UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA

ANALISIS MATEMATICO II

UNIDAD 6

INTEGRALES DE SUPERFICIE

El objeto del presente tema es el estudio de la integral de superficie. Podemos considerar esta nueva integral como el equivalente bidimensional de la integral de línea, siendo la región de integración una superficie en vez de una curva.
Es conveniente comenzar el tema abordando el estudio de las superficies. Hasta ahora solo han aparecido como gráficas de funciones de dos variables. No haremos un análisis exhaustivo de las mismas, solo daremos una definición formal, estudiaremos algunos casos particulares y precisaremos la propiedad de orientabilidad que presentan algunas de ellas, limitándonos, en definitiva, a recopilar el material necesario para trabajar con las superficies como regiones de integración

.Representaciones de una superficie

Una superficie S en R^3pueden expresarse de tres formas, ellas son:

La representación implícita.

Una superficie es el lugar geométrico de los puntos $(x;y;z)$ que $\in R^3$ tales que $F(x,y,z) = 0$ para cierto campo escalar F.

La representación explícita.

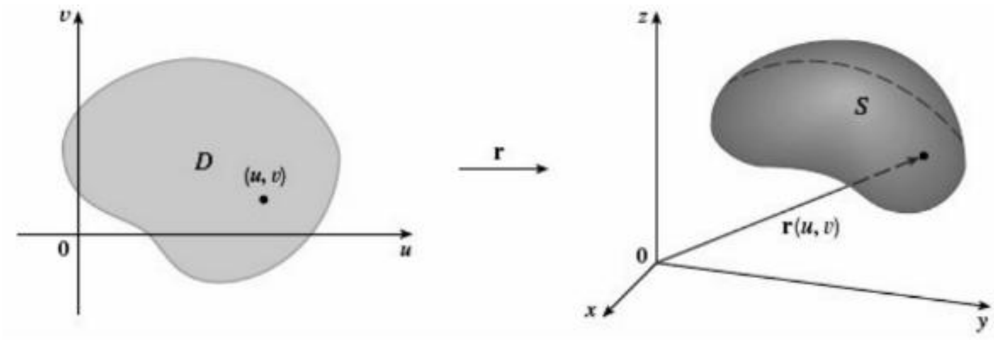
Es una ecuación de la forma $z = f(x,y)$, obtenida cuando en la expresión $F(x,y,z) = 0$ podemos despejar una de las variables (z en este caso) en función de las otras dos.

La representación paramétrica o vectorial.
De manera similar a la que describimos una curva en el plano o en el espacio como función vectorial de t, podemos definir una superficie mediante una función vectorial de dos variables, expresada en la forma: $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$, donde (u,v) varía en un conjunto conexo D .Las variables u y v son los parámetros, y D es el dominio de los parámetros**.**

$r: D \to R^3 \ / D \subset R^2$.

El conjunto de puntos $(x;y;z) \in R^3 \ / \ x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$,

Representan las ecuaciones paramétricas de la superficie S



La superficie S esta delineada por el vector de posición $r(u,v)$, según (u,v) , se mueva en la región D.

Las derivadas parciales con respecto a x; y , z y con respecto a u y v son todas continuas.

Ejemplo 1

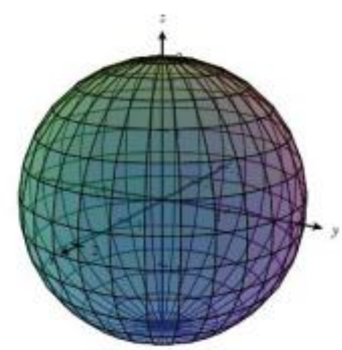
La esfera tiene una forma implícita dada por $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

La representación paramétrica está dada por coordenadas esféricas $(\varphi;\theta)$

$x = \rho cos\theta sen\varphi$

$y = \rho sen\theta sen\varphi$

$z = \rho cos\varphi$



$r(\varphi;\theta) = \rho cos\theta sen\varphi i + \rho sen\theta sen\varphi j + \rho cos\varphi k$

Ejemplo 2

El cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con $0 \leq z \leq 1$

En coordenadas cilíndricas tiene la representación $r = 2$.De manera que elegimos como parámetros a $\theta\ y\ z$ en coordenadas cilíndricas.

Entonces ls ecuaciones paramétricas del cilindro son:

$r(\theta;z) = 2co\theta i + 2sen\theta j + zk$

$D = \{(\theta;z)\ /\ 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq 1\}$

Ejemplo 3

Determinar una parametrización del cilindro $x^2 + (y-3)^2 = 9$ con $0 \leq z \leq 5$

En coordenadas cilíndricas un punto $(x;\ y\ ;\ z)$, tiene la representación paramétrica:

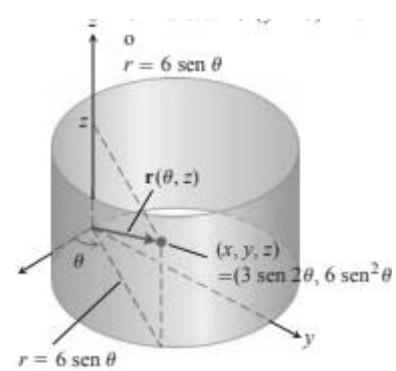
$x = rco\theta,\ \ y = rseno\theta,\ \ z = z$

$x^2 + y^2 - y + 9 = 9$

$r^2 - 6rsen\theta = 0$

$r = 6sen\theta$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Un punto típico del cilindro cumple con:



$x = rco\theta = 6sen\theta cos\theta = 3sen2\theta$

$y = rseno\theta = 6sen\theta sen\theta = 6sen^2\theta$

$z = z$

$\boldsymbol{r(\theta;z)} = (3sen2\theta)i + (6sen^2\theta)j + zk,\quad 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq z \leq 5$

Nota 1
En general si $z = f(x; y)$ es una representación explicita de una superficie S, se obtiene una representación paramétrica tomando:

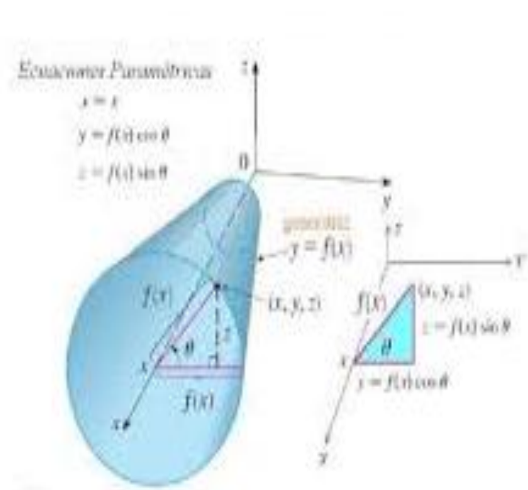
$$x(u, v) = u\ , \quad y(u, v) = v\ , \quad z(u, v) = f(u; v)$$

Ejemplo 4

Encuentre una representación paramétrica para el paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z(x; y) = x^2 + 2y^2$$

$$r(x; y) = xi + yj + (x^2 + 2y^2)k$$



Nota 2
Las superficies de revolución pueden representarse de manera paramétrica .Si consideramos la superficie S que se obtiene al rotar la curva $y = f(x)$ con $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, como se ve en la figura con $f(x) \geq 0$ y $f´$ continua.

