UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA

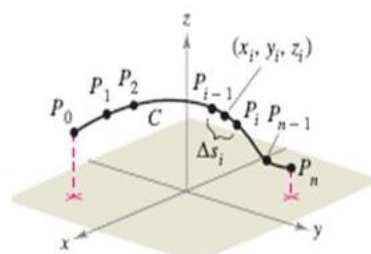
ANALISIS MATEMATICO II

UNIDAD 5

INTEGRALES DE LINEA

Para calcular la masa total de una varilla delgada que se encuentra a lo largo de una curva en el espacio o para obtener el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una curva, necesitamos un concepto de integral más general que el de integrales definidas. Ahora vamos a integrar sobre una curva C y no sobre un intervalo $[a, b]$. Estas integrales se conocen como integrales de línea o curvilíneas

Para introducir el concepto consideramos la masa de un cable de longitud finita, descripto por una curva C, en el espacio. Supongamos que la densidad del cable (medida en unidades de masa por unidades de longitud) en el punto $(x; y; z))$ viene dada por $f(x, y, z)$. Dividimos la curva mediante puntos:$P_1, P_2, \dots P_n$, en n subarcos, de longitud, $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots\dots \Delta S_n$ .La norma $\|P\|$ de la partición es la mayor de dichas longitudes. En cada subarco elegimos un punto (x_i, y_i, z_i), evaluamos la densidad f en este punto y lo multiplicamos por la longitud ΔS_i del subarco, si la longitud de cada subarco es Escriba aquí la ecuación.pequeña, la masa total del cable puede aproximarse mediante la suma



Masa del cable $\cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$

La cual es similar a una suma de Riemann

Si evaluamos el límite de estas sumas cuando $\|P\|$ tiende a cero, tendremos el valor de la masa del cable y por analogía con integrales de una variable, esto sugiere la siguiente definición

Definición de integral de línea

Si f está definida en una región que contiene a una curva C, de longitud finita, la integral de línea de f sobre C se define como:

- $\int_C f(x; y)ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$ en el plano
- $\int_C f(x; y; z)ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_{i,} z_i\right)\Delta S_i$ en el espacio

Siempre que el límite exista

Evaluación de una integral de línea

0.Se puede demostrar que si f es continua el limite anterior existe y tiene el mismo valor para todas las parametrizaciones suaves de C

Si C es una curva suave plana dada por las ecuaciones paramétricas:

$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$

O bien de manera equivalente por la ecuación vectorial $r(t) = x(t)i + y(t)j$, utilizamos:

$ds = |r'(t)|dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$

Por lo que la siguiente formula puede utilizarse para evaluar una integral de línea en el plano

$$\int_C f(x;y)ds = \int_a^b f(x(t);y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Si C es una curva suave dada por las ecuaciones paramétricas:

$x = x(t), \quad y = y(t,) \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(x;y,z)ds = \int_a^b f(x(t);y(t);z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)}dt$$

Nota 1

Recordemos que una curva C, es suave si $r'(t)$ es continua y $r'(t) \neq o$, $\forall t$

Nota 2

Notemos que si $f(x;y) = 1$ o bien $f(x;y,z) = 1$, entonces la integral de línea:

$\int_C fds = \int_a^b |r'(t)|dt$= longitud de arco de la curva

Ejemplo 1

Evalúa: $\int_C (2 + x^2 y)ds$

Donde Ces la mitad superior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$

Parametrizamos la curva

Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$x = cost$

$y = sent$

$0 \leq t \leq \pi$

Hallamos el ds

$|r'(t)| = \sqrt{cos^2t + sen^2t}dt$=dt

Expresamos la integral en función de t

$\int_C (2 + x^2 y)ds = \int_0^\pi (2 + (cos^2t)sent)dt$=$\left[2t - \frac{cos^3t}{3}\right]_0^\pi$= $2\pi + \frac{2}{3}$

Por sustitución resolvimos

$u = cost \rightarrow du = -sentdt$

$\int (cos^2 t) sentdt = \int -u^2\, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{cos^3 t}{3}$

Propiedad

Si la curva Cesta formada por la unión de un numero finito de curvas suaves C_1 ; C_2 ……… C_n, entonces

$$\int_C fds = \int_{C_1} fds + \int_{C_2} fds + \cdots \ldots \int_{C_n} fds$$

Ejemplo 2

Evalúa $\int_C (x - 3y^2 + z)ds$, donde C consiste en la unión de los segmentos de rectas que van desde el origen hasta el punto $(1; 1; 0)$ y desde este punto al (1,1,1)

C_1 va desde el $(0; 0; 0)$ a $(1; 1; 0)$

Elegimos la parametrizacion mas sencilla:$x = y = t,\ z = 0$

$r(t) = ti + tj$

$0 \leq t \leq 1$

$|r´(t)| = \sqrt{2}dt$

$$\int_{C_1} fds+ = \int_{C_1} (x - 3y^2 + z)ds = \int_0^1 (t - 3t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1\sqrt{2}}{2}$$

C_2 va desde el $(1; 1; 0)$ al $(1; 1; 1)$

Elegimos la parametrizacion mas sencilla:$x = y = 1, z = t$

$r(t) = i + j + tk$

$0 \leq t \leq 1$

$|r´(t)| = 1dt$

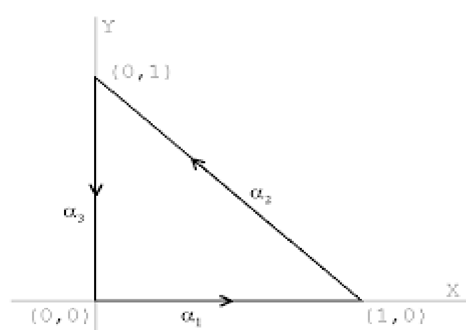
$$\int_{C_2} fds+ = \int_{C_2} (x - 3y^2 + z)ds = \int_0^1 (1 - 3 + t)1dt = \left[-2t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \left(-2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$\int_C fds = \int_{C_1} fds + \int_{C_2} fds = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$

Ejemplo 3

Calcule $\int_C (x + y)ds$

Donde C es el triángulo de vértices:$(0{:}\ 0), (1; 0)$ y $(0; 1)$



Sea C la trayectoria del triangulo recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj

$$\int_C fds = \int_{C_1} fds + \int_{C_2} fds + \int_{C_3} fds$$

$C_1 = a_1$
$x = t \ , \quad y = 0 \ , \quad 0 \leq t \leq 1$
$|r´(t)| = 1dt$

$$\int_{C_1} fds = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$C_2 = a_2$
$x + y = 1$
$x = 1 - t \ , \quad y = t \ , \quad 0 \leq t \leq 1$
$|r´(t)| = \sqrt{2}dt$

$$\int_{C_2} fds = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{2}dt = [t]_0^1 = \sqrt{2}$$

$C_3 = a_3$
$x = t$
$y = 1 - t \ , \quad 0 \leq t \leq 1$
$|r´(t)| = \sqrt{2}dt$
$\int_{C_3} fds = \int_0^1 1\sqrt{2}dtdt = [t]_0^1\sqrt{2} = 1\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$$\int_C fds = \int_{C_1} fds + \int_{C_2} fds + \int_{C_3} fds = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$$

