UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA
ANALISIS MATEMATICO II
UNIDAD 2

Derivadas parciales

Sea f una función de dos variables, z = f(x, y) y un punto P$(x_0; y_0)$.
Si dejamos variar solo a x, manteniendo y constante tendremos una función de una sola variable

$g(x) = f(x; y_0)$

Si g tiene una derivada en x_0, entonces la llamamos derivada parcial de f con respecto a x en $(x_0; y_0)$ y lo escribimos así:

$f_x(x_0; y_0)= g´(x_0)$

$g´(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$

Por lo tanto tendremos:

$f_x(x_0; y_0)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h;\ y_0)-f(x_0\ ; y_0)}{h}$

De igual manera tendremos la llamamos derivada parcial de f con respecto a y en $(x_0; y_0)$ y lo obtenemos dejando variar solo a y manteniendo x constante, tendremos así una función de una sola variable:

$h(x) = f(x_0; y)$

$f_y(x_0; y_0)= h´(y_0)$

$f_x(x_0; y_0)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0;\ y_0+h)-f(x_0\ ; y_0)}{h}$

Si f es una función de dos variables sus derivadas parciales con respecto a x , y a y son las funciones definidas

- La derivada parcial de primer orden de la función z = f(x, y) con respecto a x se define como:

$$f_x(x; y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h; y) - f(x; y)}{h}$$

- La derivada parcial de primer orden de la función z = f(x, y) con respecto a y se define como:

$$fy(x; y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x; y+h) - f(x; y)}{h}$$

Siempre que los límites anteriores existan

Notaciones para derivadas parciales

Para hacer referencia a la derivada parcial de la función z = f (x, y) con respecto a la variable x e y se suelen utilizar con mayor frecuencia las siguientes notaciones:

$$f_x(x; y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f_y(x; y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Regla para calcular las deivadas parciales de z=f(x, y)

- Para calcular f_x, mantener y constante y derivar f (x, y) con respecto a x.
- Para calcular f_y, mantener x constante y derivar f (x, y) con respecto a y.

Ejemplo 1

Sea $f(x, y) = 3x^2 + x^2y^3 - 4y^2$

Calcular:

$f_x(2; 0)$ y $f_y(1,3;)$

Mantenemos y constante y derivamos respecto a x:

$f_x = 6x + 2xy^3$ $f_x(2; 0)$ =12

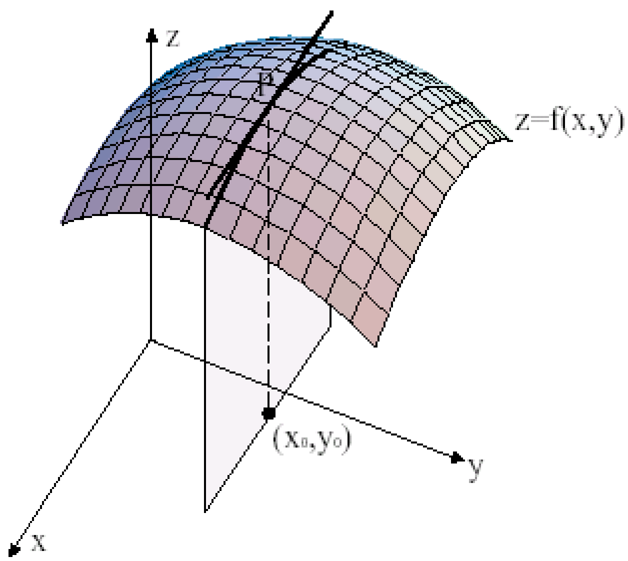
Mantenemos x constante y derivamos respecto a y

$f_y = 3x^2y^2 - 8y$ $f_y(1,3) = 3$

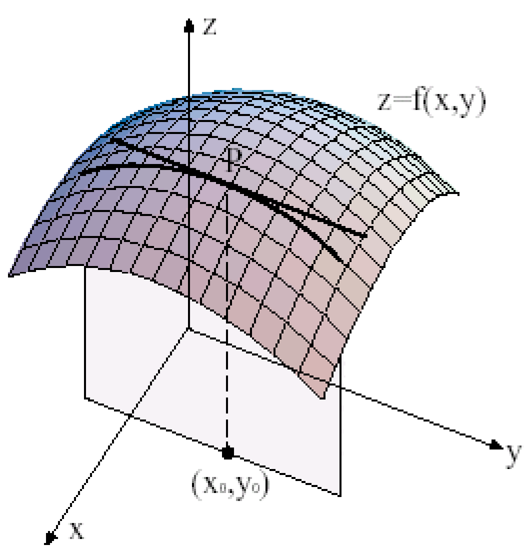
Interpretación geométrica

Recordemos que la grafica de una función de dos variables z = f (x, y), representa una superficie
La interpretación geométrica de la **derivada parcial** de una función de dos variables es semejante a la de una función de una variable.
Si se considera a y constante; $y = y_0$ la ecuación de la superficie z=f ($x; y_0$) es una curva que representa la ecuación de una traza de S en el Plano yo. Ya que la curva es la intersección del

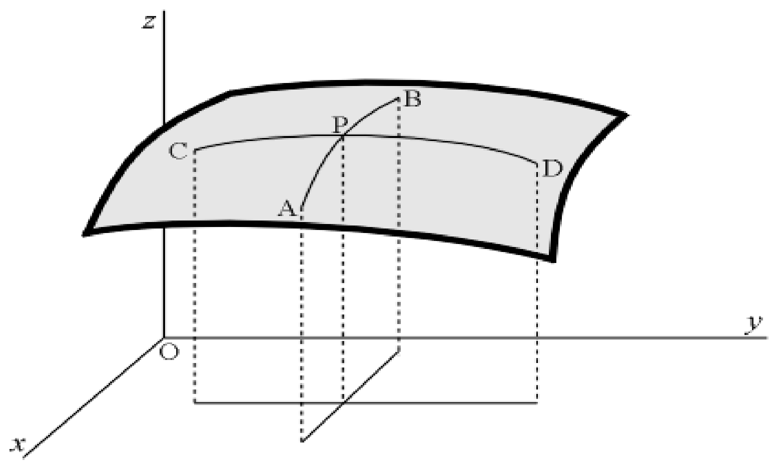
plano $y = y_0$ con la superficie S. Por lo tanto $f_x(x_0; y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva representada por ambas ecuaciones.



