UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA
ANALISIS MATEMATICO II
UNIDAD 2

Extremos. Máximos y mínimos

Extremos absolutos

Definición

Sea z = f (x, y) una función definida en una región D del plano y sea (a, b) ∈ D se dice que

a) f (a, b) es el valor máximo absoluto de f en D si f (a, b) ≥ f (x, y), ∀ (x, y) ∈ D

b) f (a, b) es el valor mínimo absoluto de f en D si f (a, b)≤ f (x, y),∀ (x, y) ∈ D

Extremos relativos

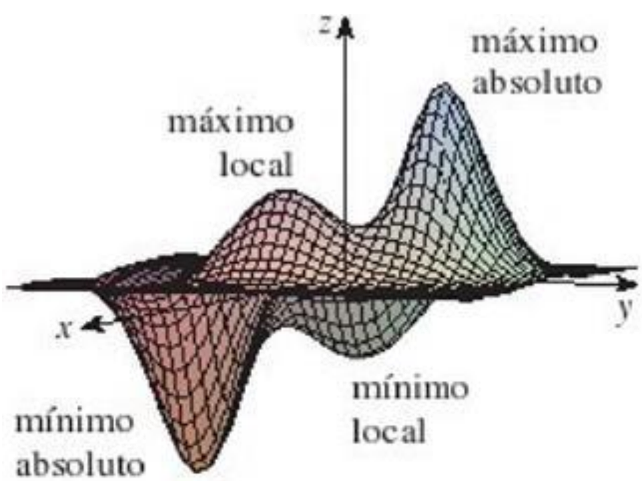
Definición

Sea z = f (x, y) una función definida en una región D del plano y sea (a, b) ∈ D se dice que

a) f (a, b) es el valor máximo relativo (o local) de f en D si existe un entorno de (a, b)/ f (a, b) ≥f (x, y), ∀ (x, y) ∈ al entorno del punto (a, b).

b) f (a, b) es el valor mínimo relativo (o local)de f en D si existe un entorno de (a, b)/ f (a, b)≤ f (x, y), ∀ (x, y) ∈ al entorno del punto (a, b).

Podemos concluir entonces que si las desigualdades de la definición se cumplen para todos los puntos (x, y) en el dominio de *f,* entonces *f* tiene un extremo absoluto en el punto, y si las mismas se verifican para todos los $(x,\ y)$ cercanos al punto considerado entonces allí existe un extremo relativo.



Punto crítico

Definición

Sea z = f (x, y) una función definida en una región D del plano *"xy"*. El punto (a, b)$\in$ D se dice que es un punto crítico (o punto estacionario) si se cumple una de las afirmaciones siguientes:

a) $f_x(a;b) = f_y(a;b) = 0$

b) No existe $f_x(a;b)$ o $f_y(a;b)$.

Teorema 1

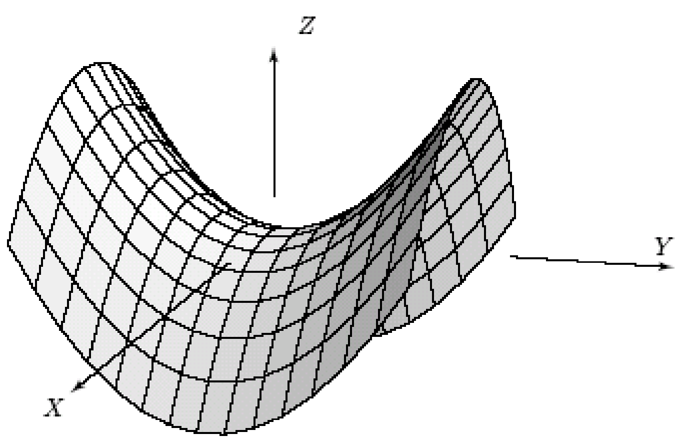
Condición necesaria para la existencia de extremo de funciones diferenciables

Sea z = f (x, y) una función diferenciable definida en una región D del plano .La condición necesaria para la existencia de extremos relativos de f en un punto (a, b) $\in$ D es que se verifique:

$$f_x(a;b) = f_y(a;b) = 0$$

O bien no exista una de ellas

Importante :Es condición necesaria pero no suficiente. O sea que no todos los puntos críticos originan un máximo o un mínimo .Por ejemplo la función, $z = y^2 - x^2$ cumple en (0, 0) que $f_x(0;0) = f_y(0;0) = 0$ y sin embargo no es extremo relativo (ni máximo ni mínimo), como muestra la figura siguiente.



Analicemos la conclusión

$f_x = -2x \qquad f_y = 2y$

El único punto crítico es (0; 0)

Observemos que para los puntos del eje x, tenemos $y = 0$, o sea estamos considerando todos los punto de la forma $(x;0)$, cercanos al (0; 0), para estos puntos la función es

$z = -x^2 < 0$ si $(x \neq 0)$

En esta dirección la función toma un máximo.

Observemos ahora que para los puntos del eje y, tenemos $x = 0$, o sea estamos considerando todos los punto de la forma (0; y), cercanos al (0; 0), para estos puntos la función es

$z = y^2 > 0$ si $(y \neq 0)$

En esta dirección la función toma un mínimo.

Entonces podemos concluir que hay puntos próximos al (0; 0) donde la función toma valores positivos y otros donde toma valores negativos. En consecuencia este punto (0; 0) no puede ser ni máximo ni mínimo, de manera que en ese punto $z = y^2 - x^2$, no posee extremo.

La función en todos los puntos cercanos al (o; o) debería ser positiva o negativa para que exista un extremo.

Cerca del origen la función tiene la forma de una silla de montar, así que al punto (0; 0) se lo llama punto silla o de ensilladura.

Este punto es un punto crítico sin embargo la función no toma un extremo en el, o sea que una función no necesariamente toma un valor máximo o mínimo en todos los puntos críticos.