Si θ es el angulo de rotación y $(x; y; z)$ es un punto sobre S

Entonces tenemos las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución

$$x = x$$

$$y = f(x)cos\theta$$

$$z = f(x)sen\theta$$

Donde tenemos a x y θ como parámetros

Ejemplo 5
Determinar las ecuaciones paramétricas para la superficie generada al rotar la curva $y = senx$ $0 \leq x \leq 2\pi$, alrededor del eje z

De las ecuaciones vistas en **Nota 2:**

$$x = x, \qquad y = senxcos\theta. \qquad z = senxsen\theta$$

Producto vectorial fundamental
Sea una superficie de ecuación vectorial $r(u; v) = x(u; v)i + y(u; v)j + z(u; v)k\ ,\quad (u, v) \in D$, si $x;\ y\ , z$ son derivables, podemos considerar los vectores r_u y r_v

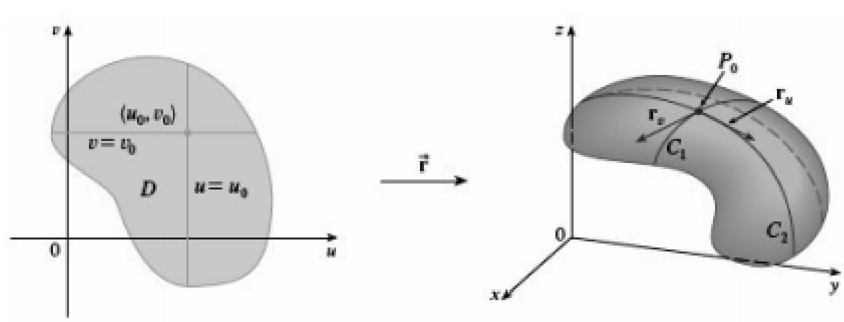
Si $P_o \in S$, cuyo vector posición es $r(u_o; v_o)$
Si hacemos u constante: $u = u_0$, entonces $r(u_o; v)$ es una función de una sola variable , que sabemos a demás que define una curva C_1 sobre S.El vector tangente a C_1 en P_o, se obtiene al hallar la derivada parcial de r con respecto a v

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_o; v_o)i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_o; v_o)j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_o; v_o)i$$

De igual manera, si hacemos v constante: $v = v_0$ entonces $r(u; v_o)$ es una función de una sola variable u , que define sobre S la curva C_2 en P_o.El vector tangente a C_2 en P_o, se obtiene al hallar la derivada parcial de r con respecto a u

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_o; v_o)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_o; v_o)j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_o; v_o)i$$

El producto vectorial $r_u x r_v$, se llama producto vectorial fundamental.
El producto $r_u x r_v$, determina un vector normal a la superficie S en cada punto. Si este producto es distinto de cero la superficie se llama suave (no tiene puntas, aristas o esquinas).Un punto de la superficie S en donde las derivadas $\frac{\partial r}{\partial u}$ y $\frac{\partial r}{\partial u}$ son continuas y el vector normal es distinto de cero, se llama punto regular. Los puntos que no son regulares se llaman singulares.
El módulo del producto vectorial fundamental puede ser interpretado como un factor de proporcionalidad de áreas



Plano tangente
Definición
El plano determinado por $\frac{\partial r}{\partial u}$ y $\frac{\partial r}{\partial u}$ en cada punto regular de una superficie se llama plano tangente a la superficie en el punto considerado y puede determinarse utilizando el vector normal

Vector normal
Definición

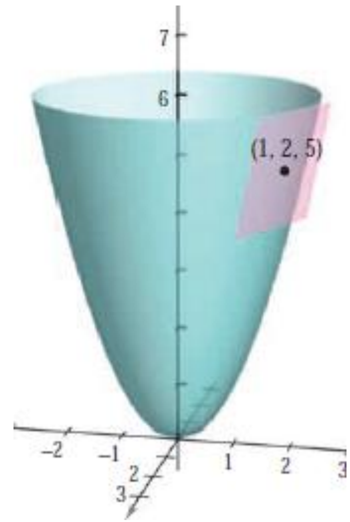
Un vector normal a S en el punto $(u_o; v_o)$ esta dado por:

$$N = r_u(u_o; v_o) x r_v(u_o; v_o) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6

Determine el plano tangente al paraboloide dado por: $r(u; v) = ui + vj + (u^2 + v^2)k$ en el punto (1;2;5)

El punto del plano uv que corresponde al punto (1; 2; 5), es $(u; v) = (1; 2)$.



Las derivadas parciales de r son

$r_u = i + 2uk$ y $r_v = j + 2vk$

$$N = r_u x r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2ui - 2vj + k$$

Entonces el vector normal al punto (1; 2; 5), es:

$r_u x r_v = -2ui - 2vj + k = -2i - 4j + k$

por lo tanto la ecuación del plano tangente en (1; 2; 5) es:

$-2(x - 1) - 4(y - 2) + (z - 5) = 0$ operando algebraicamente $-2x + 2 - 4y + 8 + z - 5 = 0$

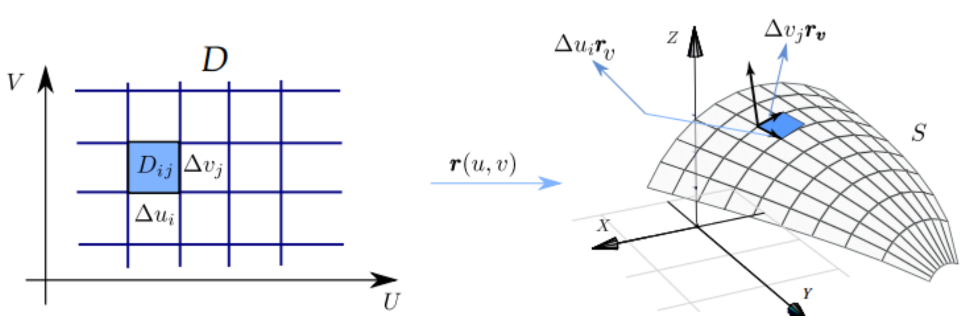
Tenemos que :

$-2x - 4y + z = -5$

Es la ecuación del plano tangente

Área de una superficie

Vamos a definir el área de una superficie dada en forma paramétrica



Consideramos una superficie S cuyo dominio paramétrico D es un rectángulo y hacemos una partición de dicho dominio en n subrectangulos D_{ij}.Este rectángulo tiene un área igual a $\Delta u_i x \Delta v_j$
En cada D_{ij} se toma el punto $(u_i; v_j)$, más cercano al origen. Cada uno de estos rectángulos D_{ij}, de área infinitesimal es aplicado mediante la función vectorial $r(u; v)$en un paralelogramo curvilíneo S_{ij}, de lados $\Delta u_i r_u$;$\Delta v_j r_v$, en el plano tangente a la superficie S en el punto $r(u_i; v_j)$
Este paralelogramo tiene área aproximadamente igual a

$$\left|(\Delta u_i r_u) \text{ x } (\Delta v_j r_v)\right| = |r_u x r_v| \Delta u_i \Delta v_j$$