Aplicaciones de las Integrales de líneas

Masa

La interpretación física de una integral de línea depende de la interpretación de la función .Si $\delta(x; y, z)$, representa la densidad lineal en un punto de un alambre delgado o varilla delgada en forma de curva, la masa del alambre o la varilla se puede obtener:

masa $=\int_C \ \delta(x; y, z)ds$

También se pueden calcular los centros de masa y los momentos utilizando las siguientes fórmulas

Primeros momentos con respectos a los planos coordenados

$M_{yz} = \int_C \ x\delta(x; y, z)ds \qquad M_{xz} = \int_C \ y\delta(x; y, z)ds \qquad M_{xy} = \int_C \ z\delta(x; y, z)ds$

Primeros momentos con respectos a los ejes coordenados

$M_x = \int_C \ y\delta(x; y, z)ds \qquad M_y = \int_C \ x\delta(x; y, z)ds$

Coordenadas del centro de masa

$\bar{x}$ =$M_{yz}/m \qquad \bar{y}$ =$M_{xz}/m \qquad \bar{z}$ =M_{xy}/m

Momentos de Inercia

$I_x = \int_C \ (y^2 + z^2)\delta ds \qquad I_y = \int_C \ (x^2 + z^2)\delta ds \qquad I_z = \int_C \ (x^2 + y^2)\delta ds$

$I_L = \int_C \ (y^2 + y^2 + z^2)\delta ds$= $\int_C \ r^2\delta ds$

r: Distancia del punto $(x; y; z)$ a la recta L

Radio de giro con respecto a una recta

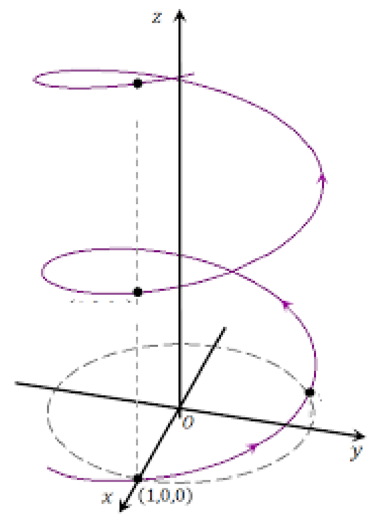
$R_L = \sqrt{I_L/m}$

Ejemplo 4

Calcular la masa de un resorte que tiene la forma de la hélice circular:

$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(costi + sentj + tk)$ con $0 \leq t \leq 6\pi$

Si el material del que está hecho tiene una densidad $\delta(x; y, z) = 1 + z$



$|r´(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-sent)^2 + (cost)^2 + 1^2}$=1

Masa =$\int_C \ (1 + z)ds$=$\int_0^{6\pi}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t)\,dt$=$\left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{6\pi}$=$6\pi + \frac{18\pi^2}{\sqrt{2}}$

Ejemplo 5

Un arco de metal delgado, más denso en la parte inferior que en la superior, esta a lo largo de la semicircunferencia $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, en el plano yz.Determinar el centro de masa del arco, si la densidad en el punto $(x; y, z)$ es $\delta(x; y, z) = 2 - z$

Como el arco esta en el plano yz, con la masa distribuida simétricamente alrededor del eje z, tendremos que $\bar{x}$ =$\bar{y} = 0$.Debemos hallar $\bar{z}$

Para metrizamos la curva

$r(t) = costj + sentk$

$|r´(t)| = \sqrt{(0)^2 + (-sent)^2 + (cost)^2}$=1

Hallamos la masa

masa =$\int_C \ \delta(x; y, z)ds$

m=$\int_0^{\pi}(2 - sent)\,dt$=$[2t + cost]_0^{\pi}$=$2\pi - 1 - 1 = 2\pi - 2$

Hallamos el momento respecto al plano xy,

$$M_{xy} = \int_C z\delta(x;y,z)ds$$

$$M_{xy} = \int_0^{\pi}[(2-sent)sent]dt = \left[-2cost - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t\right]_0^{\pi} = 2 - \frac{1}{2}\pi + 2 = 4 - \frac{1}{2}\pi$$

$$\bar{z} = M_{xy}/m$$

$$\bar{z} = \left(4 - \frac{1}{2}\pi\right) : (2\pi - 2) = \frac{8\pi - 4}{4(\pi - 1)} = 0{,}57$$

El centro de masa es $(0; 0, 0{,}57)$

Recuerdo

Se uso $sen^2 t = \frac{1}{2}(1 - cos2t)$ para hallar $\int sen^2\, tdt$

Definición de integrales de línea con respecto a x e y

De la misma forma que se definió la integral de línea de f sobre una curva , de longitud finita C se pueden obtener otras dos integrales de líneas al sustituir ΔS_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

Se conocen como integrales de línea de f sobre C con respecto a x e y.

Se definen como:

- $\int_C f(x;y)ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta x_i$

- $\int_C f(x;y)ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta y_i$

Siempre que el límite exista

Evaluación

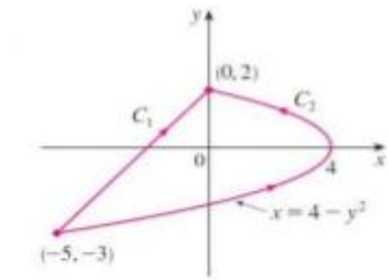
Si C es una curva suave plana dada por las ecuaciones paramétricas : $x = x(t)$, $y = y(t)$ con t tal que $a \leq t \leq b$, estas integrales de línea pueden evaluarse al expresar todo en términos de t

$$\int_C f(x;y)dx = \int_a^b f(x(t);y(t))x'(t)dt =$$

$$\int_C f(x;y)dy = \int_a^b f(x(t);y(t))y'(t)dt =$$

Con frecuencia las integrales de línea de f con respecto a x e y , se presentan simultáneamente. En estos casos se las suele escribir de esta forma:

$\int_C M(x;y)dx + \int_C N(x;y)dy = \int_C M(x;y)dx + N(x;y)dy$



Ejemplo 6

Evalúe $\int_C y^2dx + xdy$ donde

a) $C = C_1$ es el segmento de recta que une los puntos $(-5;-3)$ y $(0;2)$.

b) $C = C_2$ es el arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5;-3)$ y $(0;2)$.

a) Recordemos que la representación vectorial del segmento de recta que comienza en r_0 y termina en r_1 esta dada por

$\boldsymbol{r(t)} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})r_0 + tr_1, \quad 0 \le t \le 1$

$\boldsymbol{v} = r_1 - r_0$

Realizamos una representación paramétrica del segmento de recta

$r_0 = -5i - 3j$

$r_1 = 0i + 2j$

$\boldsymbol{r(t)} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})(-5i - 3j) + t(0i + 2j), \quad 0 \le t \le 1$