De manera semejante el plano vertical $x = x_0$ cruza a la superficie S en una curva de ecuación z=f $(x_0; y)$ que representa una traza de S en el Plano x_0. Ya que la curva es la intersección del plano $x = x_0$ con la superficie S. Por lo tanto $f_y(x_0; y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva representada por ambas ecuaciones.



Ambas curvas pasan por el punto P



Ejemplo 2

Calcular en el punto (-2,2) la pendiente de la recta tangente a la curva determinada por la función f(x, y)= x^2y

a) sobre el plano y=2

b) sobre el plano x=−2

a)Si cortamos la superficie con el plano y=2 tenemos la parabola f(x; y) =$2x^2$

La pendiente de la recta tangente a esta curva esta dada por la derivada parcial de la funcion f con respecto a x.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}(-2;2) =$ -8

b) Si intersecamos la superficie con el plano x=-2 tenemos la recta f(x; y) =4y

La pendiente de esta recta esta dada por la derivada parcial de la funcion f con respecto a y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2;2) = 4$$

Razón de Cambio

Las derivadas parciales de funciones de varias variables se pueden interpretar físicamente como razones de cambio, variaciones instantáneas o coeficientes de variación de la misma manera que la derivada de una función de una variable.

$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$: Representa la razón de cambio de z con respecto a x, cuando y permanece fija.

$\frac{\partial z:}{\partial y:}$: De manera semejante, esta derivada parcial representa la razón de cambio de z con respecto a y, cuando x permanece fija

Ejemplo 3
La temperatura en un punto de una placa de acero viene dada en grados centígrados y depende de las coordenadas de cada punto:
T($x; y$)=500—0.6 x^2 $-1,5y^2$
Vamos a calcular la razón de cambio de la temperatura o variación instantánea con respecto a la distancia medida en centímetros al movernos sobre la placa en las direcciones de los ejes x e y desde el punto (2, 1).

$\frac{\partial T}{\partial x}$=$-2.(0,6x) = -1,2x$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(2;1) = -2,4$$

$\frac{\partial T}{\partial y} = -2(1,5y)$=-3y

$\frac{\partial T}{\partial y}(2;\ 1)$=-3
Este resultado pone de manifiesto que un aumento repentino de la variable x desde el punto de coordenadas (2, 1) representará un descenso de la temperatura. Físicamente se puede afirmar que la variación instantánea de la temperatura con respecto a x en (2, 1) es -2.4 grados/cm.
De igual manera podemos interpretar la variación de la temperatura con respecto a y.

IMPORTANTE:
• Una función de dos variables puede ser continua en un punto y no ser derivable parcialmente en él.
• La existencia de derivadas parciales para las funciones de varias variables no implica la continuidad de la función en el punto.

Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función de dos variables entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de manera tal que se pueden volver a derivar, obteniendo así las derivadas parciales de segundo orden

Derivadas parciales de segundo orden:

$$(f_x)_{\boldsymbol{x}} = f_{xx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$$

$$(f_x)_{\boldsymbol{y}} = f_{xy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta yx} = \frac{\delta^2 z}{\delta yx}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta xy} = \frac{\delta^2 z}{\delta xy}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$$

Las derivadas parciales no son más que derivadas de una función de una variable.

La notación f_{xy} significa que primero se deriva respecto de x y luego con respecto a y

La notación $\frac{\delta^2 f}{\delta yx}$ significa que primero se deriva respecto de x y luego con respecto a y

La notación f_{yx} significa que primero se deriva respecto de y, y luego con respecto a x

La notación $\frac{\delta^2 f}{\delta xy}$ significa que primero se deriva respecto de y, y luego con respecto a x

Las derivadas parciales de segundo orden son también funciones de dos variables por lo tanto se pueden volver a derivar con respecto a x e y , obteniéndose de esa manera las derivadas parciales de tercer orden.

Por ejemplo:

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2 z}{\delta yx}\right) = \frac{\delta^3 z}{\delta y^2 \delta x}$$

Ejemplo 4

Dada la función:

$f(x; y) = xseny$

Hallar todas las derivadas de segundo orden

$f_x(x; y) = seny$ $\qquad$ $f_y(x; y) = xcosy$

$f_{xx}(x; y) = 0$ $\qquad$ $f_{yy}(x; y) = -xseny$

$f_{xy}(x; y) = cosy$ $\qquad$ $f_{yx}(x; y) = cosy$

Observamos que

$f_{xy}(x;y) = f_{yx}(x;y)$

Esto no es una coincidencia, resulta que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx}, son iguales para la mayoría de las funciones que se encuentran en la práctica. El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales se puede sostener la igualdad mencionada

Teorema de Clairaut (o lema de Schwartz)

Sea f una función de dos variables x e y. Si f, f_x , f_y , f_{xy}, y f_{yx} son continuas en una región abierta R, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en R.

Aplicación: **Ecuaciones diferenciales parciales**

Las derivadas parciales (primeras y segundas) juegan un rol importante en Física, por ejemplo, donde a partir del planteo de una situación se llega a una relación entre distintas derivadas parciales de una función desconocida. Entonces se trata de averiguar cuál (o cuáles) funciones satisfacen dicha ecuación diferencial a derivadas parciales. No estudiaremos aquí las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales parciales pero sí, a modo de práctica, comprobaremos que una función dada y sus derivadas parciales verifican cierta ecuación diferencial.

A modo de ejemplo mencionamos las siguientes ecuaciones diferenciales parciales

La ecuación de onda:

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}^2 \frac{\delta^2 \mathrm{u}}{\delta \mathrm{x}^2}$$

Describe el movimiento de una onda, que puede ser la de una onda del mar, una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante.

Ecuación de Laplace:

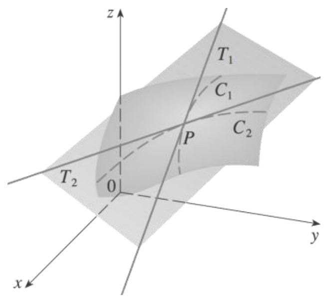
$$\frac{\delta^2 \mathrm{u}}{\delta \mathrm{x}^2} + \frac{\delta^2 \mathrm{u}}{\delta \mathrm{y}^2} = 0$$

Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel importante en los problemas de la conducción de calor, el flujo de fluidos y el potencial eléctrico.