Sumando las áreas de todos los S_{ij} tenemos una aproximación al área de S:

$$\sum |r_u x r_v| \Delta u_i \Delta v_j$$

Reconociendo la suma anterior como una suma de Rieman y sabiendo además que la aproximación mejora cuando la norma de la subdivisión $\|P\|$ tiende a cero, se sugiere la siguiente definición:

Definición:

Si S es una superficie paramétrica suave dada por la ecuación

$$r(u; v) = x(u; v)i + y(u; v)j + z(u; v)k \text{ con } u, v) \in D$$

Y S se cubre solo una vez conforme $(u; v)$ recorre el dominio paramétrico D , entonces el área de la superficie S es

$$A(S) = \iint_D |r_u x r_v| \mathrm{dA}$$

-

Si S es una superficie dada por $z = f(x; y)$; $(x; y) \in D$ y f $t$iene derivadas parciales continuas, tomamos a x e y como parametros
Las ecuaciones paramétricas son

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = f(x; y)$$

$$r(x; y) = xi + yj + f(x; y)k$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = i + \frac{\partial f}{\partial x} k \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = j + \frac{\partial f}{\partial y} k$$

$$r_x x r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x i - f_y j + k$$

$$|r_x x r_y| = \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + 1}$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{{f_x}^2 + {f_y}^2 + 1} dxdy$$

- Si *S* viene dada implícitamente por la ecuación $F(x; y; z) = 0$, suponiendo que la ecuación define implícitamente a z como función de x e y.

Hallamos f_x y f_y por derivación implícita:

$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ siendo $F_z \neq 0$

$F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ siendo $F_z \neq 0$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \frac{{F_x}^2}{{F_z}^2} + \frac{{F_y}^2}{{F_z}^2}} dxdy = \iint_D \frac{\sqrt{{F_z}^2 + {F_x}^2 + F_y}}{|F_z|} dxdy$$

- **Área de una superficie de revolución**

$x = x, \qquad y = f(x)cos\theta, \qquad z = f(x)sen\theta$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = i + \frac{\partial f}{\partial x}cos\theta j + \frac{\partial f}{\partial x}sen\theta k$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0i - f(x)sen\theta j + f(x)cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} x \frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial x}cos\theta & \frac{\partial f}{\partial x}sen\theta \\ 0 & -f(x)sen\theta & f(x)cos\theta \end{vmatrix} = f'(x)f(x)i - f(x)cos\theta j - f(x)sen\theta k$$

$$|r_x x r_\theta| = \sqrt{(f'(x)f(x))^2 + (f(x)cos\theta)^2 + (f(x)sen\theta)^2} = \sqrt{(f'(x)f(x))^2 + f(x)^2} =$$

$$= \sqrt{(1 + f'(x)^2)f(x)^2} = f(x)\sqrt{(1 + f'(x)^2)}$$

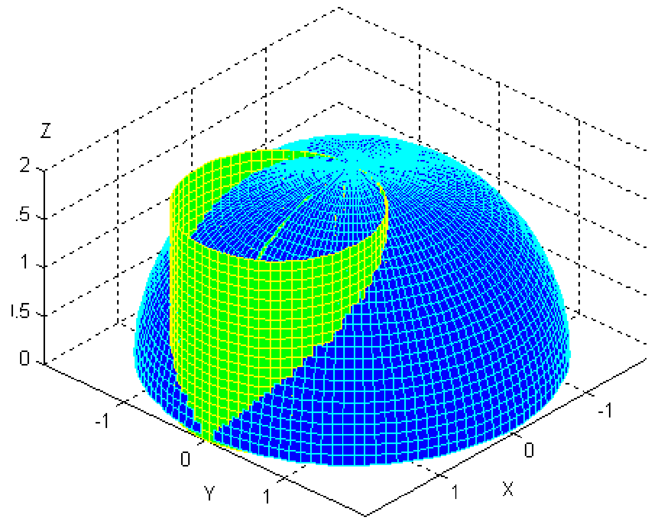
$$A(S) = \iint_D f(x)\sqrt{(1 + f'(x)^2)} dxd\theta = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{(1 + f'(x)^2)} dxd\theta =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{(1 + f'(x)^2)} dx$$

Esta es la fórmula que utilizamos el año pasado para definir el área de una superficie de revolución en el cálculo de una variable.

Ejemplo 1

Determinar el área de la porción de superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $(z \geq 0)$, que es interior al circulo $x^2 + y^2 - 2ax = 0$



En este caso puedo hacer $z = f(x; y)$

$$z = \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}$$

Si proyectamos sobre el plano *"xy"* tendremos:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\,dxdy$$

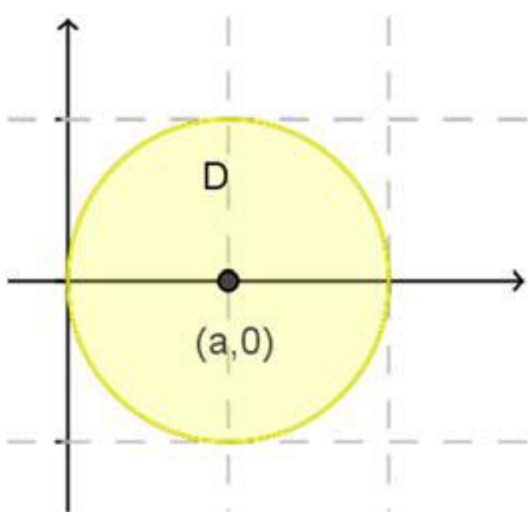
$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}} \qquad f_y = \frac{-y}{\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}$$

$$1 + {f_x}^2 + {f_y}^2 = 1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}\right)^2 = \frac{4a^2}{4a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\frac{4a^2}{4a^2 - (x^2 + y^2)}}\,dxdy = \iint_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}}\,dxdy$$

Determinamos D

D es el dominio, en el plano xy, limitado por la circunferencia de la figura, cuya ecuación se puede expresar como $x^2 + y^2 - 2ax = 0$



En coordenadas polares

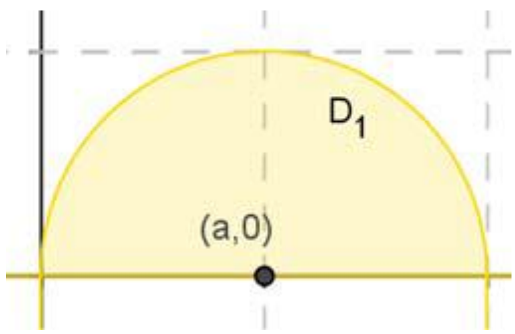
$x = rco\theta, \;\; y = rseno\theta,$
$x^2 + y^2 - 2ax = 0$
$r^2 - 2arcos\theta = 0 \;\rightarrow r = 2acos\theta$

$D = \{(r;\theta)/\, 0 \leq r \leq 2acos\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$

