UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

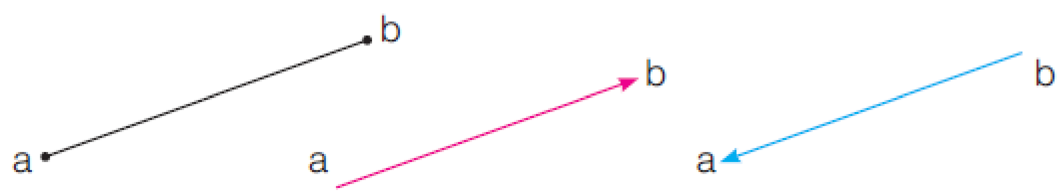
VECTORES

Vectores en R^2

Los desplazamientos entre dos puntos del plano determinan los objetos geométricos llamados vectores.

Características de los vectores en R^2

Dos puntos a y b del plano geométrico definen un segmento. Este segmento puede ser "dirigido" en dos sentidos, de a hacia b o de b hacia a, y se indica con una sagita o flecha en el correspondiente sentido. (figura 1)



(figura 1)

Definición: Se llama VECTOR EN EL PLANO a un segmento de recta dirigido.
El punto inicial de la flecha (a) se llama "cola" del vector, y el punto terminal (b) se llama "cabeza" del vector.

Notación: Se escriben los dos puntos extremos (cola y cabeza) con una flecha en la parte superior $\overrightarrow{ab}$ o $\overrightarrow{ba}$.
También se utiliza una sola letra minúscula con una flecha en la parte superior o la letra en negrita, así: $\overrightarrow{ab} = \vec{v}$ = **v**.

IMPORTANTE: ¿Cómo definimos un vector?

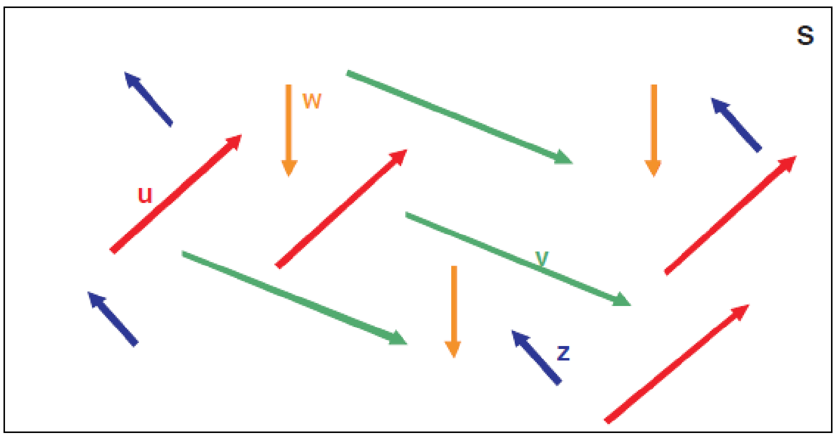
*Un vector **v** queda bien definido por:*
(1) La DIRECCIÓN, determinada por la pendiente de la recta que contiene al segmento.
(2) La MAGNITUD, determinada por la distancia entre los dos puntos que definen el segmento (es siempre positiva).
(3) El SENTIDO, depende de la orientación que se le da al segmento.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

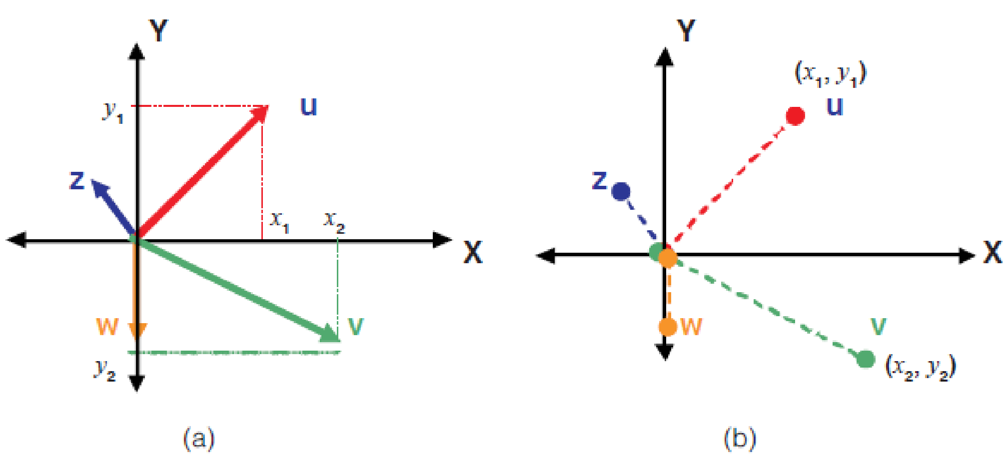
¿Cuándo consideramos que dos vectores son iguales?

Definición: Dos vectores **u** y **v** son IGUALES si y sólo si, tienen la misma dirección, magnitud y sentido.

En el plano geométrico (lo llamaremos S), un vector puede tener infinitas representaciones, se llama VECTOR LIBRE y se puede graficar donde convenga.
Todas las flechas del mismo color representan el mismo vector, dado que tienen la misma dirección, magnitud y sentido (figura 4.2).



En el plano cartesiano ($\Re2$), todos los vectores se representan tomando como punto inicial (cola) de la flecha el origen del sistema de coordenadas (figura 2 a). Por tanto, la representación geométrica de cada vector es única. Se llama VECTOR LIGADO y queda definido por un punto cualquiera del plano, que es el punto terminal (cabeza) de la flecha (figura 2 b).



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

Como cada punto del plano representa un par ordenado (x, y) de números reales, todo vector del plano cartesiano $\Re 2$, queda definido por un par ordenado. Sus componentes x e y se llaman COORDENADAS DEL VECTOR.

Notacion: **u** = (x1 , y1) **v** = (x2 , y2)
x1 y y1 son las coordenadas del vector **u**.
x2 y y2 son las coordenadas del vector **v**.

u = **v** si solo si x1 = x2 y y1 = y2

Norma o módulo de un vector:

Definición: Se llama NORMA de un vector **v** a la longitud del segmento que lo define. Se denota $\|V\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

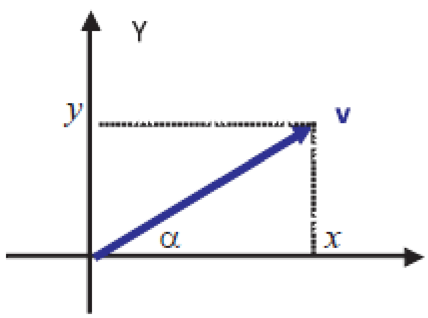


Figura 3

Si **v** = (*x*, *y*) entonces

$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$v^2 = x^2 + y^2$

Al marcar las componentes del vector **v**, se forma un triángulo rectángulo en el cual, la longitud del vector es la hipotenusa, y las componentes *x* e *y* son los catetos. De igual manera que vimos en la unidad nº 1, los vectores pueden analizarlos como un triángulo para definir su posición, dirección y sentido. Donde la hipotenusa representa el módulo del vector, el cateto adyacente de la figura de arriba es la coordenada en x del vector y el cateto opuesto es la coordenada en y. El ángulo α o ángulo direccional indica la dirección del mismo y el sentido está dado por el punto inicial y la flecha.

Definición: Se llama ANGULO DIRECCIONAL al ángulo α que forma el vector con la parte positiva del eje X. Queda definido por cualquiera de las funciones trigonométricas, así:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha \quad , \text{o} ,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y}{\|v\|} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\|v\|}\right) = \alpha \quad , \text{o} ,$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\|v\|} \quad \Rightarrow \quad \arccos\left(\frac{x}{\|v\|}\right) = \alpha \quad \text{(figura 4.4)}$$

¿Cuándo consideramos que un vector es nulo?

Definición: Se llama VECTOR NULO al vector cuya norma es cero.

$$\text{Se denota} \quad \text{o} = (0\,,\,0) \;\Rightarrow\; \|\,\text{o}\,\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Su representación geométrica es un punto y en el plano cartesiano este punto es el origen (figura 4). Como este punto está en cualquier recta que pase por el origen, su dirección y sentido puede ser cualquiera.

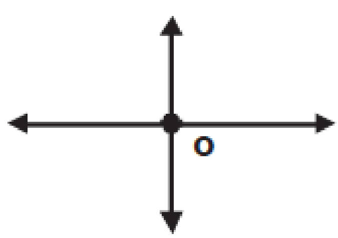


figura 4

<u>Vector opuesto:</u> Se llama VECTOR OPUESTO de **v** al vector que tiene la misma magnitud y dirección de **v** pero diferente sentido. Se denota **-v** (figura 5) Si **v** = (x, y) entonces **-v** = ($-x$, $-y$).

