Tema 8: Análisis de sistemas realimentados

Parte II

Control Automático

¿Que tienen estos sistemas en común?

- Tornado
- Boeing 777

• Muy no lineales, dinámica muy compleja.
• Los dos son capaces de transportar cosas y personas a grandes distancias

PERO

• Uno está controlado y el otro no
• El control es “la tecnología oculta que te encuentras todos los días”
• Se mantiene la noción de “realimentación”

Motivación de la ingeniería de control

- El control por realimentación tiene una larga historia que comienza con el deseo de los humanos en manejar los materiales y fuerzas de la naturaleza en su propio beneficio.

- Ejemplos tempranos de sistemas de control incluyen sistemas de regulación en relojes y mecanismos para mantener molinos de viento orientados.

- Las plantas industriales actuales tienen sistemas de control sofisticados que son necesarios para su correcto funcionamiento.

Motivos del control

El control es la clave para el funcionamiento de la tecnología:

- Mejora en la calidad del producto
- Incremento de la productividad
- Minimización del gasto
- Ahorro energético
- Protección medioambiental
- Mayor producción para una capacidad instalada dada
- Mayor margen de beneficios

Integración de sistemas

El éxito de la ingeniería control depende de tener una **visión de conjunto**. Algunos de los elementos a tener en cuenta son:

- planta, (proceso a controlar)
- objetivos
- sensores
- actuadores
- comunicaciones
- programación y algoritmos
- arquitectura e interfaces
- perturbaciones e incertidumbres

Planta

- El esquema físico de una planta es una parte intrínseca de los problemas de control.
- Por lo tanto un ingeniero de control necesita comprender y familiarizarse con el problema real que se desea controlar.
- Esto incluye un conocimiento básico de balance de energía, materia y flujos de material presentes en el sistema.

Objetivos

Antes del diseño y de la elección de sensores, actuadores y arquitecturas de control es muy importante conocer el final, es decir los objetivos de control. Esto incluye:

- Qué queremos conseguir (reducción energética, incremento de producción,...)
- Qué variables deben ser contraladas para conseguir estos objetivos.
- Qué nivel de comportamiento es necesaria (precisión, velocidad,...)

Sensores y actuadores

- Los sensores son los *ojos* del control que nos permiten *ver* que está pasando. Una de las afirmaciones que se suelen hacer sobre el control es:

  Si puedes medirlo, puedes controlarlo.

- Una vez los sensores están colocados para decirnos el *estado* de un proceso, el siguiente paso es la necesidad de actuar sobre el proceso para que evolucione al estado deseado. Esto se hace mediante los actuadores.

Comunicaciones

- La conexión entre sensores y actuadores se hace mediante un sistema de comunicaciones.
- Una planta típica puede tener miles de señales que deben ser enviadas a largas distancias.
- Por lo tanto el diseño del sistema de comunicaciones y sus protocolos asociados son un aspecto cada vez más importante en la ingeniería de control moderna..

Informática

- En los sistemas de control modernos la conexión entre sensores y actuadores suele estar realizada a través de algún tipo de computadora.
- Por lo tanto los ordenadores son una parte mas del diseño del conjunto del sistema de control.
- Los sistemas de control actuales usan una gran variedad de sistemas informáticos como son DCS's (Distributed Control Systems), PLC's (Programmable Logic Controllers), PC's (Personal Computers), etc.

Arquitectura e interfaces

- La decisión de "que conectar a qué" en el diseño de un sistema de control no es inmediata.
- Al principio se puede pensar que lo mejor es llevar todos las señales a un lugar único (estación de control) para que cada acción de control se base en toda la información posible (control centralizado).
- Sin embargo ésta casi nunca es la mejor solución. Hay buenas razones para evitar esta práctica: complejidad, coste, restricciones en el tiempo de computación, mantenimiento, fiabilidad, etc.

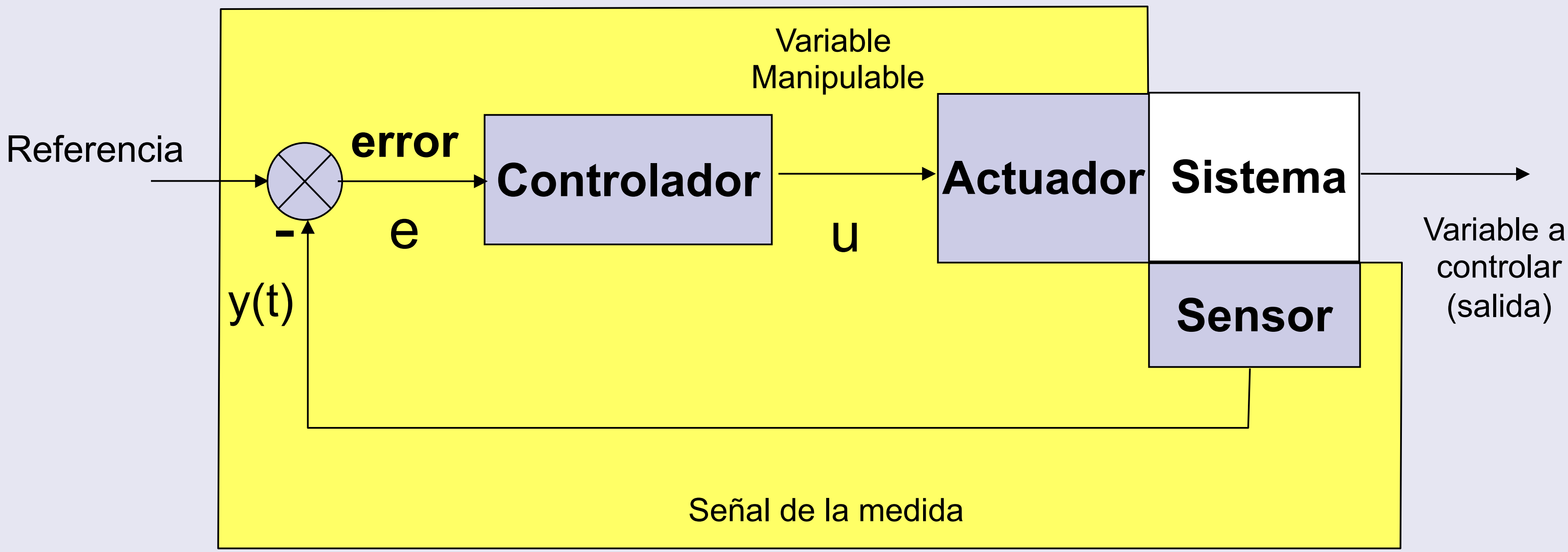
Algoritmos

- Finalmente llegamos al verdadero *corazón* de la ingeniería de control: los algoritmos que conectan los sensores con los actuadores. Dentro del conjunto del sistema de control es fácil despreciar este aspecto del problema.
- Un ejemplo simple cotidiano: jugar a nivel profesional al tenis.
- Se puede ver fácilmente que es necesaria una buena visión (sensores) y potente musculatura (actuadores) para jugar bien al tenis, pero esto no es suficiente. Se requiere una buena coordinación entre vista y mano para conseguirlo (control).

Perturbaciones e incertidumbres

- Una de las cosas que hacen que se siga estudiando y mejorando el diseño de controladores es que los sistemas reales se ven afectados por perturbaciones externas y ruidos.
- Estos factores pueden jugar un papel importante en el comportamiento del sistema.
- Ejemplos sencillo, Los aviones están sujetos a perturbaciones en forma de turbulencias y los sistemas de control de crucero en los coches deben adaptarse a variaciones en el firme y a distintas cargas en el vehículo.

Control por realimentación



Realimentación negativa:

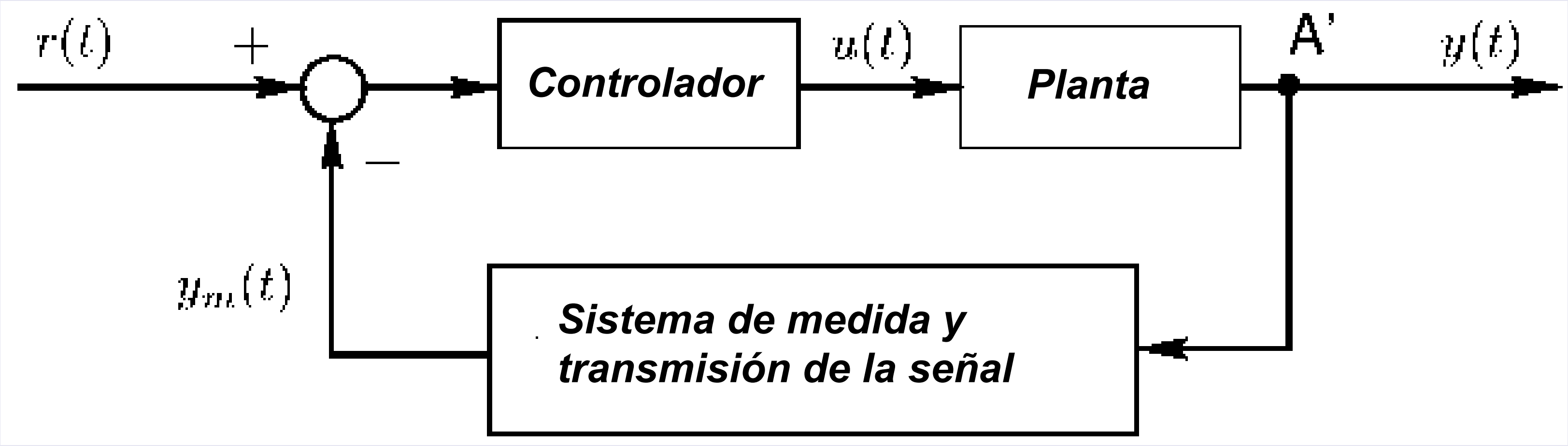
Corrección del error

↑e ⇨ ↑y ⇨ ↓e

(Si no, inestable)

Realimentación

- La realimentación es la clave para modificar el comportamiento del sistema.
- **¿Que es un sistema realimentado?** Es un sistema que usa una medida de la salida, la compara con la salida deseada para obtener el comportamiento deseado.



Control de sistemas SISO

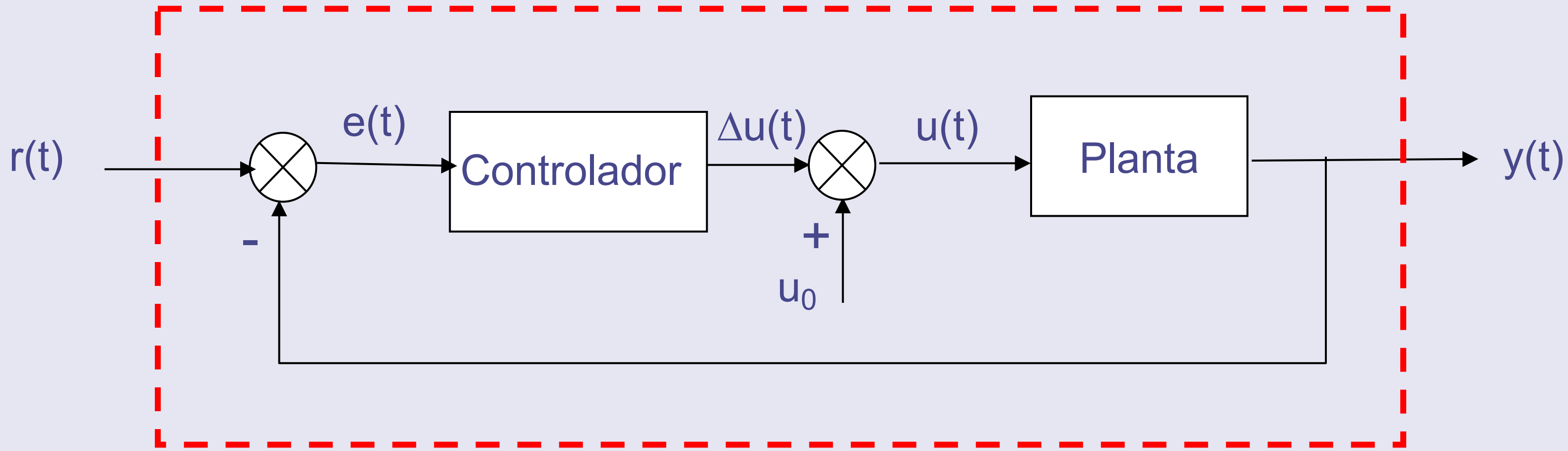
- Diseño basado en heurística
  - Sintonización del controlador por experimentación
    - Sistema real
    - Sistema simulado

- Diseño por tabla
  - Sintonización del controlador basado en un ensayo experimental
    - Ziegler-Nichols
    - Astrom-Hägglund, Ho-Hang-Cao….

- Diseño matemático
  - Analizar el sistema dinámico en lazo cerrado y diseñar el controlador para que cumpla una serie de propiedades
    - Tiempo de subida
    - Error en régimen permanente
    - Robustez frente a perturbaciones

Diseño analítico
Diseño basado en el lugar de las raíces
Moldeo de lazo (diseño en frecuencia)

Control de sistemas SISO



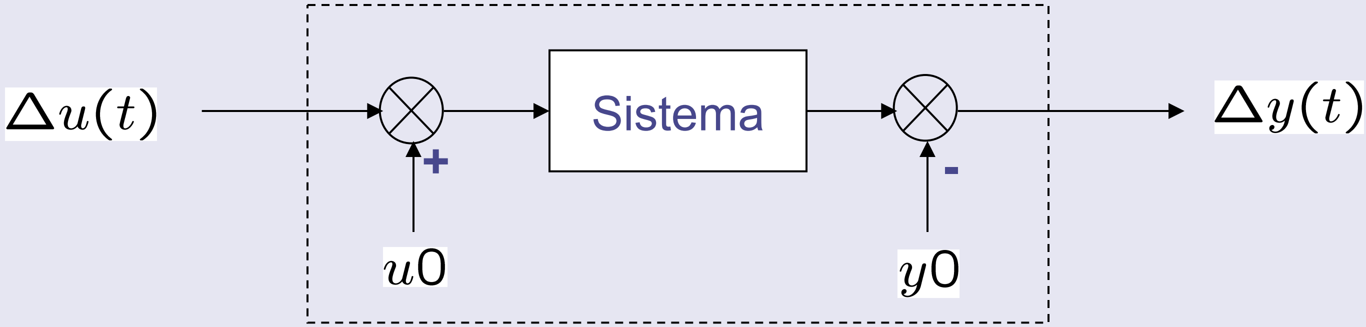
Sistema en lazo cerrado

Si el sistema es no lineal , es muy difícil analizar las propiedades del sistema en lazo cerrado.

Simplificación: Análisis de la respuesta del modelo en variables de error. (Linealizado).

Modelo en variables de error

- Para poder definir una serie de propiedades de un sistema dinámico, se define el modelo en variables de error en torno a un punto de trabajo estable (u_0,y_0) de la siguiente forma:



$$u(t) = u0 + \Delta u(t)$$

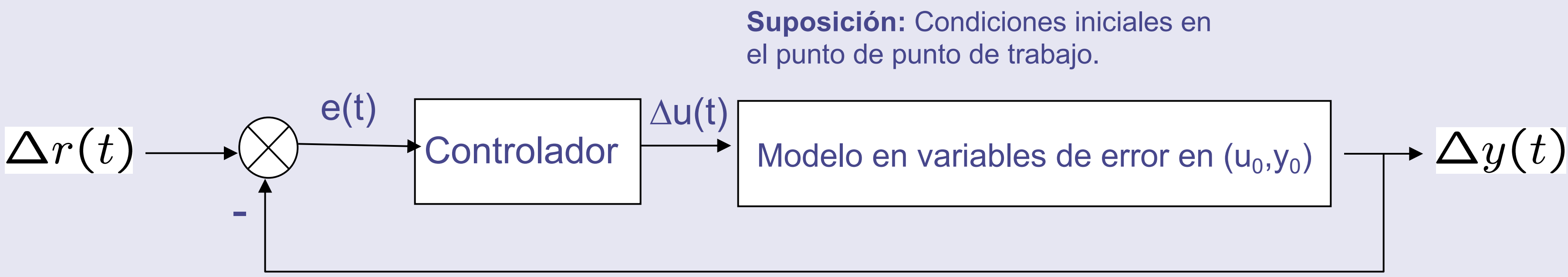
$$y(t) = y0 + \Delta y(t)$$

Suposición: Condiciones iniciales en el punto de punto de trabajo.

Nota: El modelo depende del punto de trabajo.

Modelo en variables de error

Modelo lineal



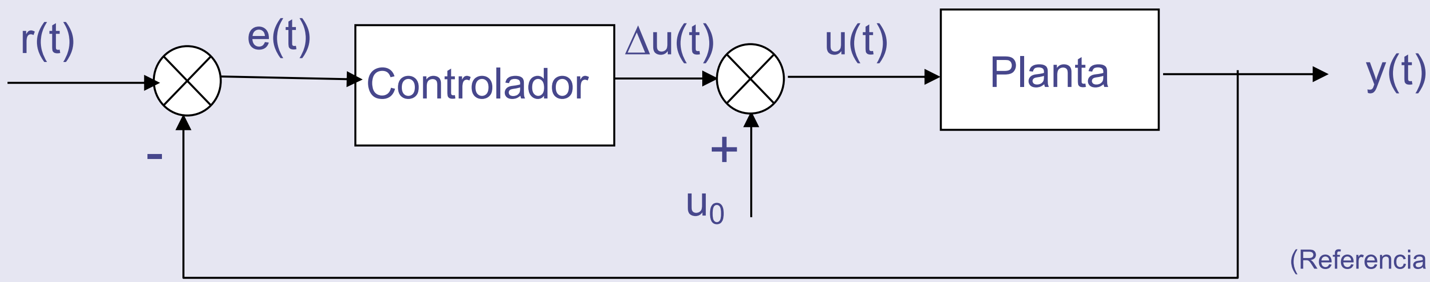
Análisis de la respuesta del sistema linealizado en lazo cerrado. Tanto el sistema linealizado y controlador son sistemas lineales.