Teorema 2
Si *f* tiene un extremo relativo o local en *(a, b)* y las derivadas parciales de primer orden existen en ese punto, entonces ella son iguales a cero, es decir $f_x(a; b) = 0$ y $f_y(a; b) = 0$

Si hacemos *y=b*, entonces tenemos la función *g(x)=f(x; b)*
Es decir tenemos una función de una sola variable, si f tiene un extremo en (a; b) entonces g(x) tiene un extremo relativo en a, de modo que por el Teorema de Fermat visto en Análisis I, *g´(a)=0*. Por lo visto cuando definimos derivadas parciales *g´(a)=*$f_x(a; b)$, así que $f_x(a; b) = 0$.

De igual manera si hacemos *x=a* tenemos *h (y) =f(a; y),* si f tiene un extremo en (a; b) entonces h (y) tiene un extremo relativo en b, de modo que por el Teorema de Fermat visto en Análisis I, *h´ (b)=0.* Por lo visto cuando definimos derivadas parciales *h´ (b)*=$f_y(a; b)$, así que $f_y(a; b) = 0$

Con lo que queda demostrado el teorema enunciado anteriormente

En conclusión Este teorema afirma que si una función tiene un extremo local en *(a, b)*, entonces *(a, b)* es un punto crítico de *f*. Como en el caso de funciones de una variable el reciproco de este teorema no siempre es válido, como lo vimos en la función $z = y^2 - x^2$ en el punto *(0; 0).*

Interpretación geométrica del teorema 2

Recordemos la ecuación del plano tangente a la grafica de la función f (x, y)

$z - z_0$ = $f_x(a;\ b)$(x - a) + $f_y(a; b)$(y - b).

Si $f_x(a; b) = 0$ y $f_y(a; b) = 0$ entonces tenemos que z=z_0

Entonces si la grafica de una función tiene un plano tangente en un extremo local, entonces el plano tangente debe ser horizontal.

Para asegurarnos de la existencia de extremos en un punto debemos recurrir al siguiente teorema

Teorema 3

Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos. Criterio de la derivada segunda

Sea z = f (x, y) una función definida en una región D del plano, y el punto (a, b) ∈ D. Supongamos además que f tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y $f_x(a; b) = 0$ y $f_y(a; b) = 0$ o sea (a, b) es un punto crítico, entonces se verifica que

a) f (x, y) tiene un máximo relativo en (a, b) si

$f_{xx}(a; b) < 0$

H$(a; b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a; b) & f_{yx}(a; b) \\ f_{xy}(a; b) & f_{yy}(a; b) \end{vmatrix} > 0$

Este determinante recibe el nombre de Hessiano de la función.

b) f (x, y) tiene un mínimo relativo en (a, b) si

$f_{xx}(a; b) > 0$

H$(a; b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a; b) & f_{yx}(a; b) \\ f_{xy}(a; b) & f_{yy}(a; b) \end{vmatrix} > 0$

c)) f (x, y) no tiene un mínimo ni un máximo relativo en (a, b), pues crece en unas direcciones y decrece en otras, decimos que tiene un punto de ensilladura si

H$(a; b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a; b) & f_{yx}(a; b) \\ f_{xy}(a; b) & f_{yy}(a; b) \end{vmatrix} < 0$

d) Decimos que estamos ante un caso dudoso. No podemos asegurar que exista o no extremo en f sí

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a;b) & f_{yx}(a;b) \\ f_{xy}(a;b) & f_{yy}(a;b) \end{vmatrix} = 0$$

En este caso será preciso realizar un estudio más detallado. Este estudio consiste en estudiar el signo del incremento de la función en el entorno del punto.

Observación: De lo visto anteriormente podemos concluir que existe extremo si el valor del Hessiano es positivo en el punto

H$(a;b)$ >0, $f_{xx}(a;b)$ >0 → $(a;b)$ punto de mínimo relativo

H$(a;b)$ >0, $f_{xx}(a;b)$ <0 → $(a;b)$ punto de máximo relativo

H$(a;b) < 0$ → $(a;b)$ punto de ensilladura

H$(a;b) = 0$→ Hay un caso dudoso

Ejemplo 1
Hallar los extremos relativos de la función
$f(x;y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Primero vamos a hallar los puntos críticos

$f_x(x;y) = 4y - 4x^3$

$f_y(x;y) = 4x - 4y^3$

$f_x(x;y) = 4y - 4x^3 = 0$ **(1)**

$f_y(x;y) = 4x - 4y^3 = 0$ **(2)**

De (1) $y = x^3$ reemplazamos en **(2)**

$4x - 4x^9$ =0 sacamos factor común

$4x(1 - x^8)$ =0 de aquí tenemos $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$

Tenemos entonces dos puntos críticos: $P_1(0;0)$ y $P_2(1;1)$

Para saber si existe extremo en los puntos anteriores hallamos el Hessiano.

$f_{xx}(x;y) = -12x^2$ $\qquad f_{yy}(x;y) = -12y^2$

$f_{yx}(x;y) = 4$ $\qquad f_{xy}(x;y) = 4$

H$(x;y) = \begin{vmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{vmatrix}$ = $144x^2y^2$-16

Que ocurre en $P_1(0;0)$

H(0; 0)=$-16 < 0$ no existe extremo , $P_1(0;0)$ es un punto de ensilladura.

Que ocurre en $P_2(1;1)$

$H(1;1) = 144 - 16 = 128 > 0$, existe extermo en este punto.

Para saber la naturaleza del punto analizamos el signo de $f_{xx}(x;y)$ en $P_2(1;1)$

$f_{xx}(1;1) = -12 < 0$, en este punto existe un máximo.

Entonces un máximo relativo de la función es

$f(1;1) = 4 - 1^4 - 1^4 = 2.$

Ejemplo 2
Consideramos nuevamente la función $z = y^2 - x^2$
Comprobemos el análisis intuitivo realizado anteriormente respecto de la existencia de extremos en el punto *(0; 0)* Analizamos nuevamente.