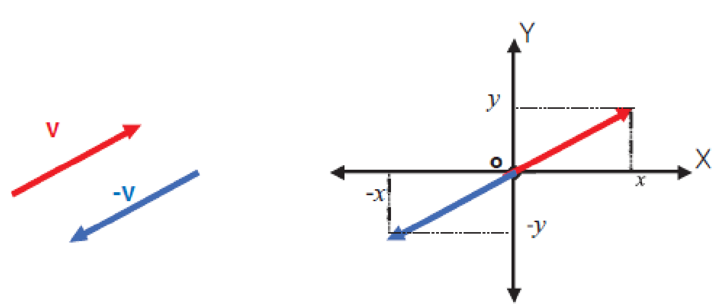


figura 5

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

<u>Vector normado:</u> Se llama VECTOR NORMADO o UNITARIO de **v** al vector de longitud uno que está sobre la misma recta que contiene a **v**. (NO CONFUNDA ESTE CONCEPTO CON LA "NORMA" DE UN VECTOR)

$$\frac{\vec{v}}{\|v\|} = \left(\frac{x}{\|v\|}, \frac{y}{\|v\|}\right) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \sqrt{\left(\frac{x}{\|\vec{v}\|}\right)^2 + \left(\frac{y}{\|\vec{v}\|}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = 1$$

Un vector normado, *<u>siempre</u>* tiene longitud 1. (Figura 6)

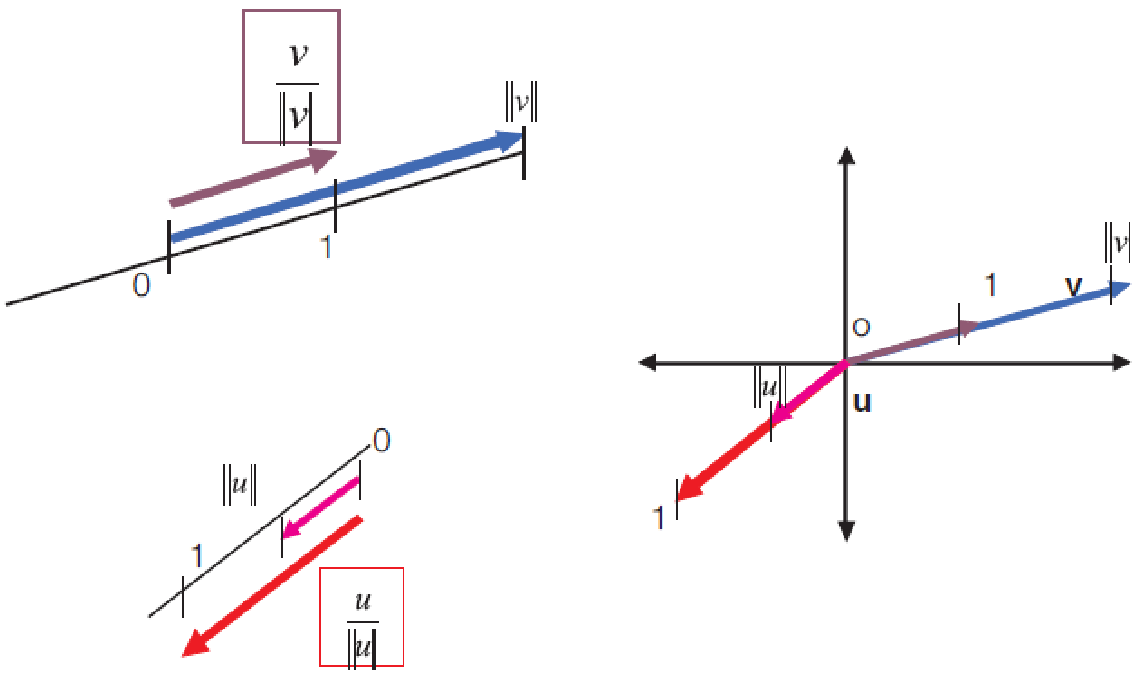


figura 6

El vector normado puede tener igual o diferente sentido al del vector dado, y su norma puede ser mayor o menor que la del vector.

Ejemplos:

Para cada uno de los vectores dados, hacer la representación geométrica en el plano cartesiano y hallar: la norma, el ángulo direccional, el vector opuesto y el correspondiente vector normado. Hacer 3 representaciones diferentes de cada vector en el plano geométrico. Graficos resueltos en figura 7.

1. **a** = (3, 2)

Norma de **a**: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}7^0$.

Vector opuesto de **a**: **-a** = (-3, -2).

Vector normado de **a**: $\frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

---

2. **b** = (-2, 1).

Norma de **b**: $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 153{,}4^0$

Con la calculadora, el resultado es $-26{,}6^0$ que corresponde a un ángulo del cuarto cuadrante, pero el vector **b** está en el segundo cuadrante. Por tanto el ángulo que corresponde es $180^0 - 26{,}6^0 = 153{,}4^0$

Vector opuesto de **b**: **-b** = (2, -1).

4. **d** = (2, -2).

Norma de **d**: $\|\mathbf{d}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

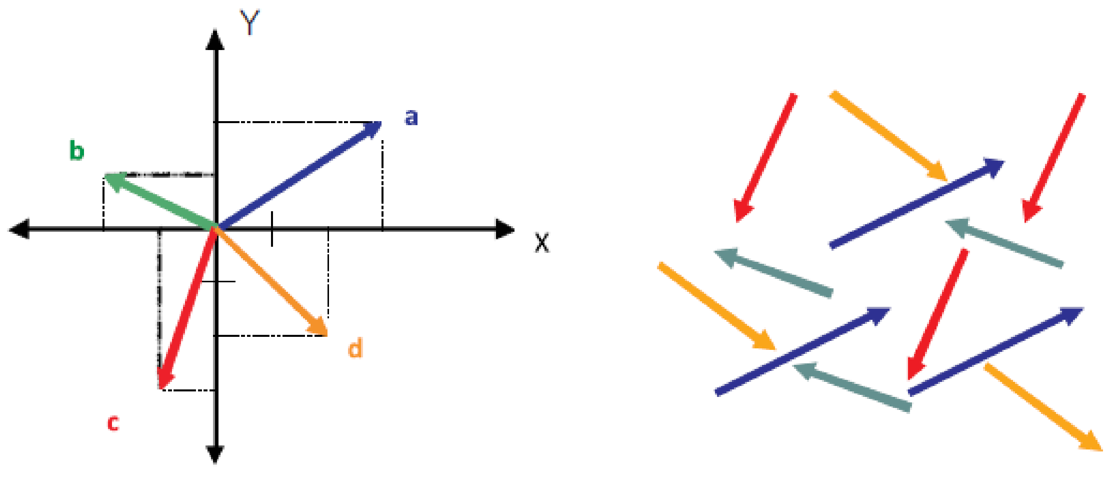
Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = \arctan(-1) = -45^0$.

Por ser ángulo del cuarto cuadrante se toma $360^0 - 45^0 = 315^0$.

Vector opuesto de **d**: **-d** = (-2, 2).

Vector normado de **d**: $\frac{d}{\|d\|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020



(a) (b)

figura 7

Ejercicio propuesto:

Para cada uno de los vectores **u** = (3, 1) y **v** = (2, -1) halle : norma, ángulo direccional, el vector opuesto y el vector normado con sentido opuesto. Haga la representación gráfica de los vectores en el plano cartesiano, y 3 representaciones diferentes de cada uno en el plano geométrico.

Operaciones con vectores en R^2

Se definen tres operaciones con vectores en el plano: suma, multiplicación escalar y producto escalar.
SUMA: Se suman 2 vectores en el plano y el resultado es un vector en el plano.

En el plano geométrico, los vectores se grafican uno seguido del otro, y el “vector suma” o VECTOR RESULTANTE, se forma uniendo la cola del primer vector con la cabeza del segundo. Fíjese que lo que termina armando al sumar dos vectores, es un triángulo, donde el vector resultante de la suma de ambos, es la hipotenusa de dicho triángulo. (fig. 8)

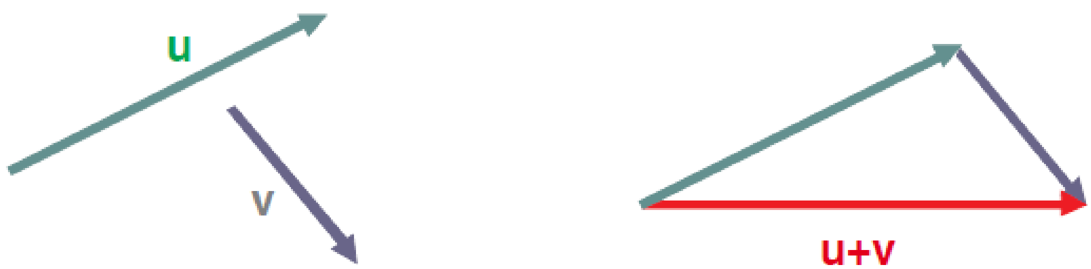


fig. 8

Esta suma es geométrica.
Ahora veámoslo en el plano cartesiano, con coordenadas.