Podemos usar simetrías, ya que al cambiar y por -y no cambia la ecuación de la frontera del dominio ni la función integral, luego podemos escribir

$$A(S) = 2\iint_{D_1} \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)}} dxdy$$

siendo $D1$ el semicírculo superior limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ y el eje x



En coordenadas polares

$$A(S) = 2\iint_{D_1} \frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2}} rdrd\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2acos\theta} \frac{2ar}{\sqrt{4a^2-r^2}} drd\vartheta = 2\int_0^{\pi/2} d\theta\left[-2a\sqrt{4a^2-r^2}\right]_0^{2acos\theta} =$$

$$= -4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{4a^2(1-cos^2\theta)}\, d\theta = -8a^2\int_0^{\pi/2}(sen\theta - 1)d\theta = -\,8a^2[-cos\theta - \theta]_0^{\pi/2} =$$

$$= 8a^2[cos\theta + \theta]_0^{\pi/2} == 8a^2[(0+\tfrac{\pi}{2}) - (1+0)] = 8a^2(\tfrac{\pi}{2} - 1) = 4a^2(\pi - 2)$$

Cálculos auxiliares
Por sustitución

$u = 4a^2 - r^2 \rightarrow du = -2rdr$

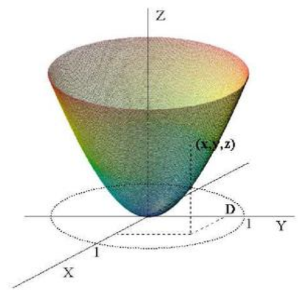
$$\int \frac{2ar}{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr = -\int au^{-1/2}\, du = -2au^{1/2} = -2a\sqrt{4a^2 - r^2}$$

Ejemplo 2
Calcule el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$:

La intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ es el punto (0; 0) y con el plano $z = 1$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ .La región limitada por la proyección de dicha circunferencia sobre el plano xy es
$D = \{(x; y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

Podemos considerar la siguiente parametrización
$x = x, \qquad y = y, \qquad z = f(x; y)$

$r(x; y) = xi + yj + (x^2 + y^2)k$



$\frac{\partial r}{\partial x} = i + 2xk \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = j + 2yk$

$$r_x x r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = -2xi - 2y + k$$

$$\left|r_x x r_y\right| = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$A(S) = \iint_D \left|r_x x r_y\right| dxdy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy$$

Trabajando en coordenadas polares
$x = rco\theta, \quad y = rseno\theta$

$A(S) = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^1 d\theta$=

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[(5)^{3/2} - 1\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)[\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Cálculos auxiliares

Por sustitución

$u = 4r^2 + 1 \rightarrow du = 8rdr$

$\int \sqrt{4r^2 + 1} dr$=$\frac{1}{8} \int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{12} u^{3/2} = \frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}$

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UN CAMPO ESCALAR

Sea S la superficie definida por $z = g(x; y)$ y D su proyección sobre el plano xy, suponemos, que g y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre D y que *f*(*x*, *y*, *z*) está definida sobre S y es continua sobre esta superficie
Siguiendo el mismo proceso para definir el área de la superficie, evaluamos el valor de f en $(x_i; y_i; z_i)$, formamos la suma $\sum_{i=1}^{n} f((x_i; y_i; z_i)\Delta S_i$
Donde $\Delta S_i \cong \sqrt{1 + [g(x_i; y_i)_x]^2 + [g(x_i; y_i)_y]^2}$
Si existe el límite cuando la norma de la subdivisión $\|P\|$, tiende a cero definimos la integral de superficie como

$$\int_S \int f(x; y; z)dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f((x_i; y_i; z_i)\Delta S_i$$

Una integral de superficie se calcula transformándola previamente en una integral doble, lo cual requiere expresar el integrando en función de dos únicas variables independientes. El dominio de integración de la integral doble pasará a ser la proyección de la superficie S sobre el plano de las variables independientes elegidas.

Teniendo en cuenta lo planteado inicialmente:
Consideramos que S es la superficie definida por $z = g(x; y)$ y D su proyección sobre el plano xy suponiendo además que g y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre D y *f*(*x*, *y*, *z*) es continua sobre S .
Se puede demostrar:

$$\int_S \int f(x; y; z)dS = \int_D \int f(x; y; g(x; y))\sqrt{1 + [g_x(x; y)]^2 + [g_y(x; y)]^2}dA =$$

Si S la superficie definida por $y = g(x; z)$ y D su proyección sobre el plano xz , tenemos

$$\int_S \int f(x; y; z)dS = \int_D \int f(x; g(x; z); z)\sqrt{1 + [g_x(x; y)]^2 + [g_z(x; z)]^2}dA =$$

Si S la superficie definida por $x = g(y; z)$ y D su proyección sobre el plano yz , tenemos

$$\int_S \int f(x; y; z)dS = \int_D \int f(g(y; z); y; z)\sqrt{1 + [g_y(x; y)]^2 + [g_z(x; z)]^2}dA =$$

Si la superficie S está dada mediante la función vectorial
$r(u; v) = x(u; v)i + y(u; v)j + z(u; v)k$ con $u, v) \in D$
Si las componentes son continuas y r_u y r_v, no son nulos ni paralelos en el interior de D , puede demostrase que

$$\int_S \int f(x; y; z)dS = \iint_D f(r(u); r(v))|r_u x r_v|\mathrm{dA}$$

Aplicaciones de la Integral de Superficie

Las integrales de superficie tienen aplicaciones parecidas a las integrales de línea.

Por ejemplo si una lamina de aluminio tiene la forma de una superficie S y la densidad (medida en unidades de masa por unidad de área en el punto$(x; y; z)$ es igual a $\rho(x; y; z)$, entonces su **masa** es :

$$m = \int_S \int \rho(x; y; z) dS$$

El centro de masa es $(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}$) donde

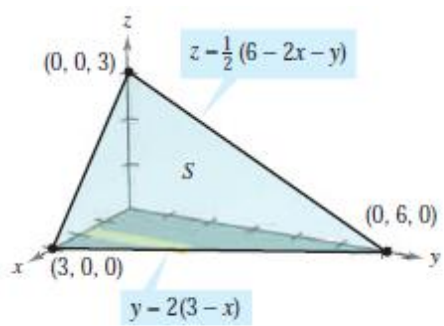
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_S \int x\rho(x; y; z)dS; \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_S \int y\rho(x; y; z)dS; \qquad z = \frac{1}{m}\int_S \int z\rho(x; y; z)dS$$

También los momentos de inercia se pueden definir como lo hicimos en las integrales de línea.

