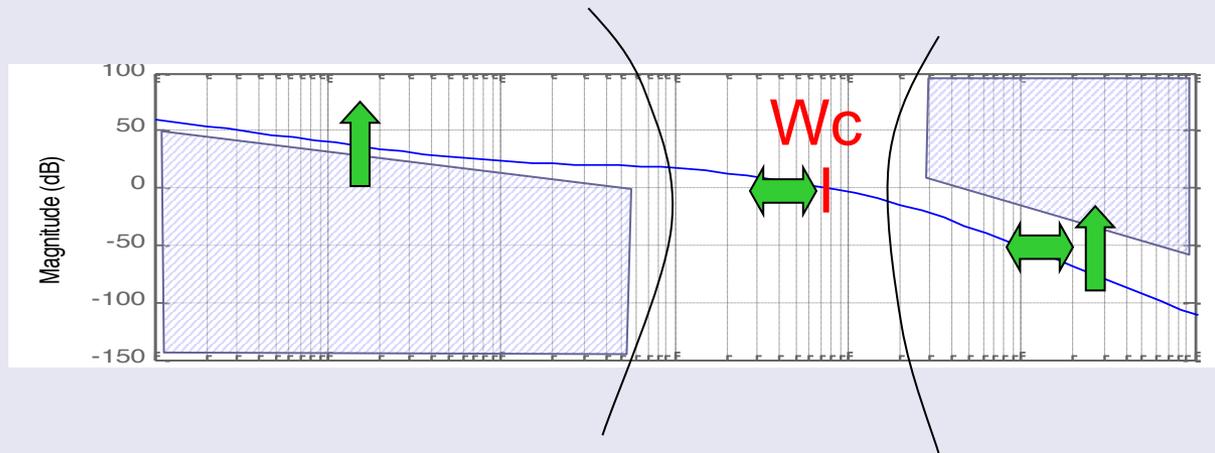
Efectos en el dominio de la frecuencia:

- La ganancia de baja frecuencia aumenta (efecto RR), manteniendo la ganancia a frecuencias intermedias y altas => **Mejora del permanente**
- La fase se incrementa a frecuencias intermedias (próximas a la frecuencia de corte) => **Margen de fase mejora**
- Ganancia limitada a altas frecuencias => **se evita una amplificación excesiva de ruido**



Red mixta

Análisis de lazo



Baja frecuencia:

Se incrementa la magnitud

Efecto similar a la red de retardo

Importante:

NO CAMBIA el tipo del sistema

Frecuencia de corte

- **Mejora** la estabilidad (incremento del margen de fase)
- ω_c Puede maximizarse (en general), añadiendo fase con la parte de red de avance

rapidez **mejora**

Alta frecuencia

- Se incrementa la ganancia pero limitada. (**Efecto del ruido atenuado**)

Red mixta: diseño

Suposición: De las especificaciones en el dominio temporal se obtiene una ganancia mínima del controlador, K_{cd} , una frecuencia mínima de corte, w_{cd} , un margen de fase deseado, M_{fd}

$$C(s) = K_c \frac{1+\alpha_1\tau_1s}{1+\tau_1s} \frac{1+\tau_2s}{1+\alpha_2\tau_2s}, \text{ with } 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1 \text{ y } \tau_1 > \tau_2$$

• Procedimiento de diseño

Paso 1: Elegir $K_c = K_{cd}$ para cumplir las especificaciones en reg. permanente

Paso 2: Elegir $w'_c > w_{cd}$ que satisfaga las especificaciones

Paso 3: Calcular el aumento de fase necesario ΔMf

$$\Delta Mf = M_{fd} - M_f(K_c G(jw'_c)) + \Delta \quad ; \Delta \in [5^\circ, 10^\circ]$$

Paso 4: Obtener α_2 tal que $\Phi_m(\alpha_2) = \Delta Mf$ $\alpha_2 = \frac{1 - \sin(\Phi_m)}{1 + \sin(\Phi_m)}$

Red mixta: diseño

- Procedimiento de diseño (CONT.)