Definición: Si **u** = (*x*1, *y*1) y **v** = (*x*2, *y*2) se define la SUMA de **u** y **v**.
Como **u** + **v** = (*x*1 + *x*2 , *y*1 + *y*2) = (*w*1, *w*2) = **w** .

el vector suma se obtiene sumando las correspondientes coordenadas tanto en “x” como en “y”.
fig. 9

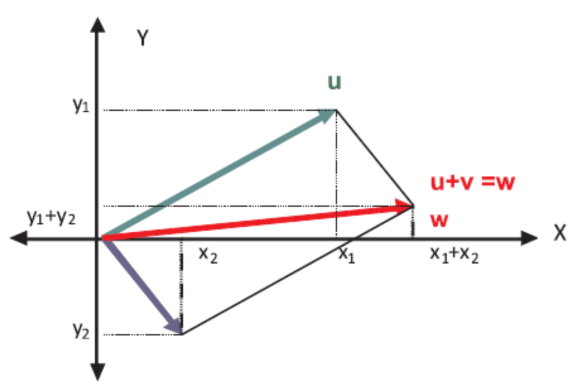


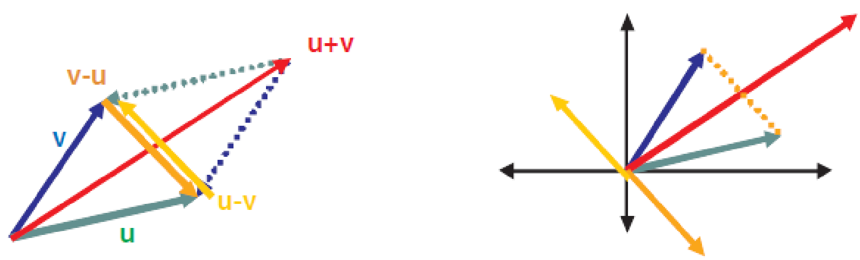
fig. 9

Fíjese que llegamos al mismo resultado de dos maneras distintas. En la primera colocamos un vector al final del otro, con las direcciones y sentidos originales y la unión entre la cola del primero y la punta del segundo, nos dio el vector resultante. En el segundo caso, en el plano cartesiano, directamente sumamos las coordenadas y graficamos el vector resultante. Preste atención, que aquí gráficamente se está formando un paralelogramo: si en la punta de cada vector original, usted coloca el inicio de otro vector con su longitud, dirección y sentido original, automáticamente forma el paralelogramo y no le queda más que graficar la diagonal del mismo para obtener el vector resultante.
Es decir que: podemos resolver la suma de vectores de manera gráfica y analítica.

Interpretación geométrica: A partir de 2 vectores con diferente dirección se puede completar un paralelogramo. El vector suma, queda representado por la diagonal del paralelogramo que tiene su inicio en el origen de los 2 vectores, y su norma es la longitud de la diagonal. (fig. 10. C)

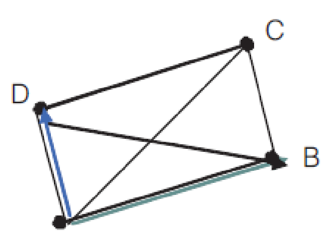
La otra diagonal del paralelogramo, representa la diferencia de los 2 vectores. Es decir, la suma de uno de ellos con el opuesto del otro (fig. 10. a).

u + (-**v**) = **u** – **v** , o , **v** + (-**u**) = **v** – **u** según sea el sentido de la flecha.



(a) (b)

Fig. 10.



(c)

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|$$

$$\|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|$$

La primera parte es clara, es decir, usted suma dos vectores (como en la figura a, los vectores u y v) y obtiene el vector resultante **u+v**. En el caso de sumar al vector u, el opuesto de v, en realidad lo que usted está haciendo, es restarle al vector u, el vector v. Lo que sucede es que matemática y analíticamente en el álgebra vectorial, como usted está representando vectores en el plano, usted

siempre suma coordenadas, independientemente de la dirección y sentido. Por lo que si usted quisiera obtener la resta entre el vector u y el vector v, lo que tiene que hacer es:
Al vector “u” debe sumarle el ***opuesto*** al vector “v”, lo que en fin es analíticamente lo mismo que hacer **u-v**.

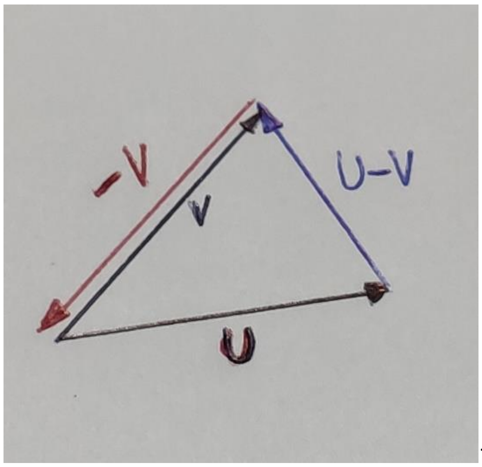


fig. 11.

Fíjese que, si usted suma u y v, gráficamente va a obtener un paralelogramo, ya que en el final de cada vector, debe colocar el inicio de otro (línea punteada en la figura 12). La unión de ambas proyecciones nos conforma el paralelogramo.

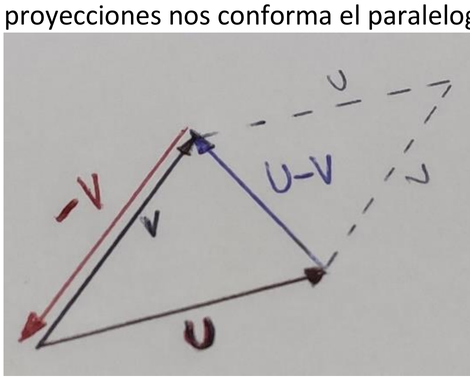


fig. 12.

Ahora si usted quiere obtener la resta de u y v, diríjase a la figura 11. Allí, gráficamente lo que hacemos es graficar el opuesto de v. Luego, debe unir el principio del vector -v y el final del vector u, logrando así el triángulo, donde la resultante u-v, será el vector buscado.

Propiedades de la suma:

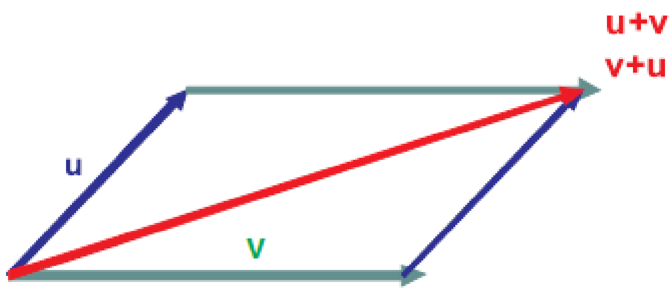
1. Clausurativa: ∀ **u** , **v** ∈ℜ2, **u** + **v** = **w** ∈ℜ2 . (coloquialmente quiere decir: para todo u y v perteneciente a ℜ2, la suma de u+v es igual a w también perteneciente a ℜ2)

∀: para todo

∈: perteneciente

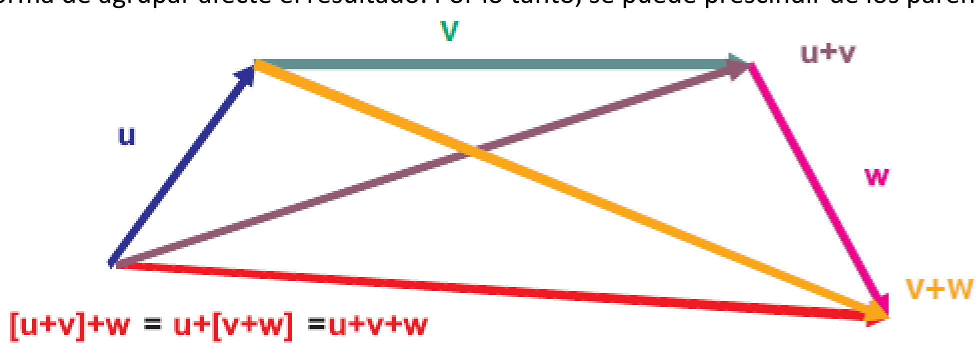
2. Conmutativa: u + **v** = **v** + **u**

Significa que el orden en que se suman los vectores, no cambia el resultado.



3. Asociativa: [**u** + **v**] + **w** = **u** + [**v** + **w**] = **u** + **v** + **w**.

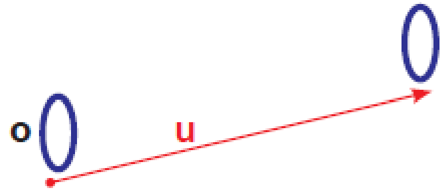
Quiere decir que se pueden sumar más de 2 vectores, pero siempre en forma binaria sin que la forma de agrupar afecte el resultado. Por lo tanto, se puede prescindir de los paréntesis.



