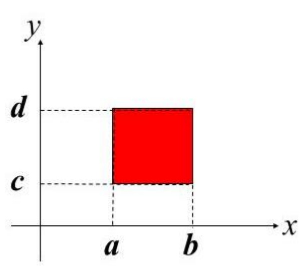
UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA
ANALISIS MATEMATICO II
UNIDAD 4

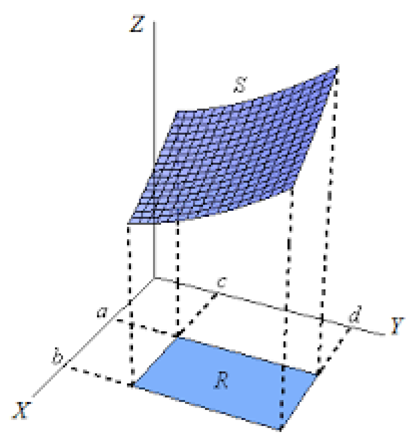
INTEGRALES MULTIPLES

En este tema, se generaliza el concepto de integral definida a funciones de dos variables $f(x;y)$, sobre una región en el plano o tres variables $f(x;y;z)$, sobre una región en el espacio. Estas integrales se conocen como **integrales múltiples** y se definen como el límite de las sumas de Riemann, de manera similar al caso de las integrales de una variable.
Esto nos permitirá calcular el volumen de cuerpos limitados por superficies, no necesariamente de revolución., calcular áreas mediante integrales dobles sencillas que utilizando integrales definidas, resultaban algo más complicadas, además de otras aplicaciones como, momentos y centros de masa.
Se empezará definiendo la integral sobre un rectángulo.

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

Sea $f(x;y)$ una función acotada sobre un rectángulo R, siendo R
R = [a, b] × [c, d]=$\{(x;y) \in R^2\ ;\ \ a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$



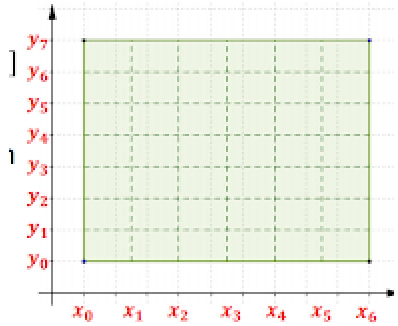


Subdividimos R en pequeños rectángulos, mediante rectas paralelas a los ejes
a = $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots x_i < \cdots < x_n = b$

c = $y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \cdots y_i < \cdots < y_n$ =d

Estos rectángulos forman una partición de R

Cada uno de estos subrectangulos de ancho Δx y altura Δy tienen un área ΔA_i.



Si numeramos los rectángulos pequeños que dividen a R en cierto orden, entonces sus áreas están dadas

$\Delta A_1,\ \Delta A_2,\ \Delta A_3,,\ \Delta A_4,,\ \Delta A_5,\ \ldots\ldots.\ \Delta A_i,\ \ldots..\ \Delta A_n,$

Tomamos un punto interior a cada uno de estos rectángulos:

$(x_1;\ y_1), (x_2;\ y_2), (x_3;\ y_3), (x_4;\ y_4), \ldots\ldots\ldots..(x_i;\ y_i), \ldots..(x_n;\ y_n),$

Hallamos el valor de $f(x;y)$ en cada uno de estos puntos lo multiplicamos por el área del subrectangulo correspondiente y sumamos todos los productos así obtenidos.

$f(x_1;y_1)\Delta A_1 + f(x_2;y_2)\Delta A_2 + f(x_3;y_3)\Delta A_3 + f(x_4;y_4)\Delta A_4 + \cdots + f(x_i;y_i)\Delta A_i + \ldots.. + f(x_n;\ y_n)\Delta A_n,$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta A_i$

Esta sumatoria es llamada Suma de Riemann para $f(x;y)$

¿Qué ocurre con las sumas de Riemann cuando las dimensiones de todos los pequeños rectángulos de la partición de R tienden a cero? La norma de una partición P, representada por $|P|$es la longitud de la diagonal más grande de todos los subrectangulos en la partición.
Si dejamos que $|P| \to 0$, de modo que las dimensiones de cada rectángulos tienda a cero y el número de los rectángulos contenidos en R sea cada vez mayor tenemos

$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i\,;y_i)\Delta A_i = \iint_R\ f(x;y)dA$

Definición:
La integral doble de $f(x;y)$ sobre el rectángulo R es:
$\iint_R\ f(x;y)dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i\,;y_i)\Delta A_i$

Si es que existe el límite

Nota 1

En virtud de que $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$, otra notación que se utiliza para expresar una integral doble es

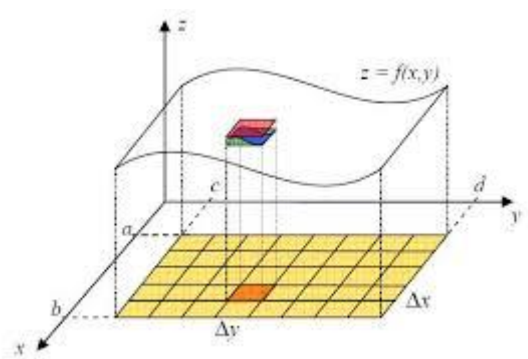
$$\iint_R f(x;y)dA = \iint_R f(x;y)\,dxdy$$

Nota 2

Se dice que f es integrable sobre R si el límite enunciado en la definición existe.
Se puede demostrar que toda función continua en una región cerrada y acotada es integrable

Interpretación de las integrales dobles

Cuando *f* (*x*, *y*) es una función positiva sobre una región rectangular *R* del plano xy, podemos Interpretar la integral doble de f sobre *R* como el volumen de la región sólida tridimensional en el plano xy acotada abajo por *R* y arriba por la superficie $z = f(x;y)$ .Cada término $f(x_i;y_i)\Delta A_i$ en la suma es el volumen de una caja rectangular vertical que se aproxima al volumen de la porción del sólido que está directamente sobre la base ΔA_i



De esta manera, la suma *Sn* se aproxima a lo que llamaremos el volumen total del sólido.
Este volumen se define como:

Volumen= $\lim_{n\to\infty} S_n$=$\iint_R f(x;y)dA$

Definición

Si *f* (*x*, *y*) ≥ 0 y f es continua en el rectángulo R, entonces el volumen V del sólido que esta encima de R y bajo la superficie es

V=$\iint_R f(x;y)dA$

Calculo de áreas

Si *f* (*x*, *y*) =1 sobre *R* →A(R)=$\iint_R 1dA$

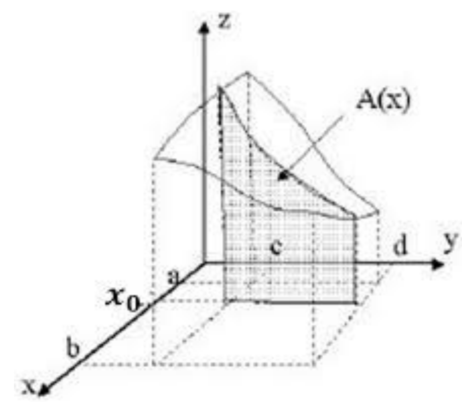
CÁLCULO DE INTEGRALES DOBLES

Sea f una función continua en un rectángulo R = [a, b] × [c, d] .
Si f (x, y) es una función positiva sobre la región rectangular R del plano xy, antes vista, podemos Interpretar la integral doble de f sobre R como el volumen de la región sólida tridimensional en el plano xy acotada abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x; y)$.

Si aplicamos el método de rebanadas estudiado en análisis I, con rebanadas perpendiculares al eje x (ver figura), entonces el volumen se pude calcular como

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Para un valor fijo x_0 en $[a; b]$, $A(x)$ es el área de la sección transversal en x .Para cada valor de x calculamos $A(x)$ mediante
$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$

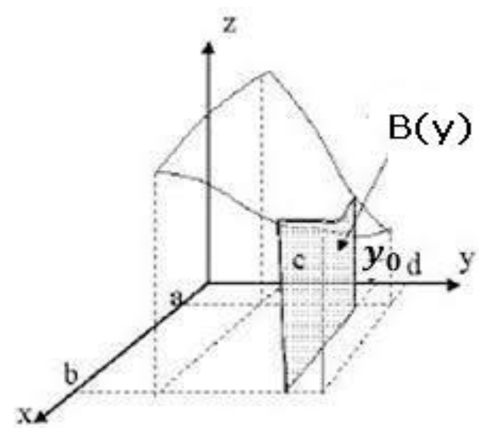


Así tenemos
$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dy\, d\, x$

La integral del lado derecho se llama integral iterada o sucesiva, y dice que el volumen se obtiene integrando primero con respecto a y desde $y = c$ a $y = d$, manteniendo x fija , y luego integrando la expresión resultante en x con respecto a x , desde $x = a$ hasta $x = b$.

¿Qué pasa si calculamos ahora el volumen rebanándolo en planos perpendiculares al eje y?. De igual manera, para un valor fijo y_0 en $[c; d]$, $B(y)$ es el área de la sección transversal en y .Para cada valor de y calculamos $B(y)$mediante

$$B(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$



Volumen=$\int_c^d B(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx\ \ dy$

La expresión de la derecha dice que es posible obtener el volumen integrando con respecto a x desde $x = a$ hasta $x = b$, e integrando el resultado con respecto a y desde $y = c\ hasta\ y = d$. En esta integral iterada, el orden de integración es primero x luego y, a la inversa del orden de la ecuación anterior

¿Qué tiene que ver el cálculo de estos volúmenes mediante integrales iteradas con la integral doble?

La respuesta es que ambas integrales iteradas dan el valor de la integral doble. Esto es lo que razonablemente esperaríamos, puesto que la integral doble mide el volumen de la misma región que las dos integrales iteradas. El teorema publicado de Guido Fubini dice que la integral doble de cualquier función continua sobre un rectángulo se calcula como una integral iterada en cualquier orden de integración.

Por interpretación geométrica de las integrales dobles: Volumen = $\iint_R f(x;y)dA$

Teorema de Fubini

Sea $f(x;y)$ una función continua sobre un rectángulo R, dado por R = [a, b] × [c, d], entonces f es integrable en R, además el valor de la integral doble puede obtenerse por integración sucesiva

$$\iint_R f(x;y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,d\,x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,d\,y$$

El teorema de Fubini dice que las integrales dobles sobre rectángulos se calculan mediante integrales iteradas. Por lo tanto, evaluamos una integral doble integrando con respecto a una variable a la vez.

El teorema de Fubini también dice que la integral doble se calcula integrando en cualquier orden, a nuestra conveniencia. Cuando calculamos un volumen rebanando, usamos planos perpendiculares al eje *x* o planos perpendiculares al eje *y*.

Ejemplo 1

Calcular la integral doble $\iint_R x^2 y dA$, siendo R=$\{(x;y) \in R^2;\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

Aplicamos el teorema de Fubini, integrando primero respecto a *x*

$$\int_0^1 \int_1^2 x^2 y\, dxdy=$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y\right]_1^2 dy=\int_0^1 \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) y\, dy=\int_0^1 \left(\frac{7}{3}\right) y\, dy=\left[\left(\frac{7}{3}\right)\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{7}{6}$$

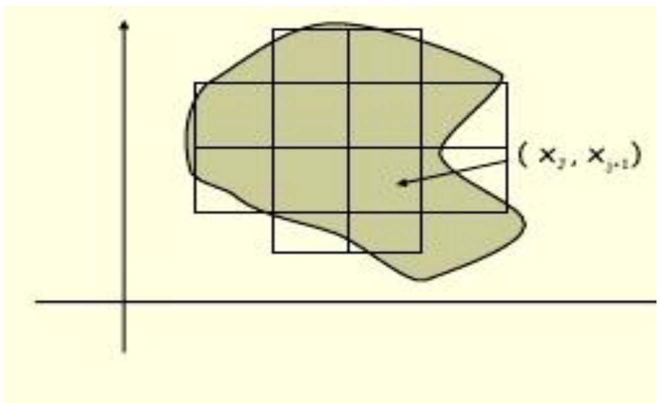
Cambiando el orden de integración

$$\int_1^2 \int_0^1 x^2 y\, dydx= \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2}x^2\right]_0^1 dx =\int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) x^2\, dx =\left[\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{6}$$

INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

Definiremos y evaluaremos integrales dobles sobre regiones acotadas en el plano, más generales que los rectángulos. Estas integrales dobles también se evalúan como integrales iteradas, donde el mayor problema es la determinación de los límites de integración. Como la región de integración tiene límites diferentes de segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados, los límites de integración implican con frecuencia variables, no sólo constantes.