Plano Tangente y Diferenciales

Suponemos que f (x, y) es una función, cuyas primeras derivadas parciales son continuas y su grafica la superficie S, dada por z = f (x, y), admite plano tangente en un punto $P(x_{0;}\ y_{0;}\ z_0)$. Analizaremos cómo debe ser la ecuación de dicho plano pensando en que queremos que sea una “buena” aproximación de f cerca de $(x_{0;}\ y_0)$. Para esto, recordemos que un plano (no vertical) tiene una ecuación de la forma:

$z = a + b_1x + b_2y$ (1)



Ahora bien, un plano que es tangente a S en un punto P, deberá contener a las rectas tangentes en P a cada una de las curvas que están en S y pasan por P. En particular, las trazas c_1 y c_2 para $y = y_0$ y $x = x_0$ en S, respectivamente, son curvas que están en S y pasan por P; además, la recta que es tangente a cada una de estas curvas en P tiene como pendiente una derivada parcial de f . Por lo tanto, el plano tangente deberá contener a estas rectas tangentes, o sea que en la ecuación propuesta para el plano tangente debe ser b_1= $f_x(x_{0;}\ y_0)$ y b_2 = $f_y\ (x_{0;}\ y_0)$. La constante "**a**" se determina fácilmente teniendo en cuenta que el plano debe pasar por P, o sea que se debe satisfacer que f $(x_{0;}\ y_0)$= $a + b_1x_0 + b_2y_0$. Así, si hay plano tangente a la gráfica de f en P, obtenemos la siguiente ecuación del plano:

Luego de las consideraciones realizadas reemplazamos en (1) el valor de a , b_1 y b_2

a= f $(x_{0;}\ y_0)$ - $b_1x_0 - b_2y_0$ $\qquad$ b_1= $f_x(x_{0;}\ y_0)$ $\qquad$ b_2 = $f_y\ (x_{0;}\ y_0)$.

z =f $(x_{0;}\ y_0)$- $f_x(x_{0;}\ y_0)x_0 - f_y\ (x_{0;}\ y_0).y_0$ + $f_x(x_{0;}\ y_0)x$ + $f_y(x_{0;}\ y_0)y$

Sacando factor común: $f_x(x_{0;}\ y_0)$ y $f_y\ (x_{0;}\ y_0)$.

z = f $(x_{0;}\ y_0)$ + $f_x(x_{0;}\ y_0)$(x - x_0) + $f_y\ (x_{0;}\ y_0)$(y - y_0).

Plano Tangente
Definición:
Una ecuación del plano tangente a la superficie z = f (x, y), en el punto $P(x_{0;}\ y_{0;}\ z_0)$ es
$\boldsymbol{z - z_0}$ **=** $f_x(\boldsymbol{x_{0;}\ y_0})$**(x -** $\boldsymbol{x_0}$**) +** $f_y(\boldsymbol{x_{0;}\ y_0})$**(y -** $\boldsymbol{y_0}$ **).** $\qquad$ **(2)**

Ejemplo 1
Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + 16y^2$, en el punto (2, 1, 20)

$f_x = 2x$ $\qquad\qquad$ $f_y = 32y$

f_x (2, 1) =4 $\qquad\qquad$ f_y(2,1)=32

$z - 20 = 4(x - 2) + 32(y - 1)$

$z - 20 = 4x - 8 + 32y - 32$

$z = 4x + 32y$-20

$4x + 32y$- z =20 Ecuación del plano tangente

Diferenciales
Ahora nos queda definir el concepto de diferenciabilidad, y lo haremos de manera tal que el plano dado por la ecuación anterior sea una “buena aproximación” a la gráfica de f cerca del punto

Incremento para una función de dos variables:
Para una función de una variable y=f(x) su incremento estaba dado por

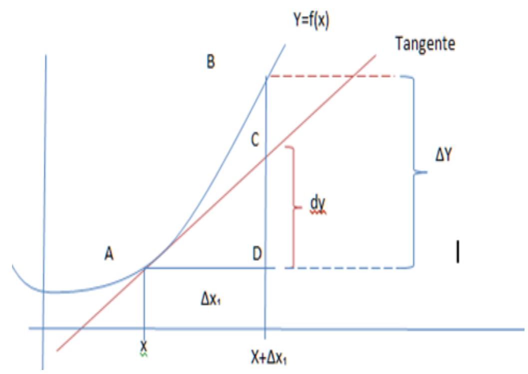
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Este incremento representa el cambio en la altura de la curva y=f(x) cuando x varia en una cantidad Δx

Su diferencial

$dy = f(x)dx$

Este diferencial representa el cambio en la altura de la ordenada de la recta tangente cuando x varía en una cantidad Δx



Definición
Si fes una función de dos variables x e y, entonces el incremento de f en el punto ($x_{0;}$ $y_{0;}$), esta dado por

$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$

Interpretación geométrica del incremento
Este incremento representa el cambio en el valor de f cuando (x; y) cambia a $(x + \Delta x; y + \Delta y)$

Diferencial para una función de dos variables:
Las diferenciales dx y dy, son variables independientes, es decir pueden tomar cualquier valor, por lo que la diferencial dz también llamada diferencial total la definimos