$r(t) = -5i - 3j + 5ti + 3tj + 2tj = (-5 + 5t)i + (-3 + 5t)j$

$x = -5 + 5t \rightarrow dx = 5dt$

$y = -3 + 5t \rightarrow dy = 5dt$

$0 \le t \le 1$

$$\int_{C_1} y^2dx + xdy = \int_0^1 (-3+5t)^2\, 5dt + (-5+5t)5dt = \int_0^1 (125t^2 - 125t + 20)dt =$$

$$= \mathbf{5} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (25t^2 - 25t + 4)dt = 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$$

b) Para esta trayectoria tomamos como parámetro a y

$x = 4 - y^2 \rightarrow dx = -2ydy$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$-$\rightarrow dy = dy$

$-3 \le y \le 2$

$$\int_{C_2} y^2(-2y)dy + (4 - y^2)dy = \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4)\text{dy} = \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^{2} = \frac{245}{6}$$

Nota 1: Podemos observar que obtuvimos distintos valores en los incisos a y b, aun cuando las dos curvas tenían el mismo punto final e inicial. Por lo tanto podemos decir que el valor de la integral de línea no solo depende los puntos que unen las curvas, sino también de la trayectoria. Más adelante veremos qué pasa con esto cuando aparecen ciertas condiciones**.**

Nota 2:

Observemos también que pasa con el valor de $\int_{C_1} y^2dx + xdy$, si cambiamos el sentido del recorrido, yendo ahora del punto $(0;2)$ al $(-5;-3)$.

La parametrizacion va a estar dada por: $r(t) = (1-t)(0i + 2j) + t(-5i - 3j)$

$x = -5t, \quad y = 2 - 5t, \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{C_1} y^2dx + xdy = \frac{5}{6}$$

Observamos que obtenemos un valor opuesto al recorrer la curva en sentido contrario.

Si $-C$, denota la curva que tiene los mismos puntos de C, prro con orientación opuesta, entonces tenemos:

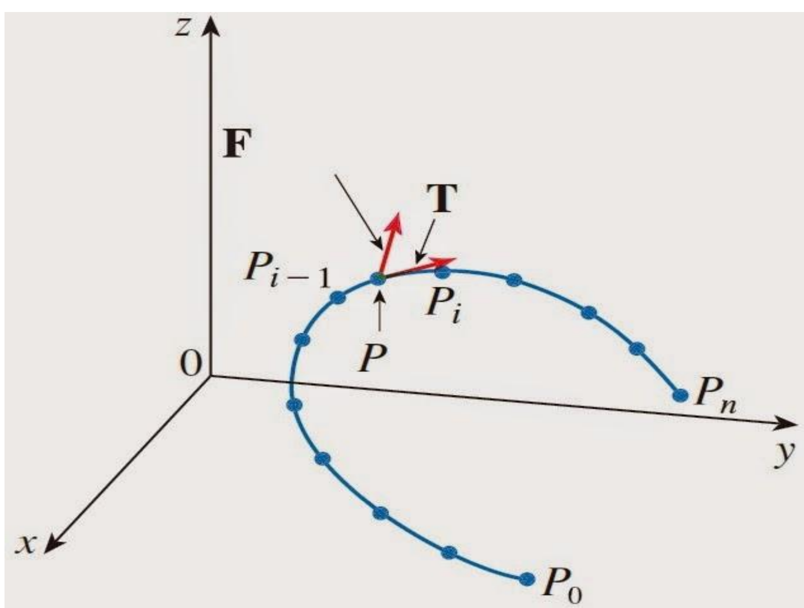
$\int_{-C} f(x;y)dx = -\int_C f(x;y)dx \qquad \int_{-C} f(x;y)dy = -\int_C f(x;y)dy$

Si integramos respecto a la longitud de arco, el valor de la integral no cambia, cuando se invierte la orientación de la curva (Esto se debe a que Δs siempre es positivo y Δx y Δy, cambian de signo cuando invertimos la orientación)

$\int_{-C} f(x;y)ds = \int_C f(x;y)ds$

INTEGRALES DE LINEAS DE CAMPOS VECTORIALES

Supongamos que queremos calcular el trabajo realizado por un campo de fuerzas continuo $F = MI + NJ + PK$ en R^3, al mover una partícula a lo largo de una curva suave C.



Hacemos una partición de C, en subarcos $P_{i-1}P_i$, con longitudes iguales a ΔS_i, mediante una partición del intervalo paramétrico $[a;b]$, en el cual se define la curva C.La norma $\|P\|$ de la partición es la mayor de dichas longitudes.
En cada uno de estas subdivisiones tomamos un punto (x_i, y_i, z_i), que corresponde al parámetro t_i. Y hallamos el valor del campo en este punto $F(x_i, y_i, z_i)$.Si la longitud ΔS_i, es muy pequeña, cuando la partícula se mueva del punto P_{i-1} al punto P_i, a lo largo de la curva, va a tomar aproximadamente la misma dirección del vector tangente unitario $T(t_i)$.Por lo tanto el trabajo realizado por el campo de fuerzas para llevar la partícula de P_{i-1} a P_i, va a ser aproximadamente igual a

$F(x_i, y_i, z_i)[\Delta S_i T(t_i)]$ =$[F(x_i, y_i, z_i)T(t_i)]\Delta S_i$

Entonces el trabajo total realizado al mover la partícula a lo largo de C es aproximadamente igual a la suma:

$$W \sim \sum_{i=1}^{n} [F(x_i, y_i, z_i).T(x_i, y_i, z_i] \, \Delta S_i$$

La cual es similar a una suma de Riemann

Si evaluamos el límite de estas sumas cuando $\|P\|$ tiende a cero, tendremos el valor del trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$W = \lim_{\|P\| \dashrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} [F(x_i, y_i, z_i).T(x_i, y_i, z_i] \, \Delta S_i = \int_C F(x;y;z).T(x;y;z)ds = \int_C F.Tds$$

Esta expresión nos dice que el trabajo es la integral con respecto a la longitud de arco de la componente tangencial de la fuerza.

Evaluación de una integral de línea de un campo vectorial
Si la curva C esta dada por $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, recordemos que el vector tangente unitario T, se define como $T = r'(t)/|r''(t)|$ y que $ds = |r'(t)|dt$
Entonces tendremos que:

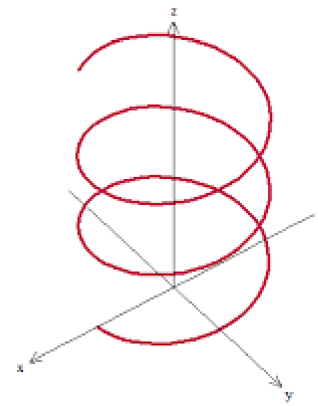
$$\int_C F.Tds = \int_a^b \left[F(r(t)).\frac{r'(t)}{|r'(t)|}\right] |r'(t)|dt = \int_a^b F\big(r(t)\big).r'(t)dt = \int_a^b Fdr$$

