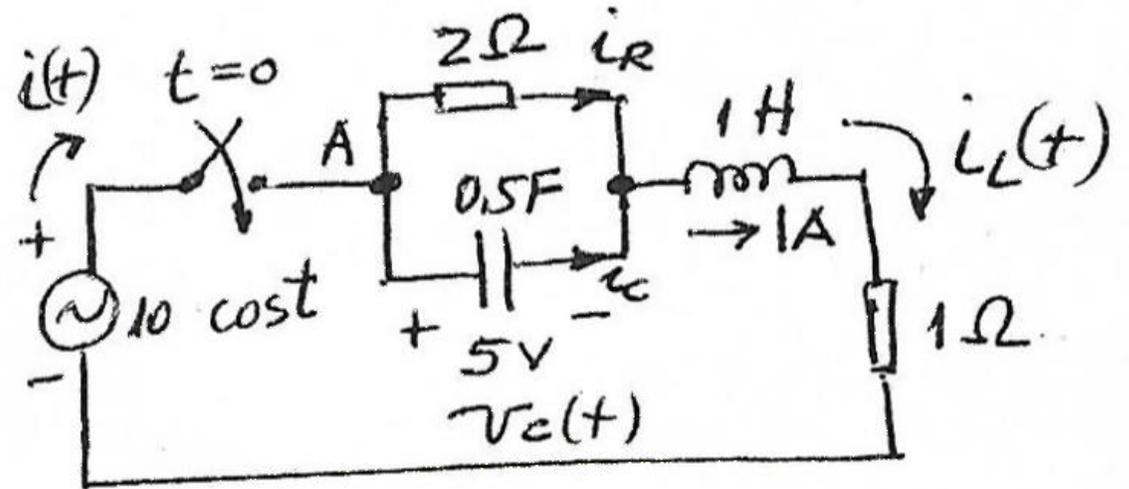


# Respuesta completa a una Excitación Sinusoidal Segundo Orden

En el circuito de la figura se cierra la llave para  $t=0$ , momento en el cual  $v_C = 5V$  (con la polaridad que se muestra) e  $i_L = 1A$  (con el sentido que se muestra)



Se pide calcular:

a) la tensión  $v_C(t)$  a bornes del condensador

b) la corriente  $i(t)$  que suministra la fuente.

Cuando se cierra la llave, la ecuación de Kirchoff es:

$$\left[ 100 \cos t = v_c(t) + i_L \times 1 + 1 \frac{di_L}{dt} \right] (1)$$

En el nodo A se cumple  $i(t) = i_R(t) + i_c(t)$

$$\textcircled{*} \quad i(t) = \frac{v_c(t)}{2} + 0,5 \frac{dv_c}{dt} = i_L(t) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{La corriente que sale} \\ \text{de la fuente es la misma} \\ \text{que la del inductor} \end{array} \right.$$

que llevamos a (1) para obtener:

$$100 \cos t = v_c + \frac{v_c}{2} + 0,5 \frac{dv_c}{dt} + \left( 0,5 \frac{dv_c}{dt} + 0,5 \frac{d^2 v_c}{dt^2} \right)$$

$$\left[ 100 \cos t = 1,5 v_c + \frac{dv_c}{dt} + 0,5 \frac{d^2 v_c}{dt^2} \right] (2)$$

La respuesta natural la obtenemos de la ecuación homogénea

$$0,5 \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} + 1,5 v_c = 0$$

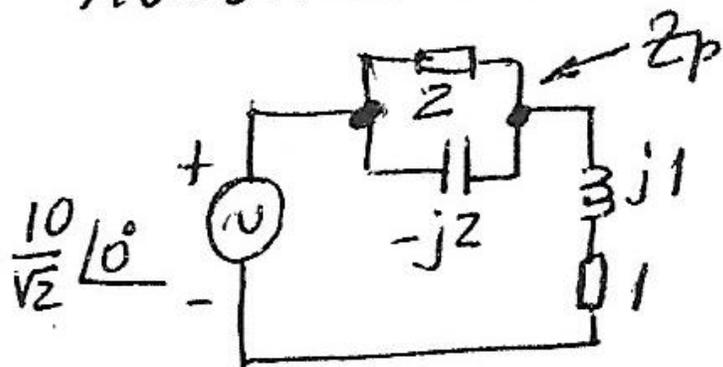
cuya ecuación característica es  $[0,5 s^2 + s + 1,5 = 0]$  (3)

cuyas raíces son:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \omega = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$[v_{cn}(t) = A e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2} t + \theta)] \quad (4)$$

Para obtener la RESPUESTA FORZADA, hay que trabajar nuevamente con los FASORES.



$$j\omega L = j1 \times 1 = j1$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1 \times \frac{1}{2}} = -j2$$

Tenemos un divisor de tensión entre dos impedancias  $Z_p$  y  $Z_s$ .