Teoría de sistemas

Hipótesis de diseño: Las propiedades de este modelo nos indican:
- Velocidad de respuesta
- Capacidad de seguir una señal de referencia que cambia con el tiempo
- Robustez frente a perturbaciones
- …

Control de sistemas SISO

Control en torno a un punto de trabajo (u0,y0)



(Referencia en valor global)

Controlador

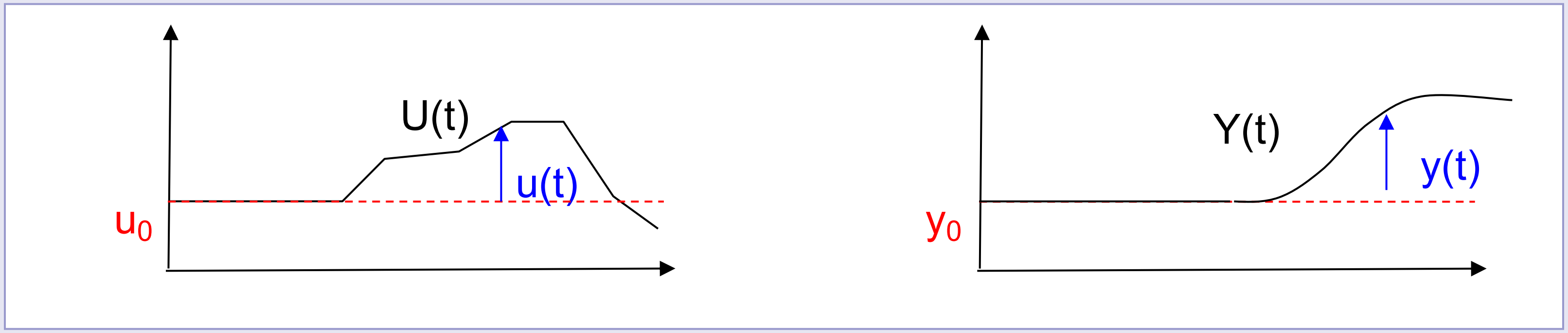
$$\Delta u(t) = K_p(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau)$$

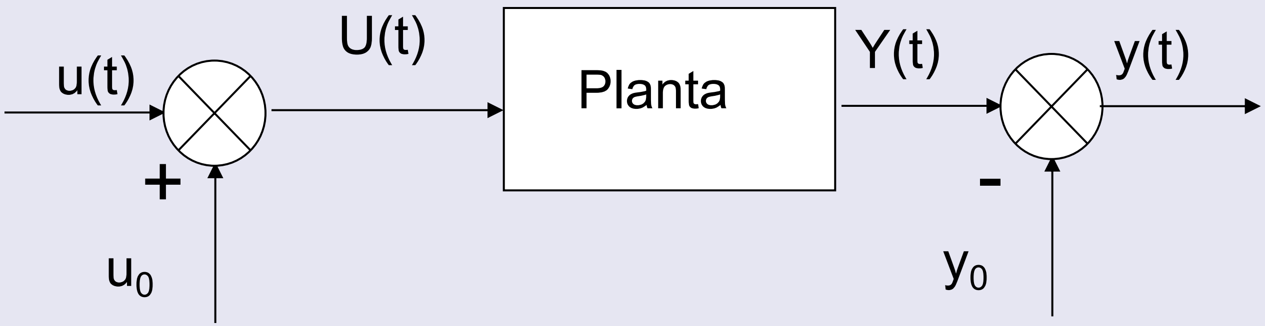
PI

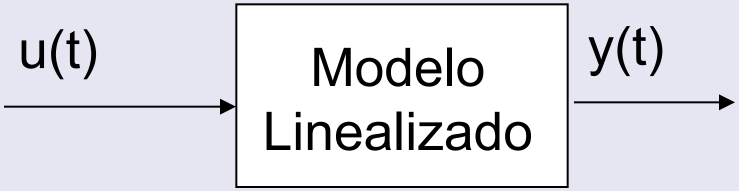
Control automático

¿Qué valor darle a los parámetros del controlador (Kp y Ti) para que el sistema en lazo cerrado tenga un comportamiento adecuado?

Modelos de control linealizados

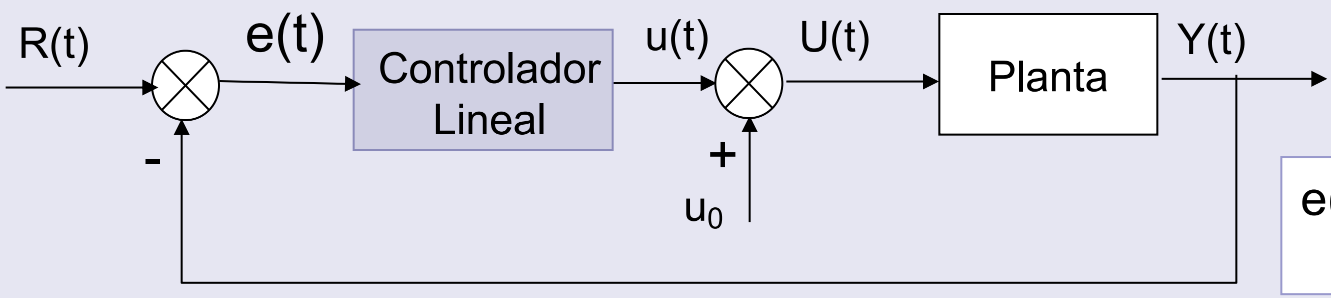






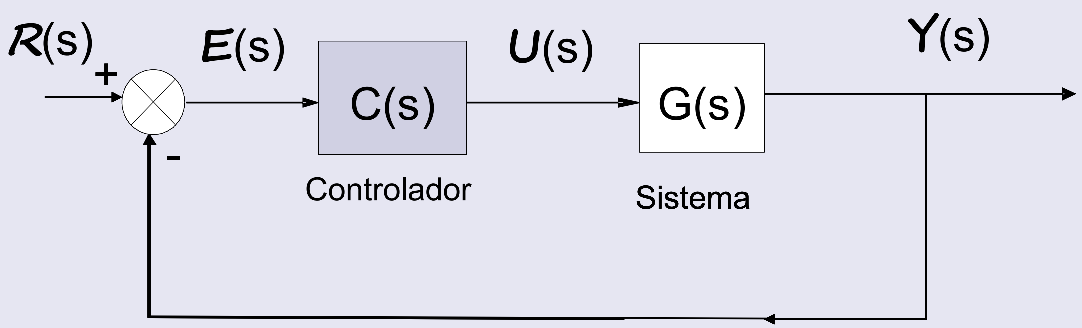
Control de sistemas linealizados

Sistema de control sobre la planta real



$$e(t) = (R(t)-y_0)-(Y(t)-y_0)$$
$$= R(t)-Y(t)=E(t)$$

Sistema de control lineal equivalente

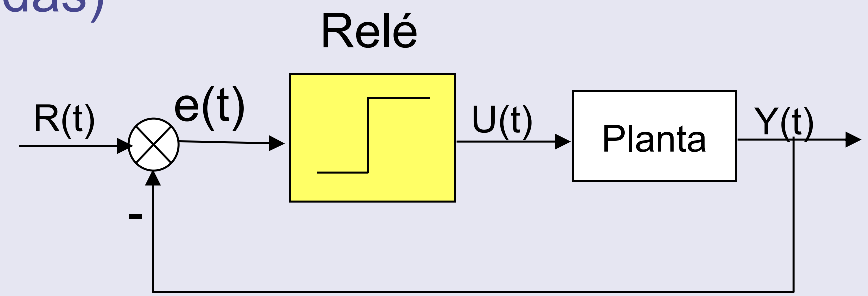


Acciones básicas de control

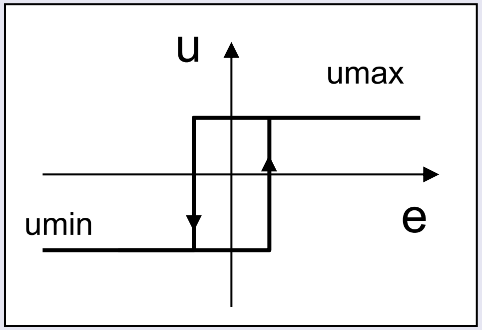
- Control por relé
- Acción proporcional
- Acción Integral
- Acción derivativa

Control por relé

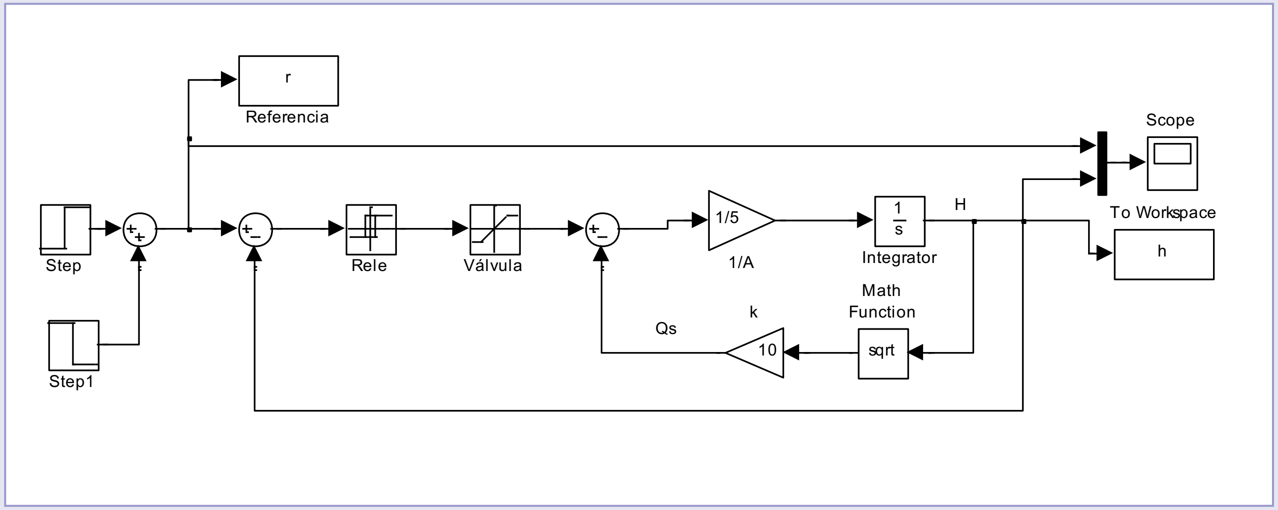
- Todo-nada (On-Off)
  - Ley de control (acciones limitadas)
    - Si e(t)>0, u(t)=umax
    - Si e(t)<0, u(t)=umin
  - Produce oscilaciones
  - Evoluciona hacia el punto deseado

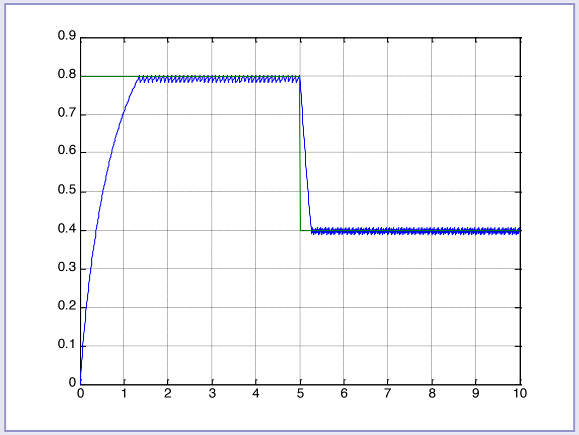


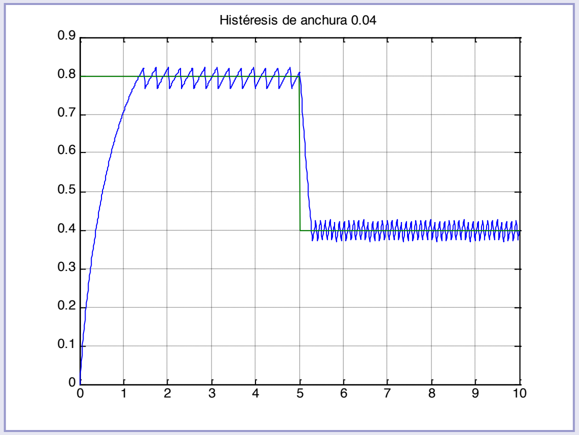
- Relé con histéresis
  - Reduce las oscilaciones
  - Mayor anchura de la histéresis reduce la frecuencia de oscilación

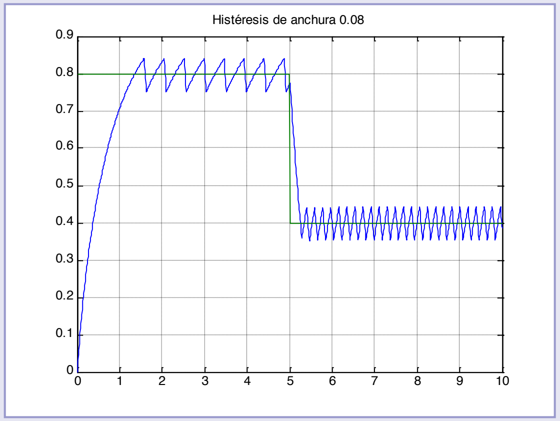


Control de un depósito





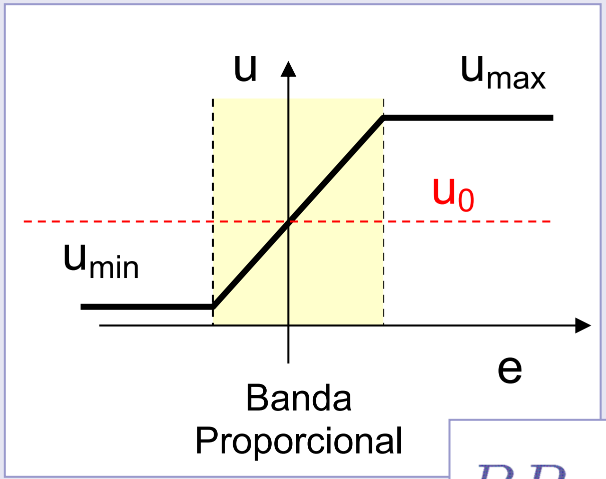




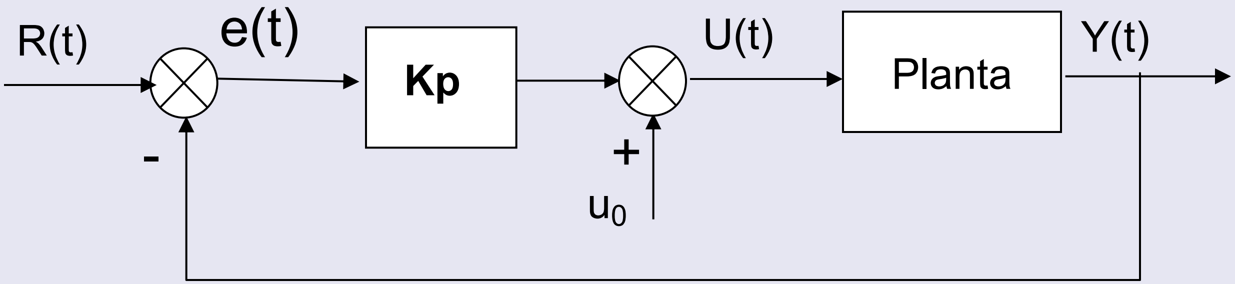
Acción proporcional (P)

- Ley de control

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} & e > \frac{u_{max}-u_0}{K_p} \\ K_p e(t) + u_0 & \\ u_{min} & e < \frac{u_{min}-u_0}{K_p} \end{cases}$$



$$BP = \frac{100}{K_p}$$



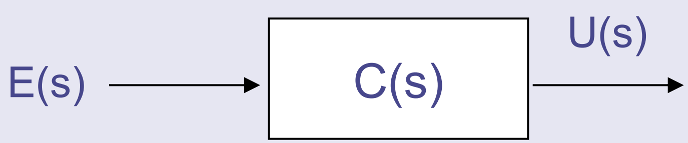
Acción proporcional

Incremento de la acción de control proporcional al error

$$\Delta u(t) = K_p e(t)$$

Dominio temporal

Función de transferencia



$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Dominio frecuencial

Parámetro de diseño: Kp

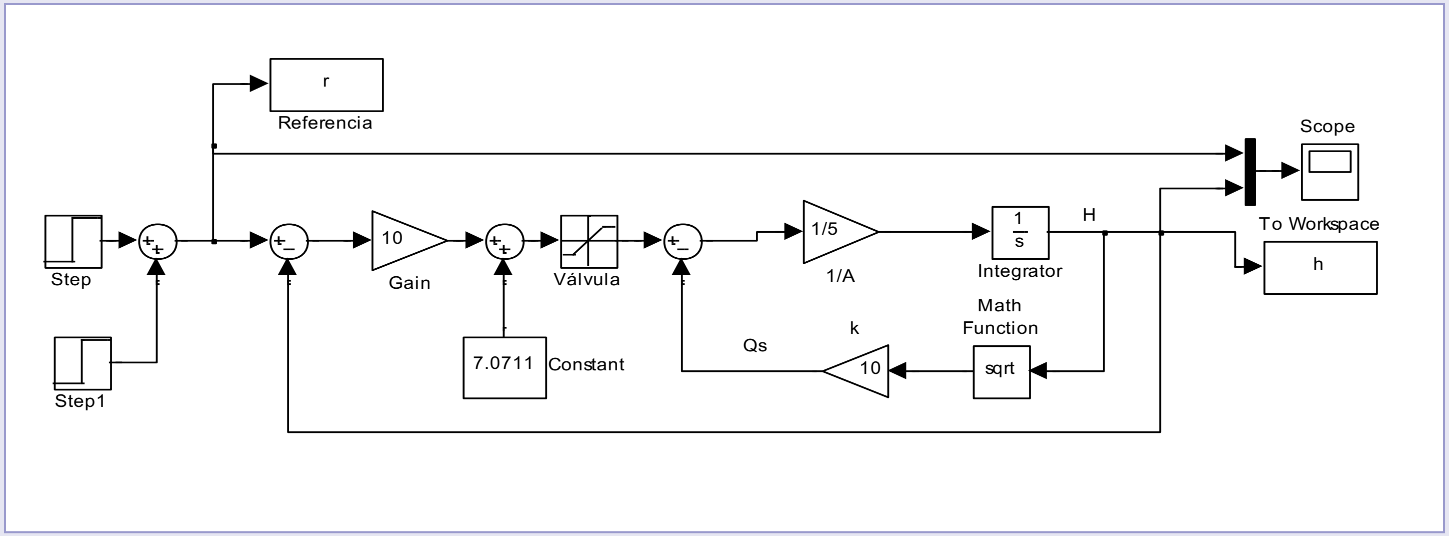
Acción proporcional

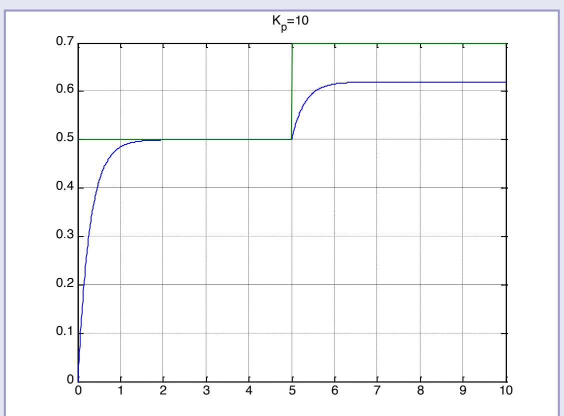
- Propiedades:
  - Se evitan las oscilaciones
  - El sistema sólo puede alcanzar sin error el valor de la salida correspondiente a u_0
  - En cualquier otra consigna se produce error