Hallamos los puntos críticos
$z_x = -2x$ $\quad z_y = 2y$

Igualando a cero tenemos que

-2x=0 *2y=0*

El único punto crítico es (0; 0)

Analizamos el signo del Hessiano en este punto

$H=\begin{vmatrix} -2 & o \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4<0$

El hessiano es negativo, confirmamos la no existencia de extremos en el punto (0; 0)

En (0; 0) hay un punto de ensilladura

Ejemplo 3
Calcule y clasifique los puntos críticos de la función:

$f(x;y) = y^3+3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

Hallamos los puntos críticos

$f_x(x;y) = 6xy - 12x = 0$ **(1)**

$f_y(x;y) = 3y^2 + 3x^2 - 12y = 0$ **(2)**

De **(1)** tenemos $6x(y-2)=0$

x_1=0 $\acute{o}$ y_1=2

Reemplazamos en **(2**) x_1=0

$3y^2 - 12y = 0$

$3y(y-4)=0$

Entonces y_2=0 ó y_3=4

Tenemos los puntos:

$\boldsymbol{P_1} =$ **(0; 0)** $\boldsymbol{P_2} =$ **(0; 4)**

Reemplazamos en **(2)** y_1=2

$12+3x^2-24=0$

$3x^2=12$

Entonces x_2=2 y x_3=-2

Tenemos los puntos:

$\boldsymbol{P_3} =$ **(2; 2)** $\boldsymbol{P_4} =$ **(-2; 2)**

Hallamos el Hessiano

Vamos a ver si en estos puntos críticos hay extremos

$f_{xx}(x;y) = 6y-12$

$f_{yy}(x;y)$=$6y - 12$

$f_{xy}(x;y)$=$6x$

$f_{yx}(x;y)$=$6x$

H(x; y)= $\begin{vmatrix} 6y-12 & 6x \\ 6x & 6y-12 \end{vmatrix}$=$(6y-12)(6y-12)-36x^2$

H (0; 0)= (-12)(-12)=144 > 0 existe extremo

H (0; 4)= 144> 0 existe extremo

H (2; 2)= -144< 0 no existe extremo

H(-2; 2) =-144 <0 no existe extremo

Naturaleza de los puntos

$\boldsymbol{P_1} =$ **(0; 0)**
$f_{xx}(0;0) = -12$ <0

En $\boldsymbol{P_1} =$ **(0; 0)** hay un máximo $f(0;0) = 2$ M_r(0, 0, 2)

$\boldsymbol{P_2} =$ **(0; 4)**

$f_{xx}(0;4)$=12>0 hay un mínimo $f(0;4)$=-30 m_r(0, 4,-30)

$\boldsymbol{P_3} =$ **(2; 2)** No existe extremo relativo el punto es un punto de ensilladura

$f(2;2)$=-14 Punto silla (2;2-14)

$\boldsymbol{P_4} =$ **(-2; 2)** No existe extremo relativo el punto es un punto de ensilladura

$f(-2;2)$=-14 Punto silla (-2; 2-14)

Ejemplo 4
Calcular las dimensiones que debería tener una caja como la de la figura, para que tenga la menor superficie lateral y un volumen de 1000 cm^3

$v = xyz = 1000$ **(1)** $S = xy + 2xz + 2yz$ **(2)**

De (1) despejamos z par que la función que quiero minimizar sea una función de dos variables

$z = \frac{1000}{xy}$ reemplazamos en **(2)**

$S = xy + 2x\left(\frac{1000}{xy}\right) + 2y\left(\frac{1000}{xy}\right)$

$S = xy + \left(\frac{2000}{y}\right) + \left(\frac{2000}{x}\right)$

S_x =$y - \frac{2000}{x^2}$ =0 → $y = \frac{2000}{x^2}$ (2)

S_y =$x - \frac{2000}{y^2}$ =0→ $x = \frac{2000}{y^2}$ (3)

De (2) y (3) tenemos que $y = 10\sqrt[3]{2}$

Reemplazando y en (3) hallamos $x = 10\sqrt[3]{2}$

Reemplazando x e y en $z = \frac{1000}{xy}$ tenemos $z = 5\sqrt[3]{2}$

$S = xy + 2xz + 2yz$ =($10\sqrt[3]{2}$.)($10\sqrt[3]{2}$) +2$\left(10\sqrt[3]{2}\right)$($5\sqrt[3]{2}$)+ 2$\left(10\sqrt[3]{2}\right)$($5\sqrt[3]{2}$)=300$\sqrt[3]{4}$ =476,22cm^2

Tarea: probar que el valor obtenido es el valor mínimo.

Valores máximos y mínimos absolutos

El siguiente teorema es el análogo al Teorema del valor extremo en dos dimensiones

Teorema de Weierstrass.-

Sea z = f (x, y) una función continua en un subconjunto D de R^2 acotado y que contiene a su frontera, entonces la función f tiene máximo y mínimo absolutos en D.

Calculo de extremos absolutos

Para calcular los valores absolutos máximos y mínimos de una función continua **f** en un conjunto cerrado y acotado **D** se siguen los siguientes pasos.

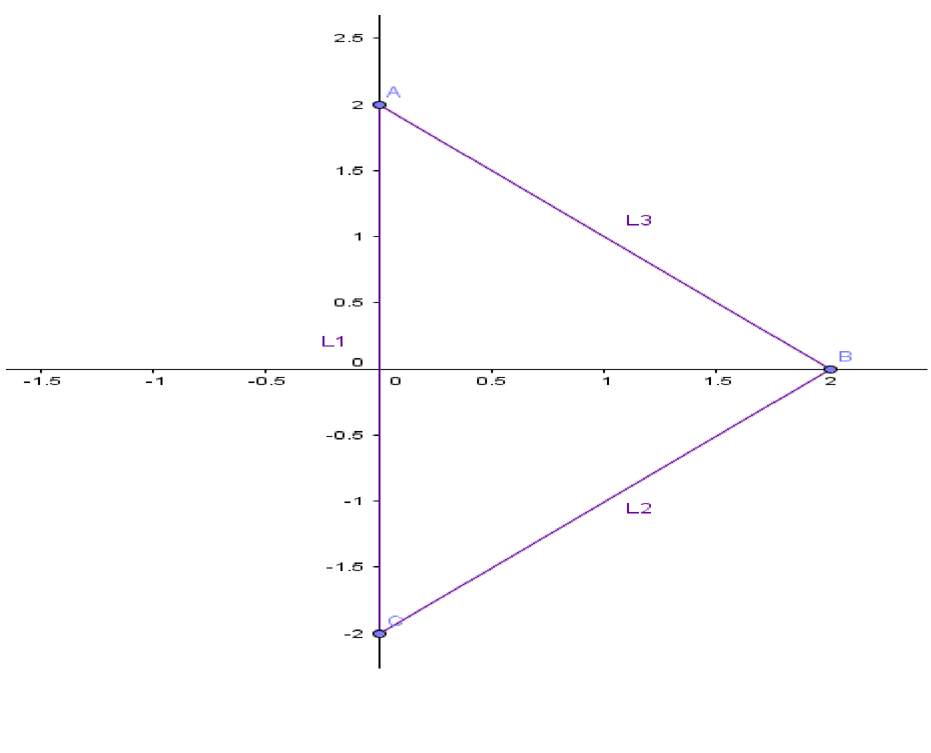
1. Se hallan los puntos críticos de la función.
2. Se calculan los valores de **f** en los puntos críticos de **f** en **D**.
3. Se determinan los valores extremos de **f** sobre la frontera de **D**
4. El más grande de los valores de los pasos 2 y 3 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