Ejemplo 7
Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x;y;z) = yi + zj + yzk$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva dada $r(t) = costi + sentj + tk$, con t perteneciente al intervalo $[0;\pi]$

$$w = \int_a^b F(r(t)).r´(t)dt = \int_a^b Fdr$$

$\int_0^{\pi}(senti + tk + tsent)k)(-senti + costj + k)dt = \int_0^{\pi}(-sen^2 t + tcost + tsent)dt$=
=$\left[-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen2t + tsent + cost - tcost + sent +\right]_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}}$=$\left(-\frac{1}{2}\pi + \pi - 1\right) - \ (1) = \frac{1}{2}\pi - 2$

Recuerdo $sen^2t = \frac{1}{2}(1 - cos2t)$ →$-sen^2t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2t$



Resuelvo por partes las siguientes integrales
$\int tsent$=$-tcost + \int costdt = -tcost + sent$
$u = t$→du=dt
$dv = sentdt$→$v = -cost$

$$\int tcost = tsent - \int sentdt = tsent + cost$$
$u = t$→du=dt
$dv = costdt$→$v = sent$

Nota
La orientación de la curva es importante en las integrales de líneas de funciones vectoriales. Si se invierte la orientación, el vector tangente unitario $T(t)$cambia a$-T(t)$ de modo que

$$\int_{-C} F.dr = -\int_C F.dr$$

Integrales de flujo y circulación de campos de velocidad
Si el campo F, representa un campo de velocidad de un fluido que fluye a través de una región en el espacio la integral de $F.T$, a lo largo de una curva en la región, nos da el flujo del fluido a lo largo de la curva.

Definición
$Si\ r(t)$ es una curva suave en el dominio de un campo continuo de velocidades F, el flujo a lo largo de la curva definida en $[a;b]$ es

Flujo=$\int_a^b F.Tds$

En este caso la integral de línea es la integral de flujo.
Si la curva es cerrada entonces el flujo es la circulación a lo largo de la curva.

Ejemplo 8

El campo de velocidad de un fluido es $F = xi + zj + yk$.Encuentra el flujo a lo largo de la hélice $r(t) = costi + sentj + tk \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

Flujo=$\int_C F.Tds = \int_a^b Fdr$

$$\int_a^b Fdr = \int_0^{\pi/2} (costi + tj + sentk)(-senti + costj + k)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-costsent + tcost + sent)dt = \left[\frac{cos^2 t}{2} + tsent\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Integrales de línea en forma diferencial

Si F es un campo vectorial de la forma $F(x,y) = Mi + Nj$ y C es una curva que viene dada por $r(t) = x(t)i + y(t)j$ tal que $a \leq t \leq b$, entonces

$\int_C F.dr$=$\int_a^b F(r(t)).r´(t)dt = \int_a^b (Pi + Qj)(x´(t)i + y´(t)j)dt$=$\int_a^b P\,x´(t)dt + Qy´(t)dt$=

$$= \int_a^b Pdx + Qdy$$

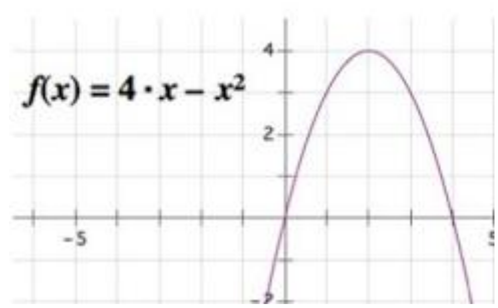
Si $F(x,y) = Mi + Nj + Pk$ y C es una curva en el espacio entones la forma diferencial de la integral de línea es

$$\int_C F.dr = \int_a^b Mdx + Ndy + Pdz$$

Expresión vista ya anteriormente en las integrales de líneas de campos escalares

Ejemplo 9

Calcular $\int_C ydx + x^2\,dx$, donde C es el arco de parábola $y = 4x - x^2$ de $(4;0)$ a $(1;3)$



Elegimos como parámetro a *x* → $y = 4x - x^2$; por lo tanto $dy = (4 - 2x)dx$

$$\int_C ydx + x^2\,dx = \int_4^1 (4x - x^2)dx + x^2(4 - 2x)dx$$

$$= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3)dx =$$

$\left[2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_4^1$=$\frac{5}{2} - (-32) = \frac{69}{2}$

Teorema Fundamental de la Integrales de línea

Vamos a introducirnos en el tema calculando la integral de línea de un campo victorial a través de tres caminos diferentes

Ejemplo

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas:$F(x; y) = \frac{1}{2}xyi + \frac{1}{4}x^2j$, sobre una particula que se mueve desde $(0; 0)$ hasta $(1; 1)$ a lo largo de los siguientes caminos:

a) $C_1: y = x$ b) C_2: x=y^2 c) C_3: y=x^3

a) $C_1: y = x$

Parametrizamos la curva

$y = x = t$

$r(t) = ti + tj$ con $0 \leq t \leq 1$

$w = \int_a^b Fdr$=$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}tti + \frac{1}{4}t^2j\right)(i + j)$dt= $\int_0^1 \frac{3}{4}t^2dt = \left[\frac{1}{4}t^3\right]_0^1$=$\frac{1}{4}$

b) $C_1: x = y^2$

Parametrizamos la curva

$x = t$, $y = \sqrt{x} = \sqrt{t}$

$r(t) = ti + \sqrt{t}j$ con $0 \leq t \leq 1$

$w = \int_a^b Fdr$=$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^{3/2}i + \frac{1}{4}t^2j\right)\left(i + \frac{1}{2}t^{-1/2}j\right)dt = \int_0^1 \frac{5}{8}t^{3/2}dt = \left[\frac{1}{4}t^{5/2}\right]_0^1$=$\frac{1}{4}$

c)C_3: y=x^3

$x = t$, : y= t^3 $0 \leq t \leq 1$

$w = \int_a^b Fdr$=$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^4i + \frac{1}{4}t^2j\right)(i + 3t^2j)\ dt = \int_0^1 \frac{5}{4}t^4dt = \frac{1}{4}$

Observamos que el trabajo realizado es el mismo cualquiera sea la trayectoria que une los dos puntos,

Podemos pensar entonces que la cantidad de trabajo necesario para mover la partícula desde un punto hasta otro depende de la posición inicial y final del objeto, y no de la trayectoria. Podríamos preguntarnos si esto ocurre siempre, o también que campos vectoriales tienen esta propiedad

Recordando el concepto de campos conservativos estudiados en la unidad 3 vemos que en este caso se verifica las condiciones necesarias y la existencia de función potencial.

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, condición necesaria para que un campo vectorial sea consevativo

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{2}x \rightarrow \exists f(x;y)/\ \Delta f = F$

Buscamos esta función

$\frac{\partial f}{\partial x} = M = \frac{1}{2}xy \quad\quad N = \frac{1}{4}x^2$

$f(x;y) = \int \frac{1}{2}xy\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\ \mathrm{x}^2\mathrm{y} + \mathrm{h(y)}$

$f(x;y) = \int \frac{1}{4}x^2\mathrm{dy} = \frac{1}{4}\ \mathrm{x}^2\mathrm{y} + \mathrm{g(x)}$

De las dos integrales anteriores concluimos que la función potencial es $f(x;y) = \frac{1}{4}\ \mathrm{x}^2\mathrm{y}$

El campo es conservativo.