Fíjese que el resultado siempre es el vector u+v+w (el vector rojo en la gráfica) y sume como lo sume, siempre tiene el mismo resultado.

4. Modulativa: ∀u ∈ℜ2, **u** + **o** = **o** + **u** = **u**.

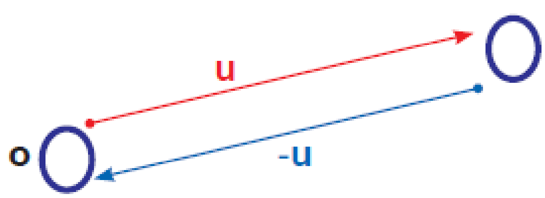
Esto significa que el vector nulo **o**, es el MÓDULO o ELEMENTO NEUTRO para la suma, porque cualquier vector sumado con el vector nulo no cambia.



Demostración: **u** + **o** = (*u*1, *u*2) + (0, 0)
= (*u*1+0 , *u*2+0)
= (*u*1, u2)
= **u**

5. **Invertiva:** ∀ u ∈ℜ2, ∃(-**u**) ∈ℜ2 tal que: **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = **o** (coloquialmente: para todo u perteneciente a R cuadrado, existe el opuesto a "u" perteneciente a R cuadrado tal que: la suma entre "u" y el opuesto de "u" es igual a la suma del opuesto de "u" y "u", igual a cero).

Significa que para cada vector **u** existe un único vector -**u** llamado VECTOR OPUESTO de **u** , porque la suma de estos 2 vectores es el vector nulo, el cual es módulo de la suma.



u + (-u) = u - u = o
(-u) + u = -u + u = o

Ejemplos:

1. Si **u** = (3, -2) , **v** = (-1, 5) y **w** = (2, -3) verificar las propiedades enunciadas de la suma de vectores.
Solución:

Clausurativa:
u + **v** = (3, -2) + (-1, 5) = (3-1, -2+5) = (2, 3)

Conmutativa:
u + **v** = (3-1, -2+5) = (2, 3) = (-1+3, 5-2) = **v** + **u** ⇒ **u** + **v** = **v** + **u**

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

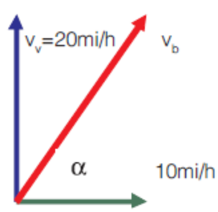
Asociativa:
[**u** + **v**] + **w** = (3-1, -2+5) + (2, -3) = (2, 3) + (2, -3) = (4, 0)
u + [**v** + **w**] = (3, -2) + (-1+2, 5-3) = (3, -2) + (1, 2) = (4, 0)
⇒ [**u** + **v**] + **w** = **u** + [**v** + **w**] = **u** + **v** + **w**

Modulativa:
u + **o** = (3, -2) + (0, 0) = (3, -2) = **u**
v + **o** = (-1, 5) + (0, 0) = (-1, 5) = **v**
w + **o** = (2, -3) + (0, 0) = (2, -3) = **w**

Invertiva:
u + (-**u**) = (3, -2) + (-3, 2) = (0, 0) = **o**
v + (-**v**) = (-1, 5) + (1, -5) = (0, 0) = **o**
w + (-**w**) = (2, -3) + (-2, 3) = (0, 0) = **o**

Ejercicios propuestos:

1) Un bote viaja con una rapidez de 10 millas por hora hacia el este y sopla un viento cruzado de sur a norte de 20 millas por hora. ¿Cuál es el vector velocidad del bote? Indique su rapidez y dirección.



Tenga en cuenta que la rapidez en física, es considerada como la magnitud del vector velocidad, por lo que al hablar de rapidez únicamente estamos dando el módulo del vector velocidad.

2) Encuentre la magnitud y dirección de cada uno de los vectores dados:
a) **u** = (-5, 8) .
b) **v** = $(1, -\sqrt{3})$.
c) **w** = $(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2})$.

3) Si **u** = (2, 3) y **v** = (-3, 4) calcule :

a) $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$
b) $\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$
c) $\|\boldsymbol{v}\| - \|\boldsymbol{u}\|$
d) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$
(en algunas bibliografías va a encontrar que a la norma del vector la representa con una sola barra en cada lado, pero para no confundir con el módulo de un número, la expresamos con doble barra asi se entiende que estamos hablando de la norma del vector).
e) Haga la representación gráfica de todos los vectores calculados.

MULTIPLICACION ESCALAR: Es una operación definida entre un real y un vector cuyo resultado es un vector.

En el plano geométrico a partir de un vector **v**, podemos construir otros vectores, por ejemplo: el doble del vector 2**v**; la mitad del vector (½)**v**; el opuesto del triple del vector, (-3)**v**; el opuesto del vector (-1)**v**; el vector nulo 0**v**; el mismo vector 1**v**. Todos ellos tienen la misma dirección y por tanto, están sobre la misma recta (Figura 13).

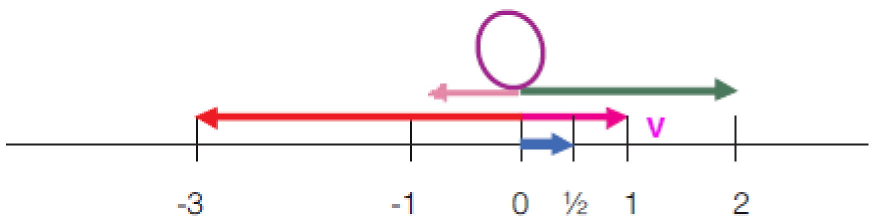


fig. 13

Para cualquiera de los anteriores vectores respeto al vector **v**, se dice que es un “múltiplo escalar de **v**”, es decir, se obtiene multiplicando al vector **v** por un real (escalar). De todos ellos se dice que son **“vectores linealmente dependientes”.**

<u>Definición:</u> *Dado un vector v = (x, y) y r* $\in \Re$ *se define la MULTIPLICACIÓN ESCALAR de v por r como:*
r v = (rx , ry) = (w1, w2) = w

Se dice que **w** es un MULTIPLO ESCALAR de **v**.
Recíprocamente se puede asumir que **v** es múltiplo escalar de **w** puesto que **v** = **w** si r $\neq$ 0 .

De los dos vectores **v** y **w** se dice que son LINEALMENTE DEPENDIENTES , porque están sobre la misma recta, es decir, uno de ellos depende del otro.

<u>Concepto importante:</u>
Interpretación geométrica: Si se efectuaran los productos escalares de un vector cualquiera v con cada uno de los números reales, el resultado sería una recta en la que cada punto representa un vector, al cual le corresponde un real llamado ABSCISA DEL VECTOR. A la recta se le llama D0 para indicar que cada punto define un vector con su origen en o.

Como la recta D0 se forma a partir del vector **u** (Figura 14), se dice que “**u** es un vector GENERADOR de la recta D0.

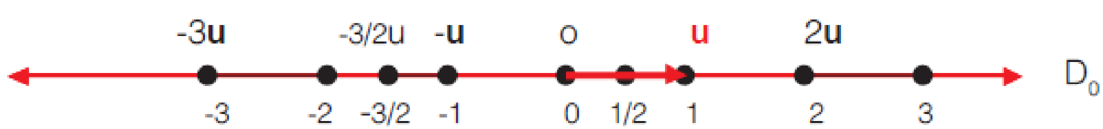


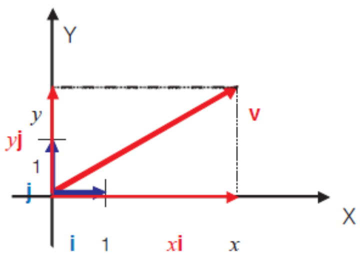
Fig 14.

<u>Versor i y versor j:</u>

En el plano cartesiano, el vector unitario sobre el eje X se llama **i** y sus coordenadas son (1, 0); el vector unitario sobre el eje Y se llama **j** y sus coordenadas son (0, 1). (fig. 15)

El vector i es un generador del eje X, por tanto, cualquier vector sobre el eje X es un múltiplo escalar de i. Así mismo, el vector j es un generador del eje Y y cualquier vector del sobre el eje Y es un múltiplo escalar de j.

Como todo vector v $\in\Re2$ queda definido por un par ordenado (*x*, *y*), v se puede expresar como la suma de un múltiplo escalar de i con un múltiplo escalar de j.



Si $\mathbf{v} = (x, y)$,entonces:

$\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, porque:

$\mathbf{v} = x\,(1, 0) + y\,(0, 1) = (x, y)$

Fig 15.

Se dice que **v** es una COMBINACION LINEAL de los vectores **i** y **j** , es decir, una suma de múltiplos escalares de **i** y **j**.

