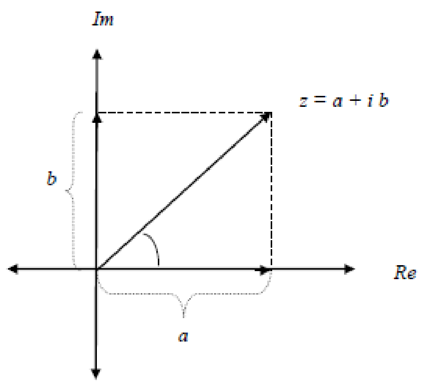
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA

Docente: Ing. Dolzani Guillermo Ezequiel
Alumno: ………

En el presente trabajo práctico se establecen conceptos teóricos y técnicos, los cuales ayudarán al alumno para poder resolver los ejercicios y así comprender y entender los conceptos básicos de las variables complejas.

Un *número complejo* es un número de la forma $a+bi$ donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2=-1$. El número real a se considera como un tipo especial de número complejo, de razón de que $a=a+0i$. Si $Z=a+bi$ es un número complejo, entonces la *parte real* de Z denotada por Re Z es a y la *imaginaria* de Z denotada por $Im\ z$ es b. Dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ son *iguales* si sus partes reales e imaginaria son iguales, es decir si, $a=c$ y $b=d$. Un número complejo $a+bi$ puede identificarse con el punto (a,b) graficado en un plano, denominado *plano complejo* o *plano de Argand*., como se muestra en la siguiente figura. En el plano complejo, el eje horizontal se le conoce como el eje real, mientras que el eje vertical se conoce como eje imaginario.



La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números complejos $Z_1 = a_1 + b_1 i$ y $Z_2 = a_2 + b_2 i$ dan como resultado un número complejo y se definen de la siguiente manera:

$$(i) \quad Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$(ii) \quad Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$(iii) \quad Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

$$(iv) \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{(a_2 b_1 + a_1 b_2)}{a_1^2 + a_2^2} i$$

En otras palabras, al sumar o restar dos números complejos simplemente se suman o se restan las partes reales y las imaginarias correspondientes. Para multiplicar dos números complejos aplicamos la ley distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$. Finalmente, para el cociente de dos complejos se aplica la regla del binomio conjugado.

Problema n° 1) Dados los siguientes complejos, efectuar las operaciones:

$a) Z_1 + Z_2$
$b) Z_4 - Z_3$
$c) 3Z_1 - Z_3$
$d) Z_2 Z_4$
$e) \dfrac{Z_1}{Z_3}$
$f) \dfrac{Z_3}{Z_4} + Z_1$
$g) (Z_1 Z_3) - Z_2$

$$Z_1 = 3 + 2i$$
$$Z_2 = 4 - 3i$$
$$Z_3 = -2 - 7i$$
$$Z_4 = \frac{1}{3} + \frac{4}{7} i$$

Forma polar de un número complejo:

Sea:

$$Z_1 = a_1 + b_1 i$$

De donde:

$$|Z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\Theta = tg^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Entonces:

Forma Polar de un Número Complejo:

$$Z_1 = |Z_1| \measuredangle \Theta$$

Problema n° 2) Representar en forma polar los resultados del ejercicio 1 y graficarlos.

Problema n° 3) Dados los siguientes números complejos.

a) $z_1 = 2 + 3.i$

b) $z_2 = i$

c) $z_3 = 1 - 2.i$

d) $z_4 = 5 + 3.i$

e) $z_5 = -3 - 3.i$

Resolver:

a) $\dfrac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 + z_4} =$

b) $\dfrac{z_1 + z_2^{85}}{z_3 + z_5} =$

c) $\dfrac{(z_1.z_2)^2 + z_2^3}{z_4^2 + z_1} =$

d) $\dfrac{z_2 - \overline{z_4} + z_5}{z_5^4} =$

Problema n° 4) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4 - 8.i - (x + 2.i) = 4 - 9.i$

b) $x + 2.i - (2 - 5.i) = 7 - 3.i$

Problema n° 5) La suma de dos complejos conjugados es de 18 y la diferencia es 4.i, ¿cuáles son dichos complejos?

Problema n° 6) El producto de dos complejos conjugados es de 80. Si la componente real es 4, ¿cuál es la otra componente?

Problema n° 7) Determinar para qué valores de x son reales las siguientes expresiones:

a) $2 + x.i = 0$

b) $1 - (x - 2).i = 0$

Problema n° 8) Hallar las raíces de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{-16}$ b) $\sqrt{-225}$

c) $\sqrt{-121}$ d) $\sqrt{-81}$

Problema n° 9) Expresar en forma binómica los siguientes complejos.

a) $7 + \sqrt{-64}$ b) $2 - \sqrt{-400}$

c) $10 - \sqrt{-121}$ d) $-8 - \sqrt{-14}$

Potencia en forma polar

La potencia n-ésima de un número en forma polar m_φ es un complejo cuyo módulo es la potencia n-ésima de m y cuyo argumento es n veces φ.

$$(m_\alpha)^n = m^n_{n\,\alpha}$$

Problema n° 10) Resolver las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{3+5\,i}{1-2\,i}$ b) $\dfrac{2-2\,i}{4+3\,i}$ c) $\dfrac{1-i}{-2+i}$

d) $\dfrac{4+2\,i}{i}$ e) $\dfrac{(4\,i)^2\cdot(6+2\,i)+7}{4+i}$

Problema n° 11) Dados z1= -3+4i, z2= 5-2i, z3=3/2 y z4=7i, calcular:

a) $(z_1-z_2)\cdot z_3$ b) $z_1\cdot z_4+z_3\cdot z_4$ c) $\overline{z_1+z_4-5\,z_2}$ d) $z_1+(z_3)^{-1}$ e) $(z_2)^{-1}$

f) $\overline{\overline{z_1\cdot z_2}}$ g) $\left(\overline{z_1+z_2}\right)^{-1}$ h) $z_1{}^2 z_3$ i) $\dfrac{z_2}{z_1}$ j) $\dfrac{z_1}{2z_3+z_4}$

La raíz n-ésima de un número en forma polar corresponde a n números complejos con la expresión

$$\sqrt[n]{m_\varphi} = \sqrt[n]{m}_{\frac{\varphi+k\cdot 360^o}{n}} \qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

Problema n° 12) Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos.

a) $5+12\,i$ b) $\dfrac{1}{3+4\,i}$