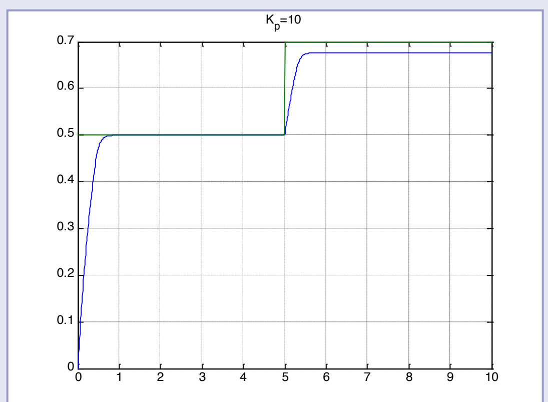
$$e = \frac{u_{rp} - u_0}{K_p}$$

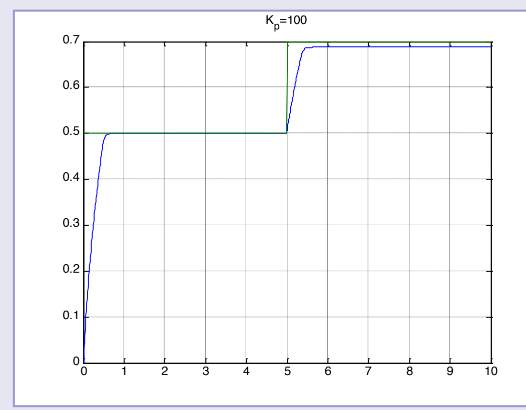
  - BP=0% ⇨ Control On-Off

Control P de un depósito







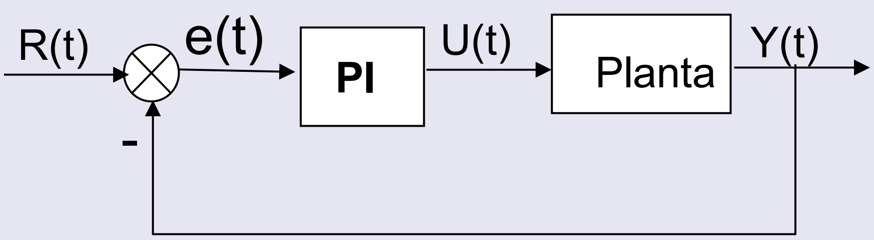


Acción Integral (I)

- Ley de control PI

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right)$$

$$C(s) = K_p\frac{1+T_is}{T_is}$$



- Garantiza error nulo en r.p.
- Produce oscilaciones

  (e incluso inestabilidad)

Acción integral

Incremento de la acción de control proporcional al error

$$\Delta u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

Dominio temporal

Función de transferencia

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

Dominio frecuencial

Propiedad de linealidad y transformada de la integral

Parámetro de diseño: Kp, Ti

Red de retraso

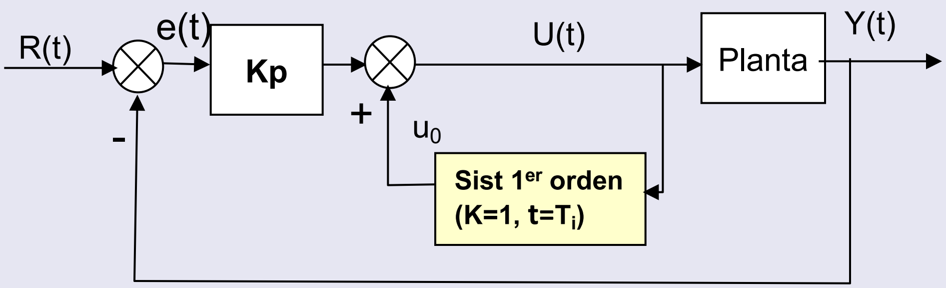
$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}, \ \alpha < 1$$

Controlador con propiedades similares al PI

Acción integral

- Adapta el valor de u_0

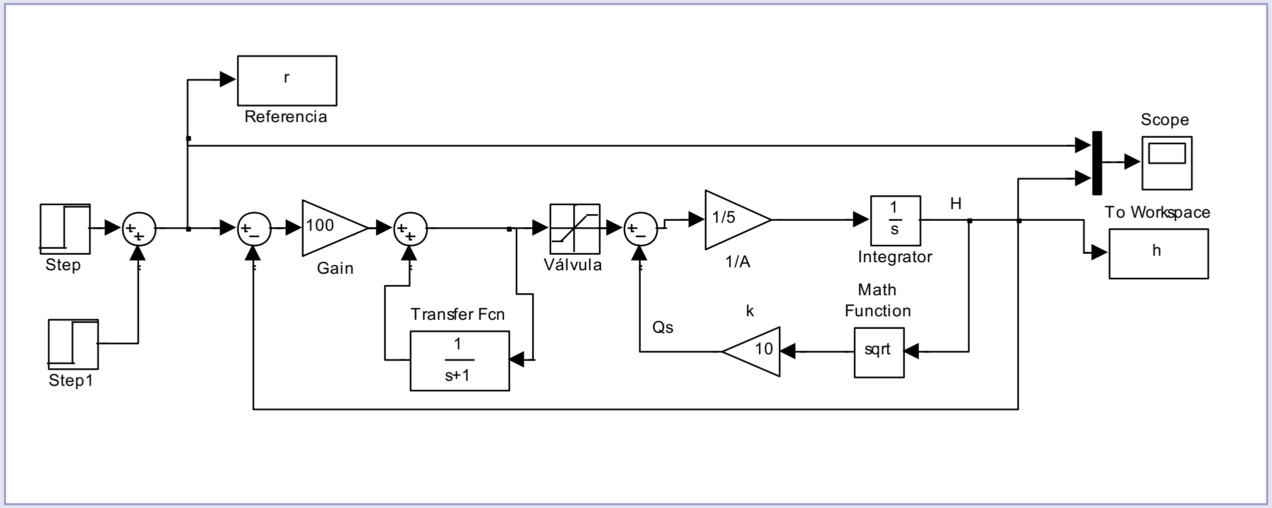
$$
\begin{aligned}
u(t) &= K_p e(t) + u_0 \\
&= K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

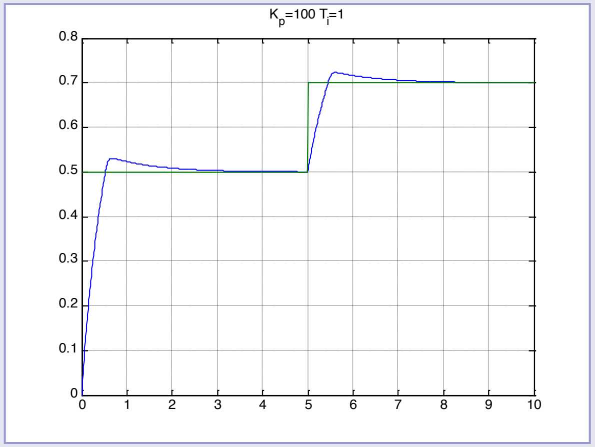


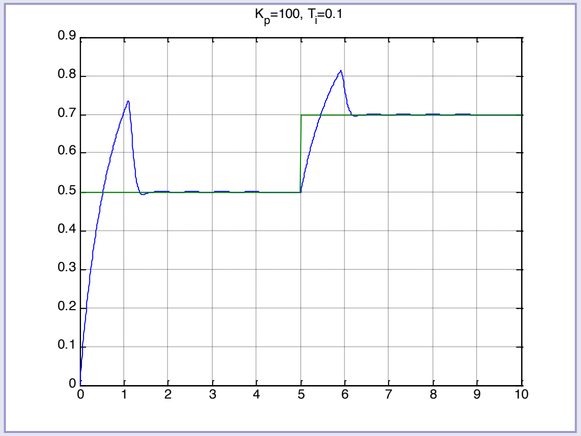
- Si el sistema en l.c. es estable entonces

$$u(t) \text{ acotado} \Rightarrow \int_0^t e(\tau)d\tau \text{ acotado} \Rightarrow e(t) \to 0$$

Control PI del depósito

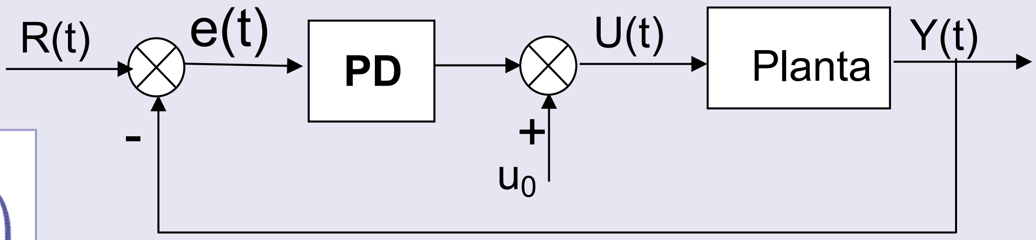






Acción Derivativa (D)

- Ley de control PD



$$u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{d\,e(t)}{d\,t} \right)$$

$$C(s) = K_p (1 + T_d\, s)$$

- Acción *predictiva*
  - Anticipa el error futuro
  - Mejora el comportamiento

$$u(t) \simeq K_p e(t + T_d)$$

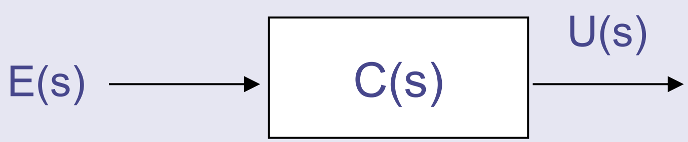
Acción derivativa

Incremento de la acción de control proporcional al error

$$\Delta u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Dominio temporal

Función de transferencia



$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

Dominio frecuencial

Propiedad de linealidad y transformada de la derivada

Parámetro de diseño: Kp, Td

Red de avance

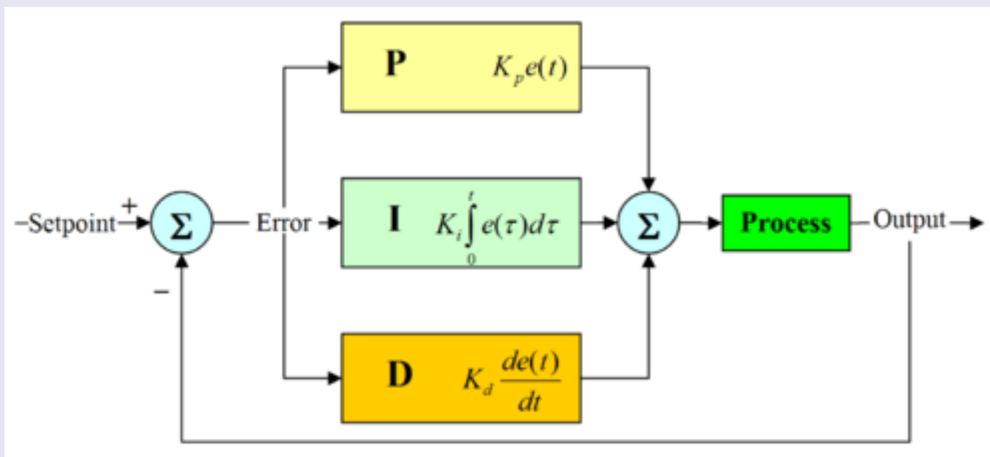
$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}, \quad \alpha > 1$$

Controlador con propiedades similares al PD

Controlador PID

Incremento de la acción de control proporcional al error a su integral y a su derivada

$$\Delta u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$



Tiene las tres acciones básicas de control
Amplia aplicación en la industria

Controlador PID

Incremento de la acción de control proporcional al error

$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Controlador}} \xrightarrow{\Delta u(t)}$

$$\Delta u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

Dominio temporal

Función de transferencia

$E(s) \longrightarrow \boxed{C(s)} \xrightarrow{U(s)}$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Dominio frecuencial

Propiedad de linealidad y transformada de la derivada e intregral

Parámetro de diseño: Kp, Td, Ti

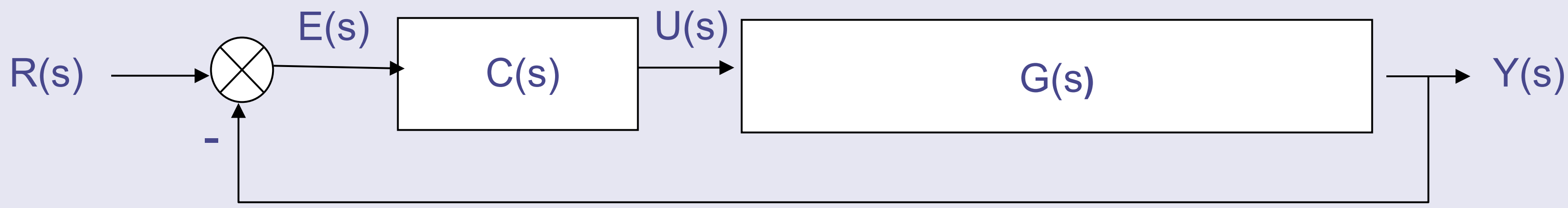
Red mixta

Controlador con propiedades similares al PID

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + \alpha_1 \tau_1 s}{1 + \tau_1 s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \alpha_2 \tau_2 s}, \ \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$$

Función de transferencia Gbc(s)

Sistema en lazo cerrado



Gbc(s) modela la respuesta de la salida del sistema en función de cambios en la referencia

Propiedades del controlador las definiremos a través de la respuesta del sistema en lazo cerrado

$$U(s) = E(s)C(s)$$
$$Y(s) = U(s)G(s)$$
$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$G_bc(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Sintonización de un controlador

Diseño de los parámetros de el controlador (C(s)) para que el sistema en lazo cerrado tenga unas determinadas propiedades (especificaciones)

$$G_bc(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\boxed{C(s)}G(s)}{1 + \boxed{C(s)}G(s)}$$

Gbc(s) **no** está definida si no definimos los parámetros de C(s)

Especificaciones

Tiempo de subida frente a un escalón en el incremento de referencia
Error en régimen permanente
Estabilidad
…

ESPECIFICACIONES SOBRE EL MODELO EN VARIABLES DE ERROR TIENEN EFECTO SOBRE EL SISTEMA EN LAZO CERRADO REAL

Diseño matemático

Analizar el sistema dinámico en lazo cerrado y diseñar el controlador para que cumpla una serie de propiedades

Ejemplo

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Sistema en lazo cerrado

$$G_{bc}(s) = \frac{1.25K_p}{1.25K_p + (s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

¿Comportamiento del sistema? Depende de Kp

Sistema de 3 polos que dependen de Kp
Ganancia estática del sistema depende de Kp

Señal de referencia: Escalón de amplitud 1 en la referencia
- Simulamos el comportamiento en Simulink/Matlab

Ejemplo

$$G_{bc}(s) = \frac{1.25K_p}{1.25K_p + (s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