Ejemplo 1

Determinar el valor máximo y mínimo absoluto de f en el conjunto D

$f(x;y) = x^2 + y^2 - 2x$

D es la región triangular determinada por los puntos $(2;0)$; $(0;2)$ y $(0;\ -2)$



Hallamos los puntos críticos

$f_x(x;y) = 2x - 2$ =0 → x_1 =1

$f_y(x;y)$= $2y = 0$ → y_1 =0

P_1= (1; 0) es punto critico

Hallamos el valor de f en este punto crítico

$\boldsymbol{f(1;0) = -1}$

Determinamos los valores extremos de **f** sobre la frontera de **D**

Consideramos $\boldsymbol{L_1}$

X=0 , $-2 \leq y \leq 2$

Tengo sobre este segmento

$f(0;y)$= y^2

En los extremos del intervalo [-2; 2] (puntos frontera) la función toma los siguientes valores

$\boldsymbol{f(0;-2)}$**= 4** $\boldsymbol{f(0;2)}$ **=4**

Veamos qué pasa con la función en los puntos interiores de este segmento

Hallamos los puntos críticos sobre este segmento de frontera

$f_y(0;y)$= $2y$=0 → y =0

Punto crítico en este segmento P_2= (0; 0) (punto frontera)

$\boldsymbol{f(0;0)}$**= 0**

Consideramos $\boldsymbol{L_3}$

$0 \leq x \leq 2$, hallamos la expresión de la recta que tiene la dirección de este segmento

$y = -x + 2$

$f(x;-x+2)$=$x^2 + (-x+2)^2 - 2x$ =$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2x$= $2x^2 - 6x + 4$

En los extremos del intervalo [0; 2]

$\boldsymbol{f(0;2)}$**= 4**

$\boldsymbol{f(2;0)}$**= 4**

Hallamos los puntos críticos en puntos interiores al segmento

$f(x;-x+2)$ $=2x^2-6x+4$

$f_x(x;-x+2)$= $4x-6$=0 → x = $\frac{3}{2}$

$f_{xx}(x;-x+2)$=4 >0 por lo tanto en x = $\frac{3}{2}$ habría un mínimo en el [0; 2]

$\boldsymbol{f\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2}}$

Consideramos L_2

$0 \leq x \leq 2$, hallamos la expresión de la recta que tiene la dirección de este segmento

$y = x - 2$

$f(x;x-2)$=$x^2+(x-2)^2-2x$ =$x^2+x^2-4x+4-2x$= $2x^2-6x+4$

$f_x(x;-x+2)$= $4x-6$=0 → x = $\frac{3}{2}$

$f_{xx}(x;-x+2)$=4 >0 por lo tanto en x = $\frac{3}{2}$ habría un mínimo en el [0; 2]

$\boldsymbol{f\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)=\frac{-1}{2}}$

Comparamos los valores obtenidos en los puntos críticos y en la frontera

Mínimo Absoluto toma en P_1= (1; 0)

Hallamos el valor de f en este punto crítico

$\boldsymbol{f(1;0)=-1}$

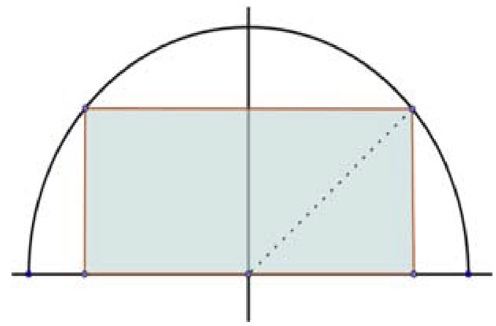
Máximo Absoluto toma en dos puntos $(\mathbf{0};-\mathbf{2})$, $(\mathbf{0};\ \mathbf{2})$ y $(\mathbf{2};\ \mathbf{0})$

$\boldsymbol{f(0;2)}$**=** $\boldsymbol{f(0;-2)=f(2;0)=}$ **4**

Extremos condicionados

Hasta este momento se han calculado los extremos relativos de funciones cuyas variables no están ligadas por ninguna condición. Sin embargo, muchos problemas de optimización presentan restricciones o condiciones que debe verificar la solución.