$$Z_p = \frac{2(-j2)}{2-j2} = \frac{-j4}{2\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \frac{4 \angle -90^\circ \angle 45^\circ}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \angle -45^\circ$$

[Paralelo de  $R=2$  y el capacitor]

$$Z_s = 1 + j1 = \sqrt{2} \angle +45^\circ$$

[Serie de 1 y el inductor]

$$V_c = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{(Z_p + Z_s)} Z_p = \frac{\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle -45^\circ + \sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{10 \angle -45^\circ}{2}$$

$$V_c = 5 \angle -45^\circ \quad \therefore \left[ v_{cf}(t) = 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) \right] (5)$$

Entonces la respuesta COMPLETA será:

$$\left[ v_c(t) = 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) + A e^{-t} \sin(\sqrt{2}t + \theta) \right] (6)$$

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 5 \text{ V} \quad \therefore \text{Evaluando (6) para } t=0$$

$$5 = 5\sqrt{2} \cos(-45^\circ) + A \sin \theta$$

$$5 = 5 + A \sin \theta \quad \therefore A \sin \theta = 0 \quad \therefore \left[ \theta = 0 \right] (7)$$

De la ecuación  $\textcircled{*}$  obtenida para el nodo A

$$\left[ i_L(t) = \frac{v_c}{2} + 0,5 \frac{dv_c}{dt} \right] \text{ y sabiendo que la condición}$$

inicial en el inductor es  $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 1A$

$$\left[ 1 = \frac{1}{2} v_c(0^+) + 0,5 \left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0} \right] \text{ (8)}$$

← Esto requiere obtener la derivada de (6) y evaluarlo para  $t=0$

la  $dv_c/dt$  es la siguiente:

$$\frac{dv_c}{dt} = -5\sqrt{2} \text{sen}(t-45^\circ) + \left[ A e^{-t} \cos(\sqrt{2}t + \theta) \sqrt{2} - \text{sen}(\sqrt{2}t + \theta) A e^{-t} \right]$$

Como sabemos que  $\theta = 0$  [ver (7)], evaluamos para  $t = 0$

$$\left. \frac{dV_c}{dt} \right|_{t=0} = -5\sqrt{2} \operatorname{sen}(-45^\circ) + [A \cos 0^\circ \sqrt{2} - \operatorname{sen} 0^\circ A] =$$

$$\left. \frac{dV_c}{dt} \right|_{t=0} = +5 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + A\sqrt{2} - 0^\circ = 5 + A\sqrt{2} \quad \text{que llevamos a (8)}$$

$$1 = \frac{1}{2} \times 5 + 0,5 \underbrace{(5 + A\sqrt{2})}_{\left. \frac{dV_c}{dt} \right|_{t=0}} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{A}{2} \sqrt{2}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\uparrow$   
 $i_L(0^+)$   $v_c(0^+)$   $\left. \frac{dV_c}{dt} \right|_{t=0}$

$$1 = 5 + \frac{A}{2} \sqrt{2} \quad \therefore [A = -4\sqrt{2}] \quad \text{que llevamos a (6)}$$