Kp=0.1

$$G_{bc}(s) = \frac{0.125}{(s+0.1168)(s+0.4276)(s+5.006)}$$

Kp=1

$$G_{bc}(s) = \frac{1.25}{(s+5.055)(s^2+0.4952s+0.272)}$$

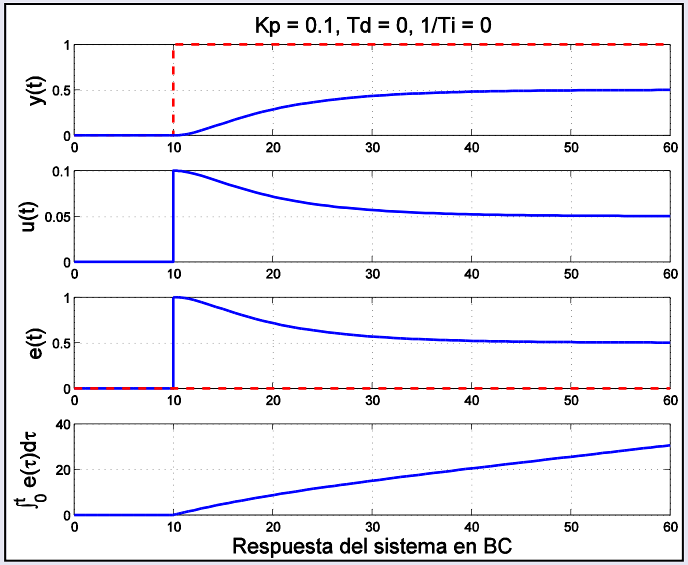
Kp=10

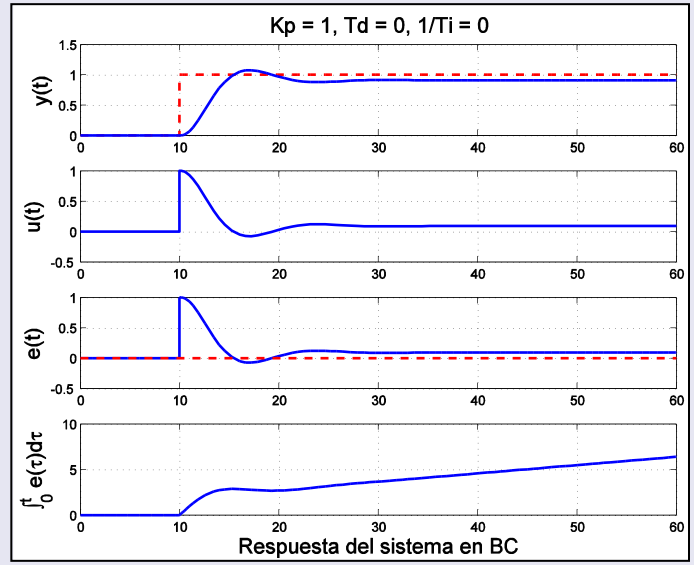
$$G_{bc}(s) = \frac{12.5}{(s+5.465)(s^2+0.08506s+2.31)}$$

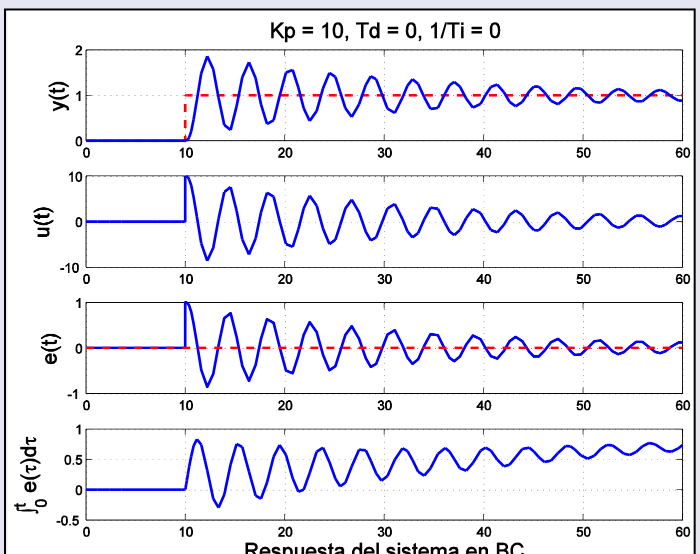
Kp=15

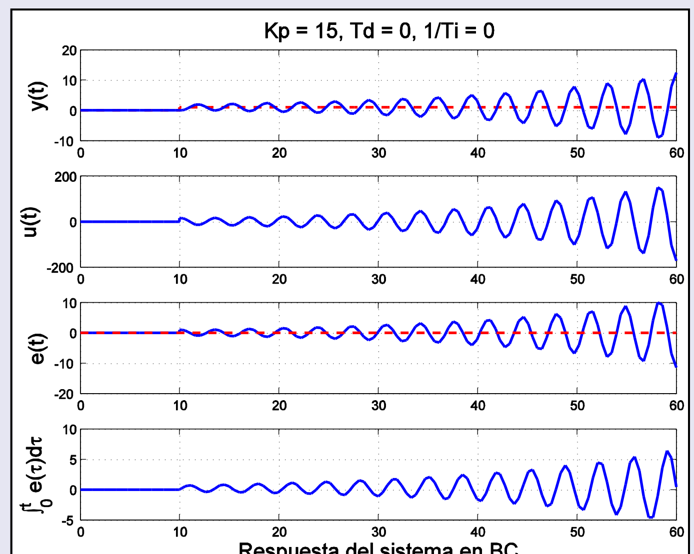
$$G_{bc}(s) = \frac{18.75}{(s+5.65)(s^2-0.1001s+3.341)}$$

Ejemplo


Kp = 0.1, Td = 0, 1/Ti = 0
y(t)
u(t)
e(t)
$\int_0^t e(\tau)d\tau$
Respuesta del sistema en BC

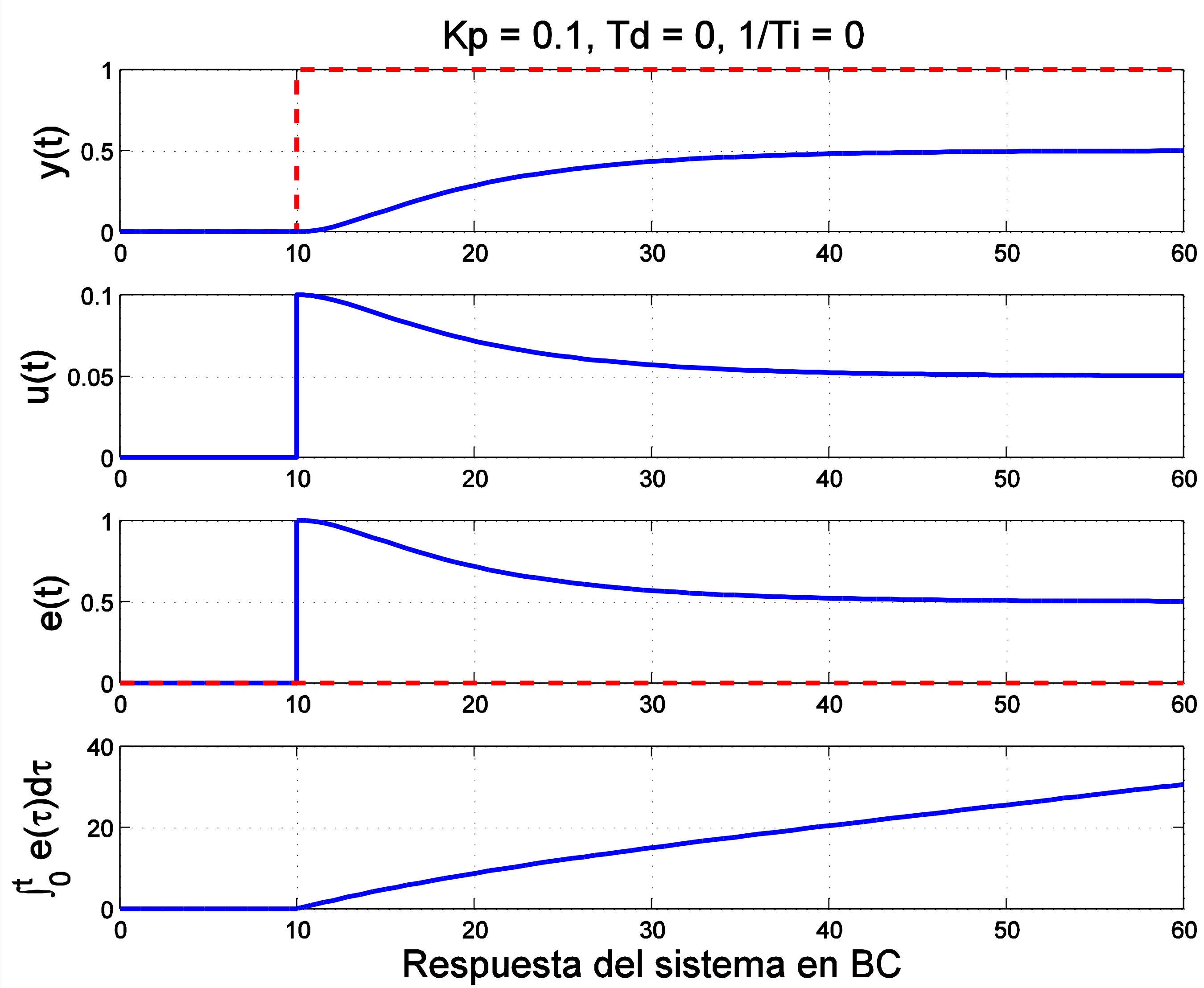

Kp = 1, Td = 0, 1/Ti = 0
y(t)
u(t)
e(t)
$\int_0^t e(\tau)d\tau$
Respuesta del sistema en BC


Kp = 10, Td = 0, 1/Ti = 0
y(t)
u(t)
e(t)
$\int_0^t e(\tau)d\tau$
Respuesta del sistema en BC


Kp = 15, Td = 0, 1/Ti = 0
y(t)
u(t)
e(t)
$\int_0^t e(\tau)d\tau$
Respuesta del sistema en BC

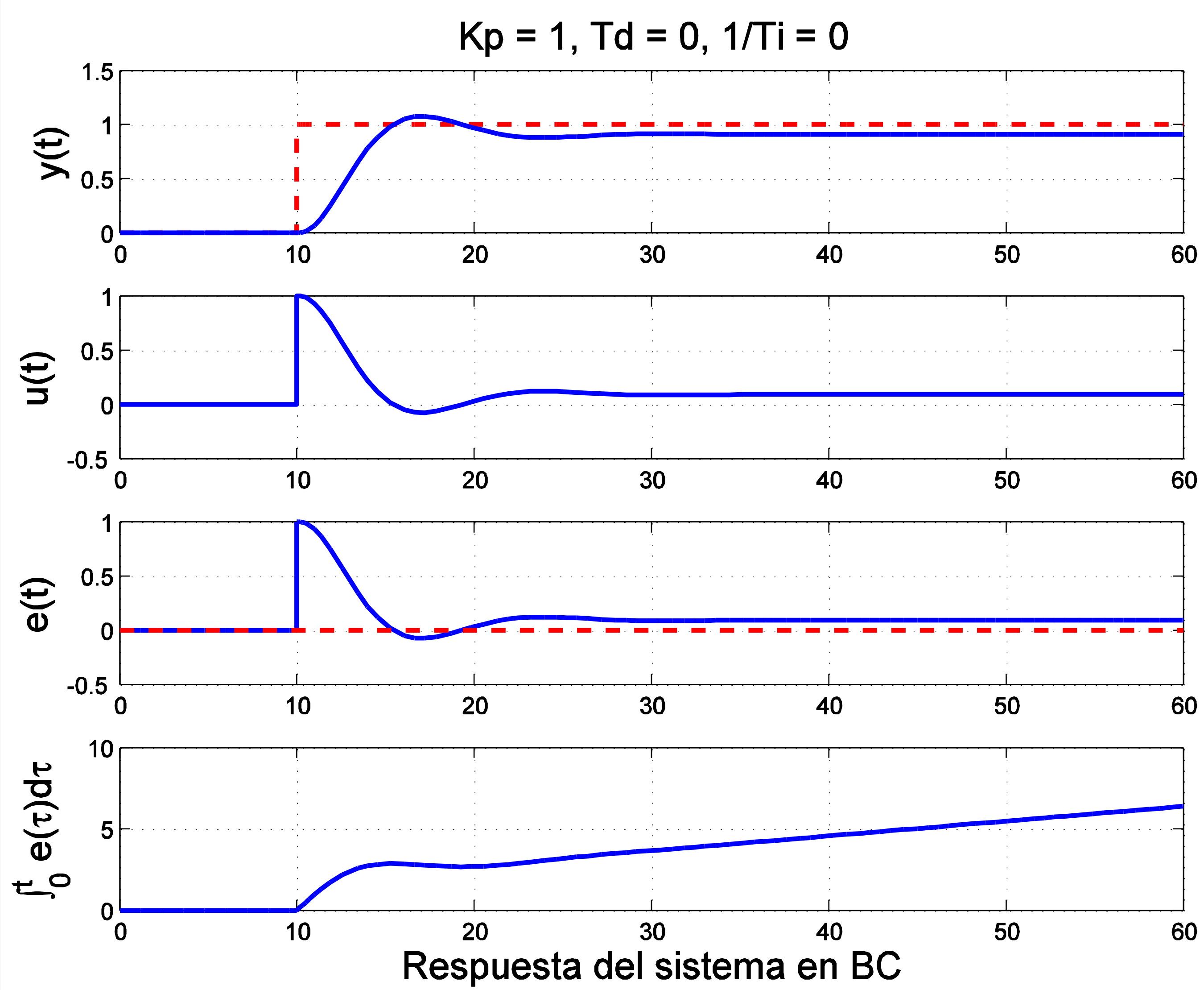
Ejemplo

$$G_{bc}(s) = \frac{0.125}{(s+0.1168)(s+0.4276)(s+5.006)}$$



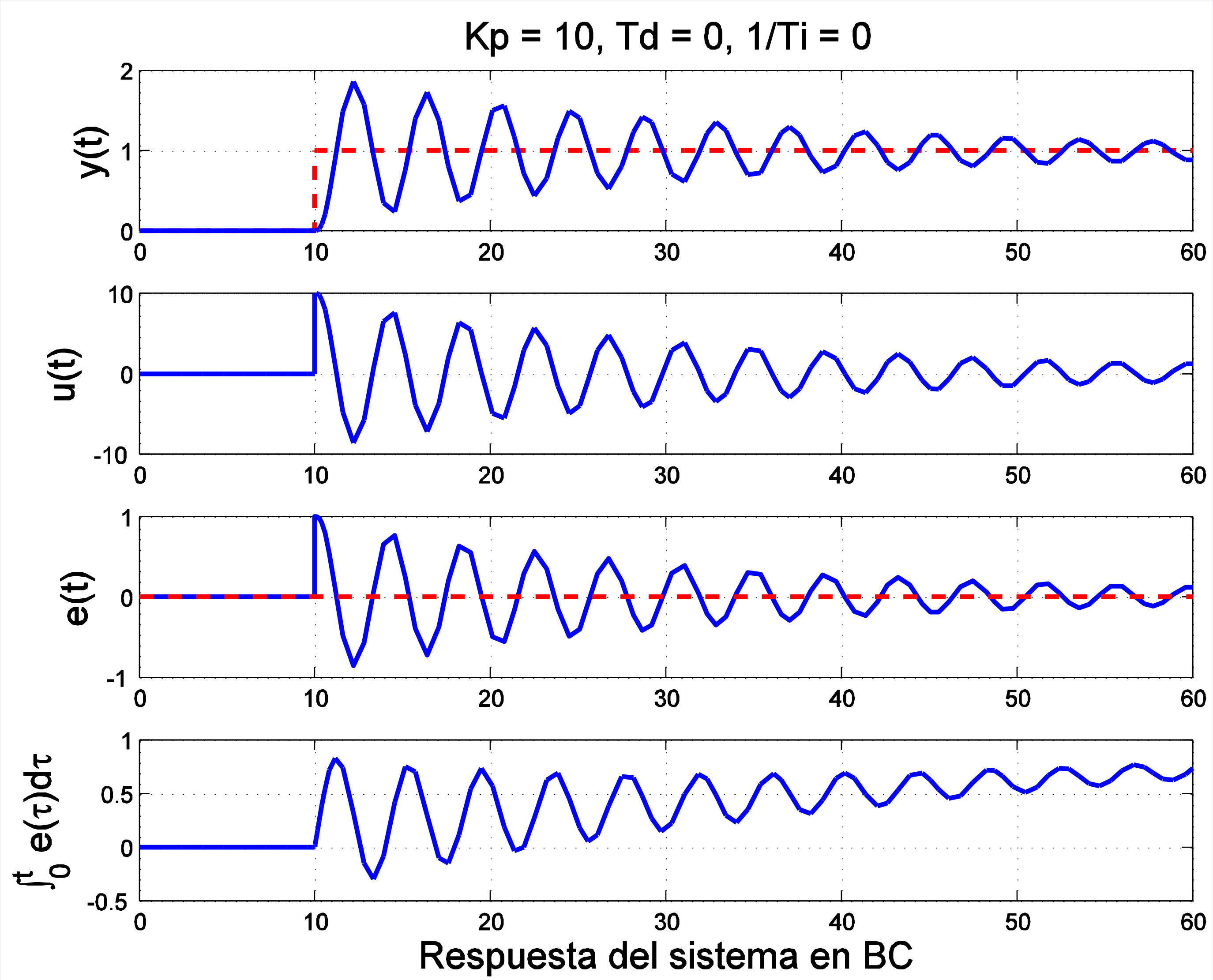
Ejemplo

$$G_{bc}(s) = \frac{1.25}{(s+5.055)(s^2+0.4952s+0.272)}$$



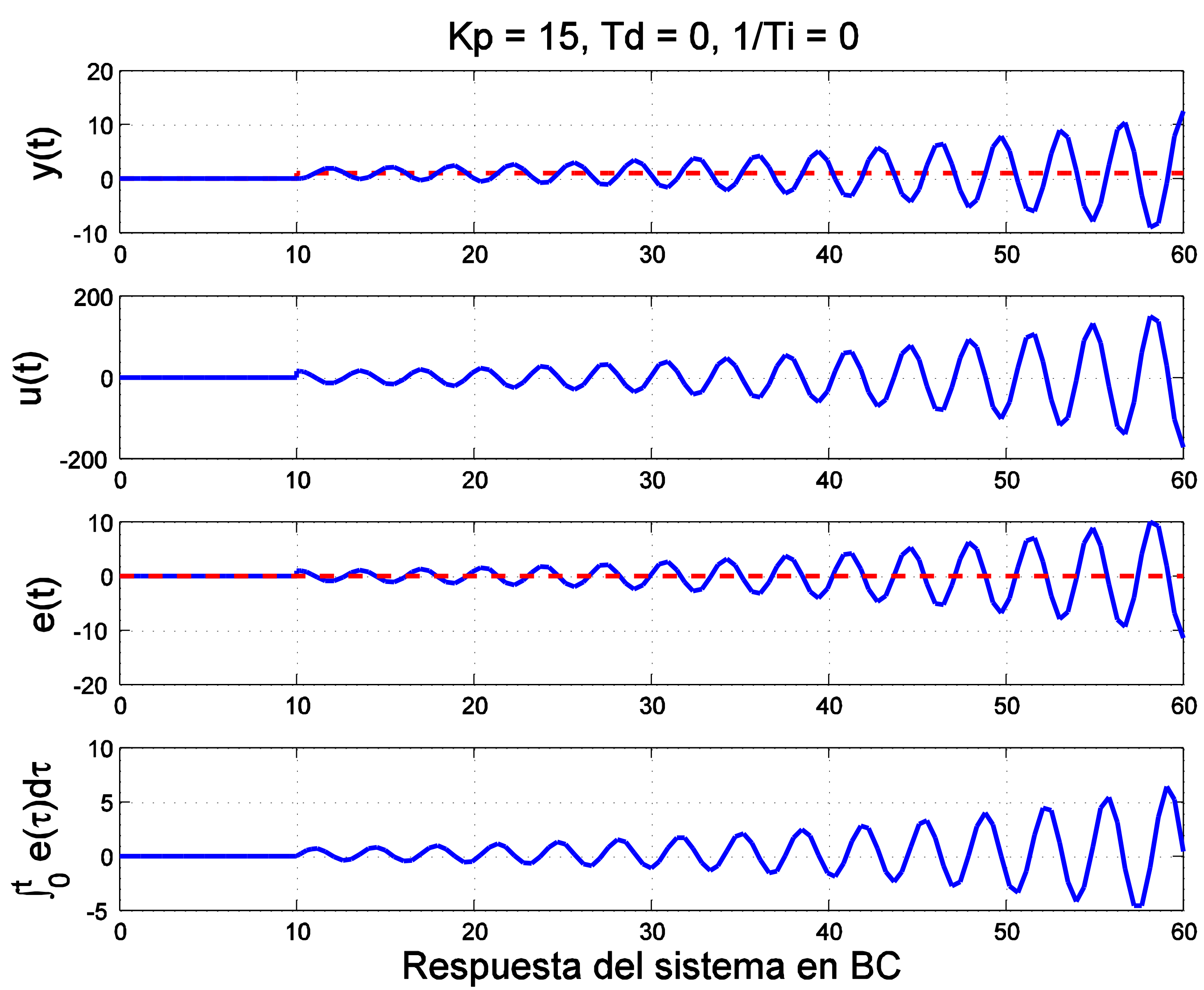
Ejemplo

$$G_{bc}(s) = \frac{12.5}{(s + 5.465)(s^2 + 0.08506s + 2.31)}$$



Ejemplo

$$G_{bc}(s) = \frac{18.75}{(s+5.65)(s^2 - 0.1001s + 3.341)}$$



Sintonización de un controlador

Diseño de los parámetros de el controlador (C(s)) para que el sistema en lazo cerrado tenga unas determinadas propiedades (especificaciones)