<u>Ahora, cualquier vector del plano queda definido de dos formas:</u>

Por sus coordenadas: $\mathbf{v} = (x, y)$
como combinación lineal de **i** y **j**: $\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$

<u>Existe otra forma de representar los vectores y lo llamamos: coordenadas polares, donde utilizamos el módulo del vector y el ángulo α, es decir, vea el siguiente ejemplo:</u>

Sea **v** = (1 ; 2) → Coordenadas cartesianas. Si queremos representarlo en coordenadas polares, debemos hallar el módulo del vector:

$\| \boldsymbol{v} \| = \sqrt{\mathbf{1^2 + 2^2}} = \sqrt{\mathbf{5}}$

Y para determinar el ángulo, debemos aplicar relaciones trigonométricas:

tg α = $\frac{2}{1}$ → α = $tg^{-1}(2) = 63{,}43°$

Por lo que el vector en coordenadas polares queda de la forma: $\sqrt{\mathbf{5}}_{63,43°}$

Les sugiero para complementar esta explicación, vean el siguiente video:
https://www.youtube.com/watch?v=dsu_XNm8xWM

Observamos en la figura 15, los vectores **i** y **j** no están sobre la misma recta, es decir, no son linealmente dependientes. Se dice que son **<u>LINEALMENTE INDEPENDIENTES</u>**, lo cual significa que ninguno de ellos es múltiplo escalar del otro.

Como todo vector del plano puede ser expresado en términos de **i** y **j**, se dice que el conjunto { **i, j** }, GENERA al plano $\Re2$ y se llama BASE CANÓNICA o NATURAL del plano cartesiano.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

Propiedades de la multiplicación escalar:

1. Para todo vector **v** $\in \Re 2$, 1**v** = **v** y 0**v** = **o**.v *(si un vector cualquiera es multiplicado por el escalar 1, el resultado es el mismo vector y si un vector es multiplicado por el escalar cero, el resultado da cero).*

2. Si *r , s* $\in \Re$ y **v** $\in \Re 2$: [*r* · *s*] **v** = *r*[*s* **v**] . *(Propiedad asociativa de un producto de un vector por el producto de dos escalares, es decir, puedo multiplicar primero los dos escalares y luego por el vector o puedo multiplicar primero un escalar por el vector y al resultado lo multiplico finalmente por el otro escalar.*

3. Si *r , s* $\in \Re$ y **v** $\in \Re 2$: [*r + s*] **v** = *r* **v** + *s* **v**. (*Propiedad distributiva con respecto a la suma de escalares, es decir, si multiplico el vector por la suma de dos escalares es igual a sumar el producto del vector por cada escalar).*

4. Si *r* $\in \Re$ y **u** , **v** $\in \Re 2$: *r*[**u** + **v**] = *r* **u** + *r* **v**. *(Propiedad distributiva con respecto a la suma de vectores, es decir, si multiplico un escalar por la suma de dos vectores es igual a sumar el producto del escapar por cada vector).*

Ejercicios resueltos:

1. Si r = -2 ; s = 1/3
u = (6, 2) y **v** = (-4, 3) verificar las propiedades 3 y 4 de la multiplicación

Propiedad 3: [*r + s*] **v** = *r* **v** + *s* **v**. Entonces:

$$\left[-2+\tfrac{1}{3}\right](6{,}2) = -2(6{,}2) + \tfrac{1}{3}(6{,}2)$$

$$-\frac{5}{3}(6{,}2) = (-12,-4) + (2,\frac{2}{3})$$

$$\left(-10,-\frac{10}{3}\right) = \left(-10,-\frac{10}{3}\right)$$

Propiedad 4: *r* [**u** + **v**] = *r* **u** + *r* **v**. Entonces:

$$-2[\,(6{,}2) + (-4{,}3)] = -2(6{,}2) + (-2)(-4{,}3)$$

$$-2(2{,}5) = (-12,-4) + (8,-6)$$

$$(-4,-10) = (-4,-10)$$

Como habrán visto, en las operaciones anteriores entre los escalares y los vectores (que están entre paréntesis) al realizar la multiplicación, no se coloca ni un punto ni una cruz para expresar que se están multiplicando. Esto tiene razón de ser y está bien expresado así, ya que el punto se utiliza para realizar un producto entre dos vectores y se llama producto punto (lo vamos a ver más adelante) y la cruz también es utilizado para expresar el producto entre dos vectores (también vamos a verlo más adelante.

2. Expresar los vectores **a** = $\left(-\frac{2}{5}, 1\right)$ y **b** = (0, -3) como combinación lineal de los vectores i y j. Efectuar la suma de **a** y **b**. Expresar el resultado de la suma en coordenadas cartesianas.

Solución: $\mathbf{a} = \left(-\frac{2}{5}, 1\right) \Rightarrow \mathbf{a} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} = -\frac{2}{5}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{b} = (\,0, -3\,) \Rightarrow \mathbf{b} = 0\,\mathbf{i} + (-3)\,\mathbf{j} = \mathbf{o} - 3\mathbf{j} = -3\mathbf{j}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\,-\frac{2}{5}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\,) + (\,-3\mathbf{j}\,)$

$= -\frac{2}{5}\,\mathbf{i} + (\,\mathbf{j} - 3\mathbf{j}\,)$

$= -\frac{2}{5}\,\mathbf{i} + (1 - 3\,)\,\mathbf{j}$

$= -\frac{2}{5}\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

Entonces: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\frac{2}{5}\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **expresado en base canónica y en coord. cartesianas** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\,-\frac{2}{5}\,, -2)$

Ejercicios propuestos:

1) Si **u** = (1, -2), **v** = (-3, -1), **w** = (2, 0) , encuentre un vector **x** tal que $2\,(\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,) - 3\,\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\mathbf{w}$.

2) Si **a** = (4, -3) y **b** = (2, 0) calcular $\|\,\boldsymbol{a}\,\|\,\mathbf{b}\; - \;\|\,\boldsymbol{b}\,\|\,\mathbf{a}$.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

Teorema: Las siguientes afirmaciones para dos vectores **u** y **v** en el plano son equivalentes:

(1) **u** es múltiplo escalar de **v** ,o, **v** es múltiplo escalar de **u**.
(2) **u** y **v** son linealmente dependientes (L.D.).
(3) **u** y **v** son paralelos (**u || b**).

Ejemplos:

1. Si **u** = (1, -2) y **v** = (3, 1) encuentre un vector w $\in\Re 2$ normado (de longitud 1) y paralelo a 2**u** – **v**.

Solución: Primero calculamos el vector 2u – v que llamaremos z, entonces:

z = 2(1, -2) - (3, 1) = (2, -4) + (-3, -1) = (-1, -5)

Como el vector **w** debe ser paralelo a **z**, entonces es un múltiplo escalar de z. Es decir, existe una constante *k* , tal que, w = *k*z. Como el vector w debe ser normado, tomamos la constante *k* igual al inverso de la norma de z.

$$\| \boldsymbol{z} \| = \sqrt{(-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} + (-\mathbf{5})^{\mathbf{2}}} = \sqrt{\mathbf{26}}$$

Entonces:

W = $\frac{1}{\sqrt{26}}$ (-1 , -5) = (-$\frac{1}{\sqrt{26}}$, - $\frac{5}{\sqrt{26}}$)

2. Decidir si los siguientes pares de vectores son o no, linealmente dependientes:

   a) **u** = (2, -3) y **v** = (-1 , $\frac{3}{2}$).
   b) **u** = (-2, 4) y **v** = (- $\sqrt{2}$, 2).

Solución: Si **u** y **v** son vectores linealmente dependientes, uno de ellos debe ser múltiplo escalar del otro, es decir, debe existir para cada caso una constante *k* tal que **u** = *k***v**.

a) (2, -3) = *k* (-1 , $\frac{3}{2}$) ⇒ (2, -3) = (-1k, $\frac{3}{2}$ *k*)

2 = -k → k = -2
→
-3 = $\frac{3}{2}$ k → k = -2

Como el valor de *k* es el mismo para las 2 componentes, los vectores **u** y **v** son linealmente dependientes.

b) $(-2, 4) = k\,(-\sqrt{2}\,, 2) \Rightarrow (-2, 4) = (-\sqrt{2}\,k, 2k)$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 = -\sqrt{2}\,k \rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ 4 = 2k \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

Como la constante *k* no es la misma para las 2 componentes, es imposible que se cumpla la condición **u** = *k***v**, luego los vectores **u** y **v**, no son linealmente dependientes. En este caso los vectores son linealmente independientes.

PRODUCTO ESCALAR:

Es una operación definida entre **2 vectores**, y el resultado es un **NUMERO** real (**escalar**). Esta operación también se conoce con el nombre de *PRODUCTO INTERNO o PRODUCTO PUNTO*.

Al considerar 2 vectores del plano, teniendo en cuenta la dirección, hay dos posibilidades:

1. Los vectores son “**paralelos” o “linealmente dependientes**”, porque están sobre la misma recta o sobre rectas paralelas
2. Los vectores son “**no paralelos” o “linealmente independientes**” porque están sobre rectas que se cruzan.