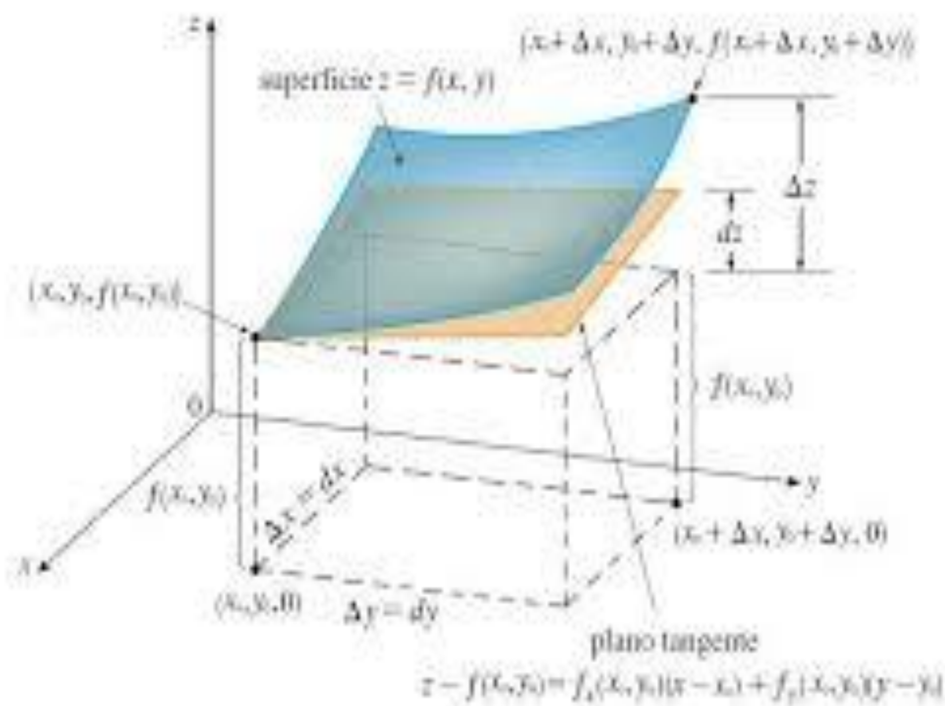
Definición

dz=$f_x(x;y)dx$ + $f_y(x;y)dy$ =$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$ **(3)**

Interpretación geométrica de la diferencial:
Si tomamos:
$\mathrm{dx} = \Delta x = x - x_0$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{dy} = \Delta y = y - y_0$

Si comparamos la ecuación del plano tangente a la superficie z= f(x; y) en el punto $P(x_{0;}\ y_{0;}\ z_0)$ **(2)** Con la expresión de la dz, **(3)** vemos que dz es la variación de la altura del plano tangente al pasar del punto $(x_{0;}\ y_0)$ al punto $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$.

Ambas interpretaciones geométricas, la de Δz y dz las podemos observar en el siguiente gráfico.



Funciones diferenciables
Dada una función f (x, y), si el incremento de f en el punto $(x_{0;}\ y_{0;}\ )$, puede escribirse como:
$\Delta z = f_x(x_{0;}\ y_0)dx$ + $f_y(x_{0;}\ y_{0;}\ )dy$+$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ donde ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy tales que ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$, cuando $(\Delta x\ ;\ \Delta y) \to 0$,entonces f(x; y) es diferenciable en $(x_{0;}\ y_0)$.

Observación: Es decir, que una función es diferenciable en $(x_{0;}\ y_0)$, si la diferencial total dz es una buena aproximación al incremento total Δz. En otras palabras, la función lineal

z = f ($x_{0;}\ y_0$) + fx ($x_{0;}\ y_0$)(x - x_0) + fy ($x_{0;}\ y_0$)(y - y_0) es una buena aproximación de la función cerca de ($x_{0;}\ y_0$)
En otras palabras para valores de Δx y Δy muy pequeños podemos usar la aproximación

$\boldsymbol{\Delta z \cong dz}$

Lo mismo que para funciones de una variable, para funciones de dos variables diferenciabilidad implica continuidad

Teorema:
Si una función de dos variables f(x; y) es diferenciable en ($x_{0;}\ y_0$) entonces es continua en dicho punto.

Observación: Es importante resaltar que no alcanza con que existan las derivadas parciales f_x y f_y, en el punto para que f sea diferenciable. El concepto de diferenciabilidad es "más fuerte" que el de derivabilidad. Dicho de otra forma, la existencia de derivadas parciales es una condición necesaria (pero no suficiente) para que una función sea diferenciable.

Teorema: condición suficiente de diferenciabilidad
Si la función z = f (x, y) y las dos derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto ($x_{0;}\ y_0$) entonces la función es diferenciable en dicho punto.

Ejemplo 2
Al medir las dimensiones del radio de la base r y la altura h de un cono circular recto, se obtuvieron los siguientes valores: r=14cm y h=21cm. Sabiendo que dichas medidas están sujetas a errores máximos de 0,1 cm y 0,15 cm, respectivamente, obtén una estimación del error máximo en que se puede incurrir al calcular el volumen del cono utilizando dichas medidas.

El volumen de este cono es: V=$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Reemplazando los valores tenemos V=$\frac{1}{3}\pi(14)^2 21cm^3$=1372$\pi cm^3$

El error máximo en que se puede incurrir en el cálculo del volumen lo podemos hallar en forma aproximada utilizando la diferencial.
Aplicamos lo visto anteriormente

$\boldsymbol{\Delta V \cong dv}$
dV=$\frac{2}{3}\pi rhdr + \frac{1}{3}\pi r^2 dh$

Como los errores máximos que se cometen en la medición son como máximo del orden de 0,1cm y 0,15 cm respectivamente, tenemos $|\Delta r| \leq 0{,}1$ y $|\Delta h| \leq 0{,}15$ .Para estimar el máximo error en el volumen, tomamos el máximo error en la medida de r y h.
Por lo tanto tomamos $dr = 0{,}1$ y $dh = 0{,}15$ y el error máximo (absoluto) del volumen en que se puede incurrir al calcular el volumen es

$$dV = \frac{2}{3}\pi(14).(21)(0{,}1) + \frac{1}{3}\pi(14)^2.(0{,}15) = 29{,}4\pi cm^3$$

El error relativo esta dado por

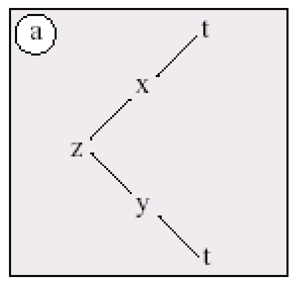
$$\frac{dv}{v} = \frac{29{,}4\pi cm^3}{1372\pi cm^3} = 0{,}0\ 2143$$

O sea que se cometió aproximadamente un error del 2,143%

Derivada de Funciones Compuesta

Regla de la cadena: Caso 1

Sea z = f (x, y) una función diferenciable de x e y donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones de la variable t entonces:



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Observacion: A fin de recordar la regla de la cadena resulta util utilizar el diagrama de arbol