Para definir la integral doble de una función *f* (*x*, *y*) sobre una región acotada no rectangular *R*, nuevamente dividimos la región mediante rectas paralelas a los ejes coordenados



Esta vez, sin embargo, puesto que su frontera es curva, no podemos llenar exactamente *R* con un número finito de rectángulos que se encuentren dentro de *R*, ya que algunos de los pequeños rectángulos están parcialmente fuera de *R*. Para formar una partición de *R* se consideran los rectángulos que están por completo dentro de *R*, sin tomar en cuenta aquellos que están parcial o totalmente afuera. Se cubre una porción cada vez mayor de *R* cuando la norma de la partición tiende a cero.

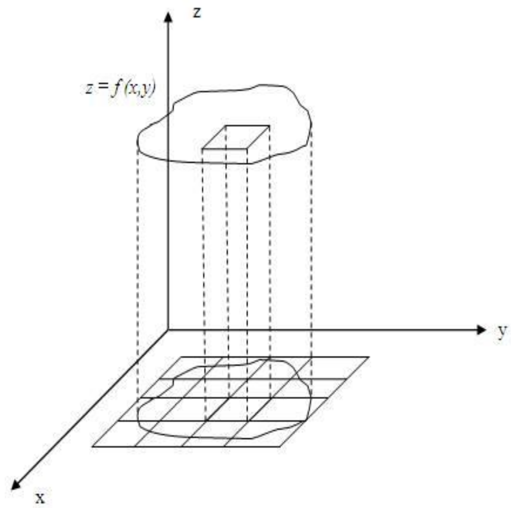
Una vez que tenemos la partición de *R*, numeramos los rectángulos en algún orden desde 1 hasta *n*, y procedemos de igual manera que en el caso de regiones rectangulares.

Tomamos un punto interior a cada uno de los rectángulos, hallamos el valor de $f(x; y)$ en cada uno de estos puntos , multiplicamos por el área correspondiente y sumamos todos los productos así obtenidos y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \Delta A_i$$

Si *f* (*x*, *y*) es una función continua, entonces estas sumas de Riemann tienden a un valor límite, que no depende de la selección del punto que se haya hecho. Este límite se llama **integral doble** de *f* (*x*, *y*) sobre *R*:

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i \,; y_i) \Delta A_i = \iint_R f(x; y) dA$$



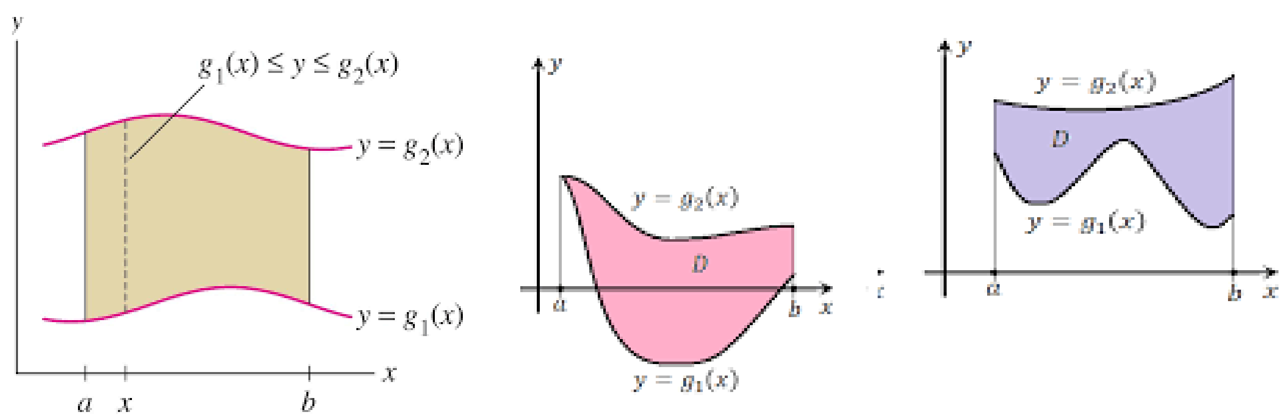
Esta definición permite extender la integración a recintos más generales, en particular, pueden distinguirse dos tipos de recintos

Región tipo I

Definición

Se dice que una región plana D es tipo I si está entre la grafica de dos funciones continuas de x es decir:

D =$\{(x; y) \in R^2\ ;\ \ a \le x \le b,\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

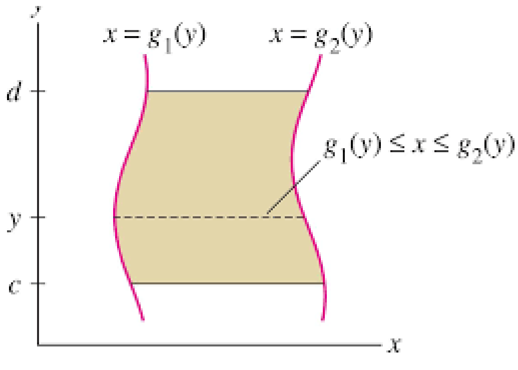


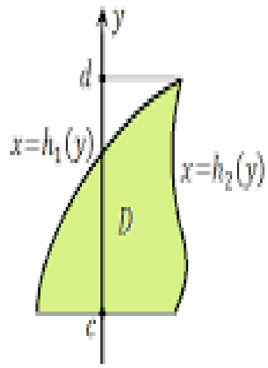
Región tipo II

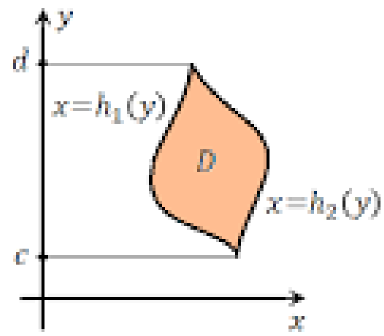
Definición

Se dice que una región plana D es tipo II si está entre la grafica de dos funciones continuas de y es decir:

D =$\{(x; y) \in R^2\ ;\ \ c \le y \le d,\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$







Tenemos entonces las siguientes formulas que nos permite evaluar una integral doble sobre regiones más generales, como si fuera una integral iterada:

- Si $f(x;y)$ es una función continua sobre una región D del tipo I, tal que :

D $=\{(x;y) \in R^2\,;\ a \leq x \leq b,\ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

Entonces $\iint_D\ f(x;y)dA$=$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x} f(x,y)dy\, d\,x$

- Si $f(x;y)$ es una función continua sobre una región D del tipo II tal que :

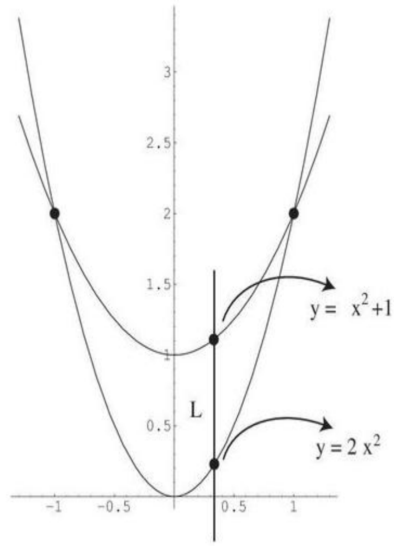
D $=\{(x;y) \in R^2\,;\ c \leq y \leq d,\ \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Entonces $\iint_D\ f(x;y)dA$=$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\ \ dy$

Evaluación de integrales dobles
Ejemplo 2

Evalúe $\iint_D\ (x+2y)dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = x^2+1$ y $y = 2x^2$
Esbozamos la región de integración.
Primero hallamos los puntos de intersección de ambas parábolas: $x^2+1 = 2x^2$
De esa igualdad sale que $x = \mp 1$, los puntos donde se cruzan las curvas son: $(1;2)$ y $(-1;2)$

La región esbozada es del tipo I, por lo que podemos escribir
$D = \{(x;y) \in R^2,\ -1 \leq x \leq 1\,;\ \ 2\,x^2 \leq y \leq\ x^2+1\}$



$\iint_D (x+2y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{2\,x^2}^{x^2+1}(x+2y)dydx$=$\int_{-1}^{1}[xy+y^2]_{2x^2}^{x^2+1}\,dx$=

$= \int_{-1}^{1}[x(\,x^2+1)+(\,x^2+1)\ ^2 - x(2\,x^2)-(2\,x^2)^2]dx = \int_{-1}^{1}(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)dx =$

= $\left[-3\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\,\right]_{-1}^{1}$ = $\frac{32}{15}$

Nota:

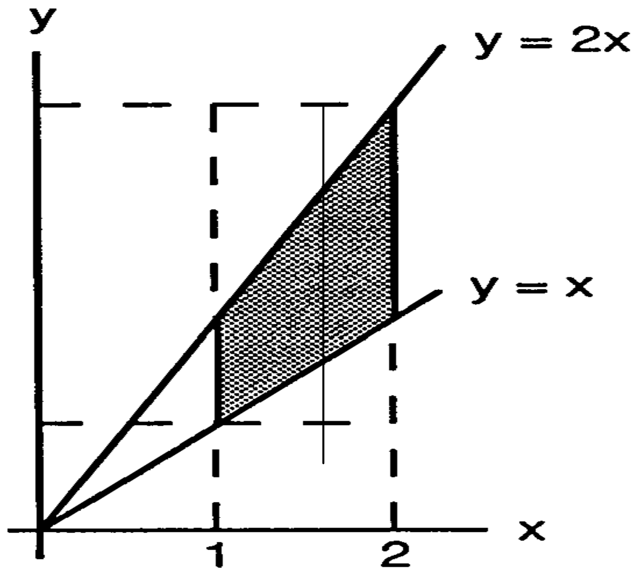
Cuando establecemos una integral doble es útil hacer un diagrama y para regiones del tipo I, dibujar una recta vertical como se ve en el gráfico anterior, para establecer los límites de integración interna, que pueden leerse a partir del diagrama: la recta entra por la frontera inferior $y = g_1(x)$, que es el límite inferior de la integral, y la recta sale en la frontera superior $y = g_2(x)$, que brinda el límite superior de la integración. Para una región del tipo II, la recta es horizontal y va de la frontera izquierda a la derecha.

Ejemplo 3

Calcular la integral doble: $\iint_D (x^2+y^2)dA$, siendo $D = \{(x;y) \in R^2,\ 1 \le x \le 2\,;x \le y \le 2x\}$

Dibujamos la región de integración y a partir de allí observamos en qué orden conviene plantear las integrales iteradas. En este caso observamos que si trazáramos una recta vertical paralela al eje y, entraríamos por la función $y\ = x$, y saldríamos por la curva $y = 2x$, todas las rectas verticales estarían comprendidas en el intervalo [1; 2].Es una región de las que definimos como tipo I.

Planteamos entonces la integral de la siguiente manera:

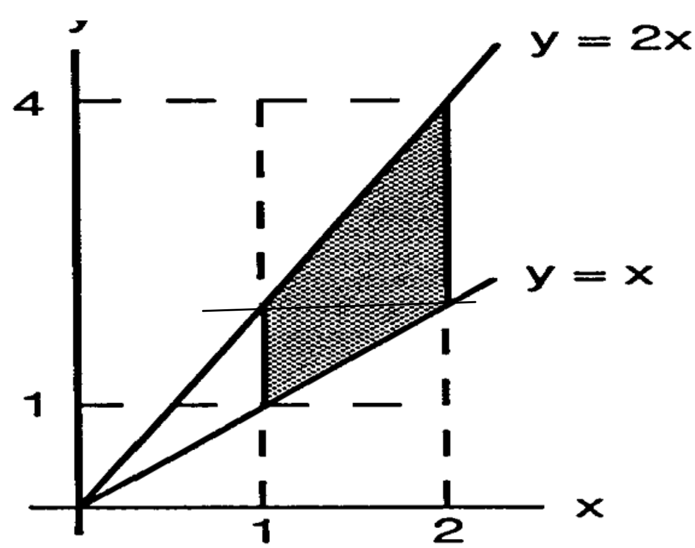


$$\iint_D (x^2+y^2)dA =$$
$$= \int_1^2 \int_x^{2x} (x^2+y^2)dydx = \int_1^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2x} dx = \int_1^2 (2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^3 - \frac{x^3}{3})dx = \int_1^2 \frac{10}{3} x^3 dx =$$
$$= \left[\frac{10x^4}{12}\right]_1^2 = \frac{5}{6}(16-1) = \frac{15}{2}$$

Integramos primero con respecto a y, dejando x constante y la función así obtenida con respecto a x.