Ejemplo I

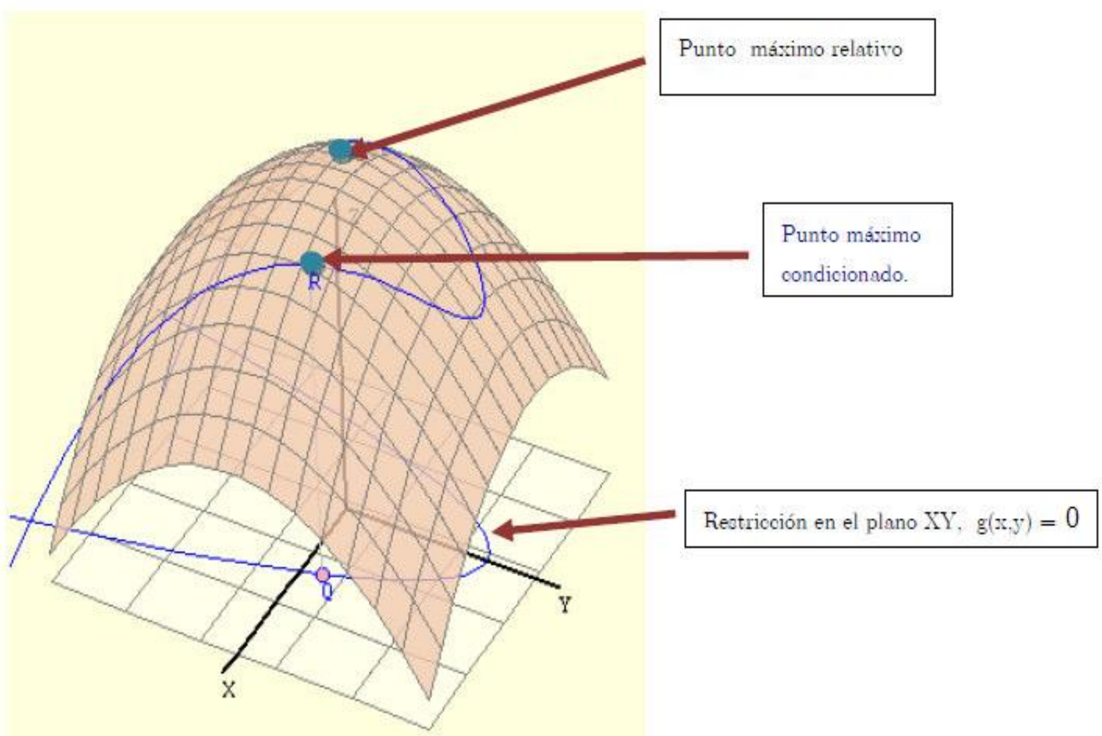


Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio *r*.
Para resolver este problema se trata de maximizar la función

$A(x; y) = f(x; y) = 2xy$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = r^2$

Una forma de resolverlo es despejando una variable en esta última expresión y sustituir en la función de $f(x; y)$. Este procedimiento de despejar una variable no siempre es posible y no siempre lleva a resolver el problema por el camino más corto

Un extremo (máximo o mínimo) de la función f (x, y) cuando (x, y) está sobre una curva del plano contenida en el dominio de f, cuya ecuación es g (x, y) = 0 , se dice que es un extremo condicionado a la condición o restricción g (x, y) = 0 .



Método de los multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange trata este tipo de problemas, en el que hay que maximizar o minimizar una función sujeta a una o varias condiciones

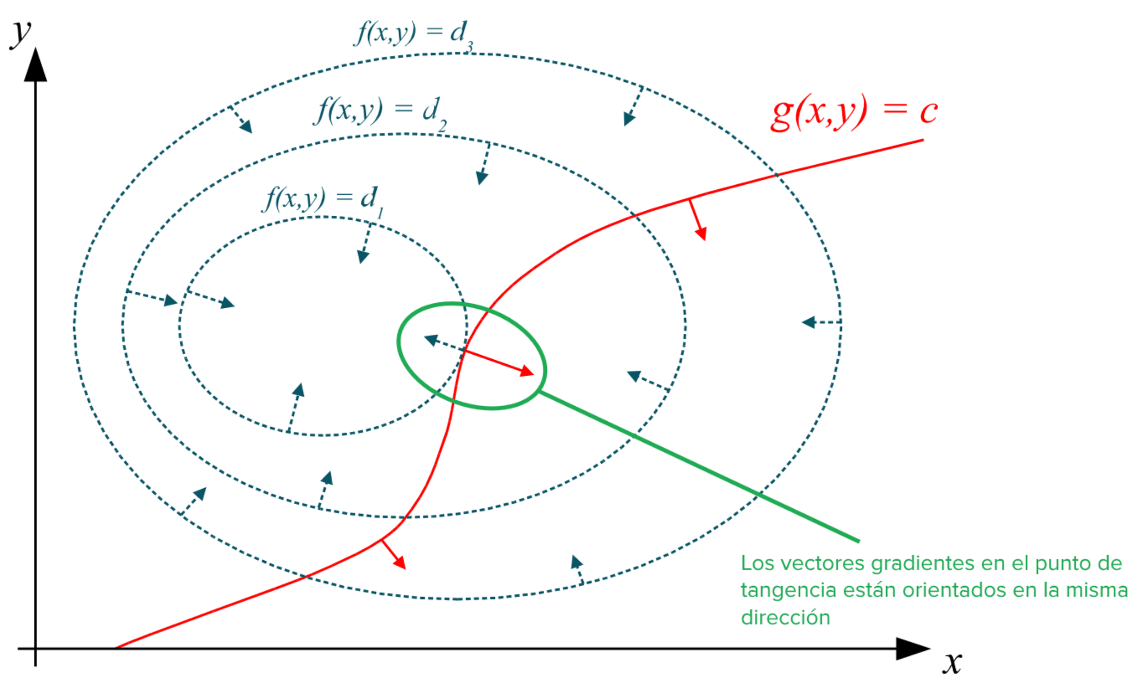
Este método permite hallar analíticamente los puntos extremos condicionados de una función suave, es decir, con derivadas parciales continuas.

Sea f(x, y) la función objetivo. Supongamos que (x, y) están condicionadas por la ecuación g(x, y) = K. Las funciones f y g son suaves.

Para dar una interpretación geométrica del método consideremos una función de dos variables f(x, y), cuyos extremos queremos hallar estando sujeta a la restricción g(x, y)=k, que en el plano representa una curva.

No buscamos valores extremos de f (x, y) para cualquier punto del dominio de la función sino para aquellos (x, y) que están sobre la curva de nivel g (x, y) =C

Por ejemplo la figura muestra esta curva junto con varias curvas de nivel de f.



Así maximizar f(x, y) sujeta a la restricción g(x, y)=C es encontrar el mayor valor de d para el que ambas curvas f(x, y)=d y g(x, y)= C se intersequen, que observando la figura anterior ocurre cuando ambas curvas son tangentes, es decir, cuando tienen una tangente común, lo que viene a significar que las normales a ambas curvas en el punto de tangencia, que denominamos $(x_0; y_0)$son iguales ;

¿ y qué queremos decir con esto matemáticamente?, pues que ambos gradientes son paralelos, esta es la observación clave. Así que podremos escribir que:

∇f $(x_0; y_0)$=λ∇g $(x_0; y_0)$
Donde λ es un escalar, precisamente el que denominamos multiplicador de Lagrange.