Si los vectores son PARALELOS (es decir, los del tipo 1 mencionado anteriormente) hay dos posibilidades:

1. Los vectores tienen el mismo sentido, el ángulo entre ellos es 0°
2. Los vectores tienen diferente sentido, el ángulo entre ellos es 180°

En el caso de vectores paralelos del mismo sentido lo podemos ver en la figura 16. Si los vectores son paralelos y de sentidos opuestos, lo vemos en la figura 17.

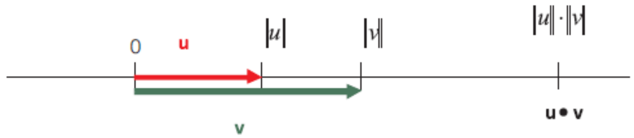


Fig. 16

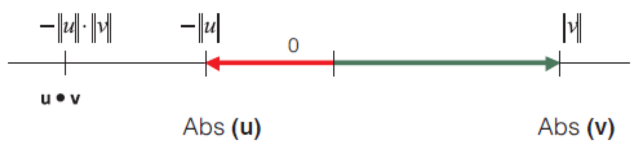


Fig. 17

Si los vectores son perpendiculares, los representamos, por ejemplo: de la siguiente manera.

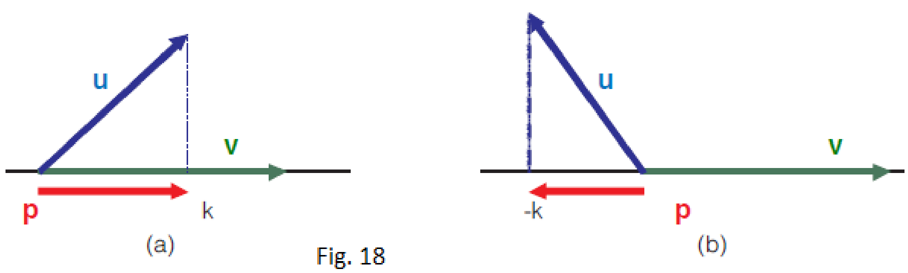


Fig. 18

Definición: Si **u** y **v** son 2 vectores del plano, se define su PRODUCTO ESCALAR como el producto de las normas por el coseno del ángulo entre los dos vectores:

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\alpha)$ donde α es el ángulo entre los 2 vectores.

Esta definición es válida para cualquier par de vectores:

- Si **u** y **v** son paralelos y del mismo sentido $\alpha = 0°$, entonces:
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\boldsymbol{u}\| . \|\boldsymbol{v}\| \cos 0° = \|\boldsymbol{u}\| . \|\boldsymbol{v}\|$

- Si **u** y **v** son paralelos y de diferente sentido $\alpha = 180°$, entonces:
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\boldsymbol{u}\| . \|\boldsymbol{v}\| \cos 180° = (-1) \|\boldsymbol{u}\| . \|\boldsymbol{v}\| = - \|\boldsymbol{u}\| . \|\boldsymbol{v}\|$

- Si **u** y **v** son perpendiculares los valores posibles para cos α están entre -1 y 1. Es decir, al cos α lo podemos calcular de la siguiente manera:

Definición: Se define el COSENO del ángulo α entre los vectores **u** y **v** , como el producto escalar de sus vectores normados.

Se denota: $\cos(\alpha) = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \dfrac{u}{\|u\|} \bullet \dfrac{v}{\|v\|}$

La definición antes planteada especifica que, para calcular el coseno del ángulo, podemos dividir el producto escalar de los vectores entre el producto de las normas de los vectores, o bien podemos hacer el producto escalar entre el vector normado de cada vector.

Si no nos piden calcular el ángulo entre los vectores, lo realizamos de la siguiente manera:

Definición: Sean **u** y **v** vectores en $\Re^2$, tales que **u** $= (u_1, u_2)$ y **v** $= (v_1, v_2)$,se define el PRODUCTO ESCALAR entre **u** y **v** como la suma de los productos de las respectivas coordenadas:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

Ejemplo de cálculo mediante el coseno del ángulo:

1. Si **u** = (-1, 1) y v = (2, -1) hallar:

a) El producto escalar entre **u** y **v.**
Solución: **u** • **v** = (-1) . (2) + 1 . (-1) = -3

b) El ángulo α entre **u** y **v.**

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| . \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-3}{\sqrt{2}.\sqrt{5}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}\ \sqrt{5}$$

Entonces α = arccos $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ = 166,340°

<u>Propiedades del producto escalar:</u>

1. **u•v = v•u**

Verificación:
Si **u** = (2,-2) y **v** = (3,1) ,entonces:
u•v = (2,-2) • (3,1) = 2 · 3 + (-2) · 1 = 6 – 2 = 4
v•u = (3,1) • (2,-2) = 3 · 2 + 1 · (-2) = 6 – 2 = 4

2. [r **u**] •**v = u•** [r **v**] = r[**u•v**]
Verificación:
Si r = 3, **u** = (2, -2) y **v** = (3, 1)
[r **u**] •**v** = [3 (2, -2)] • (3, 1) = (6, -6) • (3, 1) = 18 – 6 = 12
u• [r **v**] = (2, -2) • [3 (3, 1)] =(2, -2) • (9, 3) =18 – 6 = 12
r[**u•v**] = 3[(2, -2) • (3, 1)] = 3[6 - 2] = 3 · 4 = 12

3. **u** • [**v** + **w**] = **u•v** + **u•w**
Verificación:
Si **u** = (1, 2), **v** = (-2, 3) y **w** = (3, -5) ,
entonces: **u•** [**v** + **w**] = **u•v** + **u•w**
(1, 2) • [(-2, 3) + (3, -5)]= (1, 2) • (-2, 3) + (1, 2) • (3, -5)
(1, 2) • (1, -2) = [-2 + 6] + [3 - 10]
1 – 4 = 4 - 7
-3 = -3

Les recomiendo miren estos videos con ejemplos de ejercicios resueltos y graficados:
https://www.youtube.com/watch?v=fjizt35knGs (Multipliación escalar)
https://www.youtube.com/watch?v=YHwUHbIHl4Y (Producto escalar o producto punto)

Teorema: El producto escalar de dos vectores **u** y **v** en $\Re^2$ es cero, si y solamente si, alguno de los vectores es el vector nulo o si los vectores son ortogonales.
u•v = 0 ⇔ **u** =**o** o **v** = **o** o **u**⊥**v**

Demostración:
Si alguno de los vectores es el vector nulo: **u** = (0, 0) o **v** = (0, 0) , entonces por definición **u•v** = 0.
Si **u**⊥**v** el ángulo entre **u** y **v** es 90° y aplicando la primera definición del producto escalar se tiene:
u•v = $\|u\| . \|v\|$ **. cos 90 =** $\|u\| . \|v\|$ **. 0 = 0**

Porque el coseno de 90 es cero y el producto de cualquier número con cero es cero.
Ejercicios resueltos:

1. Decidir si los siguientes pares de vectores son o no ortogonales:
a) **u** = 2**i** – **j** y **v** = **i** + **j**.
b) **z** = **i** + **j** y **w** = - **i** + 2**j**.

Solución:
a) Expresamos los vectores en términos de sus coordenadas:
u = (2, -1) y **v** =$(\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ → **u•v** = $2 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$
Como el producto escalar de los vectores es cero, se concluye que los vectores son ortogonales.
b) **z** = (1, 1) y **w** = (-1, 2) ⇒ **z•w** = -1 + 2 = 1.

Como el producto escalar es diferente de cero, los vectores no son perpendiculares.

2. Demuestre que los vectores i y j de la base canónica, son ortogonales.

i = (1, 0) y **j** = (0, 1) ⇒ **i•j** = 1 . 0 + 0 . 1 = 0 Luego **i•j** = 0 ⇒ **i**⊥**j**

Nota: Como los vectores **i** y **j** son normados (de longitud 1) y ortogonales, se dice que {**i**, **j**} es la BASE ORTONORMADA del plano cartesiano.

3. Encuentre un vector **x** que sea unitario y ortogonal al vector **z** = 4**i** + 3**j**.

Solución:
Supongamos que **x** = (*a, b*) , entonces se debe cumplir **z•x** = 0. (PARA QUE SEAN ORTOGONALES)

z•x = (4, 3)•(*a*, *b*) = 4 · *a* + 3 · *b* = 0 ⇒ *Despejamos la ecuación y hallamos el valor de b.*

b = $-\frac{4}{3}$ *a* → *es decir que b va variando a medida que varía a. Por lo que podemos encontrar muchos vectores que cumplan con la condición de ortogonales, pero nos pide hallar solo uno.*

Entonces:
Supongo un valor para a=3, y hallo el valor de b:

b = -4 y **y** = (3, -4).