$$G_{bc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Gbc(s) no está definida si no definimos los parámetros de C(s)

Especificaciones (Teoría de sistemas)

Estabilidad
TEMA 7. Estabilidad
Respuesta transitoria
TEMA 5. Respuesta temporal de sistemas lineales
Respuesta en régimen permanente
TEMA 5. Respuesta temporal de sistemas lineales

Diseño matemático

Analizar el sistema dinámico en lazo cerrado y diseñar el controlador para que cumpla una serie de propiedades

Tipos de comportamiento

- Respuesta al escalón unitario
  - Clasificación de la señal de salida Δy(t) frente a una determinada señal de entrada.
    - Escalón unitario (la más utilizada).
    - Rampa.
    - Senoide.
  - Da información sobre las propiedades dinámicas del sistema

$$\Delta u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Modelo en variables}\\ \text{de error en (u0,y0)}\end{array}} \longrightarrow \Delta y(t)$$

Suposición: Condiciones iniciales en el punto de punto de trabajo.

Escalón unitario:

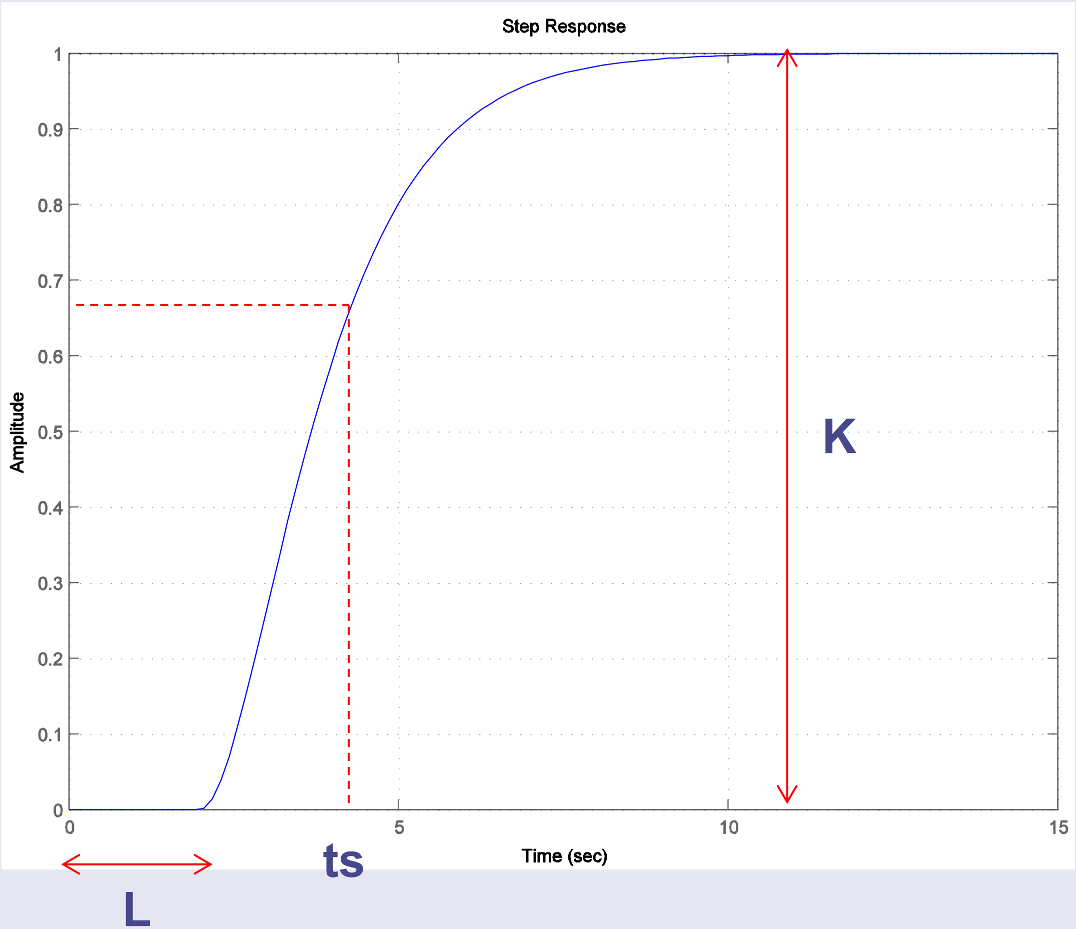
$$\Delta u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Comportamiento:

- Sobreamortiguado
- Subamortiguado
- Inestable
- Oscilatorio

Tipos de comportamiento

- Sobreamortiguado



Retraso L
Ganancia K
Tiempo de subida ts

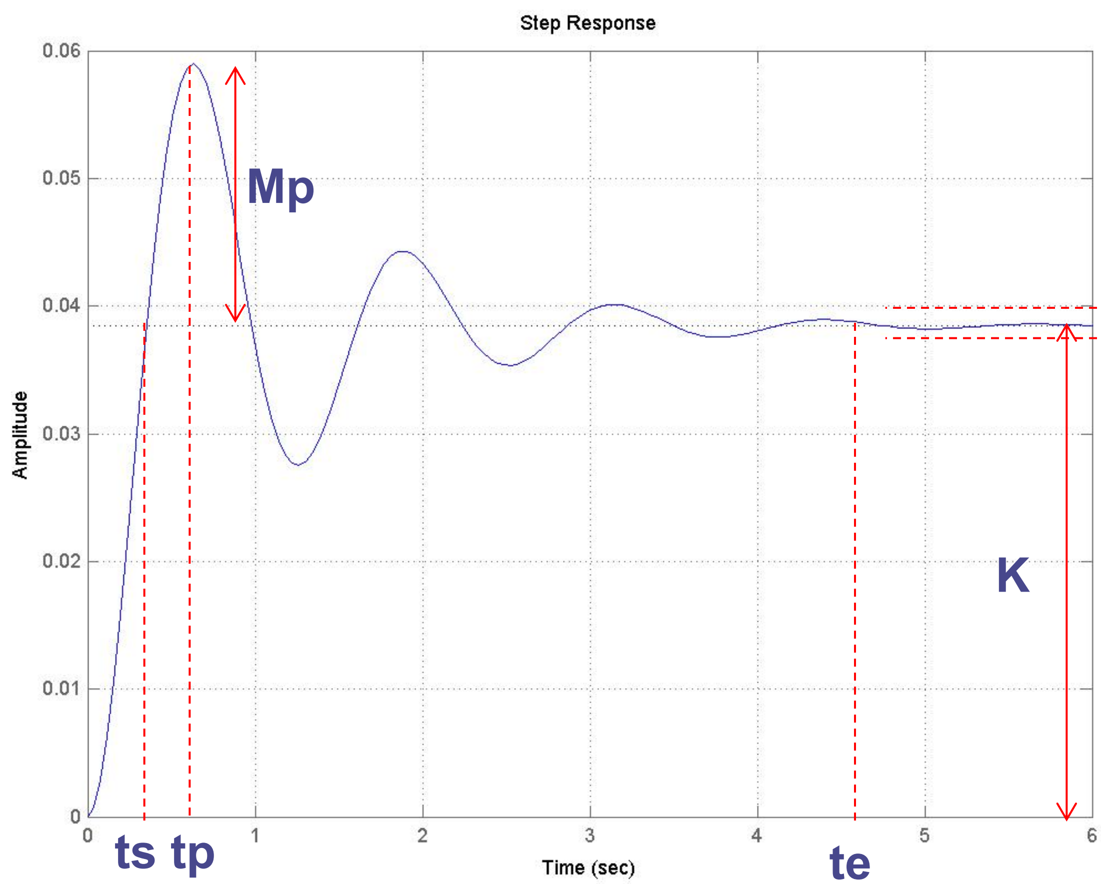
Tiempo de subida: Tiempo en alcanzar el 63% del valor de régimen permanente.

Retraso: Tiempo que tarda en reaccionar la salida después de el cambio en la entrada.

Ganancia: Relación entre el valor de entrada y el valor de salida en el permanente.

Tipos de comportamiento

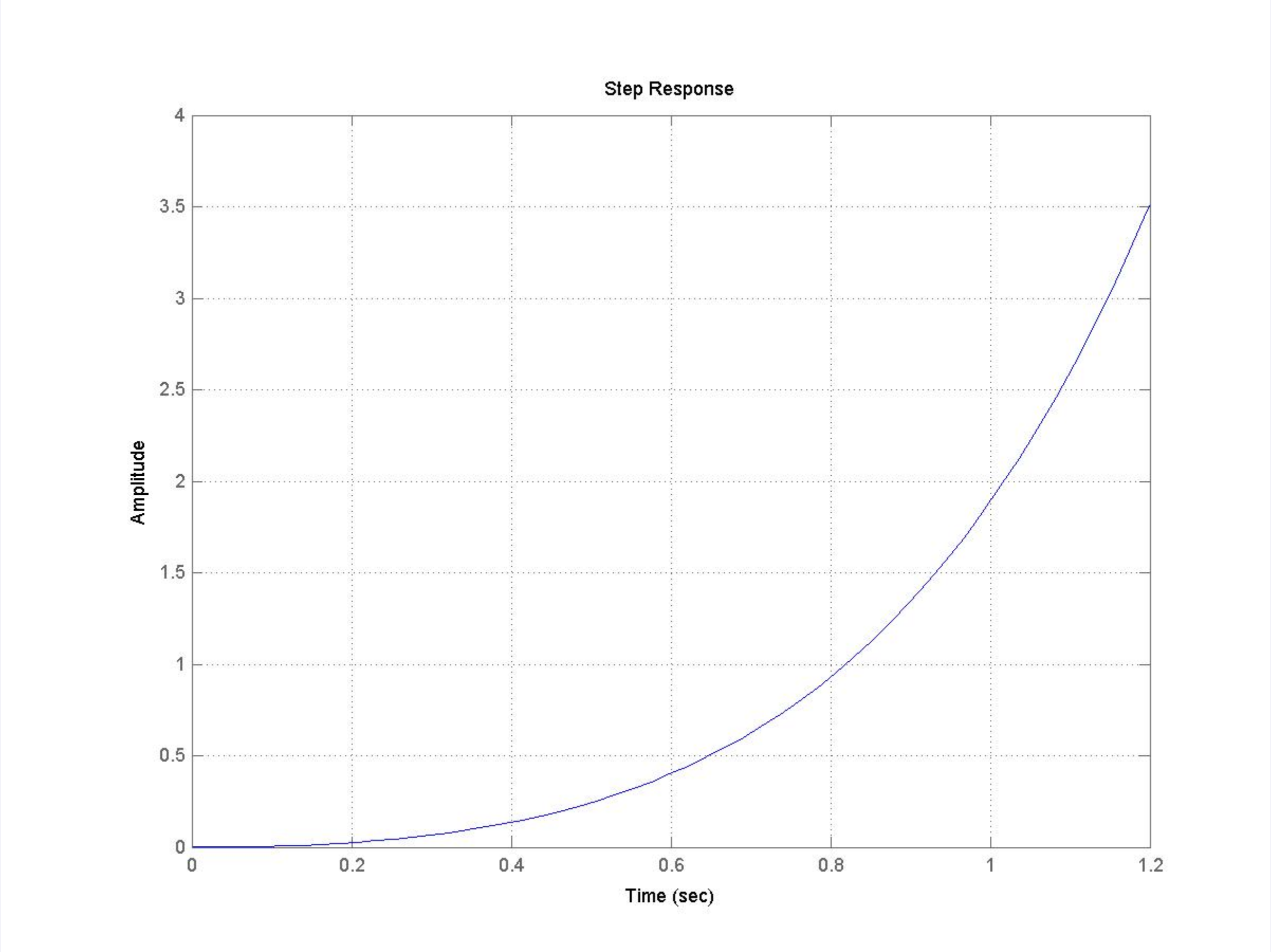
- Subamortiguado



Retraso L
Ganancia K
Tiempo de subida ts
Tiempo de pico tp
Tiempo de establecimiento te
Sobrepaso Mp

Tipos de comportamiento

- Inestable



Estabilidad

Criterio de estabilidad:

Gbc(s) es estable si tiene todos los polos en el semiplano izquierdo

Los polos del sistema son las raíces del denominador (dependen de C(s))

$$1 + C(s)G(s) = 0$$

Un sistema en lazo cerrado puede convertirse en inestable si el controlador está mal diseñado

Ejemplo: Kp=15

$$G_{bc}(s) = \frac{18.75}{(s+5.65)(s^2-0.1001s+3.341)}$$

Polos: -5.65, $\boxed{0.0500 + 1.8272i, 0.0500 - 1.8272i}$

El diseño del controlador tiene que garantizar la estabilidad del lazo cerrado

Estabilidad

Método analítico (ensayo y error)
• Evaluar los polos del sistema en lazo cerrado para cada combinación de parámetros del controlador (Kp, Td, Ti) usando el modelo del sistema

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz
• Permite evaluar si un polinomio tiene raíces en el semiplano derecho
• Surge para evitar calcular las raíces de un polinomio de orden superior
• Puede usarse para evaluar condiciones que garantizan estabilidad

Criterio de estabilidad de Nyquist

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Determinar si existe alguna raíz del siguiente polinomio en el semiplano derecho

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Nota: Importante la notación

1 - Si existe algún parámetro negativo o cero, entonces el polinomino tiene al menos una raíz en el semiplano derecho
2 - Construir la tabla de Routh-Hurwitz. Si existe algún componente negativo o cero en la primera columna de la tabla, entonces el polinomino tiene al menos una raíz en el semiplano derecho

$n+1$	1	a_2	a_4	$\ldots$
n	a_1	a_3	a_5	$\ldots$
$n-1$	β_1	β_2	β_3	$\ldots$
$n-2$	γ_1	γ_2	γ_3	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$			
0	ρ_1			

$$\beta_1 = \frac{a_1 a_2 - 1 \cdot a_3}{a_1}$$
$$\beta_2 = \frac{a_1 a_4 - 1 \cdot a_5}{a_1}$$
$$\beta_3 = \frac{a_1 a_6 - 1 \cdot a_7}{a_1}$$
$$\ldots$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1 a_3 - a_1 \beta_2}{\beta_1}$$
$$\gamma_2 = \frac{\beta_1 a_5 - a_1 \beta_3}{\beta_1}$$
$$\gamma_3 = \frac{\beta_1 a_7 - a_1 \beta_4}{\beta_1}$$
$$\ldots$$

Ejemplo

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Sistema en lazo cerrado

$$G_{bc}(s) = \frac{1.25K_p}{1.25K_p + (s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

Los polos son las soluciones de la siguiente ecuación (depende de Kp)

$$s^3 + 5.55s^2 + 2.775s + 0.1250 + 1.25K_p = 0$$

4	1	2.775
3	5.55	$0.1250 + 1.25Kp$
2	$\frac{15.2762 - 1.25Kp}{5.55}$	0
1	$0.1250 + 1.25Kp$	0

$$0.1250 + 1.25K_p > 0$$
$$15.2762 - 1.25Kp > 0$$

Rango de ganancias

$$12.2210 > K_p > -0.1$$

Ejemplo

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1+T_d s)$$

Sistema en lazo cerrado

$$G_{bc}(s) = \frac{1.25K_p(1+T_d s)}{1.25K_p(1+T_d s)+(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