Podemos decir entonces que la integral de línea de un campo vectorial conservativo no depende de la trayectoria

Integrales de línea de campos vectoriales conservativos

El siguiente teorema proporciona una manera conveniente de evaluar una integral de línea de un campo conservativo. El mismo establece que el valor de la integral solo depende de los extremos y no de la trayectoria que los une

Teorema fundamental de las integrales de línea

Si C es una curva suave dada por una función vectorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$, y sea f una función derivable de dos o tres variables, cuyo vector gradiente es continuo sobre la curva C, entonces:

$\int_c\ \nabla f dr = f(r(b) - f(r(a))\ \ (1)$

El teorema dice que podemos evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservativo conociendo el valor de la función potencial f en los extremos de la curva.

Suponga además que *A* y *B* son los puntos inicial y final respectivamente de la curva C.

$$\int_C \nabla f dr = \int_a^b \nabla f dr = \int_a^b \nabla f(r(t)) r'(t) dt = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{df(r(t))}{dt} dt = f(r(b) - f(r(a))$$

Entonces podemos concluir:

$$\int_a^b F dr = f(B) - f(A)$$

Entonces el valor de la integral depende solo del valor de *f* en ***A*** y *B* y no de las trayectorias entre ellos

Si se considera el gradiente ∇f de una función f , de dos o tres variables como algo parecido a la

derivada de f para funciones de una sola variable, entonces se observa que la ecuación (1) es la versión vectorial análoga de la fórmula del teorema fundamental de cálculo.
Volviendo al ejemplo anterior tenemos:

$$w = \int_a^b Fdr = \int_0^1 (\frac{1}{2}xyi + \frac{1}{4}x^2 j \,\mathrm{dr} = \mathrm{f(r(1)) - f(r(0))=f(x_2 : y_2) - f(x_1 : y_1)=f(1:1) - f(0:0)=}\frac{1}{4}$$

Ejemplo 10
Suponga que el campo de fuerza $F = \nabla f$ es el gradiente de la función

$$f(x; y; z) = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Determine el trabajo realizado por F al mover un objeto a lo largo de una curva suave *C* que une (1, 0, 0) con (0, 0, 2) sin pasar por el origen.
Una aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, indica que el trabajo realizado por F a lo largo de cualquier curva *C* que une dos puntos sin pasar por el origen es

$$\int_a^b Fdr = f(B) - f(A)$$

$$\int_C Fdr = f(0; 0; 2) - f(1; 0; 0) = -\frac{1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}$$

Independencia de la trayectoria
Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si F **es** un campo vectorial continuo y conservativo definido en una región abierta *D* en el Espacio y *A* y *B* dos puntos cualesquiera de esta región, la integral de línea a lo largo de la trayectoria *C* desde *A* hasta *B* en *D* es la misma sobre todas las trayectorias que unen estos dos puntos. Este resultado se enuncia diciendo que la integral $\int_C Fdr$ es independiente de la trayectoria en *D*, o sea

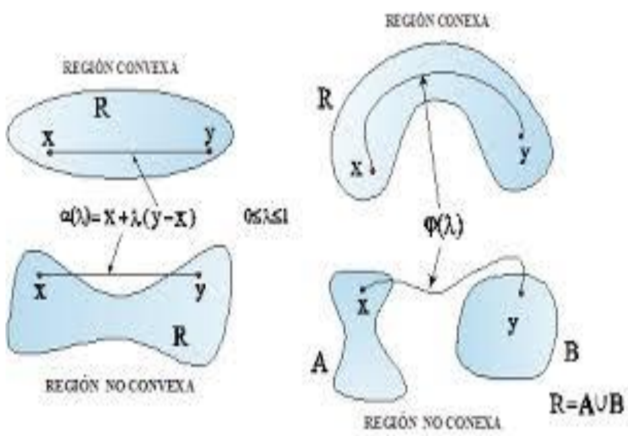
$$\int_{C_1} Fdr = \int_{C_2} Fdr$$

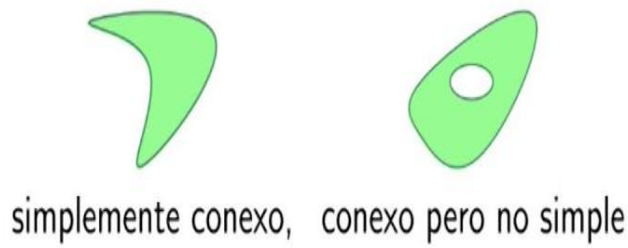
Siendo C_1 y C_2 dos curvas seccionalmente suaves que tienen el mismo punto inicial *A* y el mismo punto final *B*

Nota 1
Que una región *D* sea **conexa**, en una región abierta significa que todo punto en *D* se une a otro por medio de una curva suave que se encuentra en la región.
Si *D* es **simplemente conexa**, significa que todo lazo en *D* se contrae hasta formar un punto sin salir de *D*
Consideramos a las regiones conexas como de “una sola pieza” y a las regiones simplemente conexas como regiones “sin agujero alguno que atrape lazos”. Todo el espacio es conexo y simplemente conexo

Nota 2

Recordemos también que las curvas son **suaves por partes**; si están formadas por un número finito de partes suaves unidas por los extremos y que una curva es cerrada si su punto final coincide con su punto inicial o sea $r(a) = r(b)$



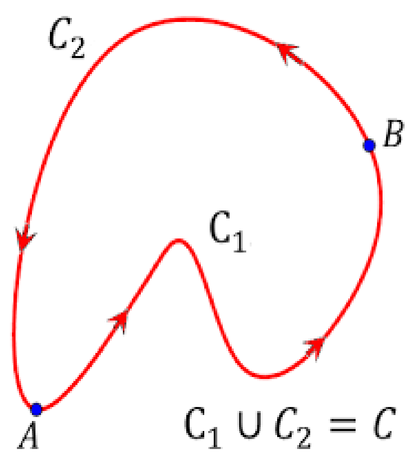


Teorema 1:

$\int_C\ Fdr$ es independiente de la trayectoria en *D*, si y solo si $\int_C\ Fdr = 0$, para toda trayectoria cerrada *C* en *D*,

Demostración.