Algunas regiones pueden escribirse indistintamente como de tipo I o de tipo II. En estos casos, se elige aquella en donde la integral resulte más fácil o más corta de evaluar.
En este ejemplo para expresar la región como tipo II, habría que escribir la región de integración como la unión de dos regiones: $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x;\ y) \in R^2,\ 1 \le y \le 2\ ;1 \le x \le y\}$

$D_2 = \{= \{(x; y) \in R^2,\ 2 \le y \le 4\ ; y/2 \le x \le 2\}$

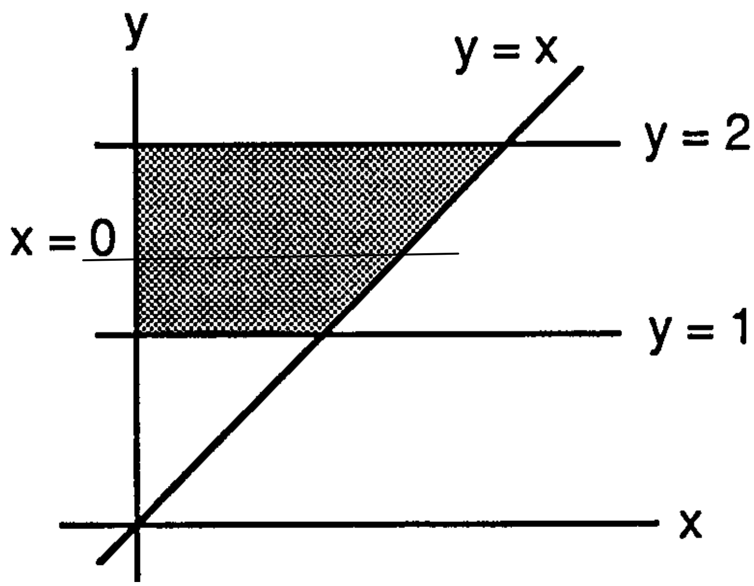


Si bien el cálculo no presentaría mayores dificultades, resultaría más laborioso, porque habría que calcular dos integrales dobles. Por lo tanto lo conveniente sería plantearlo como una región tipo I

Ejemplo 4

Calcular la integral doble: $\iint_D \; x^2y^2dA$, siendo $D = \{(x;y) \in R^2,\ 1 \leq y \leq 2\ ; 0 \leq x \leq y\}$

Dibujamos la región de integración
Después trazamos una recta horizontal, que pase por el dominio , y marcamos los valores de la variables x por donde entra y sale la recta , como puede verse en la figura.
En este caso observamos que entraríamos por la recta x=0 y saldríamos por x=y, todas las rectas horizontales están comprendidas entre y=1 e y=2 estarían en el intervalo en x,[1; 2].Es una región de las que definimos como tipo II.
Planteamos entonces la integral de la siguiente manera:

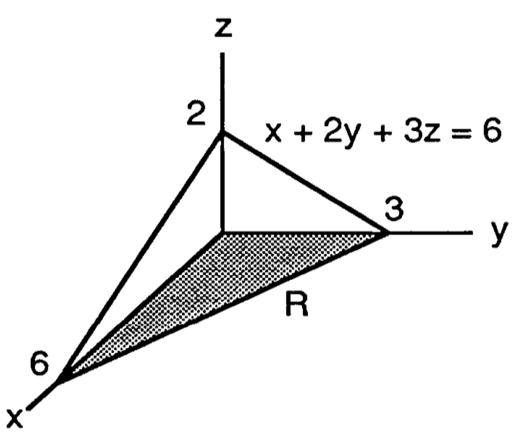


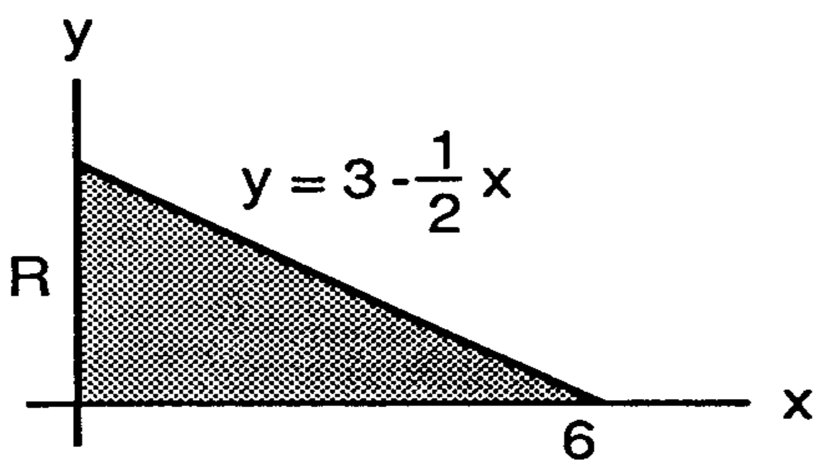
$$\int_1^2 \int_0^y x^2y^2dxdy = \int_1^2 \left[y^2\frac{x^3}{3}\right]_0^y dy = \int_1^2 (\frac{y^5}{3} - 0)dy = \int_1^2 \frac{y^5}{3}dy = \left[\frac{y^6}{18}\right]_1^2 == \left(\frac{64}{18} - \frac{1}{18}\right) = \frac{63}{18} = \frac{7}{2}$$

Ejemplo 5

Una pirámide está limitada por los planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$
Representar el sólido y calcular su volumen.

En este caso es aconsejable dibujar dos diagramas uno de un sólido tridimensional y otro de la región plana D, sobre la que este se ubica.





Esta región se puede plantear como tipo I o como tipo II

El plano $x+2y+3z=6$, puede expresarse como: $z=2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}$

V= $\int_0^6\int_0^{3-\frac{1x}{2}}(2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3})dydx=$

= $\int_0^6\left[2y-\frac{x}{3}y-\frac{y^2}{3}\right]_0^{3-\frac{1x}{2}}dx$ = $\int_0^6(3-x+\frac{1}{12}x^2)$dx= $\left[3x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{36}\right]_0^6$ =$(18-18+6)$= 6

Ejemplo 6

Encontrar el volumen de un sólido que tiene como base la región dada por

$\{(x;y)\in R^2\ ;\ \ x\geq y^2, x\leq y+2, y\geq 0\}$,y cuya altura está dada por la función $f(x;y)=x+2y$

Para dibujar la región de integración hallamos los puntos de intersección de las curvas:

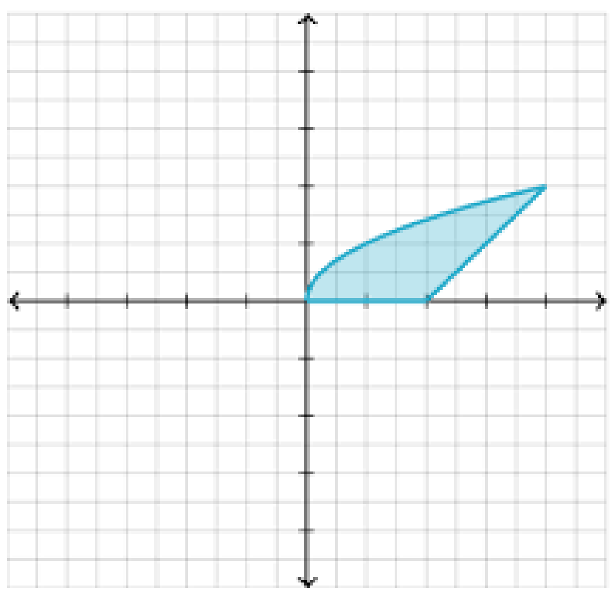
$x=y^2,\qquad x=y+2$

$y^2=y+2 \rightarrow y^2-y-2=0$

Las raíces son: $y_1=2$ e $y_2=-1$

Como solo consideramos valores de y positivos el punto de intersección de las curvas es: $P(4;2)$

Dibujamos la región de integración para establecer los límites de integración y el orden conveniente para plantear las integrales iteradas



Si trazamos rectas paralelas al eje x nos damos cuenta que entramos por la parábola y salimos por la recta en todo el intervalo comprendido entre $y = 0$ e $y = 2$, por lo tanto nos conviene integrar primero con respecto a x y luego con respecto a y:

Planteamos entonces la siguiente integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{y+2} (x + 2y)\,dxdy = \int_0^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2xy\right)\right]_{y^2}^{y+2} dy = \int_0^2 \left[\frac{(y+2)^2}{2} + 2(y+2)y - \frac{y^4}{2} - 2y^2y\right]dy =$$

$$\int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} + 2y + 2 + 2y^2 + 4y - \frac{y^4}{2} - 2y^3\right]dy = \int_0^2 \left[-\frac{y^4}{2} - 2y^3 + \frac{5y^2}{2} + 5y + 2\right]dy =$$

$$\left[-\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{2} + \frac{5y^3}{6} + \frac{5y^2}{2} + 2y\right]_0^2 = -\frac{16}{5} - 8 + \frac{20}{3} + 10 + 4 = \frac{142}{5}$$

Propiedades de la Integral Doble

Si $f(x;y)$ y $g(x;y)$ son funciones continuas entonces se verifica que:

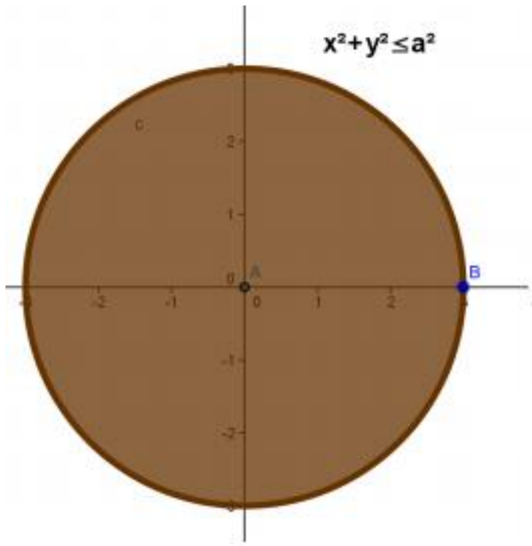
- $\iint_D [f(x;y) + g(x;y)]\mathrm{d}A = \iint_D f(x;y)\,\mathrm{d}A + \iint_D g(x;y)\,\mathrm{d}A$
- $\iint_D [f(x;y) - g(x;y)]\mathrm{d}A = \iint_D f(x;y)\,\mathrm{d}A - \iint_D g(x;y)\,\mathrm{d}A$
- $\iint_D Cf(x;y)dA = C\iint_D f(x;y)dA$
- $Si\ f(x;y) \geq g(x;y)$ en D$\rightarrow \iint_D f(x;y)dA \geq \iint_D g(x;y)dA$
- Si $D = D_1 \cup D_2 \rightarrow \iint_D f(x;y)dA = \iint_{D_1} f(x;y)dA + \iint_{D_2} f(x;y)dA$
- Si $m \leq f(x;y) \leq M, \forall(x;y) \in D \rightarrow mA(D) \leq \iint_D f(x;y)dA \leq MA(D)$

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

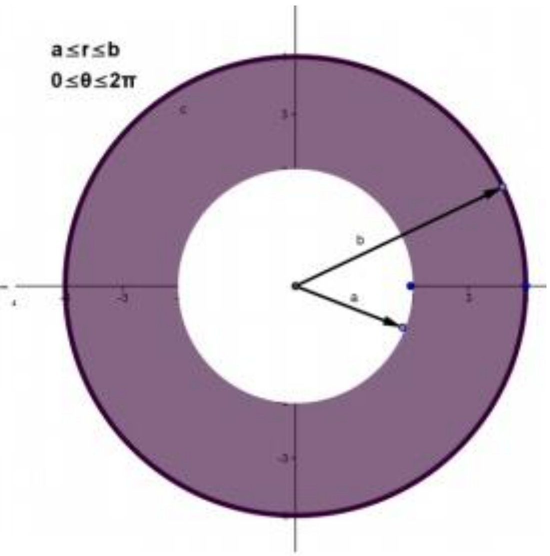
Supongamos que queremos calcular una integral doble cuando R es un dominio como los que se muestran en la figura.

La descripción de un dominio de este tipo en coordenadas rectangulares parece bastante complicada, sin embargo describir R en coordenadas polares nos simplificará bastante las cosas.

En general, las coordenadas polares son adecuadas cuando el recinto de integración es un círculo de centro en el origen (o un sector circular) , un círculo tangente al origen o un anillo circular entre otras.