Ejemplo 1

Calcular la integral de superficie $\int_S \int (y^2 + 2yz)dS$; donde S es la porción del primer octante del plano $2x + y + 2z = 6$

Escribimos S en forma explicita $z = 3 - x - \frac{y}{2} \rightarrow g(x; y) = 3 - x - \frac{y}{2}$



Proyectamos la superficie sobre el plano xy

$$D = \{(x; y)/0 \le x \le 3, 0 \le y \le 6 - 2x\}$$

$$g_x = -1 \qquad g_y = -\frac{1}{2}$$

$$\int_S \int (y^2 + 2yz)dS = \int_D \int f(x; y; g(x; y))\sqrt{1 + [g_x(x; y)]^2 + [g_y(x; y)]^2}dA$$

$$\int_S \int [y^2 + 2y`\left(3 - x - \frac{y}{2}\right)]dS = \int_D \int [y^2 + 6y` - 2xy - y^2]\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}}dA =$$

$$\int_0^3 \int_0^{6-2x} (6y` - 2xy)\left(\frac{3}{2}\right) dydx = \frac{3}{2}\int_0^3 [3y^2 - xy^2]_0^{6-2x} = \frac{3}{2}\int_0^3 (108 - 108x + 36x^2 - 4x^3)dx$$

$$= \frac{3}{2}(108 - 54x^2 + 12x^3 - x^4)_0^3 = \frac{3}{2}(324 - 486 + 324 - 81) = \frac{243}{2}$$

Ejemplo 2

Si resolvemos la integral anterior pero proyectamos sobre el plano yz tendremos

$$x = 3 - \frac{y}{2} - z \rightarrow g(y; z) = 3 - \frac{y}{2} - z$$

$D = \{(y; z)/0 \leq y \leq 6, 0 \leq z \leq 3 - \frac{y}{2}\}$

$g_z = -1 \quad g_y = -\frac{1}{2}$

$$\int_S \int (y^2 + 2yz)dS = \int_D \int f(g(y;z); y; z)\sqrt{1 + \left[g_y(x;y)\right]^2 + [g_z(x;y)]^2}dA$$

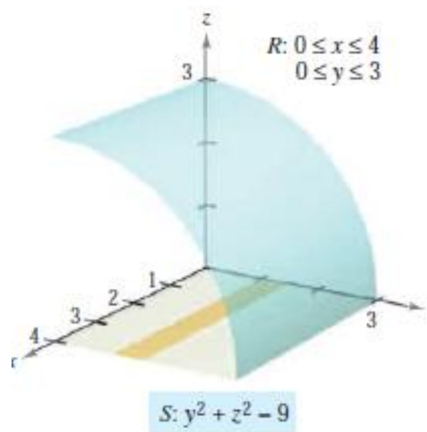
$$\int_S \int (y^2 + 2yz)dS = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{y}{2}} (y^2 + 2yz)\left(\frac{3}{2}\right)dzdy = \frac{3}{2}\int_0^6 [(y^2 z + yz^2)]_0^{3-\frac{y}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^6 \left(9y - \frac{y^3}{4}\right)dy = \frac{3}{2}\left[\frac{9y^2}{2} - \frac{y^4}{20}\right]_0^6 = \frac{3}{2}(81) = \frac{243}{2}$$

Ejemplo 3

Calcular la integral de superficie $\int_S \int (x + z)dS$; donde S es la porción del primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$

Expresamos la superficie en forma paramétrica



$r(x:\theta) = xi + 3cos\theta j + 3sen\theta k$

$0 \leq x \leq 4; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\int_S \int (x + z)dS = \iint_D f(r(x;\theta))|r_x x r_\theta|\mathrm{dA}$$

$r_x = i$

$r_\theta = -3sen\theta j + 3cos\theta k$

$$r_x x r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3sen\theta & 3cos\theta \end{vmatrix} = -3cos\theta j - 3sen\theta k$$

$|r_x x r_\theta| = \sqrt{9cos^2\theta + 9sen^2\theta}$ =3

$$\int_S \int (x + z)dS = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (x + 3sen\theta)3d\theta dx = \int_0^4 [3x\theta - 9cos\theta]_0^{\pi/2} dx = \int_0^4 (\frac{3\pi}{2}x + 9)dx =$$

$$= \left[\frac{3\pi x^2}{4} + 9x\right]_0^4 = 12\pi + 36$$

Ejemplo 4

Hallar la masa de una lamina S con la forma del cono $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$, siendo $0 \leq z \leq 4$.

En cada punto de S la densidad es proporcional a su distancia al eje z.

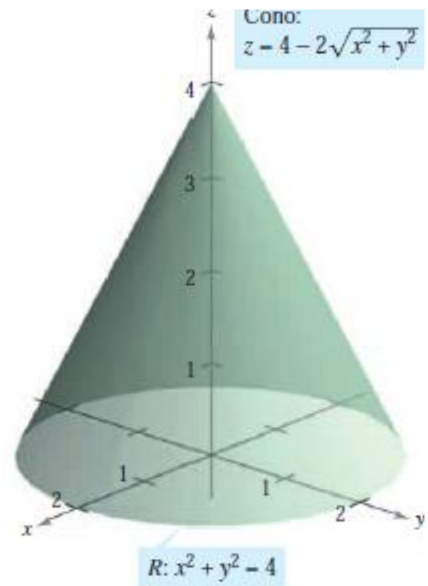
$m = \int_S \int \rho(x; y; z) dS$

La densidad está dada por $\rho(x; y; z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

La proyección de la superficie sobre el plano *xy, esta* dado por el circulo $x^2 + y^2 \leq 4$

Si definimos la superficie en forma paramétrica, tomando como parámetros a x e y tendremos

$r(x; y) = xi + yj + \left(4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right)k$



Si escribimos x e y en coordenadas polares tenemos:

$x = rcos\theta; \quad y = rsen\theta, \quad z = 4 - 2r$

$\boldsymbol{r(\theta; z)} = rcos\theta i + rsen\theta j + (4 - 2r)k, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2$

$D = \{(r; \theta)/0 \leq r \leq 2{,}0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

Observación: se escribe con negrita la letra r en este problema cuando nos referimos a la funcion vectorial, para no confundir con la denominación r del radio

$m = \int_D \int \rho(r(x; y))|r_x x r_y| dA$=

$\boldsymbol{r_\theta} = -rsen\theta i + rcos\theta j$

$\boldsymbol{r_r} = cos\theta i + sen\theta j$-2k

$$r_\theta x r_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -rsen\theta & rcos\theta & 0 \\ cos\theta & sen\theta & -2 \end{vmatrix} = -2rcos\theta i - 2rsen\theta j + (-rsen^2\theta - rcos^2\theta)k$$

$|r_\theta x r_r| = \sqrt{4r^2cos^2\theta + 4r^2sen^2\theta + r^2} = r\sqrt{5}$

Expresamos $\rho(x; y; z)$en coordenadas polares

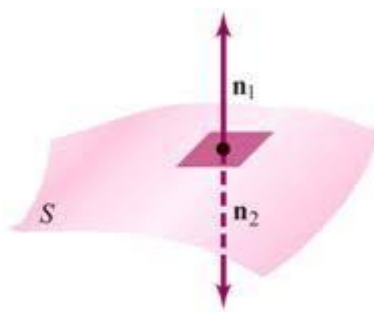
$\rho(x; y; z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$=$rk$