Pero el vector **y** no es unitario, por lo que se calcula $\| \boldsymbol{y} \| = \sqrt{\boldsymbol{3^2 + (-4)^2}} = \boldsymbol{5}$

Y para que sea unitario, debemos calcular el vector normado:

Aplicando la definición de vector normado se tiene que:

x = $\frac{y}{\| y \|}$, *entonces:*

x = ($\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$) *es un vector unitario y perpendicular a **z**.*

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

VECTORES EN $\Re^3$

Los vectores en el espacio tridimensional $\Re^3$ tienen las mismas características de los vectores en el plano $\Re^2$: magnitud, dirección y sentido. Además, tienen comportamientos análogos, es decir, se definen las mismas operaciones (suma, multiplicación escalar y producto escalar) con las mismas propiedades e interpretaciones geométricas. En $\Re^3$ se definen otras dos operaciones llamadas "producto vectorial" y "producto mixto" las cuales son estudiadas detalladamente en esta sección.

Características de los vectores en $\Re^3$

Al igual que en el plano, los vectores en el espacio son segmentos de recta orientados con dos formas de representación: en el espacio geométrico como "vectores libres" (Figura 19 a) o en el espacio cartesiano como "vectores ligados" (Figura 19 b).

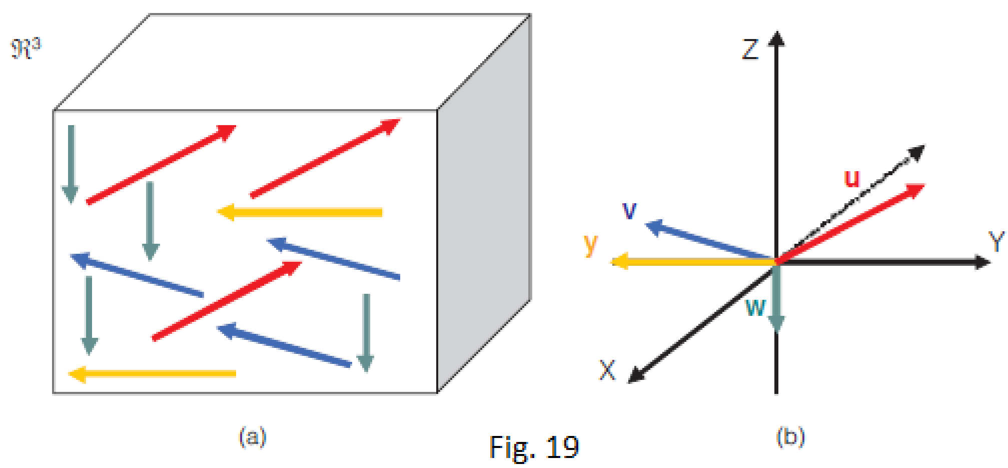
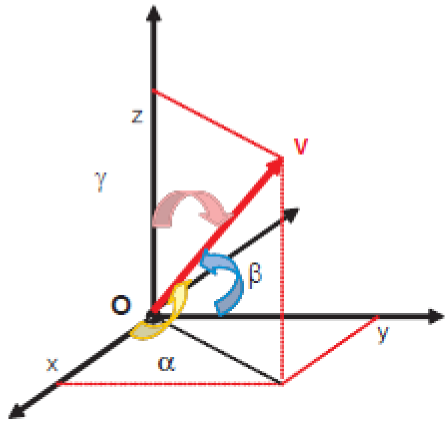


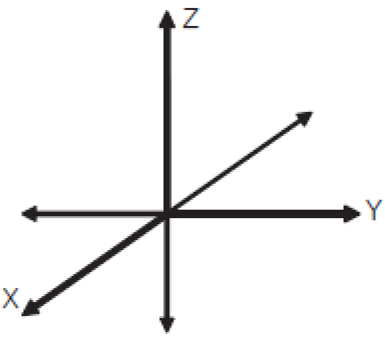
Fig. 19

Podemos asumir que cada "terna ordenada" (*x, y, z*), es decir, cada punto del espacio tridimensional representa un vector.

Definición: Un vector v en $\Re^3$ queda definido por **v** = (x, y, z) donde x, y, z son las COORDENADAS CARTESIANAS. Los ángulos α, β y γ se llaman ANGULOS DIRECTORES y son los que forma el vector **v** con los ejes X, Y y Z respectivamente; considerando el sentido positivo desde la parte positiva del eje hacia el vector. (Figura 20)



Orientación de los ángulos directores
(a)



Representación convencional de los ejes
(b)

Fig. 20

Antes de continuar, veamos algunos casos especiales de vectores en $\Re^3$:

En la representación geométrica de $\Re^3$ se consideran 3 rectas X, Y y Z perpendiculares entre sí, llamadas EJES COORDENADOS (Figura 20. b).

Puntos de $\Re^3$ que estén sobre estos ejes tienen coordenadas de la forma:
(x, 0, 0) sobre el eje X ; (0, *y*, 0) sobre el eje Y y (0, 0, *z*) sobre el eje Z.

Cada par de ejes define un plano, por tanto, se tienen 3 PLANOS COORDENADOS: XY, XZ y YZ según el par de rectas que los definen.

Puntos de $\Re$3 que estén sobre estos planos tienen coordenadas de la forma:
(*x*, *y*, 0) en el plano XY ; (*x*, 0, *z*) en el plano XZ y (0, *y*, *z*) en el plano YZ.

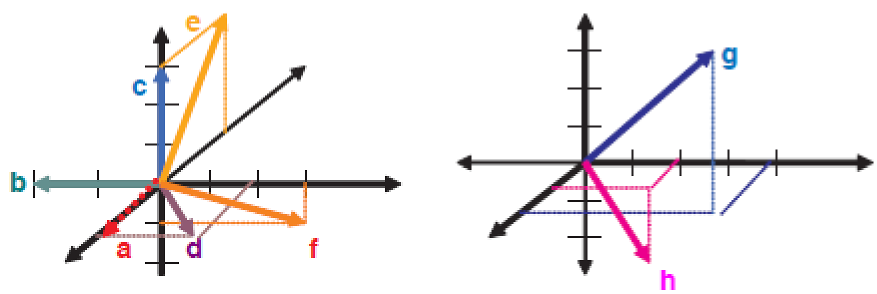
Los tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en 8 regiones llamadas OCTANTES.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

Ejemplos:

1. Hacer la representación gráfica de cada uno de los siguientes vectores:

a = (2, 0, 0) ; **b** = (0, -2, 0) ; **c** = (0, 0, 3) (sobre los ejes coordenados)
d = (2, 2, 0) ; **e** = (-2, 0, 3) ; **f** = (0, 3, -1) (sobre los planos coordenados)
g = (2, 4, 4) ; **h** = (1, 2, -2)



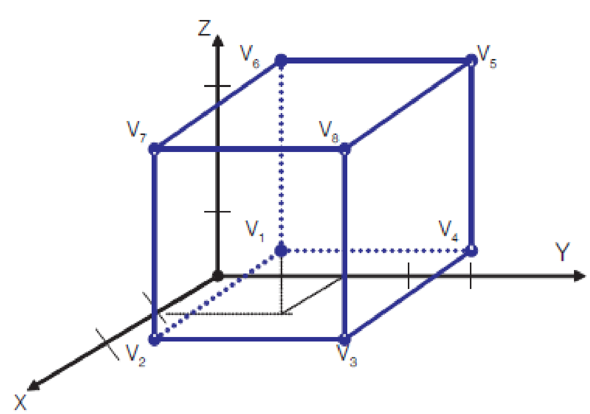
(a) (b)

Para representar un vector sobre alguno de los planos coordenados, se dibuja un paralelogramo en el correspondiente plano, de acuerdo a las coordenadas del vector (Figura a).

Para representar un vector con sus tres componentes diferentes de cero, primero se completa el paralelogramo que corresponda sobre el plano XY y se desplaza el punto paralelamente al eje Z, en el sentido que determine la tercera componente según sea positiva o negativa (Figura b).

2. Dibujar un cubo cuya arista mida 3 unidades, con uno de sus vértices en el punto (1, 2, 1), y completamente contenido en el primer octante (las 3 componentes positivas). Marque los vértices y escriba las coordenadas de cada uno de ellos.

Solución:



Coordenadas de los vértices: V1 = (1, 2, 1); V2 = (4, 2, 1); V3 = (4, 5, 1),
V4 = (1, 5, 1); V5 = (1, 5, 4); V6 = (1, 2, 4); V7 = (4, 2, 4); V8 = (4, 5, 4)

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

Operaciones con vectores en $\Re^3$

Se definen las operaciones de suma, multiplicación escalar y producto escalar en forma análoga a las definidas en $\Re^2$, conservando las mismas propiedades e interpretaciones geométricas.
Se define, además, una nueva operación llamada "producto vectorial" o "producto cruz" porque el resultado es un vector, con aplicaciones muy conocidas en física como el cálculo del "momento de una fuerza" respecto a un punto.
La combinación del producto escalar con el producto vectorial define otra operación en $\Re^3$ llamada "producto mixto".