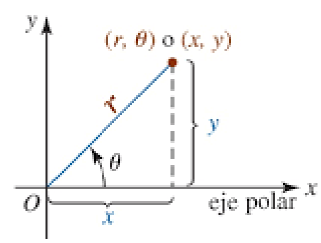


Región circular



Región corona circular

Definición´
Recordamos que las coordenadas polares $(r;\theta)$ de un punto se relacionan con las coordenadas rectangulares mediante las ecuaciones:



$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$

$\theta = arctg\,\dfrac{y}{x}$

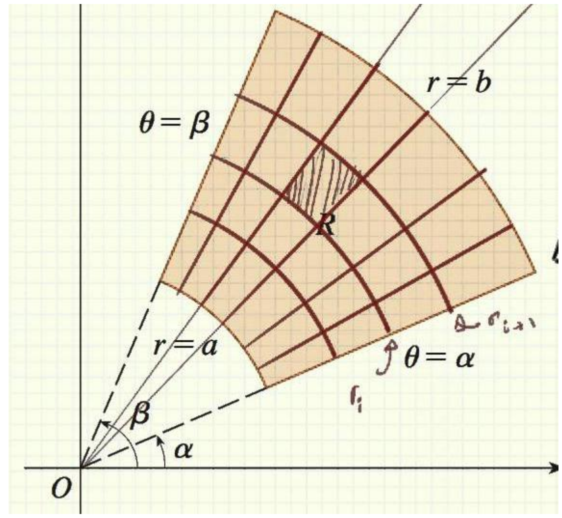
$r^2 = x^2 + y^2$

Para definir la integral doble de una función sobre una región R en el plano xy, dividimos R en rectángulos cuyos lados eran paralelos a los ejes coordenados. Esta era la forma más simple de una región en coordenadas cartesianas ya que sus lados tenían valores constantes, ya sea de y o de x.

En coordenadas polares, la forma natural es un "rectángulo polar", cuyos lados tienen valores constantes de r y θ .

Suponga que una función$f(r;\theta)$ está definida sobre una región R acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y por los círculos $r = a$ y $r = \beta$

Dividimos a R con una rejilla de arcos y rayos.



$a = r_0 < r_1 < r_{2<} \dots \dots \dots \dots . < r_{i<} \dots < r_n = b$

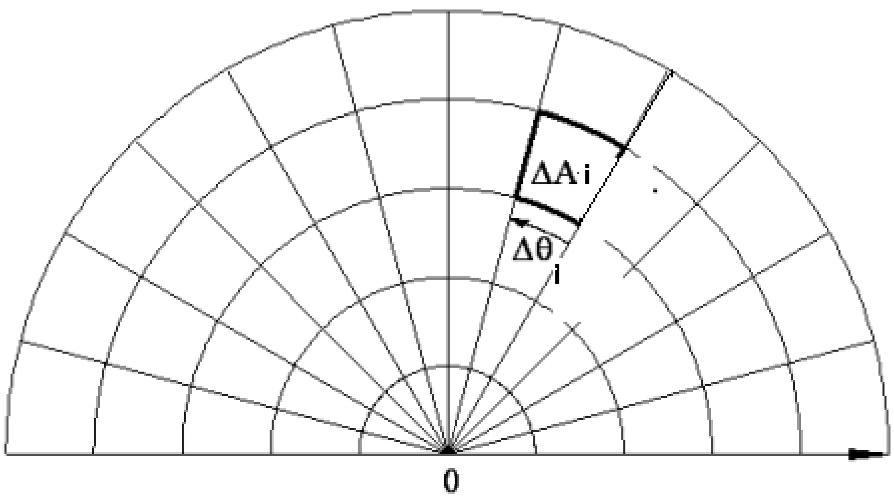
$\propto = \theta_0 < \theta_1 < \theta_{2<} \dots \dots \dots \dots . < \theta_{i<} \dots < \theta_n = \beta$

los rayos θ_i y los círculos r_i determinan una partición polar de R. La norma $\|P\|$ es la longitud de la diagonal más grande de todos los sub- rectángulos polares.

Numeramos los rectángulos polares que están dentro de R (sin importar el orden), llamando a sus áreas:

$\Delta A_1, \ \Delta A_2, \ \Delta A_3, , \ \Delta A_4, , \ \Delta A_5, \dots\dots \ \Delta A_i, \dots\dots \ \Delta A_n,$

Sea $(r_i; \ \theta_i)$ cualquier punto en el rectángulo polar cuya área es ΔA_i .



Luego formamos la suma: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i) \Delta A_i$

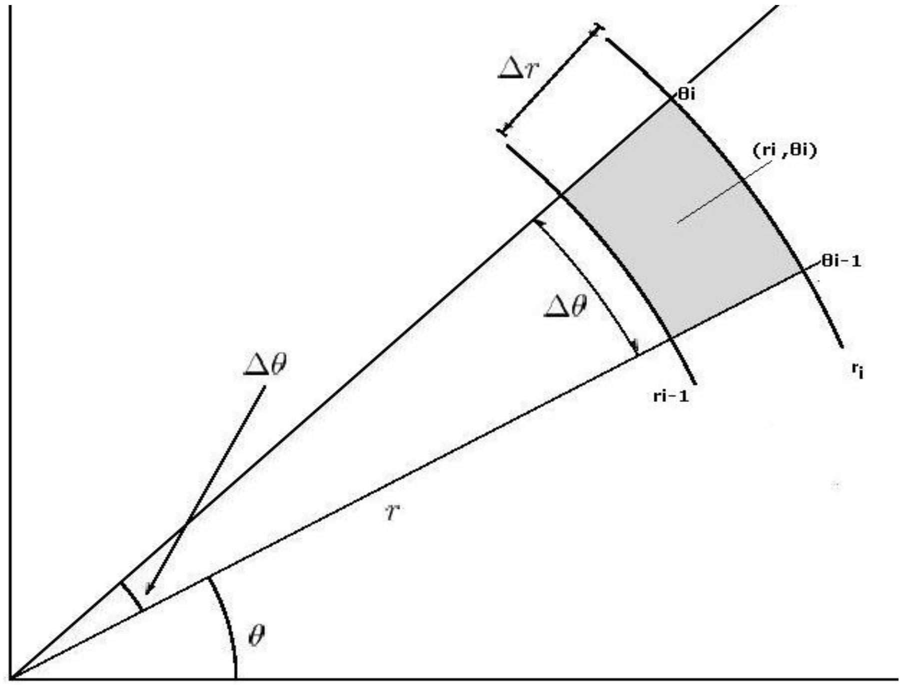
Si f es continua en R, esta suma tiende a un límite cuando aumentamos el numero de subdivisiones y Δr y $\Delta\theta$ tiendan a cero. El límite se conoce como la integral doble de f sobre R.

En símbolos tenemos:

$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R \ f(r_i, \theta_i) dA$

Para evaluar este límite, primero tenemos que escribir la suma Sn de forma que exprese a ΔA_i

en términos de Δr y $\Delta\theta$.



Calculamos el área ΔA_i utilizando el hecho de que el área de un sector en forma de cuña en un círculo que tiene radio r y ángulo θ es:

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

De la observación de la gráfica tenemos que ΔA_i =Area del sector grande –área del sector pequeño

Por conveniencia, elegimos a r_i como el promedio de los radios de los arcos interno y externo que acotan al i-ésimo rectángulo polar ΔA_i Así, el radio del arco interno que acota a ΔA_i es $r_i - \Delta r/2$ y

el radio del arco externo es $r_i + \Delta r/2$

De esta forma, las áreas de los sectores circulares subtendidos por estos arcos en el origen son:

Área del sector grande = $\frac{1}{2}\Delta\theta\ (r_i + \Delta r/2)^2$

Área del sector pequeño =$\frac{1}{2}\Delta\theta\ (r_i - \Delta r/2)^2$

ΔA_i =Area del sector grande –área del sector pequeño =$\frac{1}{2}\Delta\theta[(r_i + \Delta r/2)^2 - (r_i - \Delta r/2)^2]$=$r_i\Delta r\Delta\theta$

$\Delta A_i = r_i\Delta r\Delta\theta$

Al combinar este resultado con la suma que define a Sn nos da

S_n=$\sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i)\Delta A_i$=$\sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i) r_i \Delta r \Delta\theta$

Cuando la norma de la subdivisión $\|P\| \to 0$ ($n \to \infty$) , Δr y $\Delta\theta$ tienden a cero estas sumas convergen a la integral doble:

$\lim_{\|P\|\to\infty} S_n$=$\iint_R \ f(r, \theta\ ) r dr d\theta$

Teorema

Si $f(r;\ \theta\ )$ es una función continua en una región plana cerrada y acotada R, entonces la integral doble de f sobre R, en coordenadas polares, viene dada por:

$\iint_R \ f(r, \theta\ ) r dr d\theta$= $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i\ ; \theta_i) r_i \Delta r_i\ \Delta\theta_i$

Si este límite existe

Una versión del teorema de Fubini dice que el límite aproximado por estas sumas puede evaluarse por integraciones sencillas repetidas con respecto a r y θ

Ejemplo 1

Evaluar la integral $\iint_R \ x dx dy$, siendo R la región comprendida por los círculos x^2+$y^2 \leq 9$ y $x \geq 0$

Esbozamos la región de integración.

Expresamos la misma en coordenadas polares:

$R = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 3,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

Planteamos la integral:

$\iint_R \ x dx dy = \iint_R \ r cos\theta r dr d\theta$=$\iint_R \ r^2 cos\theta dr d\theta$ =$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r^2 cos\theta dr d\theta$=$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} cos\theta\right]_0^3 d\theta$=

=$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{27}{3} - 0) cos\theta d\theta$=$\left[\frac{8}{3} sen\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$=$9(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right))$ = $9(1 + 1) = 18$

Por lo tanto para encontrar una integral en coordenadas polares se debe:

1. Expresar la región en el sistema polar, y determinar los limites de Integración.

2. Sustituir en la función integrando las coordenadas rectangulares por su equivalente en coordenadas polares.

3. Reemplazar el diferencial de área por su equivalente en coordenadas polares

4. Evaluar la integral resultante

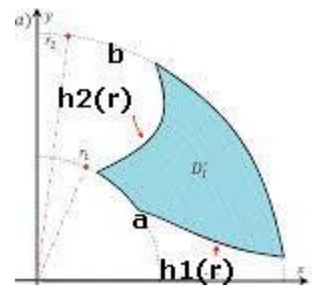
Lo que hemos hecho hasta ahora en coordenadas polares puede ampliarse a un tipo de región más complicada

Integrales dobles en coordenadas polares sobre regiones generales
Tenemos entonces las siguientes fórmulas que nos permite evaluar una integral doble en coordenadas polares sobre regiones más generales:

Teorema
Sea $f(r,\theta))$ continua en la región polar de tipo I dada por
$D = \{ (r;\theta) \quad a \leq r \leq b \, , h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r) \}$

entonces

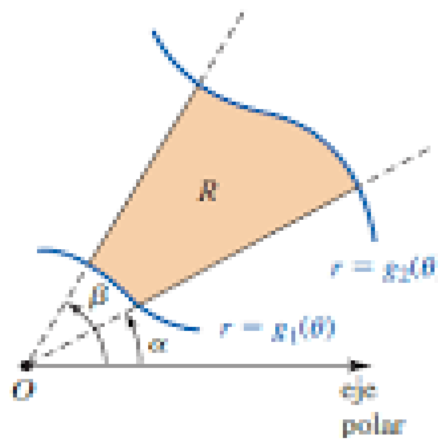
$\iint_D f(x;y)dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$



Teorema
Sea $f(r,\theta))$ continua en la región polar de tipo II definida así:
$D = \{ (r;\theta) \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \}$

entonces

$\iint_D f(x;y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(rcos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$



Determinación de los límites de integración en coordenadas polares
El procedimiento para calcular los límites de integración en coordenadas rectangulares funciona también para las coordenadas polares. Para evaluar sobre una región R en coordenadas polares integrando primero con respecto a r y luego con respecto a θse realizan los siguientes pasos:
1. Elaborar un bosquejo.

Realiza un bosquejo de la región y marca las curvas de la frontera (figura 1)

2. Determinar los límites de integración en r.

Imagina un semirrecta L que parte del origen y que corta a R en la dirección creciente de r. Marca los valores de r donde L entra y sale de R. Éstos son los límites de integración en r. Estos límites por lo general dependen del ángulo θque forma L con el semieje positivo x (figura 1).

3. Determinar los límites de integración en θ.

Obtén los valores mínimo y máximo de θ que acotan a R. Éstos son los límites de integración en θ (figura 1).