Ejemplo 1

Hallar $\frac{dz}{dt}$

Z=$\sqrt{1 + x^2 + y^2}$ x=lnt y=$cost$

Z=$(1 + x^2 + y^2)^{1/2}$

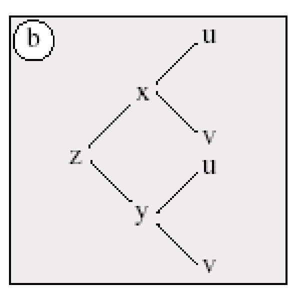
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}2x\frac{1}{t} + \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}2y(-sent) = (1 + x^2 + y^2)^{-1/2}(\frac{x}{t} - ysent) =$$

$$= (1 + (lnt)^2 + (cost)^2)^{1/2}(\frac{lnt}{t} - costsent)$$

Regla de la cadena: Caso 2

Sea z = f (x, y) una función derivable de x e y donde $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ y las derivadas g_u, g_v , h_u y h_v existen entonces:



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

Ejemplo 2

Hallar: $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$

$z = x^2y^3$

$x = ucov \qquad y = usenv$

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xy^3cosv + 3x^2y^2$senv $=5u^4(cosv)^2(senv)^3$

$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

$\frac{\partial z}{\partial v} = 2xy^3u(-senv) + 3x^2y^2ucosv = u^5[-2cosv(senv)^4 + 3(cosv)^3(senv)^2]$

Derivación parcial Implícita

Caso 1

Si F(x; y)=0 define implícitamente a y como una función derivable de *x*, es decir y=f(x) donde F(x; f(x))=0 para todas las x en el dominio de x. Si F es diferenciable podemos aplicar el caso 1 de la regla de la cadena para diferenciar ambos miembros de la ecuación con respecto a *x*, y obtener $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad \text{si } F_y \neq 0$$

Ejemplo 3

Hallar $\frac{dy}{dx}$

$ycosx = x^2 + y^2$

$$\frac{dy}{dx}cosx + y(-senx) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}cosx - 2y\frac{dy}{dx} = 2x + ysenx$$

$(cosx - 2y)\frac{dy}{dx}$ = $2x + ysenx$

$\frac{dy}{dx}$ = $\frac{2x+ysenx}{cosx-2y}$

Caso 2

Supongamos ahora que F(x;y;z)=0 define implicitamente a z=f(x; y) como una funcion de x e y , donde F(x; y; f(x; y))=0 para todo (x; y) del dominio de f.Si F es diferenciable y existen f_x y f_y entoncespodemos usar la regla de la cadena para diferenciar la ecuacion F(x;y;z)=0 y obtener las derivadas parciales $\frac{dz}{dx}$ y $\frac{dz}{dy}$

$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}$+$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$=0

Como estamos derivando con respecto a x : $\frac{\partial x}{\partial x}$ = 1 $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ entonces tenemos

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$=0

Despejando tenemos $\frac{dz}{dx}$

$\frac{\partial z}{\partial x}$=$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{dF}{dz}}$ =- $\frac{F_x}{F_z}$ si $F_z \neq 0$

De igual manera

$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}$+$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$=0

Como estamos derivando con respecto a y tenemos $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$ $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$=0

Despejando $\frac{dz}{dy}$ tenemos

$\frac{\partial z}{\partial y}$=$-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{dF}{dz}}$ =- $\frac{F_y}{F_z}$ si $F_z \neq 0$

Ejemplo 4

Hallar $\frac{dz}{dx}$ y $\frac{dz}{dy}$

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$

Derivo respecto de x, mantengo y constante

$$2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{6z} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1x}{3z}$

Derivo respecto de y, mantengo x constante

$$4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y}{6z} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y}{3z}$

Derivadas Direccionales

Deseamos calcular la tasa de cambio de la función z=f(x; y) en el punto $(x_0; y_0)$, en la dirección de un vector unitario **u=(a; b).** Para ello vamos a generalizar el concepto de derivadas parciales y considerar la posibilidad de derivar con respecto a una dirección diferente a las de los ejes coordenados, tenemos entonces el concepto de **derivada direccional**

Consideramos la superficie S (gráfica de f) y el punto $P(x_0; y_0, z_0)$, sobre la misma. El plano vertical que pasa por el punto Pen la dirección del vector **u** cruza a S en la curva C; la pendiente de la recta tangente Ta C en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección del vector **u**

Si Q $(x; y; z)$ es otro punto sobre C y P´ y Q´ son las proyecciones de P y Q sobre el plano xy entonces el vector **P´Q´** es paralelo a **u** y por consiguiente

P´Q´ $=hu = (ha; hb)$ para algún escalar h

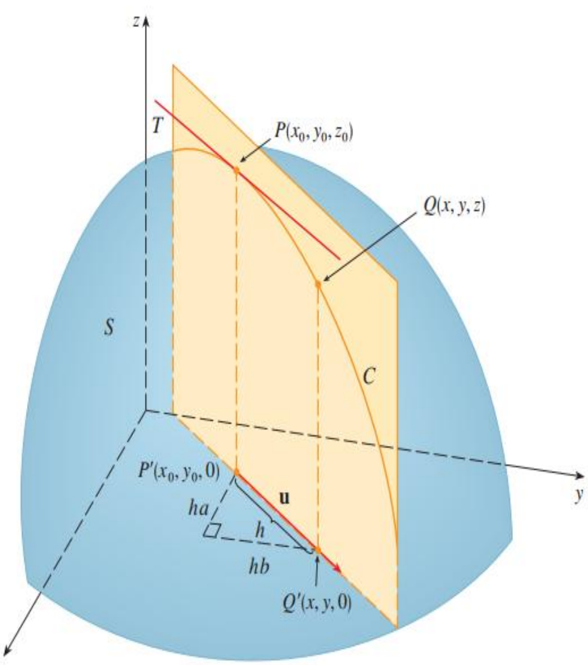
Así: $ha = x - x_0 \rightarrow x = x_0 + ha$

$hb = y - y_0 \rightarrow y = y_0 + hb$

Haciendo el cociente incremental

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha; y_0 + hb) - f(x_0; y_0)}{h}$$

Si tomamos el límite cuando h tiende a 0 obtenemos la tasa de cambio de z en la dirección **u** la cual llamamos derivada direccional de f en la dirección **u**



Definición

Sea f un función de dos variables x e y, y sea **u=(a; b)** un vector unitario, se define la derivada direccional de f en el punto $(x_0; y_0)$, en la dirección de **u** como el valor del siguiente límite en el caso de que este exista

$$D_u f(x_0; y_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0 + ha; y_0 + hb) - f(x_0; y_0)}{h}$$

Interpretación geométrica:

La derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva C intersección de la superficie S con el plano vertical que contiene a la dirección dada, y representa la tasa o razón de cambio instantáneo de la función en la dirección del vector.