Teorema
Método de Lagrange para funciones de dos variables y una condición
Sean $f(x; y)$ y $g(x; y)$ dos funciones con derivadas parciales continuas tal que, f tiene un extremo en el punto ($x_0; y_0$)que pertenece a la curva suave dada por g (x, y) = 0 y ∇g($x_0; y_0) \neq 0$ entonces existe un numero real λ denominado multiplicador de Lagrange, tal que ∇f $(x_0; y_0)$=λ∇g $(x_0; y_0)$ **(1)**

Este teorema nos dice que los puntos $(x; y)$ tales que $g(x; y) = 0$ y $\nabla g(x_0; y_0) \neq 0$ que no cumplen la condición no tienen posibilidades de ser extremos de $f(x; y)$ restringida al vínculo $g(x; y)$=0

Método de Lagrange para funciones de dos variables y una condición
Suponiendo que f (x, y) tiene un extremo sujeto a la restricción g(x, y) = 0, donde f y g cumplen los requisitos del Teorema de Lagrange, para buscar los candidatos a extremos se procede de la siguiente forma:

1. Encontrar las soluciones del sistema de siguiente sistema de ecuaciones
$f_x(x; y) = \lambda\, g_x(x; y)$
$f_y(x; y) = \lambda\, g_y(x; y)$
$g(x; y) = 0$
2. Encontrar, si existen, los puntos (x, y) que verifican el vínculo $g(x; y) = 0$ y cumplen $\nabla g \neq 0$

Observación
Se debe resolver un sistema (no lineal, en general) de 3 ecuaciones con 3 indeterminadas, que puede tener una o más soluciones. Sin embargo, no todas las soluciones del sistema de ecuaciones corresponden a candidatos a extremos restringidos de f (la colinealidad de los gradientes es condición necesaria pero no suficiente). Cuando el vínculo determina una región cerrada y acotada es posible evaluar f en cada una de las soluciones obtenidas y comparar los valores funcionales. El menor valor será el mínimo condicionado y el mayor valor será el máximo condicionado de f bajo la ligadura g(x, y) = 0.

Por otro lado, si la solución consiste de un único punto o el vínculo no determina una región cerrada y acotada, se debe inspeccionar la función en puntos de su entorno (que satisfagan la ligadura) para justificar si se trata localmente de un mínimo o un máximo condicionado, o un punto silla

Nota: El método lo realizó uno de los matemáticos más grandes del siglo XVIII, Joseph Lagrange, cuando tenía 19 años.

Aplicamos lo expuesto para resolver el ejemplo enunciado inicialmente

Ejemplo 1

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio *r*.

Para resolver este problema se trata de maximizar la función

$A(x;y) = f(x;y) = 2xy$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = r^2$

Planteamos el sistema de ecuaciones expuesto en el método de Lagrange

$2y = 2x\,\lambda$ **(1)**

$2x = 2y\,\lambda$ **(2)**

$x^2 + y^2 = r^2$ **(3)**

De **(1)** y **(2**) tenemos que $x = y$

Reemplazando en **(3)** tenemos

$y^2 + y^2 = r^2 \rightarrow 2y^2 = r^2 \rightarrow y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ y como $x = y$; $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$

$A(x;y) = 2xy = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$

El rectángulo de área máxima que puede ser inscripto en una semicircunferencia de radio r debe ser un cuadrado de lado igual a $\frac{r}{\sqrt{2}}$

Se sabe que este valor es máximo por comparación con otros valores (x, *y)* que cumplan la condición $y^2 + y^2 = r^2$

Ejemplo 2

La ecuación $2x^4 + 3y^4$=32 representa el borde de la pantalla de un monitor. Si el campo eléctrico viene dado por la función

$f(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Hallar los valores máximos y mínimos de este sobre el borde de la pantalla

sea $g(x;y) = 2x^4 + 3y^4 - 32$

Tenemos que hallar los extremos del campo eléctrico sobre el borde de la pantalla del monitor, por lo tanto se nos presenta el problema de hallar los valores máximos y mínimos de una función , sujetos a cierta restricción por lo que podemos plantear : $\nabla f(x;y) = \lambda \nabla g(x;y)$

Escribimos el sistema de ecuaciones

$-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lambda 8x^3$

$-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lambda 12y^3$

$2x^4 + 3y^4 - 32 = 0$

Despejando λ tenemos

$\frac{x}{y} = \frac{2x^3}{3y^3} \rightarrow 3xy^3 - 2\mathrm{yx}^3 = 0$

Sacamos factor común xy

$xy(3y^2 - 2\mathrm{x}^2) = 0$

Analizamos todas las posibilidades

1) x=0 ó $(3y^2 - 2\mathrm{x}^2) = 0$ ∴ y= $\mp\sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{x}$

Tomamos y= $\mp\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{x}$

Reemplazando en $2x^4 + 3y^4$=32

$2x^4 + \frac{4}{3}x^4$=32 ; $\frac{10}{3}x^4 = 32 \rightarrow x = \mp\sqrt[4]{\frac{96}{10}}$ ∴ $y == \mp\sqrt[4]{\frac{192}{30}}$

$P_1(\mp\sqrt[4]{\frac{96}{10}}$ ¸ $\mp\sqrt[4]{\frac{192}{30}}$) → $f(x;y) = 0{,}44$

Tomamos x=0

Reemplazando en $2x^4 + 3y^4$=32

$3y^4$=32 $\rightarrow y = \mp\sqrt[4]{\frac{32}{3}}$

$P_2(0;\ \mp\sqrt[4]{\frac{32}{3}})$ → $f(x;y) = 0{,}55$

2) y=0 ó $(3y^2 - 2\mathrm{x}^2) = 0$ ∴ x= $\mp\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{y}$

Tomamos x= $\mp\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{y}$

Reemplazando en $2x^4 + 3y^4$=32

$\frac{9}{2}y^4 + 3y^4$=32

$\frac{15}{2}y^4 = 32 \rightarrow y = \mp\sqrt[4]{\frac{64}{15}}$ $\quad\therefore\ x == \mp\sqrt[4]{\frac{192}{30}}$

$P_3(\mp\sqrt[4]{\frac{192}{30}};\ \mp\sqrt[4]{\frac{64}{15}})$ → $f(x;y) = 0{,}55$

+Tomamos y=0

Reemplazando en $2x^4 + 3y^4$=32

$2x^4$=32 x= $\mp\sqrt[4]{\frac{32}{2}}$ =∓2

$P_4(\mp 2;0)$→ $f(x;y)$ =0,5

Comparamos los valores obtenidos de la función en los diferentes puntos hallados el mínimo será 0,44 y el máximo 0,55.