Ejemplo 2
Determine los límites de integración para integrar $f(r;\theta)$ sobre la región R que está dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ y fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

1-Primero trazamos la región y marcamos las curvas fronteras
Expresamos las ecuaciones de ambas circunferencias en coordenadas polares

$x^2 + y^2 = 1$ en coordenadas polares la ecuación es $r = 1$

$x^2 + y^2 = 2x$, $r^2 = 2rcos\theta$ → en coordenadas polares la ecuación es $r = 2cos\theta$

2-Obtenemos los límites de integración en *r*. Una semirrecta sale del origen y entra a *R* cuando *r* = 1 y sale cuando *r* es igual a r=2$cos\theta$

3- Al final, encontramos los límites de integración en θ
Hallamos los puntos de intersección de las dos circunferencias

$r = 1$ y $r = 2cos\theta$→ $2cos\theta = 1 \therefore \theta = arcos\frac{1}{2}$→ $\theta = -\frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$

Las semirrectas que partes desde y cortan a *R* varían desde $\theta = -\frac{\pi}{3}$ hasta $\theta = \frac{\pi}{3}$

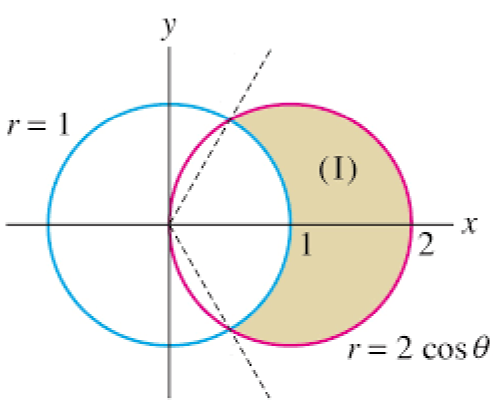


Figura 1

La integral es $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{1}^{2cos\theta} f(r;\theta)rdrd\theta$

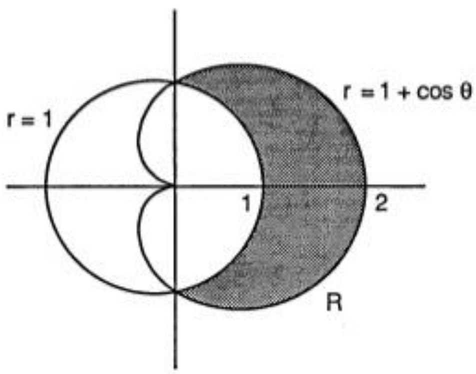
Área en coordenadas polares

Si $f(r,\theta)$ es una función constante cuyo valor es 1, entonces la integral de *f* sobre *R* es el área de *R*
El área de una región cerrada y acotada *R* en el plano de coordenadas polares es:

A =$\iint_D \ rdrd\theta$

Ejemplo 3

Calcular el valor del área de la superficie plana exterior a la circunferencia $x^2+y^2=1$ e interior a la cardiode $r=1+cos\theta$



Determinamos la frontera del recinto y hallamos los límites de integración.

Escribimos la ecuación del círculo en coordenadas polares $x^2+y^2=1 \rightarrow r^2=1$

Hallamos la intersección de las dos curvas:

$r=1+cos\theta$

$r^2=1$

$1+cos\theta=1 \rightarrow cos\theta=0 \therefore \theta=-\pi/2$ y $\theta=\pi/2$

$R=\{(r;\theta), -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\ y\ \ 1\leq r\leq 1+cos\theta\}$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+cos\theta} rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{1+cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\frac{(1+cos\theta)^2}{2}-\frac{1}{2}]d\theta =$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+2cos\theta+(cos\theta)^2-1)d\theta == \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2cos\theta+cos^2\theta)d\theta=$

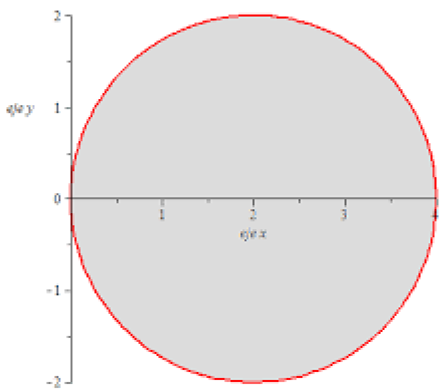
$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2cos\theta+\frac{(1+cos2\theta)}{2})d\theta=\frac{1}{2}\left[2sen\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{sen2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}[2+\frac{\pi}{4}+2+\frac{\pi}{4}+]=\frac{1}{2}[4+\frac{\pi}{2}]=2+\frac{\pi}{4}$

Ejemplo 4

Calcule el volumen de un sólido que está bajo el paraboloide z= $x^2 + y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4x$

El solido esta encima del disco cuyo circulo frontera tiene la ecuacion $x^2 - 4x + y^2 = 0$

Completando cuadrados:$(x-2)^2 + y^2 = 4$



Expresamos en coordenadas polares

$x^2 + y^2 = 4x \rightarrow r^2 = 4rcos\theta \quad \therefore r = 4cos\theta$

$R = \{(r,\theta), 0 \leq r \leq 4cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

Volumen $= \iint_R (x^2 + y^2)\mathrm{dA} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{1+cos\theta} r^2 rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{4cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\frac{(4cos\theta)^4}{4}]d\theta$ =

= 64$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^4\theta]d\theta$== 64$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\frac{(1+cos2\theta)^2}{2}]d\theta$ =32$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2cos2\theta + \frac{1}{2}(1 + cos4\theta)]d\theta$=

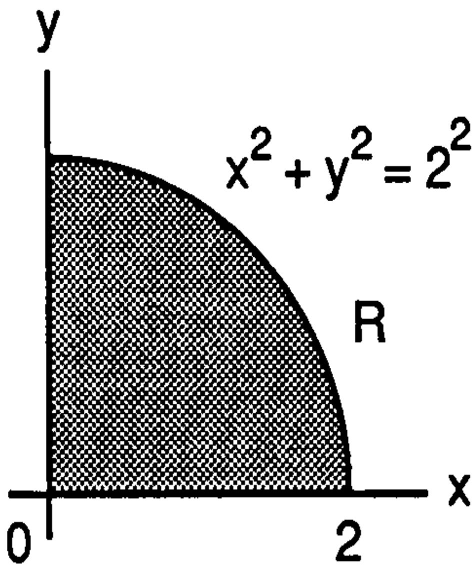
=32$\left[\theta + sen2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{sen4\theta}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$ = 32[$\frac{3}{2}\theta$+$sen2\theta + \frac{sen4\theta}{8}$]=32[$\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi$]=48$\pi$

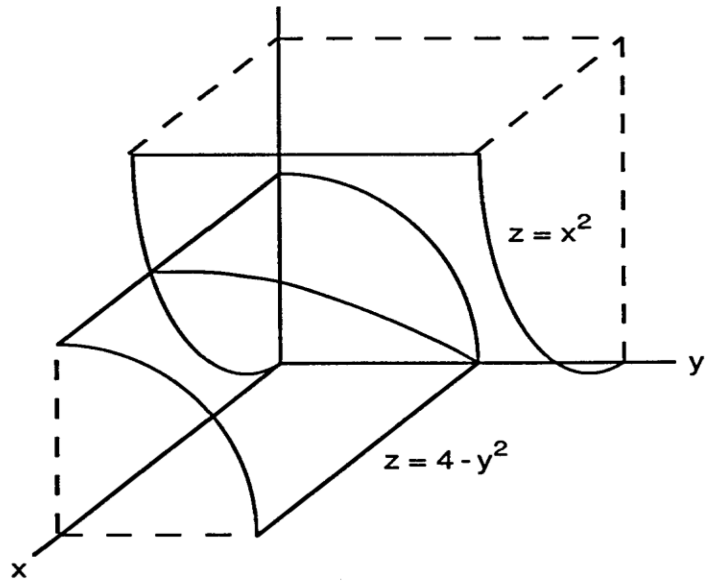
Ejemplo 5

Calcule el volumen de un sólido que está comprendido entre los cilindros parabólicos: $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$

Hallamos la curva intersección de ambos cilindros y la proyectamos sobre el plano xy

$x^2 = 4 - y^2 \rightarrow \; x^2 + y^2 = 4$





Para el primer octante: $0 \leq \; x \; \leq 2$; $\quad 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$

Volumen= $\iint_R \; (z_{sup}$-$z_{inf})$dA= $4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} [(4-y^2) - (\,x^2)]$dydx =

=$4\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2 sen^2\,\theta - r^2 cos^2\theta) r dr d\theta$=$4\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta$=$4\int_0^{\pi/2} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta =$

=$4\int_0^{\pi/2} (8-4) d\theta$=$[16\theta]_0^{\pi/2}$ = 8π

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES

1. **Calculo de la masa**

Supongamos que tenemos una placa delgada o lamina que ocupa una región R en el plano(x; y) con densidad variable $\delta(x;y)$, (medida en unidades de masa por unidad de área). Siguiendo el mismo procedimiento realizado para integrales dobles , tenemos la masa total m de la lamina :

m =$\iint_R \; \delta(x;y)\, dA$

2. **Carga eléctrica**

Si una carga eléctrica se distribuye a través de una región R, y la densidad de carga (medida en unidades de carga por unidad de área) esta dad por $\sigma(x;y)$, entonces la carga total, está dada por:

Q=$\iint_R \ \sigma(x;y)\,dA$

3. **Momentos alrededor de los ejes o primeros momentos**

El primer momento con respecto a un eje se calcula integrando sobre R la distancia multiplicada por la densidad

Momento alrededor del eje x

$$M_x = \iint_R \ y\delta(x;y)\,dA$$

Momento alrededor del eje y

$$M_y = \iint_R \ x\delta(x;y)\,dA$$

4. **Coordenadas del centro de masa**

Las coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$del centro de masa de una lámina que ocupa la región R y que tiene como función densidad $\delta(x;y)$ están dadas por:

$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$ =$\frac{1}{m}\iint_R \ x\delta(x;y)\,dA$

$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$ =$\frac{1}{m}\iint_R \ y\delta(x;y)\,dA$

5. **Momentos de Inercia o segundos momentos**

Momento de inercia alrededor del eje x

I_x =$\iint_R \ y^2\delta(x;y)\,dA$

Momento de inercia alrededor del eje y

I_y =$\iint_R \ x^2\delta(x;y)\,dA$

Momento de inercia alrededor del origen

I_o =$\iint_R \ (x^2+y^2)\delta(x;y)\,dA$

Ejemplo 6

Calculamos la masa de una lámina plana que cubre la región fuera de la circunferencia *r* = 3, en coordenadas polares, y dentro de la circunferencia *r* = $6sen\theta$, siendo la densidad en cada punto $\delta(x;y) = \frac{1}{r}$

$m = \iint_R \ \delta(x;y)\, dA \rightarrow m = \iint_R \ \frac{1}{r} dA$

Determinamos los extremos de integración.

Hallamos los puntos de intersección entre ambas circunferencias.

$3 = 6sen\theta \rightarrow sen\theta = 0{,}5 \therefore \theta = \pi/6$ y $\theta = (\pi - \frac{\pi}{6})$

$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$

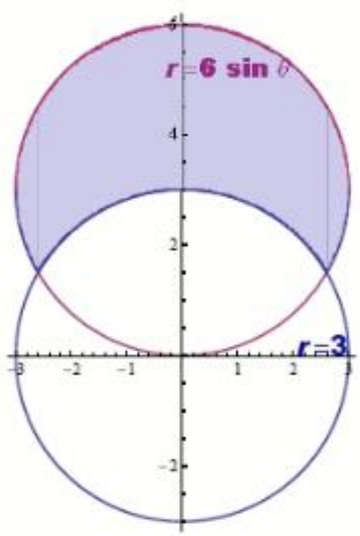
Para determinar los limites en r trazo una semirrecta desde el origen y entro por $r = 3$ y salgo por $r = 6sen\theta$

$3 \leq r \leq 6sen\theta$

$m = \iint_R \ \frac{1}{r} dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_3^{6sen\theta} \frac{1}{r} r dr d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} [r]_3^{6sen\theta} d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (6sen\theta - 3) d\theta = [-6cos\theta - 3\theta]_{\pi/6}^{5\pi/6} =$

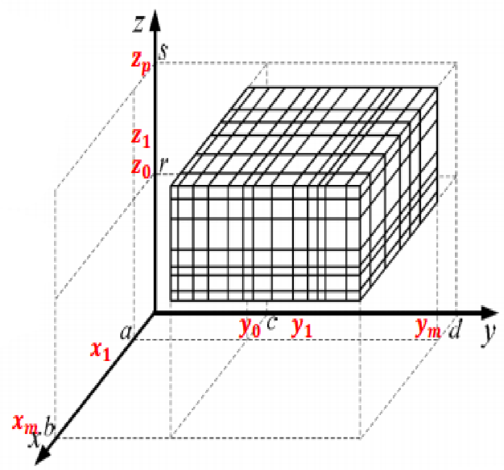
$= (6\frac{\sqrt{3}}{2} - \ 3\frac{5}{6}\pi) - \ (-6\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\frac{\pi}{6}) = 3\sqrt{3} - \frac{5}{2}\pi + 3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi = 6\sqrt{3} - 2\pi$

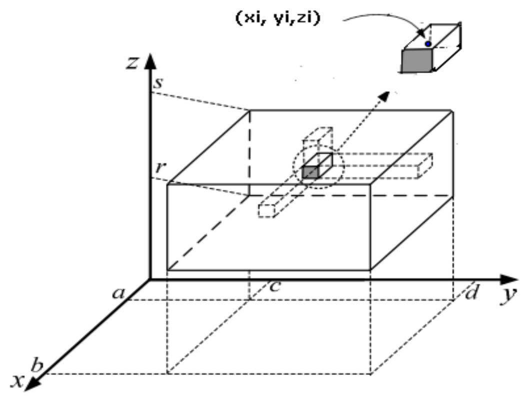
Por lo tanto la masa es $6\sqrt{3} - 2\pi$, en unidades de masa.