Observaciones

a) Es posible que exista la derivada parcial de f en P según una dirección y que no exista en otra.
b) Las derivadas parciales son casos particulares de las direccionales; concretamente para las direcciones (1,0) y (0,1) respectivamente.

Calculo de la derivada direccional

Vamos a buscar ahora una fórmula que nos permita hallar las derivadas direccionales de una manera más sencilla que la que resulta de aplicar la definición vista.

Teorema

Si f es una función de dos variables entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ igual a

$$D_{\boldsymbol{u}} f(x; y) = f_x(x; y)a + f_y(x; y)b$$

Demostración

Definimos una función g de una sola variable h de la siguiente manera

$g(h) = f(x_0 + ha; y_0 + hb)$

Entonces por la forma alternativa de la definición de derivada para funciones de una variable

$$g´(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0+ha; y_0+hb)-f(x_0; y_0)}{h} = D_u f(x_0 ; y_0) \quad \textbf{(1)}$$

Por otro lado podemos expresar $g(h) = f(x; y)$, donde $x = x_0 + ha$ y $y = y_0 + hb$
Hallamos la derivada de g respecto de h aplicando la regla de la cadena

$$g´(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x; y)a + f_y(x; y)b$$

Si hacemos h=0 entonces $x = x_0 \quad y = y_0$

$g'(0) = f_x(x_0; y_0)a + f_y(x_0; y_0)b$ **(2)**

Al comparar las expresiones 1 y 2 vemos que
$D_u f(x_0\,; y_0) = f_x(x_0; y_0)a + f_y(x_0; y_0)b$

Si el vector unitario $u = (a; b)$ forma un ángulo θcon el eje positivo x entonces podemos escribir $u = (cos\theta,\ sen\theta)$ por lo que la fórmula del teorema anterior se convierte en

$D_u f(x; y) = f_x(x; y)cos\theta + f_y(x; y)sen\theta$

Derivadas direccionales de funciones de tres variables
Si la función es de tres variables w=f(x, y, z) la derivada direccional se define y se calcula de igual manera que para las funciones de dos variables.

Definición
La derivada direccional para una función de tres variables $f(x; y; z)$ en un punto $(x_0; y_0; z_0)$ en la dirección de un vector unitario **u (a; b; c)** se define como el valor del siguiente límite en el caso de que este exista:

$$D_u f(x_0; y_0; z_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0 + ha; y_0 + hb; z_0 + hc) - f(x_0; y_0;\ z_0)}{h}$$

Teorema
Si f es una función de tres variables entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c})$ igual a

$D_{\boldsymbol{u}} f(x; y; c) = f_x(x; y; z)a + f_y(x; y; z)b + f_y(x; y; z)c$

Ejemplo 1
Calcular la derivada de f(x, *y)*= $1 - x^2 + y^2$ en el punto *P* = (1,-1) y en la dirección *v* = (3,4)

$D_u f(x_0\,; y_0) = f_x(x_0; y_0)a + f_y(x_0; y_0)b$

v = (3; 4) $|v| = \sqrt{3^2 + 4^2}$= 5

$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{3i+4j}}{\boldsymbol{5}}$

$D_u f(3\,; 4) = -2x(1\,; -1)\frac{3}{5} + 2y(1\,; -1)\frac{4}{5} = \frac{6}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-2}{5}$

Ejemplo 2

Hallar la derivada de la función f(x; y; z) =$3x^2yz + 5xz + 6$ en la dirección del vector (1, -2; -1) en el punto (1; 0; -1).

$\nabla f(x; y; z)$= $(6xyz + 5z)i + 3x^2zj + (3x^2y + 5x)k$
$v = i - 2j - k$
$|v|$=$\sqrt{6}$
$\boldsymbol{u} = \dfrac{i - 2j - k}{\sqrt{6}}$

$D_{\boldsymbol{u}}f(x_0; y_0, y_0)$=$\boldsymbol{\nabla f}.\boldsymbol{u}$=$[(6xyz + 5z)i + 3x^2zj + (3x^2y + 5x)k]\left(\frac{i-2j-k}{\sqrt{6}}\right)$ =

= $\dfrac{6xyz+5z-6x^2z-3x^2y-5x}{\sqrt{6}}$

$D_u f(1;\ 0, -1)$= $\frac{-4}{\sqrt{6}}$ = -1,63

Significa que, por cada unidad que se avanza en pequeños entornos del punto (1, 0, −1) en la dirección del vector (1, −2, −1) la función se incrementa en −1.63.

Definición

Si z = f (x, y) es una función de dos variables se define el gradiente de f en el punto (a, b) como el vector

$\nabla f(a; b)$= f_x(a; b) **i** +$f_y(a; b)\boldsymbol{j}$

Definición

Con esta expresión para el vector gradiente podemos volver a escribir la expresión obtenida anteriormente para la derivada direccional como

$D_{\boldsymbol{u}}f(x; y) = \boldsymbol{\nabla f(x; y).u}$

Definición

Para una función f de tres variables el gradiente se expresa

$\boldsymbol{\nabla f(x; y; z)}$= f_x(x; y; z) **i** +$f_y(x; y; z)\boldsymbol{j}$ +$f_z(x; y; z)\boldsymbol{k}$

Definición

Así la expresión para la derivada direccional de una función de tres en este caso se puede escribir

$D_{\boldsymbol{u}}f(x; y; z) = \boldsymbol{\nabla f(x; y; z).u}$

Teorema

Sea f una función de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional, se presenta cuando el vector **u** tiene la misma dirección que el vector gradiente de f y es igual $|\nabla f|$

$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f.\boldsymbol{u}$

Por definición de producto escalar:

$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f.\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\nabla f}||\boldsymbol{u}|cos\theta$

Para que el valor de la derivada direccional sea máximo el valor del coseno debe ser 1, en este caso $cos\theta = 1$, para que esto ocurra debe ser $\theta = 0$ .En consecuencia

$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f.\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{\nabla f}||\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{\nabla f}|$

Esto ocurre cuando $\mathbf{\nabla f}$ y $\boldsymbol{u}$ tienen la misma dirección.