Paso 5: Calcular τ_2 tal que $w_m(\alpha_2)=w'_c$ $w_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2\tau_2}} = w'_c \Rightarrow \tau_2$

Paso 6: Hallar α_1 para que w'_c sea la frecuencia de corte final.
 $|C(w'_cj)|/|K_c| + |K_cG(jw'_c)| = 0$

Como $w'_c = w_m$, entonces $|C(w'_cj)|/|K_c| = -[20 \log(1/\alpha_1) - 10 \log(1/\alpha_2)]$

Por lo tanto $20 \log(1/\alpha_1) - 10 \log(1/\alpha_2) = |K_cG(jw'_c)|$

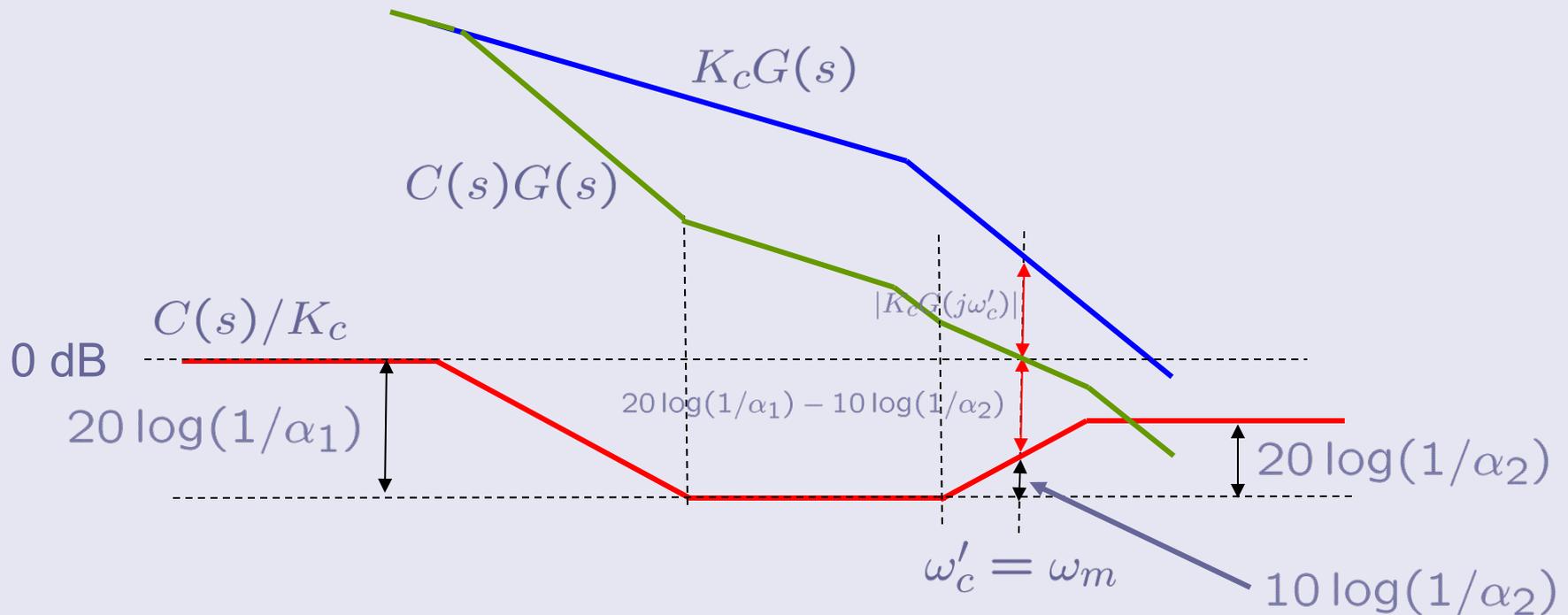
Paso 7: Calcular τ_1 tal que la pérdida de fase no sea apreciable

$$1/(\alpha_1\tau_1) \in [w'_c/30, w'_c/10]$$

Red mixta: diseño

- Procedimiento de diseño (Idea gráfica del paso 6)

$$20 \log(1/\alpha_1) - 10 \log(1/\alpha_2) = |K_c G(j\omega_c')|$$



Conclusiones

- Se pueden usar distintas estructuras lineales de control para modificar cada rango de frecuencia del controlador
 - PD (o Red de Avance) modifica frecuencias intermedias y altas. => Respuesta transitoria
 - PI (o Red de Retardo) Modifica bajas frecuencias => Reg. Permanente
 - PID (o Red Mixta) puede adecuar todo el rango de frecuencias. => El diseño puede abordar especificaciones en transitorio y permanente.
- Elegir siempre el controlador más simple posible (a veces no es simple !)
- Los procedimientos de diseño son aproximados. Habitualmente, es necesario iterar o rediseñar.
- Hipótesis de diseño (polos dominantes) deben ser comprobadas con simulaciones temporales

Satisfacer las especificaciones frecuenciales **NO GARANTIZA** cumplir las especificaciones temporales.