INTEGRALES TRIPLES

Sea f(x, y, z) una función continua definida en una caja E de la forma S=[a,b] x [c,d] x [e,h]. Vamos a definir la integral triple de f sobre S de la misma forma que definimos las integrales dobles. Se realiza una subdivisión de la caja mediante plano paralelos a los planos coordenados, obtenemos n subcajas de dimensiones Δx_i , $\Delta y_{i,}$ Δz_i y volumen ΔV_i =Δx_i Δy_i Δz_i.





Elegimos un punto $(x_{i,}\, y_i,\ z_i)$ en cada subdivisión y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,}, y_i\, z_i)\Delta V_i$$

La norma de la partición $\|P\|$ es la longitud de la diagonal más grande de las cajas. Si refinamos la subdivisión y las sumas S_n tienden a un límite cuando $\|P\|$ tiende a cero para cualquiera de las elecciones de los puntos $(x_{i,}\, y_i,\ z_i)$, entonces este límite recibe el nombre de integral triple de f en E y se escribe :

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i,}\, y_i,\ z_i)\Delta V_i = \iiint_E \ f(x; y; z)dV$$

Una condición suficiente para que exista la integral triple de f sobre S es que f sea continua en E.

La integral triple tiene esencialmente las mismas propiedades que la integral doble.

De la misma manera que en el caso de las integrales dobles, el método práctico para evaluar las integrales triples es expresarlas como integrales iteradas.

Teorema de Fubini para las integrales triples

Si f es continua sobre una caja rectangular S=$[a, b]$ x $[c; d]$ x $[r, s]$→

$$\iiint_E f(x;y;z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x;y;z)dxdydz$$

La integral así planteada significa que primero integramos con respecto a x dejando y y z contante, luego con respecto a y dejando fija z y por ultimo integramos respecto a z. Existen otros cinco ordenes posibles de integración.

Ejemplo 1

Evaluar la integral $\iiint_S \; xyzdV$, donde S es la caja rectangular dada por:

S=$\{(x;y;z), -1 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 2,\; 1 \leq z \leq 2\}$

$\iiint_S \; xyzdV = \int_{-1}^{1}\int_0^2\int_1^2 (xyz)dzdydx$=$\int_{-1}^{1}\int_0^2 \left[xy\frac{z^2}{2}\right]_1^2 dydx$=$\int_{-1}^{1}\int_0^2 \frac{3}{2}xy\,dydx =$

=$\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2$dx=$\int_{-1}^{1} 3xdx = \left[3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$

Integrales triples sobre regiones más generales

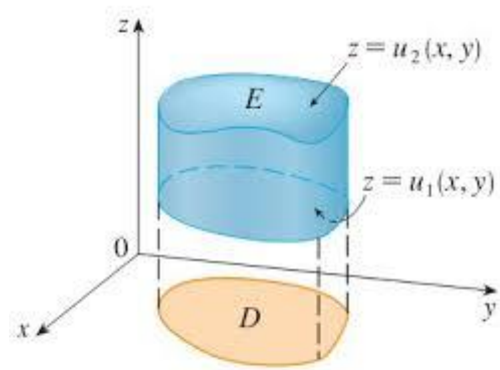
Vamos a restringir nuestra atención a funciones continuas f y a ciertos tipos sencillos de regiones
Si D es la proyección del solido E sobre el plano xy, decimos que la **región es del tipo I** y se la puede expresar de la forma:

E= $\{(x;y;z), (x;y) \in D, u_1(x;y) \leq z \leq u_2(x;y)\}$

D es la proyección del solido E sobre el plano xy,observemos que la frontera superior es la superficie de ecuación $z = u_2(x;y)$ y y la frontera inferior es $z = u_1(x;y)$

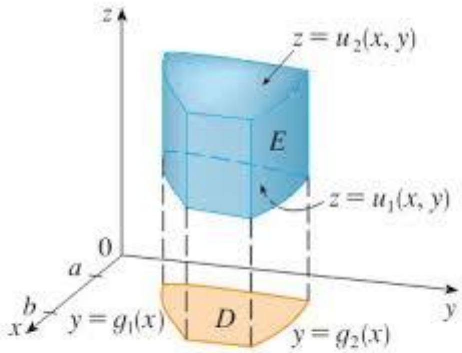
Entonces

$$\iiint_E f(x;y;z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x;y)}^{u_2(x;y)} f(x;y;z)dz\right]dA$$



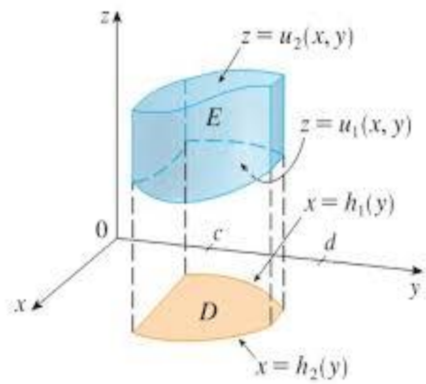
En particular si E es una región de tipo I de la forma:

E= $\{(x;y;z), a \leq x \leq b. g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \in D, u_1(x;y) \leq z \leq u_2(x;y)\}$



La integral anterior se expresa así:

$$\iiint_E f(x;y;z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{\emptyset_1(x;y)}^{\emptyset_2(x;y)} f(x;y;z)dz\, dydx$$



Si E es otra región solida del tipo I de la forma:

E= $\{(x;y;z), c \leq y \leq d. h_1(x) \leq x \leq h_2(x) \in D, u_1(x;y) \leq z \leq u_2(x;y)\}$

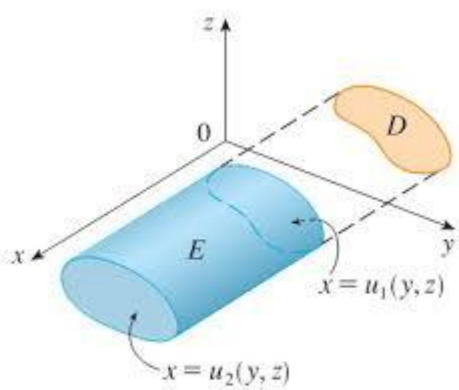
Entonces la integral se escribe así:

$$\iiint_E f(x;y;z)dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x;y)}^{u_2(x;y)} f(x;y;z)dz\, dxdy$$

Si D es la proyección de E sobre el plano yz se tiene una **región del tipo II** de la forma

E= $\{(x;y;z), (y;z) \in D, u_1(y;z) \leq x \leq u_2(y;z)\}$

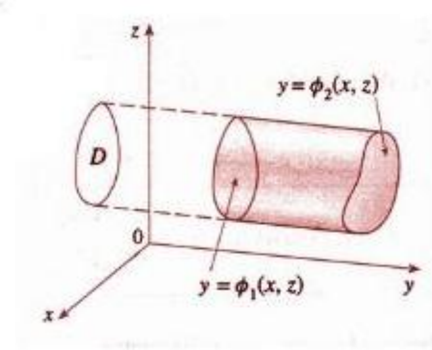
entonces



$$\iiint_E f(x;y;z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y;z)}^{u_2(y;z)} f(x;y;z)dx\right] dA$$

Si D es la proyección de E sobre el plano xz se tiene una **región del tipo III** de la forma

E= $\{(x;y;z),(x;z)\in D,\emptyset_1(x;z)\leq y\leq \emptyset_2(x;z)\}$



$$\iiint_E f(x;y;z)dV=\iint_D \left[\int_{\emptyset_1(x;z)}^{\emptyset_2(x;z)} f(x;y;z)dy\right]dA$$

Calculo de volumen
Para el caso especial cuando $f(x;y;z)=1$ para todos los puntos de E, la integral triple representa el volumen de E.

$$V(E)=\iiint_E dV$$

Ejemplo 2
Calcular el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$

Hago un bosquejo
Se traza la región E y se proyecta el recinto sobre el plano xy obteniendo el triangulo señalado, en la figura. Las variables (x, y) varían en dicho triangulo mientras que z recorre el recinto desde la superficie inferior hasta la superficie superior. En este caso la frontera inferior es $z=0$ y la frontera superior $z=1-x-y$

Determinación de los límites de integración

- **Limites de integración en z**

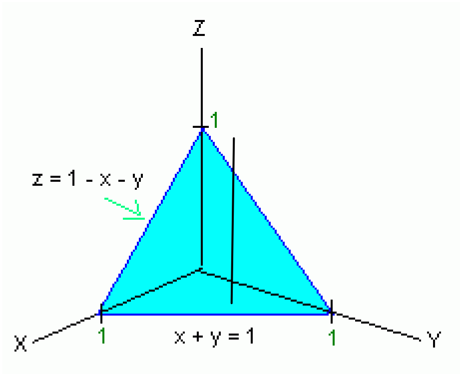
Trazo una recta paralela al eje z , que pasa por un punto (x;y;z) , y observo por donde entra la misma a la región E , en este caso entro por la frontera inferior $z=0$ y salgo por la superior $z=1-x-y$. Estos son los limites de integración en z.

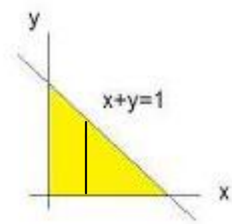
- **Limites de integración en y**

Trazo una recta paralela al eje y, que pasa por un punto $(x;y)$ en D .Cuando y crece entra a D por $y=0$ y sale por la recta $y=1-x$ .Estos son los limites de integración en y.

- **Limites de integración en y**

Elijo los límites en x que incluyen todas las rectas paralelas al eje y que pasen por D, en este caso en particular,x =0 y $x=1$.Estos son los límites de integración en x.





E= $\{(x; y; z), 0 \leq x \leq 1. 0 \ \leq y \leq 1-x, \ \ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$

$\iiint_E \ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz\, dxdy$ =$\int_0^1 \int_0^{1-x} [z]_0^{1-x-y} \ dxdy$ =$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dxdy =$

$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \ dx$=$\int_0^1 (1 - x - x + x^2 -- \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$)dx=$\left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1$ = $\frac{1}{6}$

Aplicaciones de las integrales Triples

1. Calculo de la masa

Si la función de densidad de un objeto solido que ocupa la región E es $\rho(x; y; z)$, en cualquier punto dado $(x; y; z)$, entonces su masa es:

$$m = \iiint_E \ \rho(x; y; z) dV$$

2. Momentos alrededor de los ejes o primeros momentos

Sus momentos alrededor de los tres ejes coordenados son:

$M_{yz} = \iiint_E \ x\rho(x; y; z) dV \qquad M_{xz} = \iiint_E \ y\rho(x; y; z) dV \qquad M_{xy} = \iiint_E \ z\rho(x; y; z) dV$

3. Coordenadas del centro de masa

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$del centro de masa de una lámina que ocupa la región R y que tiene como función densidad $\delta(x; y)$,

$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$ =$\frac{1}{m} \iiint_E \ x\rho(x; y; z) dV$, $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}$ = $\frac{1}{m} \iiint_E \ y\rho(x; y; z) dV$, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$ =$\frac{1}{m}\iiint_E \ z\rho(x; y; z) dV$

4. Momentos de Inercia o segundos momentos

I_x =$\iiint_E \ (y^2 + z^2)\rho(x; y; z) dV$

$I_y = \iiint_E \ (x^2 + z^2)\rho(x;y;z)dV$

$I_z = \iiint_E \ (x^2 + y^2)\rho(x;y;z)dV$

5. Carga eléctrica

La carga eléctrica total de un objeto solido que ocupa una región E y que tiene una densidad de carga (medida en unidades de carga por unidad de volumen), dada por $\sigma(x;y;z)$, está dada por:

Q= $\iiint_E \ \sigma(x;y;z)dV$

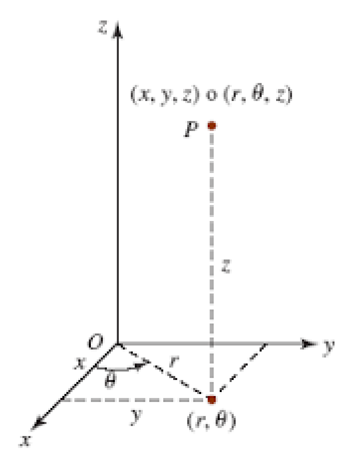
Integrales Triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Cuando la evaluación de una integral triple en física, ingeniería o geometría implica un cilindro, un cono o una esfera, es conveniente trabajar usando coordenadas cilíndricas o esféricas, ya que en general las integrales que quedan planteadas son más fáciles de calcular . El procedimiento para hacer la transformación a estas coordenadas y evaluar las integrales triples resultantes es similar a la transformación a coordenadas polares en el plano estudiadas anteriormente

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son buenas para describir los cilindros cuyo eje corre a lo largo del eje *z* y a los planos que contienen al eje *z* o que son perpendiculares al mismo eje *z*.