- Vamos a suponer que $\int_C$ Fdres independiente de la trayectoria en D y a partir de esta hipótesis vamos a tratar de llegar a que $\int_C\ Fdr = 0$



Tomamos dos puntos *A* y *B de* la curva Consideramos que la cuva *C* está compuesta por la trayectoria C_1 que va desde *A* a *B y* C_2 que va de *B* a *A* .asi tenemos :

$$\int_C Fdr = \int_{C_1} Fdr + \int_{C_2} Fdr$$

Si invertimos la dirección de C_2 para obtener una trayectoria $-C_2$, desde *A* a *B* y teniendo en cuenta la propiedad vista anteriormente que dice:

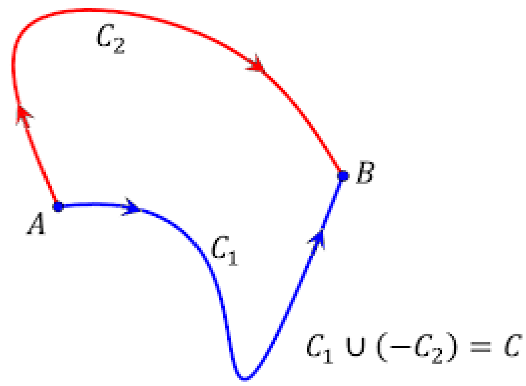
$\int_{-C} Fdr = -\int_C\ Fdr$ vamos a tener

$\int_C\ Fdr = \int_{C_1} Fdr + \int_{C_2} Fdr = \int_{C_1} Fdr - \int_{-C_2} Fdr = 0$

Con lo que queda demostrado la primera parte de l teorema

La última expresión es cero ya que C_1 y C_2 tienen el mismo punto inicial y final y por hipotesis la integral $\int_C\ Fdr$ es independiente de la trayectoria por lo que $\int_{C_1} Fdr = \int_{-C_2} Fdr$

- Vamos a suponer ahora que $\int_C \ Fdr = 0$ y vamos a demostrar que $\int_C$ Fdr es independiente de la trayectoria en D



Tomamos dos trayectorias cualquiera C_1 y C_2 desde *A* a *B* *en D* y definimos a la cuva *C* como $C_1 \cup (-C_2)$:

$$\int_C Fdr = \int_{C_1} Fdr + \int_{-C_2} Fdr$$

Por propiedad tenemos que $\int_{-C_2} Fdr = -\int_{C_2} Fdr$

$\int_C \ Fdr = \int_{C_1} Fdr + \int_{-C_2} Fdr = \int_{C_1} Fdr - \int_{C_2} Fdr$

Al ser $\int_C \ Fdr = 0$

Tenemos $\int_C \ Fdr = \int_{C_1} Fdr - \int_{C_2} Fdr = 0$ por lo que podemos afirmar que $\int_{C_1} Fdr = \int_{C_2} Fdr$

Lo que implica que la $\int_C \ Fdr$ es independiente de la trayectoria

Vimos que la integral de línea de cualquier campo vectorial conservativo es independiente de la trayectoria, lo que equivale a decir que la integral de *F* en cada trayectoria cerrada es igual a cero.
La interpretación física de estos resultados es que, el trabajo que lleva a cabo un campo de fuerzas conservativo al mover un objeto alrededor de una trayectoria cerrada es igual a cero.
El siguiente teorema establece que los únicos campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos.

Teorema 2:

Si *F* **es** un campo vectorial continuo definido en una región abierta conexa $D.Si$ $\int_C \ Fdr$ es independiente de la trayectoria en *D*, entonces F es un campo vectorial conservativo sobre *D,* es decir existe una función f tal que $\nabla f = F$

Teorema 3:

Si $F(x; y; z) = Mi + Nj + Pk$, tiene primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa *D,* y *C* es una curva suave a trozos en *D*, las siguientes condiciones son equivalentes.

- F es conservativo. Es decir existe *f* tal que $\nabla f = F$.
- $\int_C \ Fdr$, es independiente de la trayectoria.
- $\int_C \ Fdr = 0$, para toda curva cerrada *C* en *D*

Nota

Ahora que observamos la conveniencia de evaluar integrales delineas de campos vectoriales conservativos resta recordar dos cuestiones vistas en la unidad 3:

- ¿Cómo saber cuando un campo vectorial es conservativo?
- Si F es un campo vectorial conservativo, ¿cómo hallamos la función potencial *f*?

Conservación de la Energía

En física se llama energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v a $k = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial p de una partícula $(x; y; z)$ en un campo vectorial conservativo *F* se define como $p(x; y; z) = -f(x; y; z)$, donde f es una función potencial de *F.*

Entonces el trabajo realizado por el campo F a lo largo de una curva suave *C desde A* a *B* es

$$w = \int_C Fdr = [f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})]_A^B == p(A) - p(B)$$

El trabajo entonces es la diferencia entre las energias potenciales en *A* y *B .*

Supongamos ahora que $r(t)$*,* es el vector posició n de una particula que se mueve por la curva *C* desde $A = r(a)$*,* hasta $B = r(b)$.En cualquier instante t, la velocidad, acerleracion y rapidez de esa particula son $v(t) = r´(t)$, $a(t) = r´´(t)$ y $v(t) = |v(t)|$.

Por la segunda ley de Newton, $F = ma(t) = mv´(t)$ y el trabajo realizado por *F* es

$$w = \int_C Fdr = \int_a^b F(r(t)).r´(t)dr = \int_a^b F.v(t)dt = \int_a^b [mv´(t)].v(t)dt = \int_a^b m[v´(t).v(t)].dt =$$

$$= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d[v(t).v(t)]}{dt}dt = \frac{m}{2}\oint_a^b \frac{d[|v(t)|^2]}{dt}dt = \frac{m}{2}[|v(t)|^2]_a^b = \frac{1}{2}m[|v(b)|^2] - \frac{1}{2}m[|v(a)|^2] = k(B) - k(A)$$

Al igualar los dos valores del trabajo obtenemos

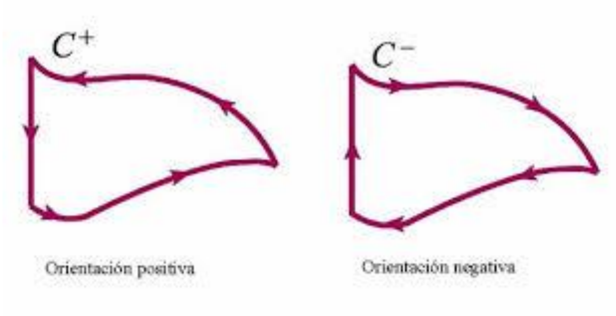
$$p(A) - p(B) = k(B) - k(A)$$

$$p(A) + k(A) = p(B) + k(B)$$

Esta última expresión dice que si un objeto se mueve desde un punto A, a otro punto B ,bajo un campo de fuerzas conservativo, la suma de su energía cinética y de su energía potencial permanece constante. Esto se conoce con el nombre de Ley de conservación de la energía y además es la razón por la que un campo vectorial se llama conservativo.

TEOREMA DE GREEN

Este teorema establece la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple C y una integral doble sobre la región plana D, acotada por C. La región D incluye todos los puntos interiores y también los que están sobre C. Utilizamos la convención de que la orientación positiva se refiere a una curva recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. La región D queda siempre a la izquierda del punto que recorre la curva.