SUMA: Es una operación definida entre 2 vectores y el resultado es un vector.

Definición: Si **u** y **v** $\in \Re^3$, $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ se define

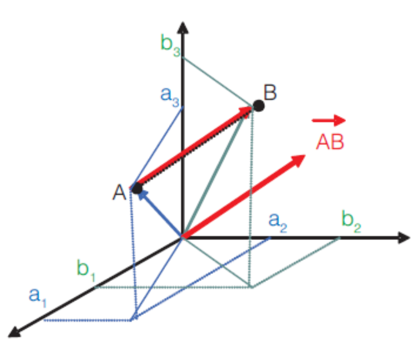
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2) = (w_1, w_2, w_3) = \mathbf{w} \in \Re^3$$

Propiedades:
1. Conmutativa: **u** + **v** = **v** + **u**.
2. Asociativa: [**u** + **v**] + **w** = **u** + [**v** + **w**] = **u** + **v** + **w**.
3. Modulativa: **u** + **o** = **u** = **o** + **u**, **o** = (0, 0, 0) es el VECTOR NULO en $\Re^3$.
4. Invertiva: **u** + [-**u**] = **o** = [-**u**] + **u**
–**u** = (-*x*, -*y*, -*z*) es el VECTOR OPUESTO de **u** = (*x*, *y*, *z*).

En algunos casos podemos encontrarnos que definen a un vector mediante dos puntos, es decir, el punto inicial o cola del vector y la flecha, donde para poder calcularlo, se define de la siguiente manera:

Definición: Si A y B son dos puntos en $\Re$3 de coordenadas (*a*1, *a*2, *a*3) y (*b*1, *b*2, *b*3) respectivamente, se define el vector AB como:

AB = **A** – **B** = (*b*1-*a*1 , *b*2-*a*2 , *b*3 -*a*3).



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

MULTIPLICACIÓN ESCALAR: Es una operación definida entre un real (escalar) y un vector y el resultado es un vector.

Definición: Dados $r \in \Re$ y $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \Re 3$, se define:
$r\,\mathbf{v} = (r.x , r.y , r.z) = (w1 , w2 , w3) = \mathbf{w} \in \Re 3$

Se dice que **w** es MÚLTIPLO ESCALAR de **v**, es decir, existe un real r , tal que **w** = r**v**.

También se dice que **v** y **w** son vectores LINEALMENTE DEPENDIENTES o PARALELOS, es decir, que se encuentran sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.

Teorema: Dados $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, los 3 vectores unitarios en $\Re^3$ sobre los ejes coordenados X, Y y Z respectivamente, todo vector $\mathbf{v} \in \Re^3$ se puede expresar en forma única, como COMBINACIÓN LINEAL (C.L.) de los vectores **i** , **j** y **k** , es decir, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

Los 3 vectores **i** , **j** y k son LINEALMENTE INDEPENDIENTES (L. I.)

Nota: Al igual que en $\Re 2$, en $\Re 3$ todo vector **v** queda definido de dos formas: por sus coordenadas $\mathbf{v} = (v1, v2 , v3)$,o , como combinación lineal de los vectores de la base canónica $\mathbf{v} = v1\mathbf{i} + v2\,\mathbf{j} + v3\,\mathbf{k}$.

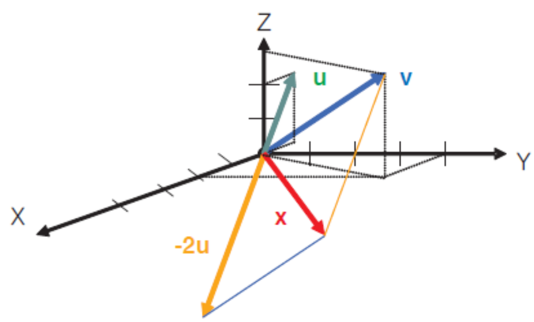
Ejemplos:

1. Dados los vectores **u** = (-1, 0, 2) y **v** = (2, 4, 3):

a) Expresar **u** y v en términos de la base canónica y hallar **u** + **v**:
Solución: **u** = (-1, 0, 2) = (-1) **i** + 0 **j** + 2 k = -**i** + 2**k**.
v = (2, 4, 3) = 2 **i** + 4 **j** + 3 k = 2**i** + 4**j** + 3**k** .
u + **v** = [-1+2] **i** + [0+4] **j** + [2+3] k = **i** + 4**j** + 5**k**.

b) Hallar las coordenadas de un vector **x** tal que 2**u** + **x** = **v**.
Solución: 2**u** + **x** = **v** ⇒ **x** = **v** – 2**u**.
x = (2, 4, 3) + [-2] (-1, 0, 2).
x = (2, 4, 3) + (2, 0, -4) .
x = (4, 4, -1)

c) Graficar los vectores



2. Hallar un vector **y** de longitud 2, que sea paralelo al vector **w** = (1, 2, -3).

Solución: Como **y** es paralelo a **w** , entonces existe una constante c tal que **y** = c**w**.
Si **y** = (*x*, *y*, *z*) ⇒ (*x*, *y*, *z*) = c (1, 2, -3)
⇒ *x* = c, *y* = 2c , *z* = -3c

Como $\| y \|$ = 2 , entonces, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **= 2 →** $\sqrt{c^2+(2c)^2+(-3c)^2}$ **= 2**

→ $\sqrt{14c^2}$ **= 2**

→ $\frac{2}{\sqrt{14}}$

Por tanto, el vector **y** tiene coordenadas ($\frac{2}{\sqrt{14}}$; $\frac{4}{\sqrt{14}}$; $\frac{-6}{\sqrt{14}}$)

PRODUCTO ESCALAR: Es una operación definida entre 2 vectores y el resultado es un real (escalar).

Definición: Dados **u** y **v** ∈ℜ3, si **u** = (*u*1, *u*2, *u*3) y **v** = (*v*1, *v*2, *v*3),
se define el PRODUCTO ESCALAR, **u**·**v** = *u*1.*v*1 + *u*2.*v*2 + *u*3.*v*3 = r∈ℜ

Como puede observar, la base de cálculo es exactamente igual que en ℜ2, sólo que se agrega una coordenada más.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

PRODUCTO VECTORIAL: Es una operación definida entre 2 vectores de $\Re 3$ y el resultado es un vector de $\Re 3$. Si se tienen dos vectores **u** y **v** en $\Re 3$ que sean linealmente independientes, éstos generan un plano. Con el producto vectorial se pretende obtener un vector que sea perpendicular a dicho plano, es decir, que sea ortogonal a **u** y **v** simultáneamente.

Definición: Dados 2 vectores en $\Re^3$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define el PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ de **u** y **v** como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, u_3v_1 - u_1v_3 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1) = \mathbf{w} \in \Re^3$$

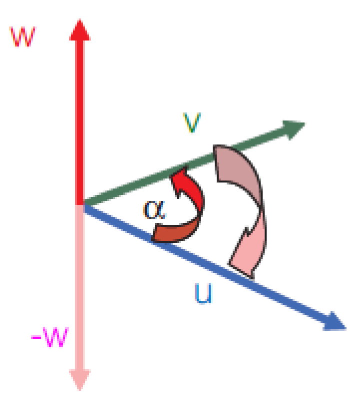
Este vector también queda definido por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \mathbf{w}$$

A esto lo llamamos determinante de una matriz 3x3. Donde el 3x3 indica el tamaño de dicha matriz, es decir, tres filas y tres columnas. El procedimiento de cáculo queda de la siguiente manera:

$\mathbf{i} \,.\, (u_2.\, v_3 - u_3.\, v_2) - \mathbf{j} \,.\, (u_1.\, v_3 - u_3.\, v_1) + \mathbf{k} \,.\, (u_1.\, v_2 - u_2.\, v_1) = \mathbf{w}$

<u>*Interpretación geométrica*</u>: Dos vectores u y v en $\Re 3$ linealmente independientes, generan un plano. El producto cruz entre ellos es un vector ortogonal o normal a dicho plano.



W = **u**x**v** tiene sentido positivo porque el ángulo α entre **u** y **v** es positivo .

-**W** = **v**x**u** tiene sentido negativo porque el ángulo entre **v** y **u** es -α .

W es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

Fíjese que para considerar α positivo es necesario que el ángulo tenga sentido anti horario, de la misma forma que hemos venido analizando los ejercicios previos. Para considerarlo negativo, el ángulo debe ser horario.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA
MATEMATICA – Unidad temática 2 VECTORES
Docente: Ing. Dolzani Guillermo E.
Ciclo lectivo: 2020

Ejercicio 1:

Si **u** = 3**i** – **j** + **k** y **v** = 4**i** + 2**j** , se tiene:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

Entonces: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, -4, -10) = -(-2, 4, 10) = -\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Les dejo un video de un ejercicio resuelto para que lo analicen.

https://www.youtube.com/watch?v=io1vem2CmGc