Ejemplo 3

La temperatura, en grados Celsius, sobre la superficie de una placa metálica viene dada por

$$T(x;y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

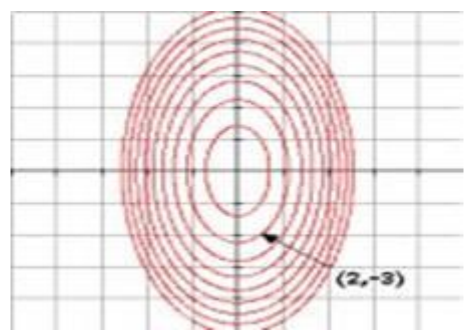
Midiendo x e y en centímetros. Desde el punto (2,-3), ¿en qué dirección crece la temperatura más rápidamente? ¿A qué ritmo se produce este crecimiento?

El valor máximo de la derivada direccional se presenta en la dirección del vector gradiente

$\nabla T = -8xi - 2yj$

$\nabla T(2,-3) = -16\text{i} + 6\text{j}$

$|\nabla T|=\sqrt{(-16)^2 + 6^2}$ =17,09º/cm



La solución que se presenta en el ejemplo puede resultar engañosa. A pesar de que el gradiente apunta en la dirección de crecimiento más rápido de la temperatura, no necesariamente apunta hacia el lugar más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente proporciona una solución local al problema de encontrar un crecimiento relativo a la temperatura en el punto (2, -3). Una vez que abandonamos esa posición, la dirección de más rápido crecimiento puede cambiar.

Ejemplo 4

Un rastreador térmico se encuentra en el punto (2;-3) de una placa metálica cuya temperatura en (x; y) es

T(x; y)=20-$4x^2 - y^2$

Hallar su trayectoria conforme se va moviendo en la dirección de máximo crecimiento de la función.

Representamos su trayectoria mediante la función:
$r(t) = x(t)i + y(t)j$
Un vector tangente en cada punto viene dado por:
$r´(t) = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j$
Como el rastreador busca el máximo crecimiento de temperatura, las direcciones de $r´(t)$ y ∇T deben ser las mismas en todo punto de la trayectoria
$\nabla T = -8xi - 2yj$

Por lo tanto: $\nabla T = kr´(t)$
Entonces

$-8x = k\frac{dx}{dt}$ $\quad -2y = k\frac{dy}{dt}$

Multiplicando ambos miembros de las dos igualdades por dt y teniendo en cuenta el concepto e diferencial de una función de una sola variable tenemos

$-8xdt = kdx$
$-2ydt = kdy$

Despejando k/dt en ambas ecuaciones e igualando los resultados obtenemos

$$\frac{dx}{8x} = \frac{dy}{2y}$$

Integrando ambos miembros:

$lnx = 4lny + c$

Trabajamos algebraicamente:

$lnx - 4lny = c$

Por propiedades del logaritmo
$\ln\left(\frac{x}{y^4}\right) = c$

$\frac{x}{y^4} = e^c$ por lo que podemos escribir $x = Cy^4$

Para eliminar la constante, utilizamos las condiciones iniciales , sabemos que el rastreador sale del punto (2;-3) entonces tenemos

$2 = 81C \rightarrow C = \frac{2}{81}$

Por lo tanto la trayectoria es $x = \frac{2}{81}y^4$

Propiedades del gradiente para una función de dos variables

Sea f una función diferenciable en el punto(x, y). Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si el gradiente de f en (x; y) es el vector nulo entonces la derivada direccional de f en cualquier dirección es cero.
2. La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x;y)$
3. El valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla f(x;y)|$
4. La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x;y)$
5. El valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f(x;y)|$
6. El vector gradiente es normal a las curvas de nivel que pasa por el punto

Planos tangentes a las superficies de nivel

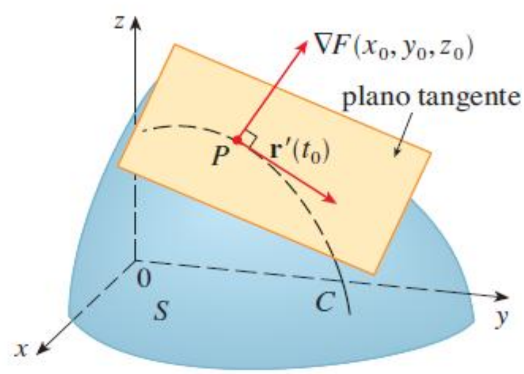
Sea S una superficie dada por $F(x;y;z)=0$, $P(x_0;y_0;z_0)$ un punto sobre S y C una curva cualquiera que está en S y que pasa por el punto P .Sabemos por la unidad 1 que C se puede definir mediante una función vectorial continua $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$.

Si t_0 es un parámetro que corresponde a P tenemos que $r(t_0)=x(t_0)i+y(t_0)j+z(t_0)k$.

Como C esta en S para cualquier punto $(x(t);\ y(t);z(t))$ se verifica:

$F\big(x(t);\ y(t);z(t)\big)$=0

Si $x(t);\ y(t);\ z(t)$ son funciones diferenciables de t y F también lo es, utilizando la regla de la cadena derivamos ambos miembros de la ecuación anterior:



$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

La forma vectorial equivalente de esta expresión es:

$$\nabla F.r'(t)=0$$

En $t=t_0$ tenemos $r(t_0)=(x(t_0);y(t_0);\ z(t_0))$.

$$\nabla F(x_0;y_0;z_0).r'(t_0)=0$$

Esta última expresión nos dice que el vector gradiente en P, $\nabla F(x_0;y_0;z_0)$ es perpendicular al vector tangente a cualquier curva C que está en S y pase por P.

Por lo tanto todas las rectas tangentes en P están en un plano que es normal al gradiente $\nabla F(x_0;y_0;z_0)$ y contienen a P, llamamos a este plano, plano tangente a S en P, y a la recta que pasa por P en la dirección de $\nabla F(x_0;y_0;z_0)$ recta normal a S en P.