Los polos son las soluciones de la siguiente ecuación (dependen de Kp y Td)

$$s^3+5.55s^2+(2.775+1.25T_d)s+(0.1250+1.25K_p)=0$$

4	1	$2.775+1.25T_d$
3	5.55	$0.1250+1.25Kp$
2	$\frac{15.2762+6.9375T_d-1.25Kp}{5.55}$	0
1	$0.1250+1.25Kp$	0

$$15.2762+6.9375T_d-1.25Kp>0$$
$$15.2762-1.25Kp>0$$

Técnica poco útil con múltiples parámetros

Respuesta en régimen permanente

Respuesta del sistema cuando el tiempo tiende a infinito
(suponemos que el sistema en lazo cerrado es estable)

Error en régimen permanente

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} r(t) - y(t) = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

Teorema del valor final (propiedad de la transformada de Laplace)

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G_{lc}(s)R(s) = (1 - G_{lc}(s))R(s)$$

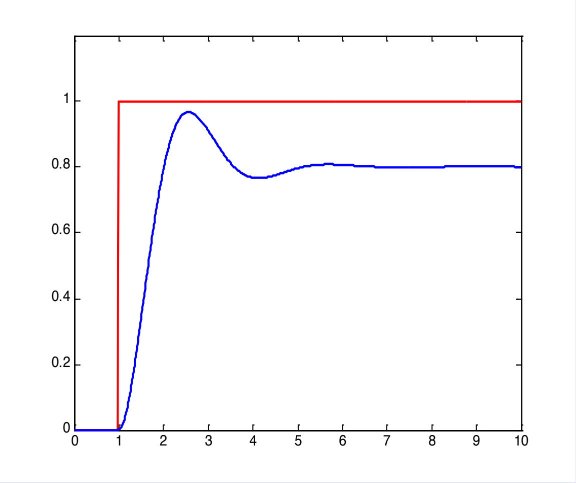
$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s)$$

Importante: Depende de R(s)
Diferentes referencias definen diferentes parámetros de error en régimen permanente

Error frente a un escalón

Error ante una entrada constante (en rég. perm.)

$$e_{prp} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s}$$



Constante de error en posición

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)G(s) \qquad e_{prp} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Todo sistema estable tiene error en posición acotado
Para que el error sea nulo (el sistema alcance la referencia)

$$e_{prp} = 0 \Leftrightarrow K_p = \infty \Leftrightarrow C(s)G(s) \text{ tiene al menos un integrador}$$

Error frente a una rampa

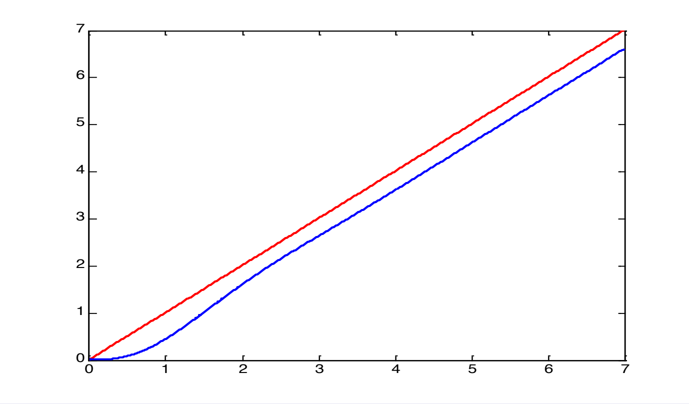
Error ante una entrada en rampa (en rég. perm.)

$$e_{vrp} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s^2}$$

Constante de error en velocidad

$$K_v = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s)$$

$$e_{vrp} = \frac{1}{K_v}$$



Error en velocidad acotado ⇔ Error en posición nulo
(C(s)G(s) tiene al menos un integrador)

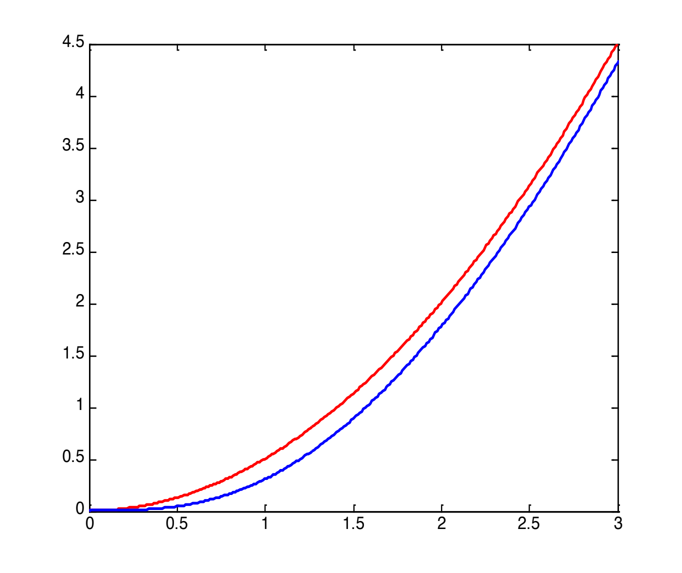
Para que el error sea nulo (el sistema alcance la referencia)

$$e_{rv} = 0 \Leftrightarrow K_v = \infty \Leftrightarrow C(s)G(s) \text{ tiene al menos dos integradores}$$

Error frente a una parábola

Error ante una entrada en parábola (en rég. perm.)

$$e_{arp} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{1}{s^3}$$



Constante de error en aceleración

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 C(s)G(s)$$

$$e_{arp} = \frac{1}{K_a}$$

Error en aceleración acotado ⇔ Error en posición nulo ⇔ Error en velocidad nulo (C(s)G(s) tiene al menos dos integradores)

Para que el error sea nulo (el sistema alcance la referencia)

$$e_{arp} = 0 \Leftrightarrow K_a = \infty \Leftrightarrow C(s)G(s) \text{ tiene al menos tres integradores}$$

Tabla de errores

- Tipo de un sistema = nº de integradores

Error \ Tipo	0	1	2
Escalón	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
Rampa	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
Parábola	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

Ejemplo

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

Controlador P

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c$$

Sistema de tipo 0

$$K_p = \lim_{s\to 0} C(s)G(s) = 10K_c$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sC(s)G(s) = 0$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2C(s)G(s) = 0$$

El controlador P afecta la ganancia de Bode del sistema pero no puede cambiar el tipo del mismo

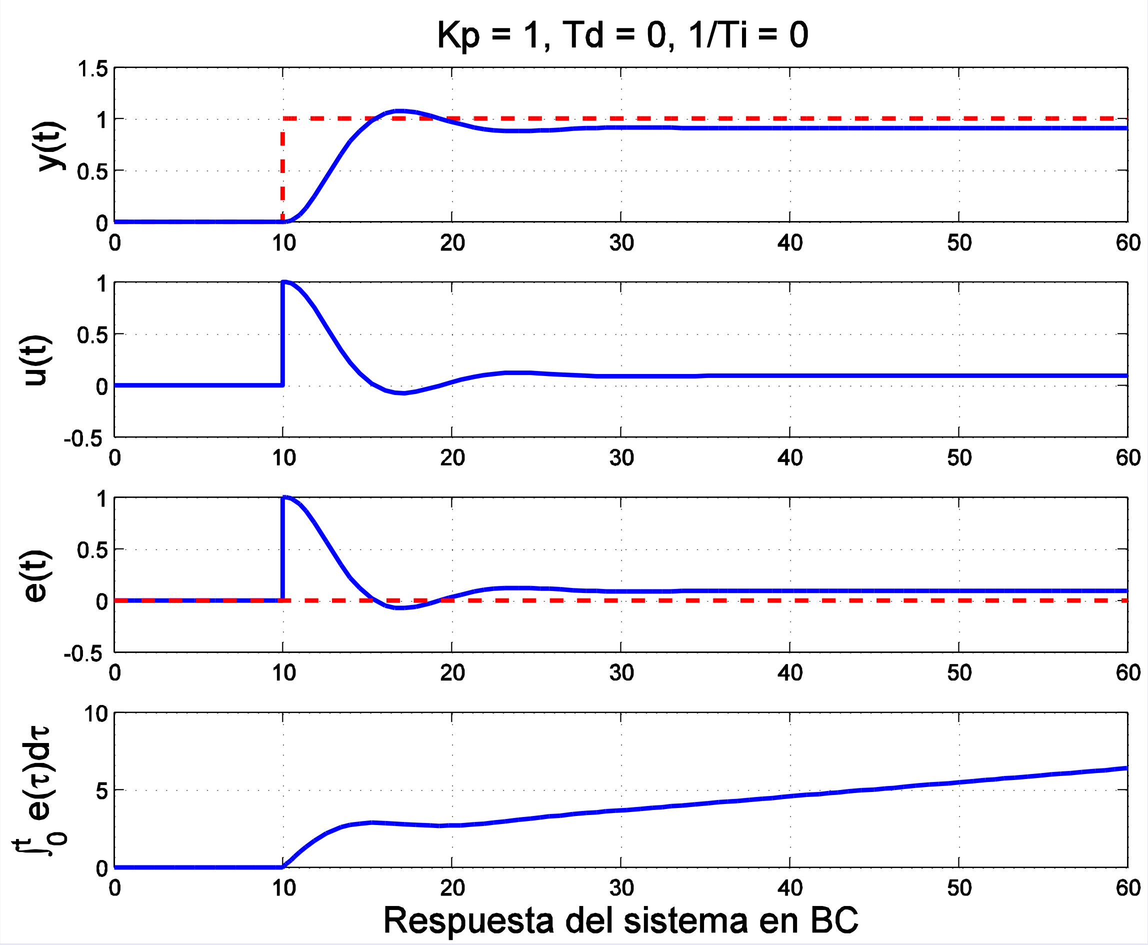
Mejora (cuantitativamente) el comportamiento en régimen permanente

Dependencia con K_c

Ejemplo

Error en posición. Referencia constante (escalón)

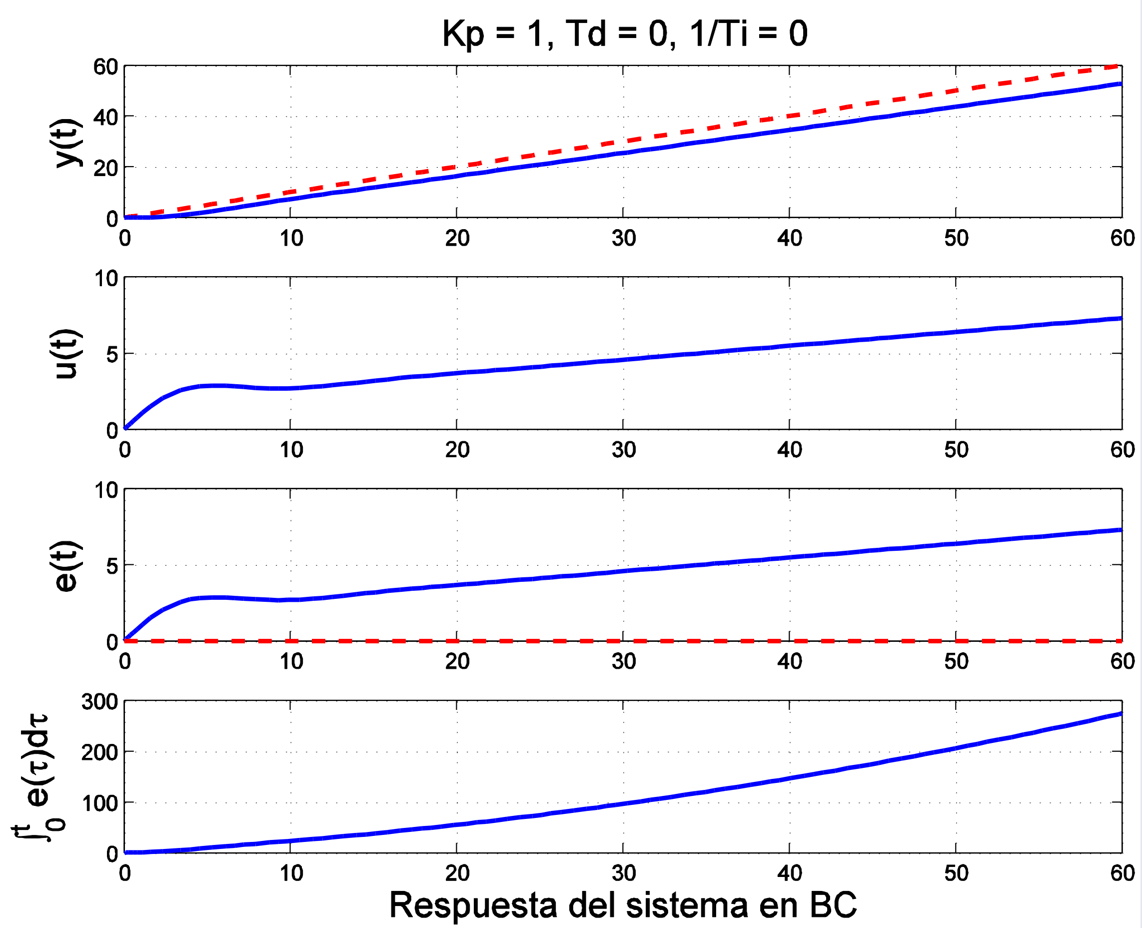
$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)G(s) = 10K_c$$



Ejemplo

Error en velocidad. Referencia creciente (rampa)

$$K_v = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s) = 0$$



Ejemplo

Controlador PI

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \frac{1+T_i s}{T_i s}$$

Sistema de tipo I

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s) = 10\frac{K_c}{T_i}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 C(s)G(s) = 0$$

El controlador PI afecta la ganancia de Bode del sistema y aumenta el tipo del mismo

Mejora (cualitativamente) el comportamiento en régimen permanente

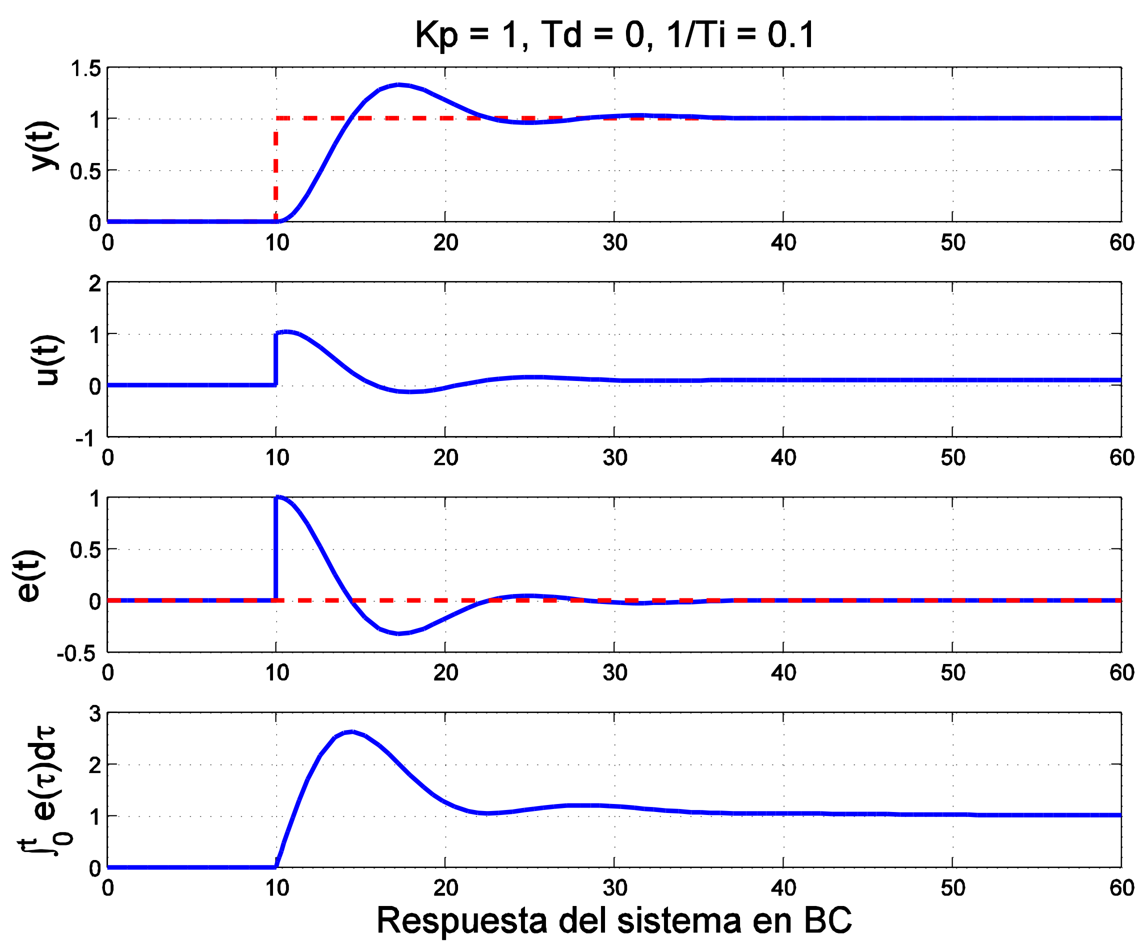
Dependencia con K_c y Ti

(La red de retraso permite aumentar la ganancia de Bode de forma arbitraria)

Ejemplo

Error en posición. Referencia constante (escalón)