Recordemos que las coordenadas cilíndricas de un punto P son (r, θ, z) y que un punto (x, y, z) de R^3 está relacionado con las coordenadas cilíndricas mediante las ecuaciones dadas por:



$x = r\cos\theta$
$y = r\,sen\,\theta$
$z = z$
$\theta = arctg\dfrac{y}{x}$
$r^2 = x^2 + y^2$

$r \geq 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\infty \leq z \leq \infty$

Supongamos que f e continua y que E es una region de tipo I cuya proyeccion sobre el planp xy se describe mediante coordenadas polares

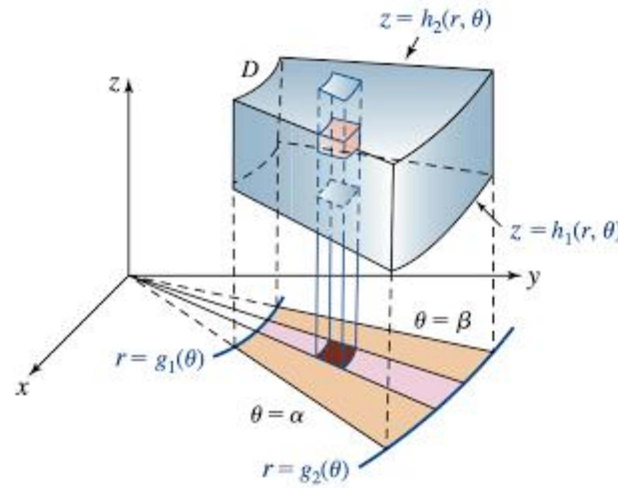
E= $\{(x;y;z), (x;y) \in D, h_1(x;y) \leq z \leq h_2(x;y)\}$

en coordenadas polares D esta dado por:

D=$\{(r,\theta),\alpha\le\theta\le\beta,\ g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta)\}$

$$\iiint_E f(x;y;z)dV=\iint_D\left[\int_{h_1(x;z)}^{h_2(x;z)} f(x;y;z)dz\right]dA$$

Como ya sabemos trabajar en coordenadas polares tenemos



Fórmula para la integración triple en coordenadas cilíndricas

$$\iiint_E f(x;y;z)dV=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(rcos\theta;rsen\theta)}^{h_2(rcos\theta;rsen\theta)} f(rcos\theta;rsen\theta;z)rdz\,drd\theta$$

Ejemplo 1-

Halla el volumen del solido acotado por el cilindro $x^2+(y-1)^2$=1, el paraboloide $z=x^2+y^2$, y el plano $z=0$

$$V(E)=\iiint_E dV$$

En este caso por las superficies que determinan la región solida E sobre la que hay que trabajar es conveniente hacerlo en coordenadas cilíndricas

$z=x^2+y^2\rightarrow z=r^2$

Determino los limites de integración en z, entro a la region por el plano z=0 y salgo por el paraboloide $z=r^2$

Ahora vemos los limites de integración de r y θ

Escribimos el cilindro en coordenadas polares y lo proyectamos sobre el plano z=0, esta será la región D .

$x^2+(y-1)^2$=1$\rightarrow r^2cos^2\theta+r^2sen^2\theta-2rsen\theta+1=1\rightarrow r^2=2rsen\theta\rightarrow r=2sen\theta$

Si trazo una semirrecta desde el origen entramos a D por r= 0 y salimos por la curva $r=2sen\theta$

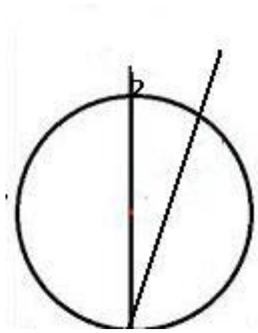
Quedan así determinados los limites en r , todas esta semirrectas están comprendidas ente $\theta=0$ y $\theta=\pi$, que son los limites de integración en θ

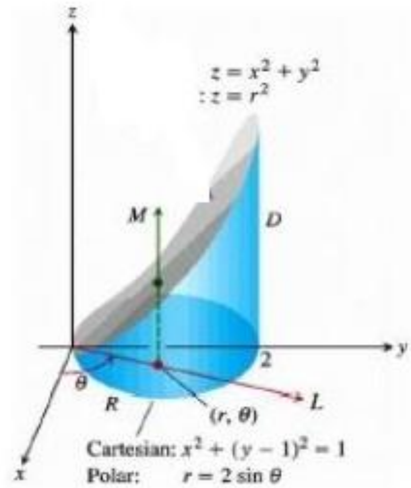
E= $\{(r;\theta;z),0\le\theta\le\pi,\quad 0\le \mathrm{r}\le 2sen\theta,\ 0\le z\le r^2\}$

$V(E)=\iiint_E\ rdzdrd\theta$=$\iint_D\ \int_0^{r^2} rdzdrd\theta$=$\iint_D\ [z]_0^{r^2}$ rdrdθ=$\iint_D\ r^3$drdθ=$\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta} r^3drd\theta$=

=$\int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2sen\theta}$ dθ=$\frac{1}{4}\int_0^{\pi} 16sen^4\theta d\theta$=4 $\int_0^{\pi}\frac{(1-cos2\theta)^2}{4}\ d\theta$=$\int_0^{\pi}(1-2cos2\theta+cos^2 2\theta)d\theta$=

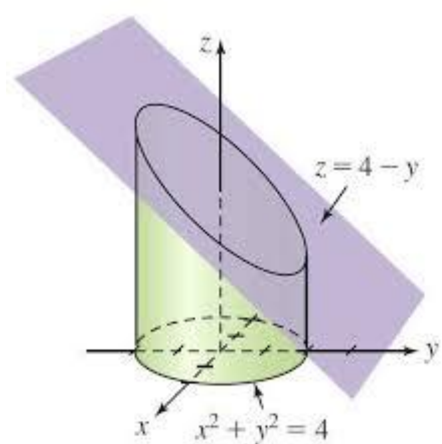
=$\int_0^{\pi}(1-2cos2\theta+\frac{1}{2}+\frac{co4\theta}{2})d\theta$ =$\left[\theta-\frac{2sen2\theta}{2}+\frac{1}{2}\theta+\ \frac{sen4\theta}{8}\ \right]_0^{\pi,}$ = $\frac{3}{2}\pi$= $\frac{3}{2}\pi$





Ejemplo 2

Un sólido E esta dentro del cilindro x^2+y^2 =1 y debajo del plano $z=4-y$.
La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje del cilindro.
Determina la masa de E.
En coordenadas cilíndricas el cilindro es $r=1$ y el plano $z=4-rsen\theta$
Así que podemos escribir:
$E=(r;\theta;z), 0\ \leq\ \theta\leq 2\pi,\quad 0\ \leq\ \mathrm{r}\ \leq\ 1,\ 0\leq z\leq 4-rsen\theta$
Como la densidad en (x; y; z) es proporcional a la distancia al eje z, la función densidad es:



$f(x;y;z)=K\sqrt{x^2+y^2}$=Kr

Donde K es la constante de proporcionalidad.

$m=\iiint_E\ \rho(x;y;z)dV$

$m=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-rsen\theta} Krrdzdrd\theta=$

=$\int_0^{2\pi}\int_0^2 Kr^2\ [z]_0^{4-rsen\theta} drd\theta$=$\int_0^{2\pi}\int_0^2 Kr^2\ (4-rsen\theta)drd\theta$=

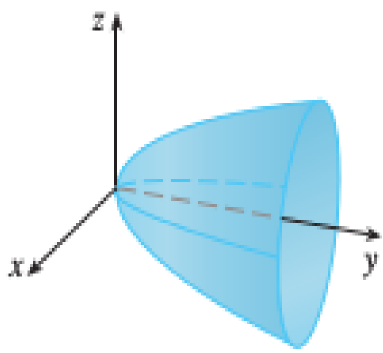
$= K\int_0^{2\pi}\int_0^2(4r^2 - r^3 sen\theta)\mathrm{d}r d\theta$=$K\int_0^{2\pi}\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^4}{4}sen\theta\right]_0^2 d\theta$ =

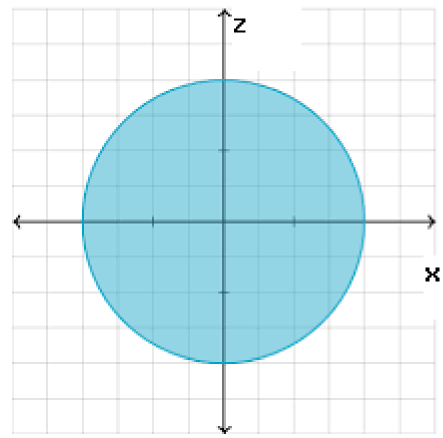
=$K\int_0^{2\pi}\left(\frac{32}{3} - 4sen\theta\right)d\theta = K\left[\frac{32}{3}\theta + 4cos\theta\right]_0^{2\pi}$ = $(\frac{64}{3}\pi + 4 - 4)K$=$\frac{64}{3}\pi K$

La masa del solido es $\frac{64}{3}\pi K$ en unidades de masa

Ejemplo 3

Evaluar $\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV$ donde E es la región acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$





Vamos a considerar a E como una región tipo III por lo tanto vamos a proyectar el sólido sobre el plano xz.Su proyección sobre este plano nos dá la región $x^2 + y^2 \leq 4$.

La frontera izquierda es el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y la derecha z=4.Imagino que trazo una recta paralela al eje y entro por el paraboloide y salgo por el plano, entonces primero integro con respecto a y con y variando entre $y = x^2 + z^2$ y $y = 4$

$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV = \iint_D \int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2}dydA$=$\iint_D (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}$dA =

Ahora es conveniente convertir a coordenadas polares en el plano xz

$\iint_D (4 - r^2)rrdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2(4\,r^2 - r^4)drd\theta$=$\int_0^{2\pi}\left[4\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2d\theta$=$\frac{128\pi}{15}$

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son útiles para describir esferas con centro en el origen, semiplanos acoplados a lo largo del eje *z* y conos con vértice en el origen y eje a lo largo del eje *z*.

Las coordenadas esféricas de un punto son$(\rho; \theta; \emptyset)$ y están relacionadas con las coordenadas rectangulares mediante las siguientes ecuaciones:

$x = \rho sen\emptyset cos\theta$

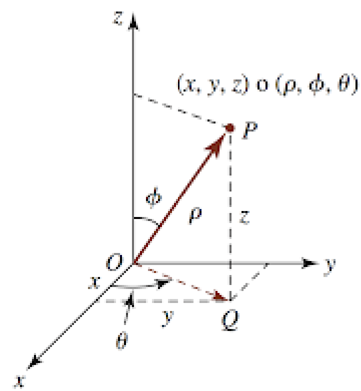
$y = \rho sen\emptyset sen\theta,$

$z = \rho cos\emptyset$

$-\frac{\pi}{2} \quad \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \theta \leq 2$

$\rho \geq 0$



Al calcular integrales triples sobre una región *D* en coordenadas esféricas, partimos la región en *n* cuñas esféricas. El tamaño de la i-ésima cuña esférica, que contiene a un punto $(\rho; \theta; \emptyset)$), está dado por los incrementos $\Delta\rho_i$; $\Delta\theta_i$; $\Delta\emptyset_i$ en $\rho; \emptyset\ y\ \theta.$ Tal cuña esférica tiene como aristas un arco circular de longitud $\rho_{i,}\ \Delta\emptyset_i$, y otro arco circular de longitud $\rho_{i,}sen\emptyset_i\Delta\theta_i$ su espesor es $\Delta\rho_i$ $\Delta\rho_i$.

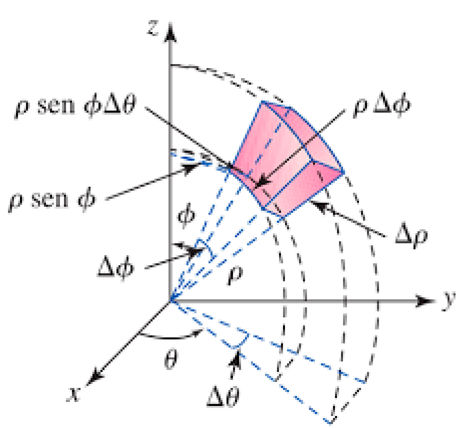
La cuña esférica se aproxima bien a un cubo de las mismas dimensiones, cuando $\Delta\rho_i$, $\Delta\theta_i$, $\Delta\emptyset_i$ son pequeños . Se puede demostrar que el volumen de la cuña esférica es $\Delta V_i = {\rho_i}^2 sen\ \emptyset_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i \Delta\emptyset_i$ para un punto ($\rho_{i,}\ \emptyset_i, \theta_i$) elegido dentro de la cuña.