Ejemplo 3

De todos los puntos de la circunferencia unidad del plano, hallar los que hagan máximo o mínimo el producto de sus coordenadas.

Planteamos la función objetivo, o sea la que hay maximizar o minimizar

$f(x;y) = xy$

Los puntos deben estar sobre la circunferencia unidad

$g(x;y) = x^2 + y^2 - 1$

Planteamos las ecuaciones

$y = 2x\lambda$

$x = 2y\lambda$

$x^2 + y^2 = 1$

Despejamos λ de las dos primeras ecuaciones

$\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$ → $2y^2 = 2x^2$ → $y = \mp x$

Si considero $y = x$ y reemplazamos en la ecuación de enlace tenemos:

$x^2 + x^2 = 1$

$2x^2 = 1$→ $x = \frac{1}{\mp\sqrt{2}}$ Tenemos dos puntos $P_1(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}})$ $P_2(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$

Si considero $y = -x$ y reemplazamos en la ecuación de enlace tenemos:

$x^2 + (-x)^2 = 1$

$2x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\mp\sqrt{2}}$ Tenemos dos puntos $P_3(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}})$ $P_4(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}})$

Vemos que ocurre en cada punto

$$\boldsymbol{f}(P_1) = \boldsymbol{f}(P_2) = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{f}(P_3) = \boldsymbol{f}(P_4) = -\frac{1}{2}$$

Existe máximo en los dos primeros puntos P_1y P_2.
Existe mínimo en P_3y P_4.

Método de Lagrange para funciones de tres variables y una condición
El argumento que hemos descripto para determinar los extremos condicionados de una función de dos variables también se aplica al problema de hallar los valores extremos de $f(x; y, z)$ sujetos a la restricción $g(x; y, z) = k$

El punto $(x; y, z)$ se restringe a estar sobre la superficie de nivel S con ecuación $g(x; y, z) = k$.

En lugar de curvas de nivel se consideran superficies de nivel $f(x; y, z) = C$ y argumentamos que si el valor máximo de f es $f(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0)$ =C, entonces la superficie de nivel $f(x; y, z) = C$ es tangente a la superficie de nivel $g(x; y, z) = k$, de modo que los vectores gradientes correspondientes son paralelos.

Este argumento intuitivo lo formalizamos de la siguiente manera:

Si f tiene un extremo en el punto $P(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0)$ sobre S y se C una curva con ecuación vectorial:

$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ que está en S y pasa por P . Si $t_{0\,;}$ es el parámetro correspondiente al punto P entonces $r(t_0) = (x_{0\,;}\, y_{0;}\, z_0)$.

La composición $h(t) = f[x(t); y(t); z(t)]$ representa los valores que f toma sobre la curva C.
Como f tiene un valor extremo en $(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0)$, entonces h tiene un valor extremo en $t_{0\,;}$ por lo tanto se debe verificar que $h'(t_{0\,;}) = 0$.

Si f es diferenciable podemos aplicar la regla de la cadena.

$$h'(t_0)f_x(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0)x'(t_0) + f_y(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0)y'(t_0) + fz(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0)z'(t_0) = \nabla f(x_{0\,;}\, y_{0;}z_0).\, r'(t_0) = 0$$

Esto muestra que el vector gradiente $\nabla f\left(x_{0\,;}\,y_{0;}z_0\right)$ es ortogonal al vector tangente $r'(t_0)$ para toda curva C.

Por lo estudiado anteriormente sabemos que $\nabla g\left(x_{0\,;}\,y_{0;}z_0\right)$ también es ortogonal a $r'(t_0)$.

Esto significa que los vectores $\nabla f\left(x_{0\,;}\,y_{0;}z_0\right)$ y $\nabla g\left(x_{0\,;}\,y_{0;}z_0\right)$ son paralelos por lo que podemos escribir:

$\nabla f\,(x_0; y_0; z_0) = \lambda \nabla g\,(x_0; y_0\;; z_0)$

Método de Lagrange

Para calcular los valores máximos y mínimos $f(x; y, z)$ sujetos a la restricción $g(x; y, z) = k$, suponiendo que estos extremos existen se procede de la siguiente forma:

1. Encontrar las soluciones del sistema de siguiente sistema de ecuaciones
$f_x(x; y; z) = \lambda\, g_x(x; y; z)$
$f_y(x; y; z) = \lambda\, g_y(x; y; z)$
$f_z(x; y; z) = \lambda\, g_z(x; y; z)$
$g(\,x; y; z) = 0$
2. Encontrar, si existen, los puntos (x; y; z) que verifican el vínculo $g(\,x; y; z) = 0$ y cumplen $\nabla g \neq 0$

Ejemplo 4
Encuentre la distancia más corta del punto A (2, −2, 3) al plano 6x + 4y − 3z = 2.
Sea P(x, y, z) un punto del plano dado. Se pide encontrar el mínimo de d(A, P):
d(A, P) = $\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}$

Para facilitar el cálculo definimos la función

f (x, y, z) = $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2$

que es el cuadrado de la distancia d(A, P) (un mínimo de f también es un mínimo de d, como ya vimos).

Las coordenadas del punto P deben satisfacer la ecuación del plano, dicho de otra forma están vinculadas por la ecuación 6x + 4y − 3z − 2 = 0, por lo cual definimos la función auxiliar

g(x, y, z) = 6x + 4y − 3z − 2 cuyo gradiente (nos aseguramos) es no nulo en todo R^3 .