Teorema de Green

Sea *C* una curva suave por partes, cerrada simple y que encierra una región *D* en el plano y orientada positivamente. Sea $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}\ un$ campo vectorial donde *M* y *N* tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a *D*

$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \ (1)$$

Demostración

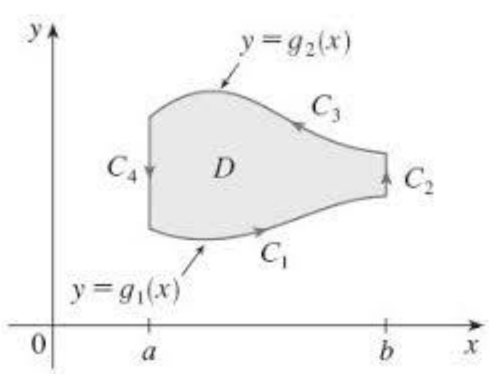
El teorema de Green queda demostrado si podemos probar que:

$$\int_C Mdx = -\iint_D \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

$$\int_C Ndy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dA$$

Probamos la ecuación (1) al expresar D como:

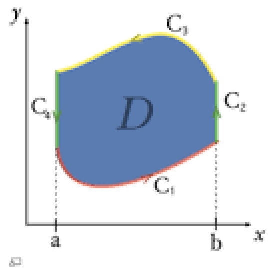
$D\{(x; y), a \leq x \leq b;\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$



Calculamos la integral de la derecha de la igualdad (1)

$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x; y)dydx = \int_a^b [M(x; y)]_{g_1(x)}^{g_2(x)}\ dx = \int_a^b \left[M\left(x; g_2(x)\right) - M\left(x; g_1(x)\right)\right]dx$ (3)

Calculamos la integral de la izquierda expresando C como la unión de cuatro curvas:
$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$



Sobre C_1, tomamos las ecuaciones paramétricas:

$x = x\ ;\ y = g_1(x);\ a \le x \le b$

Tenemos entonces:

$$\int_{C_1} M(x; y)dx = \int_a^b M(x; g_1(x))dx$$

C_3 va de derecha izquierda , pero $-C_3$, lo hace en sentido contrario de modo que las ecuaciones paramétricas de $-C_3$

$x = x\ ; y = g_2(x); a \le x \le b$

$$\int_{C_3} M(x; y)dx = -\int_{-C_3} M(x; y)dx = -\int_a^b M(x; g_2(x))dx$$

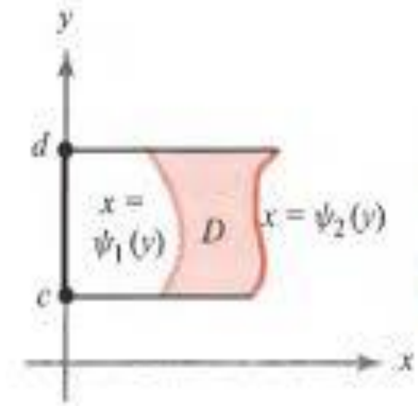
$\int_{C_2} M(x; y)dx = \int_{C_4} M(x; y)dx = 0$ (esto se debe a que *x* es constante , por lo tanto $dx = 0$)

$$\int_C Mdx = \int_{C_1} M(x; y)dx + \int_{C_2} M(x; y)dx + \int_{C_3} M(x; y)dx + \int_{C_4} M(x; y)dx =$$

$$= \int_a^b M(x; g_1(x))dx - \int_a^b M(x; g_2(x))dx$$

Al comparar esta expresión con la ecuación (3) tenemos que

$\int_C \; Mdx = -\iint_D \frac{\partial M}{\partial y} dA$

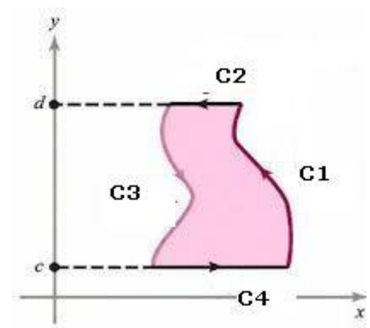


Probamos la ecuación (2) al expresar D como:
$D\{(x; y), c \leq y \leq d;\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\ \}$

Calculamos la integral de la derecha de la igualdad 2

$\iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dA$=$\int_c^d \int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}(x; y)dxdy$ =$\int_c^d [N(x; y)]_{\mu_1(y}^{\mu_2(y)}\ \ dd$ =$\int_c^d [N(\mu_2(y); y) - N(\mu_1(y); y)]dy$ (4)

Calculamos la integral de la izquierda expresando C como la unión de cuatro curvas:



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

Sobre C_1, tomamos las ecuaciones paramétricas:

$y = y\ ;\ x = \mu_2(y);\ c \leq y \leq d$

$$\int_{C_1} Ndy = \int_C^d N(\mu_2(y); y)dy$$

$\int_{C_2} N(x; y)dx = \int_{C_4} N(x; y)dx = 0$ (esto se debe a que *y* es constante , por lo tanto $dy = 0$)

C_3 va de derecha izquierda , pero $-C_3$, lo hace en sentido contrario de modo que las ecuaciones paramétricas de $-C_3$

$y = y\ ;\ x = \mu_2(y);\ c \leq y \leq d$

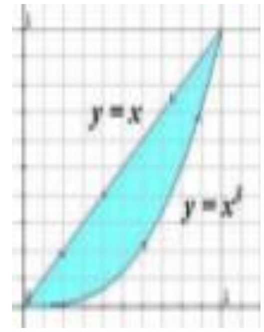
$$\int_{C_3} N(x; y)dx = -\int_{-C_3} N(x; y)dx = -\int_c^d N(\mu_1(y); y)dy$$

$$\int_C Ndy = \int_{C_1} N(x; y)dy + \int_{C_2} N(x; y)dy + \int_{C_3} N(x; y)dy + \int_{C_4} N(x; y)dy =$$

$$= \int_c^d N(\mu_2(y); y)dy - \int_c^d N(\mu_1(y); y)dy$$

Al comparar esta expresión con la ecuación (4) tenemos que

$\int_C \; Ndy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} dA$



De esta manera nos queda demostrado el Teorema de Green.

Ejemplo 1
Evaluar la integral de línea

$$\int_C \; y^3\, dx + (x^3 + 3xy^2)dy$$

Donde C es la curva que consiste en la unión del camino que va de $(0;0)$ a $(1;1)$ a lo largo de la parábola cubica y= x^3 y el segmento de recta $y = x$, que va desde $(1;1)$ a $(0;0)$.

Aunque la integral de línea pueda evaluarse con los métodos vistos anteriormente, eso involucraría formular dos integrales, una a lo largo de la parábola cúbica y la otra a lo largo de la recta *y=x* podemos usar entonces para simplificar los cálculos, el teorema de Green.

Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, tenemos que: $\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \quad\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$,

$\int_C \; y^3\, dx + (x^3 + 3xy^2)dy$=$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

$$\int_C \; y^3\, dx + (x^3 + 3xy^2)dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} (3x^2 + 3y^2 - 3y^2)dydx = \int_0^1 \int_{x^3}^{x} 3x^2\, dydx$$

$$= \int_0^1 [3x^2 y]_{x^3}^{x}\, dx =$$

$\int_0^1 (3x^3 - 3x^5)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

Ejemplo 2
Verifique el teorema de Green para el campo vectorial $F(x;y) = (x-y)i + xj$ y la región D acotada por el círculo unitario $r(t) = \cos(t)i + sen(t)j, \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C \; Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Vamos a evaluar primero la integral de línea
$x = \cos(t) \rightarrow \quad dx = -sentdt$

$y = sen(t) \rightarrow \quad dy = costdt$

$M = (x - y)$; $M = cost - sent$; $N = x$; $N = cost$;

$\int_C\ Mdx + Ndy = \int_0^{2\pi} -costsentdt + sen^2tdt + cos^2$dt=$\int_0^{2\pi} -costsentdt + dt =$

$$\left[\frac{cos^2t}{2} + t\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Integrando por sustitución tenemos: $u = cost \rightarrow du = -sentdt$,

por lo tanto $\int -costsentdt = \int udu = \frac{u^2}{2}$

Resolvemos ahora la integral doble:

$\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$

$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$=$\iint_D\ 2dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2rdrd\theta = \int_0^{2\pi}[r^2]_0^1\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$

Ejemplo 3
Evalúe:
$\oint_C\ (3y - e^{senx})dx + (7x + \sqrt{1 + y^4})dy$, en donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$

$M = 3y - e^{senx}$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 3$

$N = 7x + \sqrt{1 + y^4}$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 7$

La región *D* es la acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, así que lo vamos a expresar en coordenadas polares después de aplicar el teorema de Green.

$$\oint_C\ (3y - e^{senx})dx + (7x + \sqrt{1 + y^4})dy = \iint_D\ (7 - 3)dA =$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi} 4rdrd\theta = \int_0^3 4r[\vartheta]_0^{2\pi}dr\int_0^3 8\pi rdr = 8\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 = 36\pi$$

En los ejemplos 1 y 3 vimos que la integral doble fue más fácil de evaluar que la integral de línea. Pero a veces es más fácil evaluar la integral de línea .Por ejemplo si se conoce que $M(x; y)$=$N(x; y) = 0$ sobre la curva C, entonces el teorema de Green afirma que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_C Mdx + Ndy = 0$$

Sin importar los valores que asuman M y N sobre la curva C

Otra aplicación del Teorema de Green aplicado en sentido inverso ocurre cuando $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 1$

$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_D 1dA = \text{area de la region } D$$

Existen varias posibilidades:

$M(x;y)=0; \quad N(x;y) = x$

$M(x;y) = -y; \quad N(x;y) = 0$

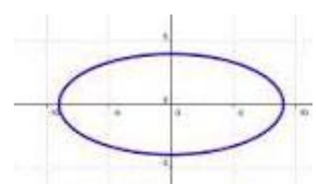
$M(x;y) = -y/2; \quad N(x;y) = x/2$

El teorema de Green proporciona entonces las siguientes formulas para el área de *D.*

$$A(D) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Ejemplo 4

Hallar el área $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ encerrada por la elipse, expresándola como integral de línea



Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$x = acost; \quad y = bsent; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

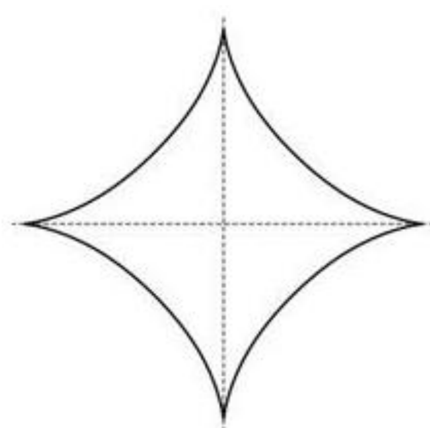
$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_C [(acost)(bsent) - (dsent)(-asent)]dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(cos^2 t + sen^2 t)dt =$

$\frac{ab}{2}[t]_0^{2\pi} = \pi ab$

Ejemplo 5

Determine el área de la región limitada por la hipocicloide que tiene la ecuación vectorial

$r(t) = cos^3 ti + sen^3 j$ **;** $\qquad 0 \leq t \leq 2\pi$



$x = cos^3 t \rightarrow dx = 3cos^2 t(-sent)$

$y = sen^3 t \rightarrow dy = 3sen^2 t(cost)$

Un par de funciones sencillas que cumplen la condición $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 1$ son: P = 0, Q = x, por lo que podemos considerar calcular el área mediante la integral:

$$A(D) = \oint_C xdy$$

$$A(D) = \oint cos^3t\, 3sen^2t(cost)dt = \oint 3cos^4t\, sen^2tdt =$$

$$= 3\int \frac{(1 + co2t)(1 + co2t)}{4}\frac{(1 - cos2t)}{2}dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(1 - cos^2 2t)(11 + cos2t)dt =$$

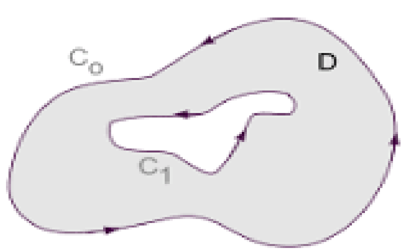
$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(1 + cos2t - cos^2 2t - cos^3 2t)dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(1 + cos2t - \frac{1}{2} - \frac{cos4t}{2} - cos^3 2t)dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{sen2t}{2} - \frac{sen4t}{8} - \frac{sen2t}{2} + \frac{sen^3 2t}{6}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi$$

De esta manera contamos con una herramienta más para obtener el área de la región encerrada por una curva cerrada, que se suma al método en coordenadas polares visto en la unidad anterior y al cálculo por integral de área que ejecutamos cuando tenemos la expresión cartesiana de la curva.

Aplicación del teorema de Green a una región con agujeros.

El teorema de Green también es válido para regiones como la siguiente:



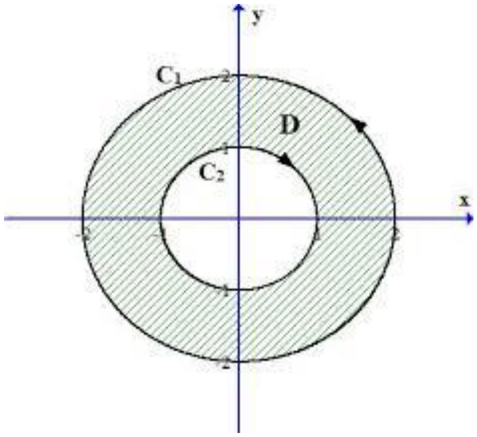
Aquí la curva $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C Mdx + Ndy = \int_{C_1} Mdx + Ndy + = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

Ejemplo 5

Evaluar la integral: $\oint_C y^2\,dx + 3xydy$

donde C es la frontera de la región anular D de la parte del plano que está entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ (curva C_1 con orientación negativa) y $x^2 + y^2 = 4$ (curva C_2, con orientación positiva).



$M = y^2 \qquad N = 3xy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y$

$\oint_C \ y^2\, dx + 3xydy = \iint_D (3y - 2y)dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 rsen\theta r d\theta dr = \int_0^{2\pi} sen\theta d\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 =$

$= \frac{7}{3}\int_1^{2\pi} sen\theta d\theta = \frac{7}{3}[-cos\theta]_0^{2\pi} = \frac{7}{3}(-1+1) = 0$

Prof. María Graciela Ribas