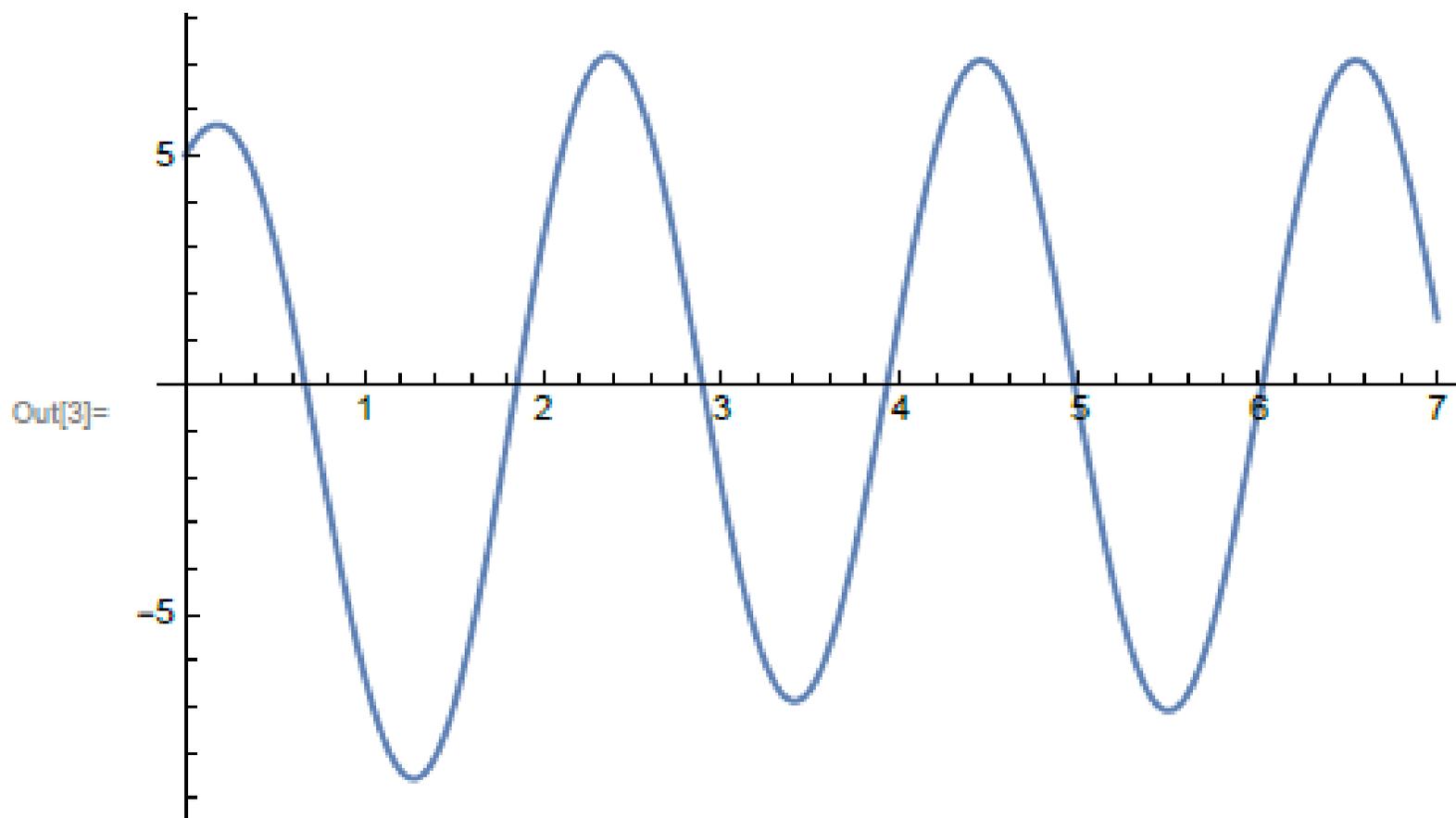
$$\left[ v_c(t) = 5\sqrt{2} \cos(t - 45^\circ) - e^{-t} 4\sqrt{2} (\operatorname{sen} \sqrt{2} t) \right] \quad (9)$$

In[2]:=

$$v1[t_] = 5 \sqrt{2} \underset{\text{[coseno]}}{\text{Cos}} \left[ 3 t - \frac{\text{Pi}}{4} \right] - 4 \sqrt{2} \underset{\text{[seno]}}{\text{Sin}} \left[ \sqrt{2} t \right] E^{-t};$$

**Plot[v1[t], {t, 0, 7}]**

[representación gráfica]



que es la solución buscada para el inciso (a)  
 Para obtener la solución al inciso (b), se usará  
 la (9) ya que

$$(11) \quad i_L(t) = \frac{1}{2} v_c(t) + \frac{1}{2} \frac{dv_c}{dt} \quad \text{y la derivada de la (9)}$$

Recordemos que  $i_L(t) =$  corriente que sale de FUENTE

$$(10) \quad \frac{dv_c}{dt} = -5\sqrt{2} \operatorname{sen}(t-45^\circ) - \left[ 4\sqrt{2} e^{-t} \sqrt{2} \cos\sqrt{2}t - 4\sqrt{2} \operatorname{sen}\sqrt{2}t e^{-t} \right]$$

Llevando (9) y (10) a (11)

$$(12) \quad i_L(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cos(t-45^\circ) - \frac{4}{2} \sqrt{2} e^{-t} \operatorname{sen}\sqrt{2}t + \left[ -\frac{5\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(t-45) - \frac{4 \times 2}{2} e^{-t} \cos\sqrt{2}t + \frac{4}{2} \sqrt{2} \operatorname{sen}\sqrt{2}t e^{-t} \right]$$

Recorde-mos que  $\cos(t-45^\circ) = \cos t \cos 45^\circ + \sin t \sin 45^\circ$

$$\left[ \cos(t-45^\circ) = \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$y \left[ \sin(t-45^\circ) = \sin t \cos 45^\circ - \cos t \sin 45^\circ = \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \therefore$$

$$i_L(t) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t + \sin t) - \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} (\sin t - \cos t) - 4e^{-t} \cos \sqrt{2} t$$

$$\left[ i_L(t) = 5 \cos t - 4e^{-t} \cos \sqrt{2} t \right] \quad (13)$$

In[4]:=  $i2[t_] = 5 \text{Cos}[t] - 4 E^{-t} \text{Cos}[\sqrt{2} t]$ ; Plot[i2[t], {t, 0, 7}]

└coseno                   └coseno                   └representación gráfica