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)G(s) = \infty$$



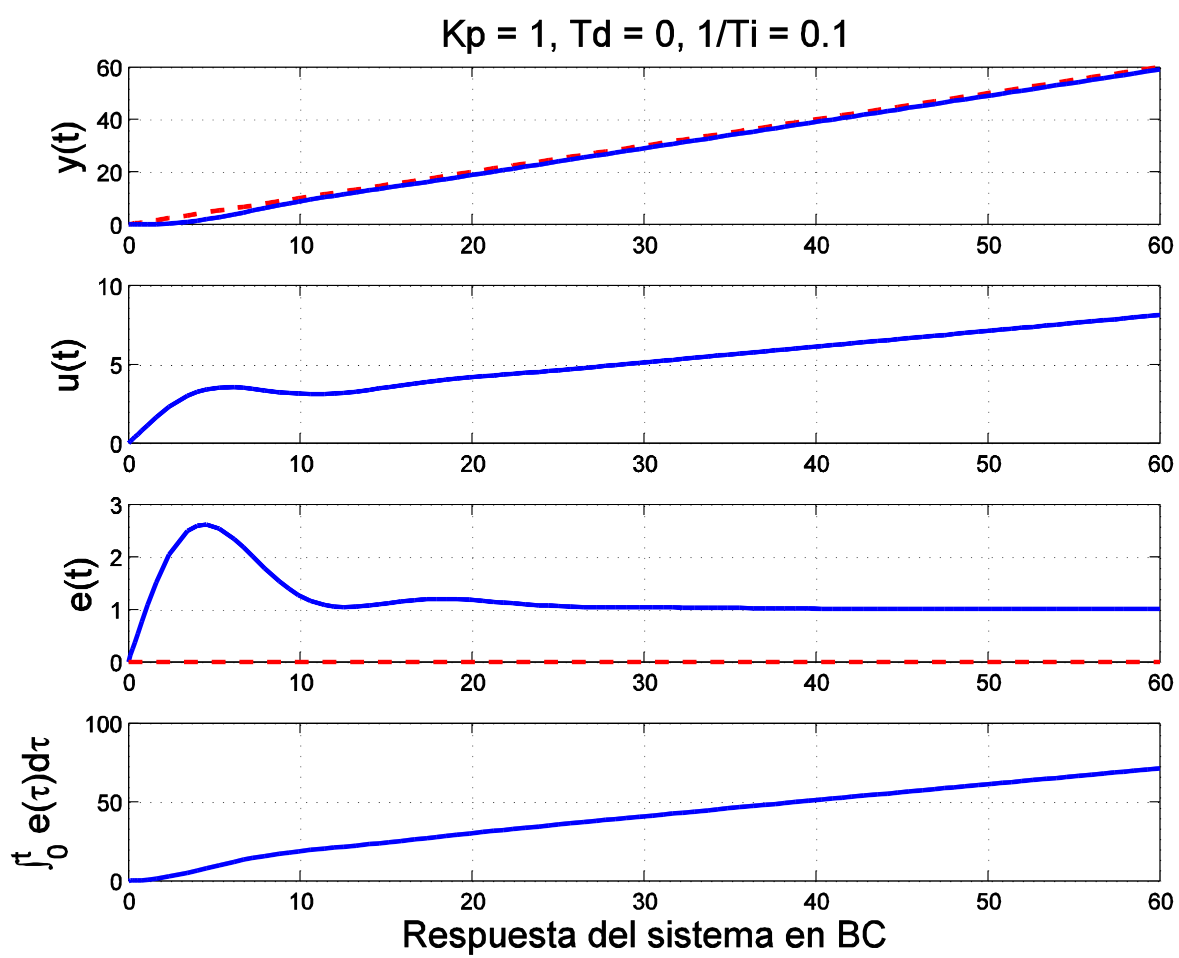
Ejemplo

Error en velocidad. Referencia creciente (rampa)

$$K_v = \lim_{s \to 0} sC(s)G(s) = 10\frac{K_c}{T_i}$$

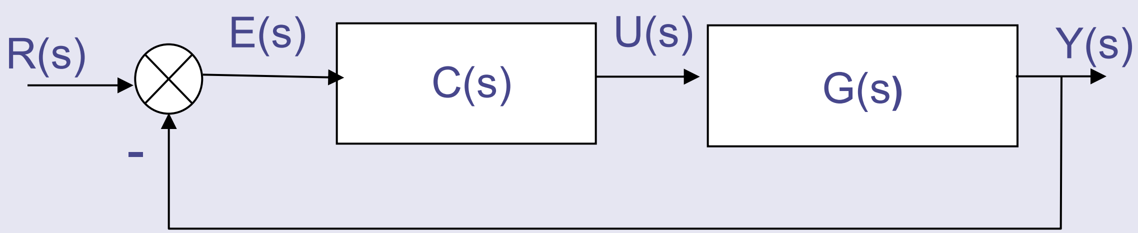
El término integral se introduce para mejorar la respuesta en régimen permanente

(Puede inestabilizar el sistema, probar simulación con K_c=1 Ti=1)



Respuesta en régimen transitorio

- Respuesta al escalón unitario
  - Clasificación de la señal de salida $\Delta y(t)$ frente a una determinada señal de entrada.
    - Escalón unitario (la más utilizada).
    - Rampa.
    - Senoide.
  - Da información sobre las propiedades dinámicas del sistema



Respuesta de y(t) al aplicar un cambio en la referencia r(t)

Señal de referencia: Señal escalón. Indica la velocidad de respuesta del sistema

(la señal de referencia real en general será diferente de un escalón)

Respuesta en régimen transitorio

TEMA 5. Respuesta temporal de sistemas lineales.
Sistemas dinámicos lineales de primer orden. Ejemplos. Sistemas dinámicos lineales de segundo orden. Respuesta ante escalón. Sistemas de orden n.

$$G_{bc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Nos interesa la respuesta de y(t) al cambiar r(t) (comportamiento en lazo cerrado)

La respuesta transitoria de un sistema LTI frente a un escalón depende de su función de transferencia (Gbc(s))

Opción ensayo y error
- Dado un sistema realizar una simulación o antitransformar
- Es difícil caracterizar el tiempo de subida o la sobreoscilación
- Identificar el efecto de los parámetros del controlador sobre esta respuesta

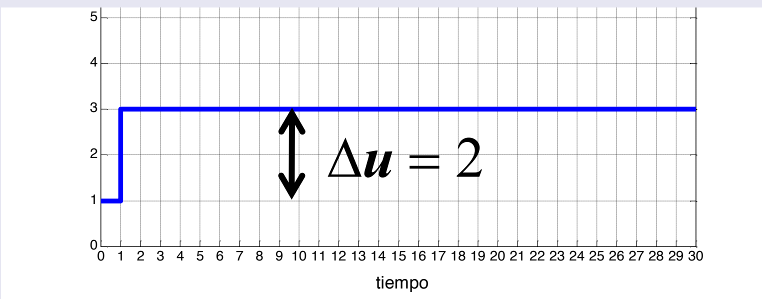
Sistemas de primer orden

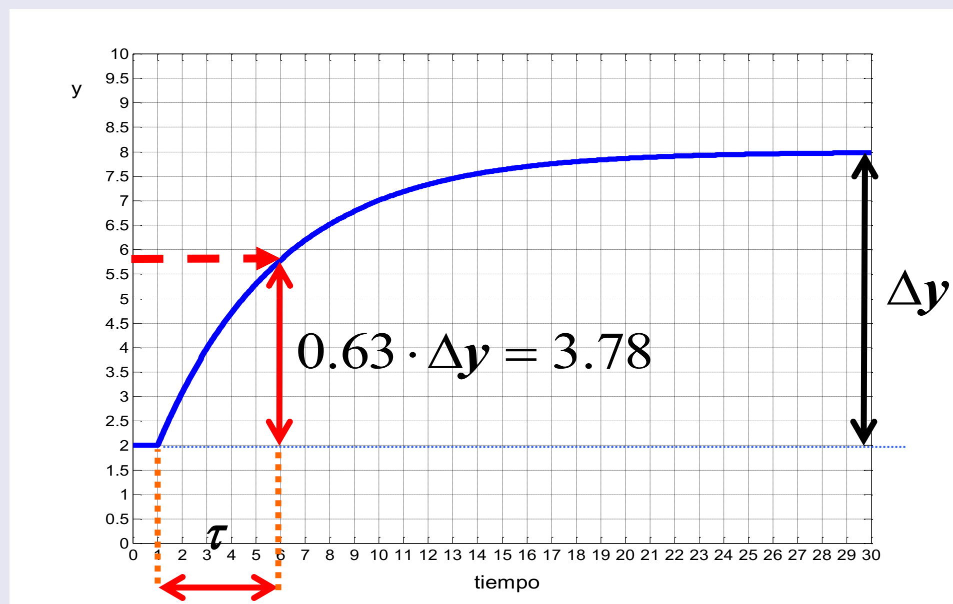
$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K\,u, \qquad y(0) = 0$$

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} = \frac{K}{1+\tau\,s}$$

$\mathrm{K}:$ Ganancia estática $\dfrac{\Delta y_\infty}{\Delta u_\infty}$ (unidades conformes a las de entrada y salida)

$\tau:$ Constante de Tiempo (medida en unidades de tiempo)





Sistemas de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_1 u$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\,\delta\,\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2\, y = K\,\omega_n^2\, u$$

K : ganancia estática (dim Y/dim U)

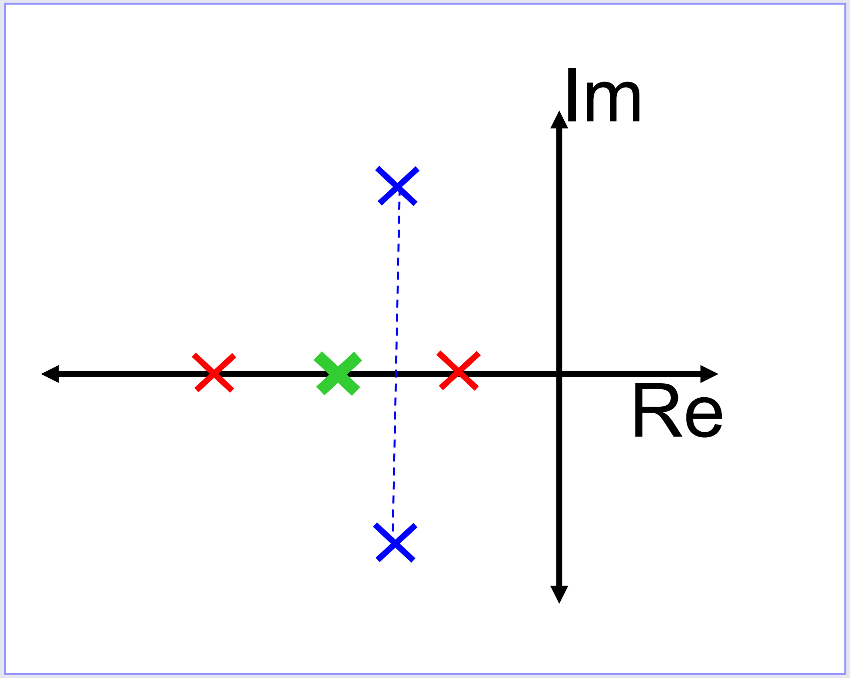
δ : Coeficiente de amortiguación (adimensional)

ω_n : frecuencia natural (rad/s)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistemas de segundo orden

$$\text{Polos}: -\delta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

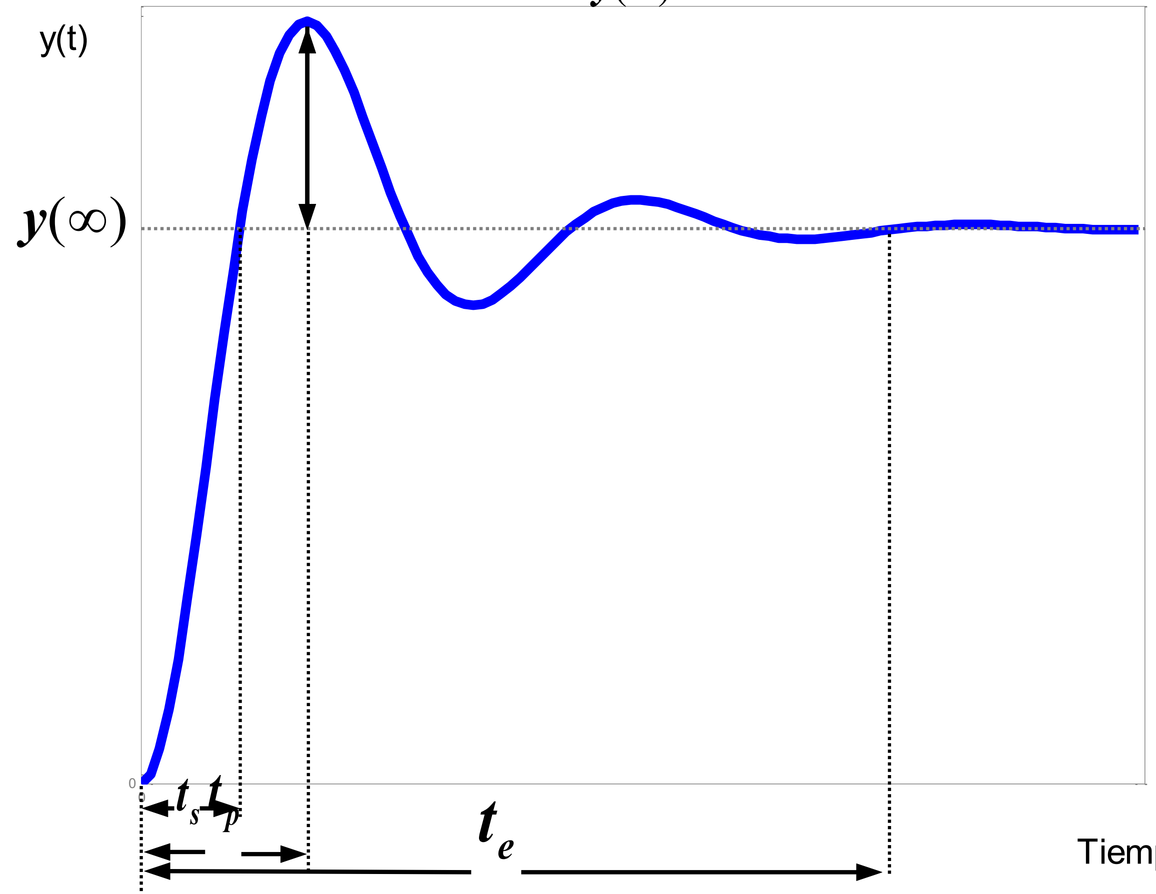


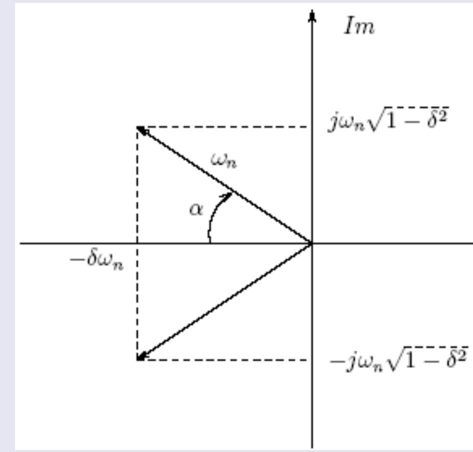
$$\begin{cases} \delta > 1: & \text{Sobreamortiguado} \\ \delta = 1: & \text{Críticamente amort.} \\ \delta < 1: & \text{Subamortiguado.} \end{cases}$$

Sistemas de segundo orden

Sistema subamortiguado

$$S.O. = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$





$$t_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$S.O.(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\delta\,\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

$$t_e = \frac{3}{\omega_n \delta}$$

Sistemas de orden superior

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k' \prod_{i=1} (s + c_i)}{\prod_{j=1}^{t} (s + p_j) \prod_{k=1}^{r} (s^2 + 2\delta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

$$y(t) = K + \sum_{j=1}^{t} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} e^{-\delta_k \omega_k t} [b_k \, sen(\omega_k \sqrt{1-\delta^2} \cdot t) + c_k \cos(\omega_k \sqrt{1-\delta^2} \cdot t)]$$

siendo K la ganancia estática $\quad K = \lim_{s \to 0} G(s)$

Polos dominantes

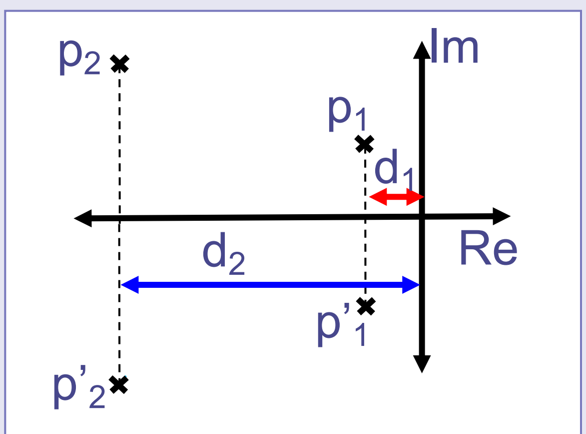
En la práctica, se dan situaciones en que algunos polos tienen una influencia en la respuesta del sistema es muy superior a la del resto de polos, a estos polos se les denomina polos dominantes.

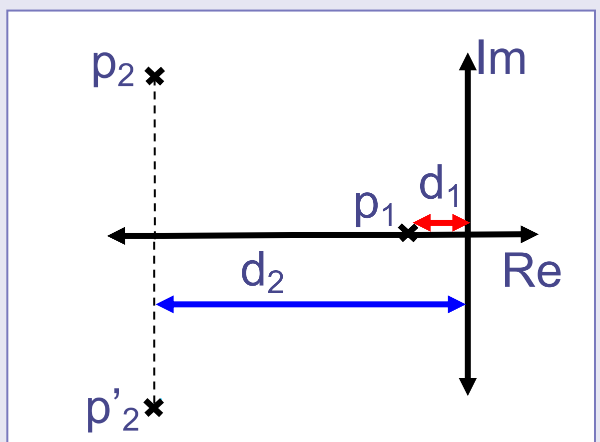
Los polos dominantes son los polos que dan la respuesta más lenta.