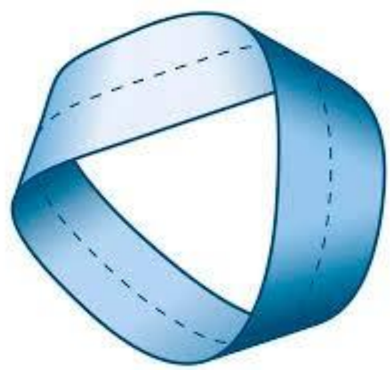
$$m = \int_0^2 \int_0^{2\pi} kr^2\sqrt{5}\, d\theta dr = k\sqrt{5}\int_0^4 r^2[\theta]_0^{2\pi}\, dr = 2\sqrt{5}k\pi \int_0^4 r^2 dr = 2\sqrt{5}k\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\sqrt{5}k\pi$$

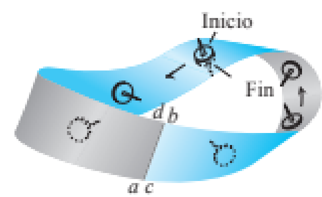
Orientación

Una superficie suave *S* es orientable o de dos lados si es posible definir en cada uno de sus puntos un vector unitario normal a *S* que varíe continuamente con la posición. Cualquier porción de una superficie orientable también es orientable. Las esferas y otras superficies cerradas suaves en el

espacio (superficies suaves que encierran sólidos) son orientables. Por convención, sobre una superficie cerrada elegimos a **n** apuntando hacia fuera.
Al orientarla , elegimos uno de los vectores normales unitarios que hay en cada punto.
Una vez elegido **n**, decimos que hemos orientado la superficie, y llamamos a la superficie junto con su campo normal una superficie orientada. El vector **n** en cualquier punto se llama dirección positiva en ese punto .
La banda de Möbius no es orientable. No importa dónde se comience a construir un campo unitario normal continuo. al mover al vector de manera continua alrededor de la superficie en la forma mostrada, éste regresará al punto de inicio con una dirección opuesta a la que tenía cuando comenzó moverse. El vector en ese punto no puede apuntar a ambos lados, aunque debería hacerlo en virtud de la continuidad. Concluimos que no existe tal campo.







Superficie orientable Banda de Mobius: Superficie no orientable

En una superficie orientable el vector gradiente proporciona un camino para hallar un vector normal unitario.

Para una superficie $z = g(x; y)$, si hacemos $G(x; y; z) = z - g(x; y)$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{-g_x i - g_y j + k}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}}$$ Como la componente k es positiva esto induce una orientación hacia arriba

$$\boldsymbol{n} = \frac{-\nabla G}{|\nabla G|}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{g_x i + g_y j - k}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}}$$ k es negativa esto induce una orientación hacia adentro

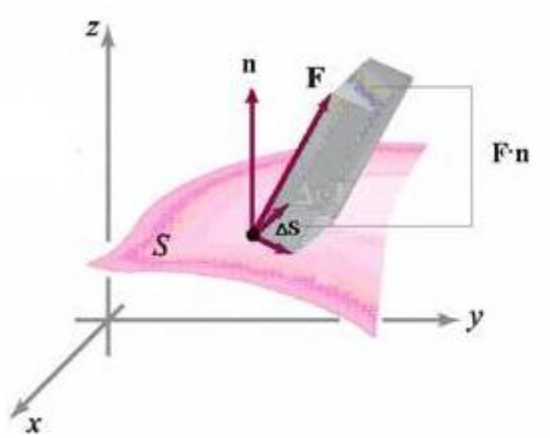
Si S en una superficie suave expresada de manera paramétrica por la función:$\boldsymbol{r}(u; v)$

Los vectores normales unitarios son:

$\boldsymbol{n} = \frac{r_u x r_v}{|r_u x r_v|}$ $\quad -\boldsymbol{n} = \frac{r_v x r_u}{|r_v x r_u|}$

Integral de superficie de Campos vectoriales o integrales de flujo

Una de las aplicaciones mas importantes de las integrales de superficie de capos vectoriales se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S
Sea **F** es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S, y $\boldsymbol{n}$ es el campo unitario normal elegido en la superficie. Supongamos que la superficie S está sumergida en un fluido, cuyo campo de velocidades es F. Si ΔS , es una porción pequeña se la superficie, sobre la cual F es prácticamente constante .La cantidad de flujo que atraviesa esta región por unidad de tiempo podemos aproximarla al volumen de la columna de altura Fn, esto es



ΔV =(altura)x(area de la base)=$(Fn)\Delta S$
Por lo tanto el volumen total del fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo está dado por la integral de superficie de F sobre S dada por la siguiente definición:

Definición
Si F es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S, con vector normal unitario ***n***, entonces la integral de superficie de F sobre S es

$$\int_S\int FdS = \int_S\int FndS$$

Llamamos a la integral de **Fn** sobre *S* el flujo de **F** a través de *S* en la dirección positiva. De esta forma, el flujo es la integral sobre *S* del componente escalar de **F** en la dirección de **n**.

Definición
Si **F** es el campo de velocidades del flujo de un fluido, el flujo de **F** a través de *S* es la tasa neta con la que el fluido atraviesa *S* en la dirección positiva elegida.

Evaluación de las integrales de campos vectoriales

- Si S está dada por $z = g(x; y)$,

$n = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$ $\quad\quad n = \frac{-g_x i - g_y j + k}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}}$

$$\int_S \int FdS = \int_S \int FndS = \int_S \int (Mi + Nj + Pk)\frac{-g_x i - g_y j + k}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}}\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}dA$$

$$\int_S \int FdS = \int_D \int (Mi + Nj + Pk)(-g_x i - g_y j + k)dA = \int_D \int (-Mg_x - Ng_y + P)dA$$

Esta expresión es para la orientación hacia arriba

Para la normal unitaria hacia abajo, la formula se puede deducir de manera similar y así tendremos:

$$\int_S \int FdS = \int_D \int (Mg_x + Ng_y - P)dA$$

- Si S está dada en forma paramétrica por una función vectorial $r(u; v)$

$$\int_S \int FdS = \int_S \int F\frac{r_u x r_v}{|r_u x r_v|}ds = \int_D \int \left[F(r(u; v))\frac{r_u x r_v}{|r_u x r_v|}\right]|r_u x r_v|dA = \iint_D F[r_u x r_v]dA$$

Ejemplo 1
Calcule $\int_S \int FndS$, donde $F = (x + z^2)i - (z + 3)k$ y S la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$, limitada por $z = 2$(n es la normal unitaria hacia arriba en S)
$z_x = x$

$z_y = y$

La proyección de S sobre el plano *xy* es el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$

$$\int_S\int FndS = \int_D\int -\left(x+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)^2\right)x-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+3\right)dA$$

En coordenadas polares

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2(-r^2cos^2\theta-\frac{r^5}{4}cos\theta-\frac{r^2}{2}-3)rdrd\theta = -\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}cos^2\theta+\frac{r^7}{28}cos\theta+\frac{r^4}{8}+\frac{3r^2}{2}\right]_0^2 d\theta=$$

$$= -\int_0^{2\pi}[4\,cos^2\theta+\frac{32}{7}cos\theta+8)d\theta = (2\theta+sen2\theta+\frac{32}{7}sen\theta+8\theta]_0^{2\pi} = 20\pi$$