Tenemos entonces todos los elementos para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange:

2(x − 2) =6 λ

2(y + 2) = 4 λ

2(z − 3) = (−3) λ

$6x + 4y - 3z - 2 = 0$

Para resolver este sistema, es conveniente en este caso despejar x, y, z de las 3 primeras ecuaciones en términos de λ, y usarlo en la cuarta ecuación, que quedará solamente en función del multiplicador de Lagrange.

Se tiene:

$x = 3\lambda + 2$,

$y = 2\lambda - 2$,

$z = -\frac{3}{2}\lambda + 3$,

luego reemplazando en la cuarta ecuación queda

$6(3\lambda + 2) + 4(2\lambda - 2) -3(-\frac{3}{2}\lambda + 3)-2=0$

$18\lambda + 12 + 8\lambda - 8 + \frac{9}{2}\lambda- 9 -2=0$

$\frac{61}{2}\lambda = 7 \rightarrow \lambda = \frac{14}{61}$ reemplazando este valor tenemos

$x = 3\lambda + 2$, $x = 3(\frac{14}{61}) + 2$ $\rightarrow x = \frac{164}{61}$

$y = 2\lambda - 2$, $y = 2(\frac{14}{61}) - 2$ $\rightarrow y = -\frac{94}{61}$

$z = -\frac{3}{2}\lambda + 3$, $z = -\frac{3}{2}(\frac{14}{61}) + 3$, $\rightarrow z = \frac{162}{61}$

Luego el punto buscado es $P\left(\frac{164}{61}; -\frac{94}{61}; \frac{162}{61}\right)$

(Verificar que pertenece al plano), que está a una distancia $d=\frac{\sqrt{62941}}{61} = 4{,}41$ del punto A. La respuesta al ejercicio no está completa aún: falta justificar que este punto que es la única solución hallada, es efectivamente el punto del plano más cercano (a menor distancia), y no el más lejano, a A. Un gráfico nos convencerá de ello (o elegir otro punto cualquiera que satisfaga el vínculo, o sea que esté sobre el plano dado, y ver que su distancia a A es mayor que la hallada

Dos restriciones

Se desea calcular los valores máximos y mínimos de una función $f(x,y,z)$sujeta a dos restricciones de la forma $g(x,y,z)=k$ y $h(x,y,z)$=C.

Geométricamente esto quiere decir que se está buscando los valores extremos de la función f cuando (x, y, z) estén restringidos a estar en la curva de intersección C de las superficies de nivel $g(x,y,z)=k$ y $h(x,y,z)$=C

Se puede demostrar que si un valor extremo ocurre en ($x_{0\,;}\, y_{0;} z_0$), entonces el vector gradiente $\nabla f\left(x_{0\,;}\, y_{0;} z_0\right)$ está en el plano determinado por $\nabla g\left(x_{0\,;}\, y_{0;} z_0\right)$ y $\nabla h\left(x_{0\,;}\, y_{0;} z_0\right)$, así que existen los números λ y μ tal que

$\nabla f(\, x_{0\,;}\, y_{0;} z_0)$ = $\lambda \nabla g(x_{0\,;}\, y_{0;} z_0)$ + $\mu \nabla h(x_{0\,;}\, y_{0;} z_0)$

Verificando que ∇g y ∇h son no nulos y no colineales entre sí.
En este caso el método de los multiplicadores de Lagrange se utiliza para buscar los valores extremos al resolver cinco ecuaciones con cinco incógnitas x, y,z, λ y μ .Estas ecuaciones se obtienen al escribir la ecuación anterior en términos de sus componentes y las ecuaciones de enlace:

$f_x(x;y;z) = \lambda\, g_x(x;y;z)+\ \mu h_x(x;y;z)$
$f_y(x;y;z) = \lambda\, g_y(x;y;z))+\ \mu h_y(x;y;z)$
$f_z(x;y;z) = \lambda\, g_z(x;y;z)\ +)+\ \mu h_z(x;y;z)$
$g(\,x;y;z) = k$
$h(\,x;y;z) = C$

Ejemplo 5
Encontrar los valores extremos de la función $f(x,y,z)= x+2y$ sobre la curva de intersección del plano $x+y+z=1$ con el cilindro $y^2+z^2=4$

Planteamos el sistema de ecuaciones

$1 = \lambda$ (1)

$2 = \lambda + 2\mu y$ (2)

$0 = \lambda + 2\mu z$ (3)

$x+y+z=1$ (4)

$y^2+z^2=4$ (5)

De (1) $\lambda = 1$

Reemplazando λ en (2) , $2\mu y = 1 \rightarrow \mu = \frac{1}{2y}$

Reemplazando λ en (3) $\mu = \frac{-1}{2z}$

Igualando las expresiones obtenidas de μ

$$\frac{1}{2y} = \frac{-1}{2z}$$

$2z = -2y \rightarrow z = -y$

Si $z = -y$

Reemplazando en (5)

$y^2 + (-y)^2 = 4$

$2y^2 = 4 \rightarrow y = \mp\sqrt{2}$

Si $\boldsymbol{y = \sqrt{2} \rightarrow z = -\sqrt{2}}$

Reemplazando en (4) los valores obtenidos

S$i\ x + y + z = 1$

$x + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1 \rightarrow x = 1$

$P_1(1, \sqrt{2}; -\sqrt{2}\,)$

Si $\boldsymbol{y = -\sqrt{2} \rightarrow z = \sqrt{2} \rightarrow x = 1}$

$P_2(1, -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\,)$

$\boldsymbol{f}(P_1) = 1 + 2\sqrt{2} = 3;82$ $\qquad$ $\boldsymbol{f}(P_2) = 1 - 2\sqrt{2} = -1;82$

La función alcanza un mínimo en P_2 y un máximo en P_1

Prof. María Graciela Ribas

El objetivo de este apunte es ayudar a los estudiantes de segundo año de la carrera de Ingeniería Electromecánica de la Facultad Regional Reconquista a complementar su estudio de la asignatura Análisis Matemático II Se recomienda, que además de este trabajo, utilice otros textos de cálculo .

Nota: Si detectas algún error ponte en contacto con algunos de los integrantes del equipo de cátedra para su corrección.