La rapidez de respuesta viene dada por el exponente de la exponencial (la parte real del polo), recuerde:

Dinámicas dominantes: polos cuya respuesta es más lenta

En la práctica, polos dominantes se determinan por la distancia relativa de los mismos al eje imaginario



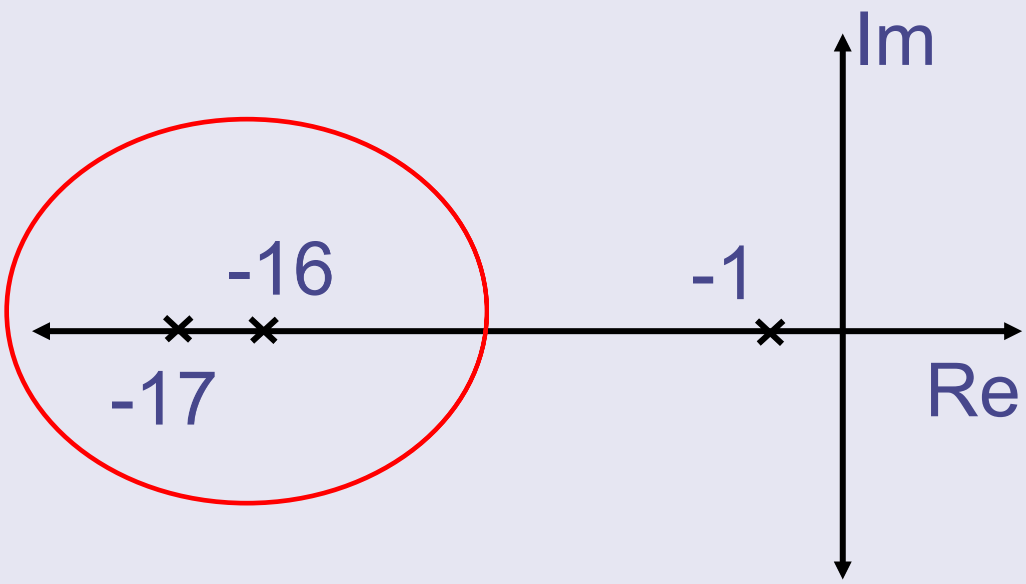


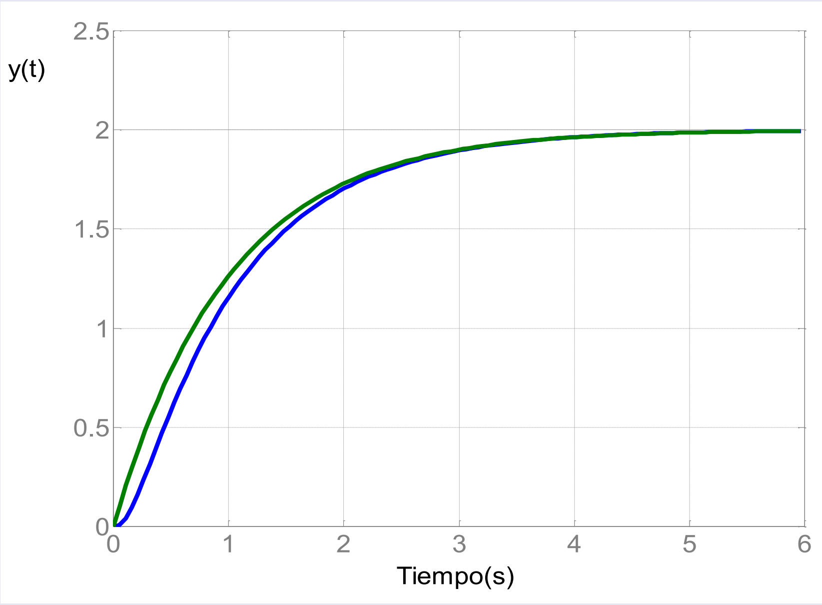
p_1 es dominante si $d_2/d_1>5$

La ganancia estática debe ser igual

Polos dominantes

$$G(s)=\frac{544}{(s+1)(s+16)(s+17)}\approx\frac{544}{(s+1)(16)(17)}=\frac{2}{s+1}$$



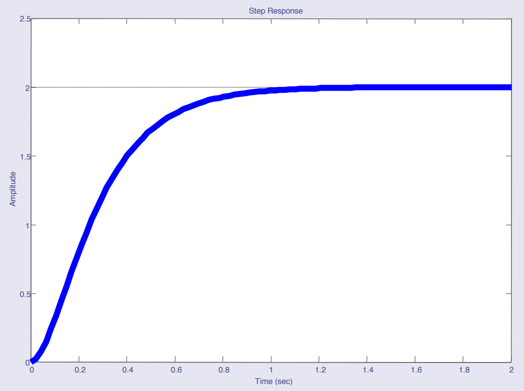


-1 es el dominante el resto se desprecian

Efecto de los ceros en la respuesta

Los ceros afectan a la respuesta

$$G(s) = \frac{100}{(s+5)(s+10)}$$



$$y(t) = 2 - 4e^{-5t} + 2e^{-10t}$$

$$G_c(s) = \frac{100(s+1)}{(s+5)(s+10)}$$

$$y_c(t) = 2 + 16e^{-5t} - 18e^{-10t}$$

Efecto de los ceros en la respuesta

Efecto de la adición de un cero

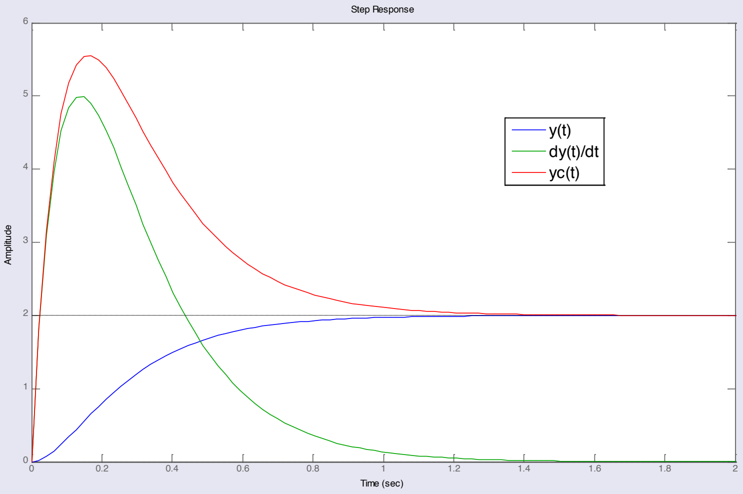
De forma cualitativa

Dada una $G(s)$, sea $G_c(s) = (\frac{1}{c}s + 1)G(s)$

Si $y(t)$ es la respuesta del sistema dado por $G(s)$

La respuesta de $G_c(s)$ será $y_c(t) = y(t) + \frac{1}{c}\frac{dy(t)}{dt}$

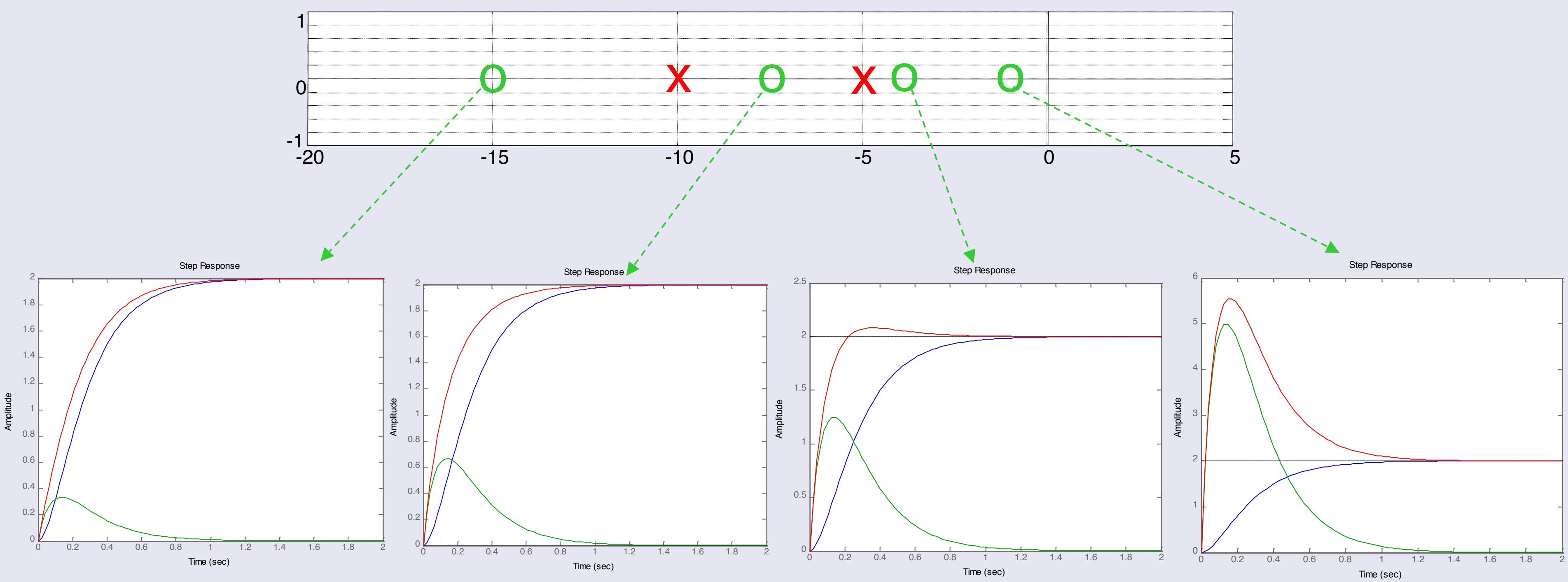
$$
\begin{aligned}
y_c(t) &= 2 - 4e^{-5t} + 2e^{-10t} \\
&\quad +20e^{-5t} - 20e^{-10t} \\
&= 2 + 16e^{-5t} - 18e^{-10t}
\end{aligned}
$$



Efecto de los ceros en la respuesta

Ceros de fase mínima

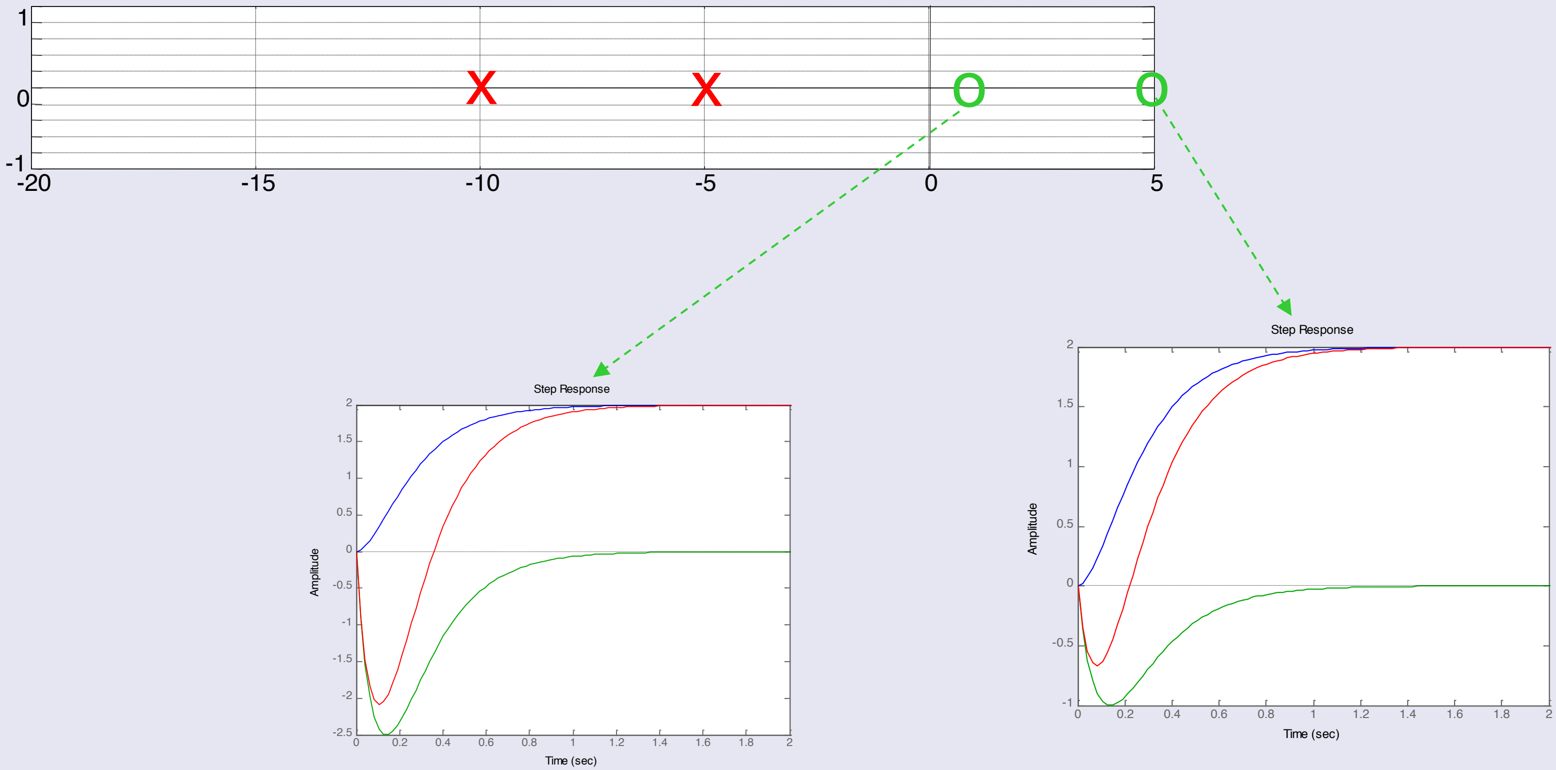
$$c > 0 \Rightarrow \text{la derivada } \textit{suma}$$



Efecto de los ceros en la respuesta

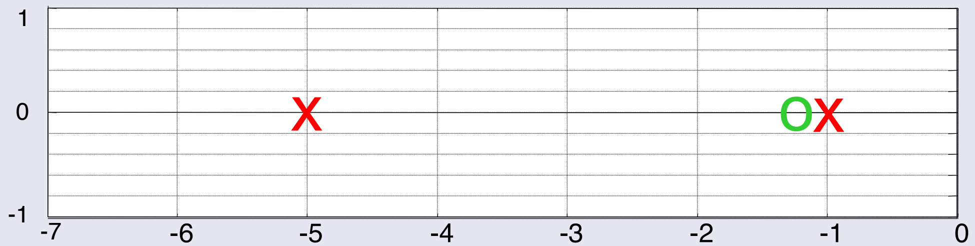
Ceros de fase no mínima

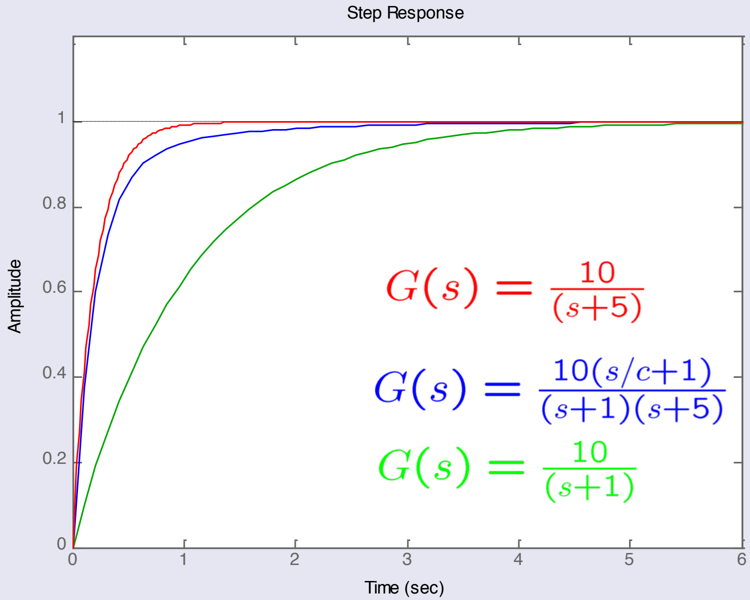
$c < 0 \Rightarrow$ la derivada *resta* $\Rightarrow$ <u>Respuesta inversa</u>



Efecto de los ceros en la respuesta

Cancelación de dinámicas





$$G(s) = \frac{10(s/c+1)}{(s+1)(s+5)}$$

$$y(t) = 1 + 1.25\left(1 - \frac{1}{c}\right)e^{-t} - 1.25\left(1 - \frac{5}{c}\right)e^{-5t}$$

Cuanto más se acerca el cero al polo, menor será su contribución a la respuesta del sistema

Afecta a la dinámica dominante (en el transitorio)

El tiempo de establecimiento varía poco

Hipótesis de diseño

Teoría estudiada

Respuesta de sistemas de primer orden

Respuesta de sistemas de segundo orden

Respuesta de sistemas de orden superior

Efecto de los ceros

En general es muy difícil obtener resultados explícitos

Hipótesis de diseño

En las técnicas de diseño de controladores estudiadas, se desea obtener una relación explícita de los parámetros de los controladores sobre la respuesta transitoria frente a una referencia escalón

La hipótesis más utilizada es que la dinámica del sistema en lazo cerrado se encuentra dominada por un par de polos complejos conjugados

Los ceros en general son difíciles de tener en cuenta

Esta hipótesis se hace

Diseño de controladores utilizando el lugar de las raíces

Diseño de controladores en frecuencia

Polos y ceros de Gbc(s)

Sistema en lazo cerrado

$$G_{bc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Ceros del sistema en lazo cerrado

$$C(s)G(s) = 0$$

Mismos ceros que el sistema en lazo abierto más los ceros añadidos por el controlador

Polos del sistema en lazo cerrado

$$1 + C(s)G(s) = 0$$

Dependen de los parámetros de diseño

En algunos casos es posible obtener los polos de forma explícita

Control de sistemas de segundo orden con P y PD

En general no es posible

Técnicas aproximadas

Ejemplo

Controlador P

$$G(s) = \frac{1.25}{(s+0.05)(s+0.5)(s+5)}$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$$s^3 + 5.55s^2 + 2.775s + 0.1250 + 1.25K_p = 0$$

K_p	Polos		
0.1	-5.0050	-0.4362	-0.1088
1	-5.0495	-0.2503 + 0.4300i	-0.2503 - 0.4300i
10	-5.4250	-0.0625 + 1.4467i	-0.0625 - 1.4467i
15	-5.5969	0.0234 + 1.7427i	0.0234 - 1.7427i

Los polos dependen de Kp

Representación en el plano complejo

Lugar de las raíces