Nota

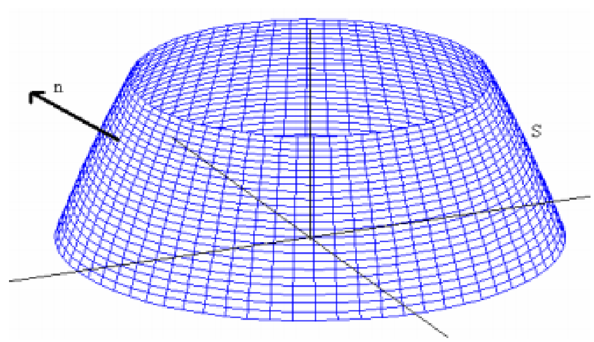
Aplicamos::$cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+cos2\theta)$

Ejemplo 2

Calcula el flujo del campo vectorial $F = xy^2i + x^2yj + xyk$, a través de la superficie lateral S que resulta de cortar el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$, por los planos $z = 0$ y $z = 1$

Proyectamos la superficie sobre el plano xy y tenemos el anillo circular $1 \le x^2 + y^2 \le 2$

$n = (2x; 2y; 1)$, aplicamos la expresión



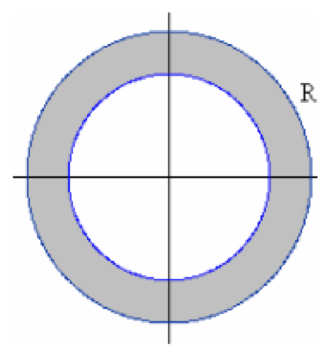
$$\int_S\int FndS = \int_D\int(-Mg_x - Ng_y + P)dA$$

$M = xy^{2;}$ $\quad N = x^2y;$ $\quad P = xy;$

$g_x = -2\text{x}$ $\quad g_y = -2y$

$$\int_S\int FndS = \int_D\int(2y^2x^2 + 2x^2y^2 + xy)dA$$

En coordenadas polares



$$D = \{(r:\theta)/1 \le r \le \sqrt{2}; 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$\int_D\int(2y^2x^2 + 2x^2y^2 + xy)dA =$$

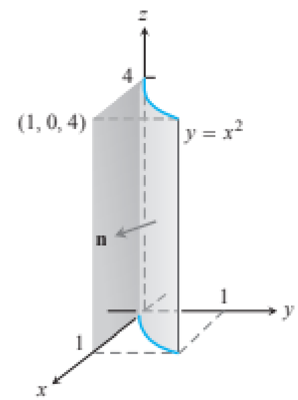
$$= \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(4r^5cos^2\theta sen^2\theta + r^3\,cos\theta sen\theta)d\theta dr = \frac{7}{6}\pi$$

Ejemplo 2

Determine el flujo de $F = yzi + xj + z^2k$ hacia afuera a través del cilindro parabólico $y = x^2$; $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq z \leq 4$..

Sobre la superficie tenemos que $x = x$; $y = x^2$; $z = z$ de manera que automáticamente tenemos $r(x;z) = xi + x^2j + zk$, con $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq z \leq 4$

El vector normal unitario que apunta hacia afuera en la superficie esta dado por



$$n = \frac{r_x x r_z}{|r_x x r_z|}$$

$$r_x x r_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2xi - j$$

$$|r_x x r_z| = \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$n = \frac{2xi - j}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

El flujo de F hacia afuera a través de la superficie es:

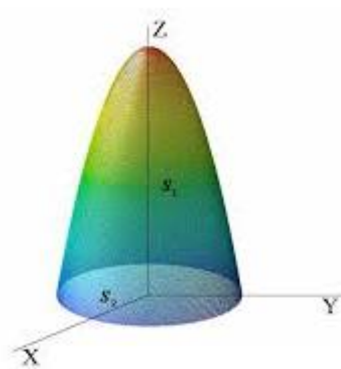
$$\int_S\int FndS = \int_S\int (x^2zi + xj + z^2k)\left(\frac{2xi - j}{\sqrt{4x^2 + 1}}\right)\left(\sqrt{4x^2 + 1}\right)dzdx =$$

$$= \int_0^1\int_0^4 (2x^3z - x)dzdx = \int_0^1 [x^3z^2 - xz]_0^4\, dx = \int_0^1 (16x^3 - 4x)dx = [4x^4 - 2x^2]_0^1 = 2$$

Ejemplo 3

Calcule el flujo del campo vectorial *F*(*x; y; z*) = (*x; y;* 2*z*), a través del a superficie cerrada *S* que limita el sólido $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$

D=$\{(x; y; z)/0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$



La superficie cerrada *S* que limita el sólido *V* está compuesta por dos superficies:

una porción del paraboloide S_1: $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ y la tapa inferior del paraboloide $S_2: z = 0$

Por tanto, hay que calcular el flujo de *F* a través de cada una de ellas hacia el exterior de la superficie cerrada.

Podemos parametrizar la superficie o usar la expresión del flujo para la superficie dada en forma explícita por $z = g(x; y)$,

$$\int_S \int FndS = \int_D \int (-Mg_x - Ng_y + P)dA =$$

$M = x$; $N = y$; $P = 2z$

$g_x = -4\text{x}$ $g_y = -4y$

$$\int_{S_1} \int FndS = \int_D \int -x(-4x) - y(-4y) + 2z)dA = \int_D \int [4(x^2 + y^2) + 2(4 - 2x^2 - 2y^2]dA$$

Trabajando en coordenadas polares tenemos

$$\int_D \int 8dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 8rdrd\theta = 8 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = 8[\theta]_0^{2\pi} = 16\pi$$

S_2, tapa inferior de ecuación $z = 0$,

$n = -k$

$$\int_{S_2} \int FndS = \int_D \int (x; y; 2z)(0; 0; -1)dA \int_D \int -2zdA = 0$$

Por tanto, el flujo de *F* hacia el exterior de la superficie cerrada *S* es:

$$\int_S \int FndS = \int_{S_1} \int FndS + \int_{S_2} \int FndS = 16\pi$$

Ejemplo 4

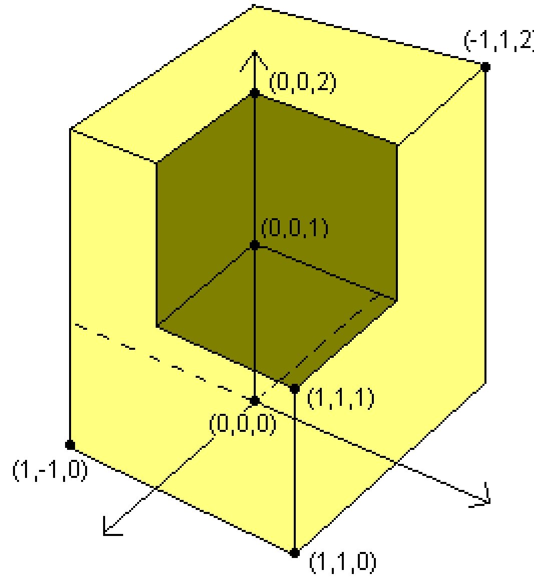
Hallar el flujo del campo $\boldsymbol{E}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, que sale de la superficie cerrada **S**, que constituye la frontera de un cubo al que se le ha quitado una esquina, como muestra la figura.