Al utilizar la ecuación estándar de un plano podemos escribir la ecuación de su plano tangente como

Definición

Si F es diferenciable en P una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x;y;z)=0$

en P $(x_0; y_0; z_0)$ está dada por

$$F_x(x_0; y_0; z_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + F_y(x_0; y_0; z_0)(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) + F_z(x_0; y_0; z_0)(\mathrm{z} - z_0) = 0$$

Ejemplo 5
Hallar la ecuación del plano tangente al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - 2y^2$ −12=0 en el punto (1;-1; 4)

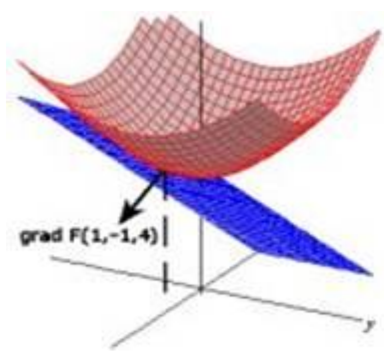
$$-4x(x-1) - 4y(y+1) + 2z(z-4) = 0$$

$$-4(x-1) + 4(y+1) + 8(z-4) = 0$$

$$-4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 = 0$$

$$-4x + 4y + 8z - 24 = 0$$

$$-x + y + 2z = 6$$



Definición
Llamamos recta normal a S a la recta que pasa por P en la dirección de $\nabla \mathrm{F}(\mathrm{x}_0; \mathrm{y}_0; \mathrm{z}_0)$, sus ecuaciones simetricas son

$$\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}{F_x(x_0;y_0;z_0)} = \frac{\mathrm{y}-\mathrm{y}_0}{F_y(x_0;y_0;z_0)} = \frac{\mathrm{z}-\mathrm{z}_0}{F_z(x_0;y_0;z_0)}$$

Para encontrar la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada por $z = f(x; y)$, definimos la función F mediante

$$F(x; y; z) = f(x; y) - z$$

Entonces S viene dada por la superficie de nivel $F(x; y; z) = 0$ y por lo tanto una ecuación del plano tangente a S en el punto $(x_0; y_0; z_0)$ es

$$f_x(x_0; y_0; z_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + f_y(x_0; y_0; z_0)(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0) - (\mathrm{z} - z_0) = 0$$

Ejemplo 6
Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \frac{x^2+4y^2}{10}$ en el punto (2,-2, 2)

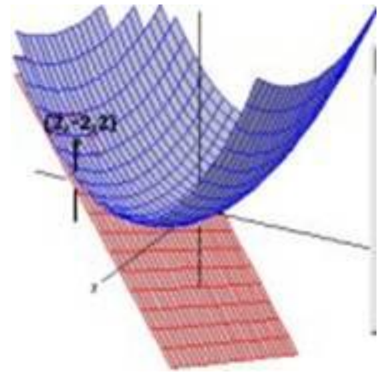
$$\frac{x^2 + 4y^2}{10} - z = 0$$

$$f_x = \frac{x}{5}$$

$$f_x(2; -2\,; 2) \ = \frac{2}{5}$$

$$f_y = \frac{4}{5}y$$

$$f_y(2; -2\,; 2) = -\frac{8}{5}$$



$$\frac{2}{5}(x-2) - \frac{8}{5}(y+2) - (z-2) = 0$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{4}{5} - \frac{8}{5}y - \frac{16}{5} - z + 2 = 0$$

$$2x - 8y - 5z = 10$$

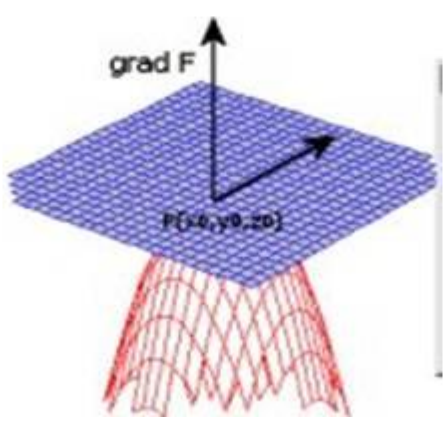
Importancia del gradiente para una función de tres variables

Las formas en que el vector gradiente resulta importante para una función de tres variables son semejantes a las que citamos para una función de dos variables.

Sea $f(x; y; z)$ una función de tres variables y un punto $P(x_0; y_0; z_0)$

1. El vector gradiente $\nabla f(x_0; y_0; z_0)$ proporciona la dirección de máximo crecimiento de f
2. El valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla f(x_0; y_0; z_0)|$
3. El vector gradiente $\nabla f(x_0; y_0; z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel S de f a través de P

El hecho de que el gradiente $\nabla f(x_0; y_0; z_0)$ es normal a la superficie dada por F(x, y, z)=0 nos permite resolver una gran variedad de problemas que tratan de superficies y de curvas en el plano.

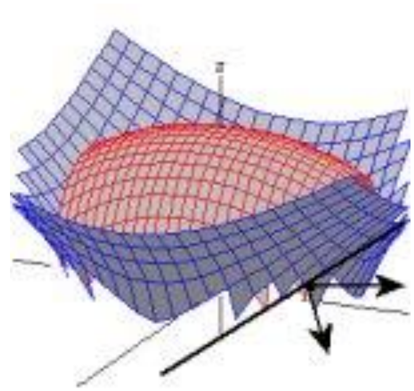


Ejemplo 6

Encontrar las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva intersección del elipsoide

$x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 27$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 11$ en el punto (3;-2; 1)

Calculamos los gradientes de las dos superficies:
Elipsoide



$F(x; y; z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 27$

$\nabla F = 2xi + 8yj + 4zk$
$\nabla F(3; -2;\ 1) = 6\mathrm{i} - 16\mathrm{j} + 4\mathrm{k}$

Hiperboloide

$G(x; y; z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 11$

$\nabla G = 2xi + 2yj - 4zk$
$\nabla G(3; -2;\ 1) = 6\mathrm{i} - 4\mathrm{j} - 4\mathrm{k}$

El producto vectorial de estos dos vectores:

$$\nabla F x \nabla G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -16 & 4 \\ 6 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 80 + 48j + 72k = 8(10i + 6j + 9k)$$

Por lo tanto, los números 10, 6 y 9 dan la dirección de la recta tangente buscada. La ecuación simétrica de la recta tangente en (3,-2,1) resulta ser

$\frac{x-3}{10} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{9}$

Prof. María Graciela Ribas
Cátedra Análisis Matemático II
UTN-Facultad Regional Reconquista