La suma de Riemann correspondiente para una función $f(\rho_{i,}\ \emptyset_i, \theta_{i)}$ es:

S_n=$\sum_{i=1}^{n} f(\rho_{i,}\ \emptyset_i, \theta_i)\Delta V_i$= $\sum_{i=1}^{n} f(\rho_{i,}\ \emptyset_i, \theta_i){\rho_i}^2 sen\ \emptyset_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i \Delta\emptyset_i$

Cuando la norma de la partición tiende a cero y las cuñas esféricas son cada vez más pequeñas, las sumas de Riemann tienen un límite si f es continua:

$\lim_{\|P\|\to 0} S_n$ =$\iiint_E \ f(\ \rho; \emptyset; \theta)dV$=$\iiint_E \ f(\ \rho; \emptyset; \theta)\rho^2 sen\emptyset d\rho d\theta d\emptyset$



Para evaluar integrales en coordenadas esféricas, por lo general integramos primero con respecto a ρ
La integral triple en coordenadas esféricas de una función f en E está definida por

$$\iiint_E f(x;y;z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho sen\emptyset cos\theta, \rho sen\emptyset sen\theta, \rho cos\emptyset)\rho^2 sen\emptyset d\rho d\theta d\emptyset$$

Donde E esta dado por $E = \{(\rho; \emptyset; \theta), a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \emptyset \leq d\}$

Esta fórmula puede extenderse para incluir regiones esféricas más generales tales como

$E = \{(\rho; \emptyset; \theta),, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \emptyset \leq d, g_1(\emptyset; \theta) \leq \rho \leq g_2(\emptyset; \theta)\}$

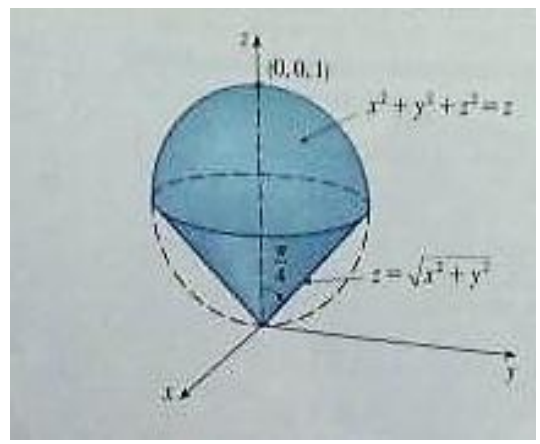
Ejemplo

Determina el volumen del sólido que esta encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$

La esfera pasa por el origen: $x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow$

$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, su centro es (0; 0; $\frac{1}{2}$),

o sea está desplazada a lo largo del eje z.



Escribimos la ecuación de la esfera y del cono en coordenadas esféricas:

$x^2 + y^2 + z^2 = z$

$(\rho sen\emptyset cos\theta)^2$+$(\rho sen\emptyset sen)^2$+ $(\rho cos\emptyset)^2$ =$\rho cos\emptyset$

Sacando factor común y aplicando la relación pitagórica llegamos a:

ρ^2 =$\rho cos\emptyset \rightarrow \rho = cos\emptyset$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\rho cos\emptyset = \sqrt{(\rho sen\emptyset cos\theta)^2 + (\rho sen\emptyset sen)^2}$ =$\rho sen\emptyset \rightarrow \rho cos\emptyset = \rho sen\emptyset \therefore cos\emptyset = sen\emptyset \rightarrow \emptyset = \pi/4$

E=$\left\{(\rho; \theta; \emptyset), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq cos\emptyset \right\}$

$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{cos\emptyset} \rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$ =$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[sen\emptyset \frac{\rho^3}{3}\right]_0^{cos\emptyset} d\emptyset$ =$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} sen\emptyset(cos\emptyset)^3 d\emptyset$=

=$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{cos^4\emptyset}{4}\right]_0^{\pi/4}$ ==$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{-3}{16}\right) d\theta$=$\frac{1}{16}[\theta]_0^{2\pi}$=$\frac{\pi}{8}$

CAMBIOS DE VARIABLES EN INTEGRALES MULTIPLES

Cuando evaluamos integrales de funciones de una variable a menudo realizábamos un cambio de variable o sustitución a los efectos de que.la integral resulte más sencilla de calcular.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[g(u)]g'(u)du$$

$x = g(u)$ y $a = g(c)$, $b = g(d)$

Para resolver la integral del segundo miembro de la ecuación se realiza el cambio de variable, y el cambio de los límites de integración.

Cambio de Variables en una integral doble

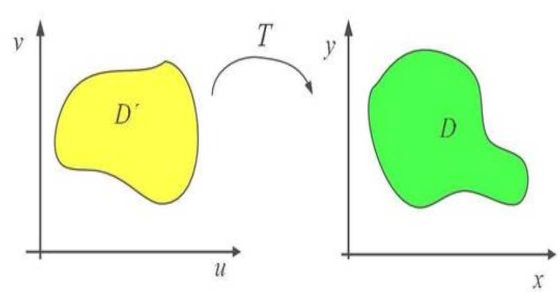
Cuando se desea resolver una integral doble empleando un cambio de variable, el proceso resulta más complicado pues se deben cambiar ambas variables x y y por las variables u y v, por ejemplo.
La sustitución por coordenadas polares es un caso particular de un método más general de sustitución para integrales dobles, un método que representa los cambios de variables como transformaciones de regiones.

Este cambio se realiza mediante una transformación geométrica del tipo $R^2 \to R^2$.

Suponemos que la región G en el plano uv se transforma de manera uno a uno en la región R del plano xy mediante las ecuaciones

$$x = g(u; v)$$
$$y = h(u; v)$$

D es la imagen de D´ bajo la transformación y D´ es la preimagen de D.
Cualquier función $f(x; y)$ definida en D puede considerarse una función $f\big(g(u; v); h(u; v)\big)$ en D´.



¿Cuál es la relación entre la integral de $f(x; y)$ sobre D y la integral de $f\big(g(u; v); h(u; v)\big)$ sobre D´?
La respuesta es:

Teorema
Si f, g y h tienen derivadas parciales continuas y $J(u;v) \neq 0$, entonces:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D'} f\big(g(u;v);h(u;v)\big)|J(u;v)|dudv$$

El factor $J(u;v)$ es el Jacobiano del cambio y actúa como factor de dilatación o de compresión de las áreas al pasar de una región a otra mediante el cambio de variables dado.
Podemos decir que J mide la razón con que la transformación amplia o reduce el area entorno a un punto de D´, cuando D´ se transforma en D

Definición
El jacobiano o determinante Jacobiano de la transformación de coordenadas $x = g(u;v)$ y $y = h(u;v)$ es

$$J(u;v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

El jacobiano se denota también de la siguiente manera:

$$J(u;v) = \frac{\delta(x;y)}{\delta(u;v)}$$

Como primera ilustración del teorema anterior mostramos que la fórmula para la integración en coordenadas polares es solo un caso especial.

Aquí la transformación del plano $r\theta$ al plano xy esta dado por

$$x = rcos\theta, \qquad y = rsen\theta$$

El Jacobiano es:

$$J(r;\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = rcos^2\theta + rsen^2\theta = r > 0$$

Por lo tanto por el teorema de cambio de variables

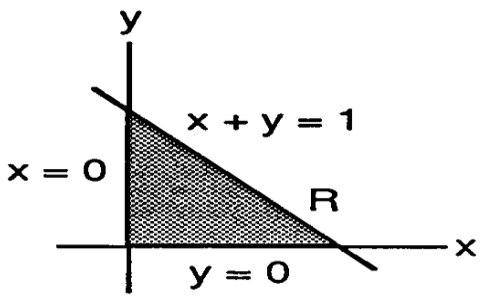
$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D'} f(rcos\theta;rsen\theta)|r|drd\theta = \iint_{D'} f(rcos\theta;rsen\theta)rdrd\theta, \text{ si } r > 0$$

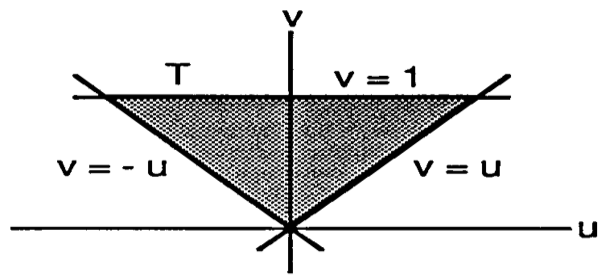
Que es la ecuación que ya hemos usado

Ejemplo 1
Evalúe la integral

$$\iint_R e^{\frac{y+x}{y-x}}\, dA$$

D es el triangulo formado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$





Consideramos la transformación
$u = y - x$
$v = y + x$

Sumando y restando las ecuaciones 1) y 2) tenemos

$x = \frac{-u+v}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{u+v}{2}$

Transformación de la frontera
$x = 0 \rightarrow u = v$
$y = 0 \rightarrow u = -v$
$x + y = 1 \rightarrow v = 1$

Descripción del dominio en el plano uv
$-v \leq u \leq v$
$0 \leq v \leq 1$

El Jacobiano de la transformación esta dado por

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Transformación de la frontera
$x = 0 \rightarrow u = v$
$y = 0 \rightarrow u = -v$

$x + y = 1 \rightarrow v = 1$

$\iint_R e^{\frac{y+x}{y-x}} dA$=$\iint_T \boldsymbol{e^{\frac{v}{u}} \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{v}{u}} dudv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[v e^{\frac{v}{u}} \right]_{-v}^{v} dv = \frac{1}{2} \int_0^1 v(e^1 - e^{-1}) dv}$ =
$\boldsymbol{\frac{1}{2}(e - e^{-1}) \int_0^1 v dv = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e - e^{-1})}$

Cambio de Variables en una integral triple

Las sustituciones por coordenadas cilíndricas y esféricas son casos particulares de un método de sustitución que representa los cambios de variables en las integrales triples como transformaciones de regiones tridimensionales. El método es similar al de las integrales dobles, pero en tres dimensiones.

Suponemos que la región G en el espacio uvw se transforma de manera uno a uno en la región D del espacio xyz mediante las ecuaciones diferenciables de la forma

$x = g(u; v, w)$
$y = h(u; v; w)$
$z = k(u; v; w)$

Cualquier función $f(x; y; z)$ definida en D puede considerarse como una función $f(g(u; v; w); h(u; v; w); k(u; v; w))$ definida en G.

¿Cómo se relaciona la integral de $f(x; y, z)$ sobre D y la integral de $f(g(u; v); h(u; v), k(u; v; w))$ sobre D´?
La respuesta está dada por el siguiente teorema:

Cambio de Variables en una integral triple

Teorema

Teorema

Si g ; h y k tienen primeras derivadas parciales continuas y $J(u; v; w\ ) \neq 0$, entonces:

$$\iiint_D f(x; y; z) dxdydz = \iiint_G f(g(u; v; w); h(u; v; w); k(u; v; w))|J(u; v; w)| dudv\, dw$$

J (u; v; w) = $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

Para coordenadas cilíndricas r, θ, z , toman los lugares de $u; v; w.$ La transformación del espacio cartesiano $r\theta z$ al espacio cartesiano xyz esta dado por:

$x = r\cos\theta \quad y = r\,sen\,\theta \quad z = z$

El Jacobiano de la transformación es

$$J(r,\theta;z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + rsen^2\theta = r$$

Por lo tanto por el teorema de cambio de variables

$\iiint_D f(x;y;z)dxdydz = \iiint_G f(rcos\theta; rsen\theta, z)|r|drd\theta = \iiint_G f(rcos\theta; rsen\theta, z)rdzdrd\theta$, si $r > 0$

Que es la ecuación que ya hemos usado con anterioridad cuando trabajamos en coordenadas cilíndricas.

Para coordenadas esféricas $\rho;\theta;\emptyset$ toman los lugares de $u;v;w$. La transformación del espacio cartesiano $\rho\theta\emptyset$ al espacio cartesiano xyz esta dado por:

$x = \rho sen\emptyset cos\theta \quad y = \rho sen\emptyset sen\theta, \quad z = \rho cos\emptyset$

El Jacobiano de la transformación es

$$J(\rho;\emptyset;\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \emptyset} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \emptyset} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \emptyset} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 sen\emptyset$$

Por lo tanto por el teorema de cambio de variables

$\iiint_D f(x;y;z)dxdydz = \iiint_G f(\rho;\emptyset;\theta)|\rho^2 sen\emptyset|d\rho d\theta d\emptyset$

Observación: Te sugiero que profundices y refuerces los marcos teóricos abordados en este documento en la bibliografía sugerida por la cátedra

Profesora: María Graciela Ribas