S es una superficie cerrada, suave a trozos, que encierra un sólido V simplemente conexo.

Flujo saliente de V $= \int_S \int FndS$

Para calcular el flujo total es necesario hallar el flujo saliente a través de cada una de las nueve caras del sólido

Aplicamos en cada una de las caras la expresión



$\int_S \int FndS$

S_1: base inferior $z = 0, n_1 = -k$

$$Flujo\ 1 = \int_{S_1} \int Fnds = \int_{S_1} \int -zds = \int_{S_1} \int -(0)ds = 0$$

S_2: cara superior $z = 2, n_2 = k$

$$Flujo\ 2 = \int_{S_2} \int Fnds = \int_{S_2} \int zdA$$

$$= \int_D \int 2dA = \int_{-1}^{0} \int_{-1}^{1} 2dxdy + \int_{0}^{1} \int_{-1}^{0} 2dxdy$$

$$= 4 + 2 = 6$$

S_3: cara lateral $y = -1, n_3 = -j$

$$Flujo\ 3 = \int_{S_3} \int Fnds = \int_{S_3} \int -y\, dA = \int_D \int dA = \int_0^2 \int_{-1}^{1} dxdz = 4$$

S_4: cara lateral $y = 1, n_4 = j$

$$Flujo\ 4 = \int_{S_4} \int Fnds = \int_{S_4} \int y\, dA = \int_D \int dA = \int_0^1 \int_0^1 dxdz + \int_0^2 \int_{-1}^{0} dxdz = 1 + 2 = 3$$

S_5: cara lateral $x = -1, n_5 = -i$

$$Flujo\ 5 = \int_{S_5} \int Fnds = \int_{S_5} \int -x\, dA = \int_D \int dA = \int_0^2 \int_{-1}^{1} dydz = 4$$

S_6: cara lateral $x = 1, n_6 = i$

$$Flujo\ 6 = \int_{S_6} \int Fnds = \int_{S_6} \int x\, dA = \int_D \int dA = \int_{-1}^{0} \int_1^2 dzdy + \int_{-1}^{1} \int_0^1 dzdy = 1 + 2 = 3$$

S_7: cara superior en la esquina (cuadrado de 1x1) $z = 1, n_7 = k$

$$Flujo\ 7 = \int_{S_7} \int Fnds = \int_{S_7} \int z\, dA = \int_D \int dA = \int_0^1 \int_0^1 dxdy = 1$$

S_8: cara lateral en la esquina $y = 0, n_8 = j$

$$Flujo\ 8 = \int_{S_8} \int Fnds = \int_{S_8} \int y\, dA = \int_D \int 0dA = 0$$

S_9: cara lateral en la esquina $x = 0, n_9 = i$

$$Flujo\ 8 = \int_{S_9} \int Fnds = \int_{S_9} \int x\, dA = \int_D \int 0 dA = 0$$

Flujo total=$0 + 6 + 4 + 3 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 = 21$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

El teorema de la divergencia relaciona una integral de superficie con una integral triple.
El teorema de la divergencia dice que en ciertas condiciones, el flujo hacia fuera de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la integral triple de la divergencia del campo sobre la región encerrada por la superficie.

Teorema de La divergencia
Sea **F** un campo vectorial cuyos componentes tienen primeras derivadas parciales, continuas y sea *S* una superficie cerrada, orientada, positivamente. y suave por partes. El flujo de **F** a través de *S* en la dirección del campo unitario normal exterior **n** es igual a la integral de la divergencia de F **s**obre la región *D* encerrada por la superficie:

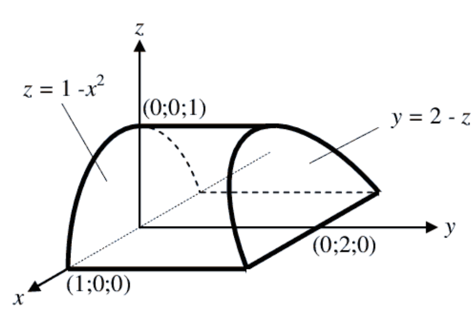
$$\int_S \int FndS = \iiint_D divFdV$$

Div **F** tiene la misma interpretación física en tres y dos dimensiones. Si **F** es el campo de velocidad de un gas que fluye, el valor de div **F** en el punto (*x*, *y*, *z*) es la tasa a la que el gas se comprime o se expande en (*x*, *y*, *z*). La divergencia es el flujo por unidad de volumen o la densidad del flujo en el punto.

Ejemplo 1
Evalúe el flujo del campo vectorial $F(x; y; z) = xyi + (y^2 + e^{xz^2})j + sen(xy)k$, a través de la superficie frontera de la región D acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, y los planos $z = 0; y = 0\ y\ z = 2 - y$
El concepto de flujo sugiere plantear una integral de superficie para resolver el problema.
Sería muy difícil evaluar de manera directa la integral de superficie tendríamos que calcular cuatro integrales de superficies .En consecuencia utilizamos el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie en una integral triple , por lo tanto aplicamos:

$$\int_S \int FndS = \iiint_D divFdV$$

$$divF = y + 2y = 3y$$



$\int_S \int FndS = \iiint_D 3ydV$=$3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} ydydzdx =$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-z} dzdx = 3\int_0^1\int_0^{1-x^2}\frac{(2-z)^2}{2}dxdy = 3\int_0^1\int_0^{1-x^2}(2-2z+\frac{z^2}{2})dzdx =$$

$$= 3\int_0^1 dx\left[2z - z^2 + \frac{z^3}{6}\right]_0^{1-x^2} = 3\int_0^1 [2(1-x^2) - (1-x^2)^2 + \frac{(1-x^2)^3}{6}]dx =$$

=$3\int_{-1}^{1}(2-2x^2-1+2x^2-x^4+\frac{1}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6})dx = 3\left[\frac{7}{6}x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}\right]_{-1}^{1} =$
=$3\left[\frac{92}{105}-\left(-\frac{92}{105}\right)\right] = \frac{184}{35}$

Cálculos auxiliarses
$(1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4$

$(1-x^2)^3$=$1-3x^2+3x^4-x^6$

Ejemplo 2
Resolvemos el ejemplo 4 utilizando el teorema de la divergencia

Hallar el flujo del campo $\boldsymbol{E}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, que sale de la superficie cerrada **S**,que constituye la frontera de un cubo al que se le ha quitado una esquina, como muestra lafigura.

Flujo saliente=$\int_S \int FndS = \iiint_V divFdv$
divF=3

$\iiint_V divFdv$=3$\iiint_V dv =\cdot 3[\int_0^2\int_{-1}^1\int_{-1}^1 dxdydz - \int_1^2\int_0^1\int_0^1 dxdydz] = 3(8-1) = 21$

$\iiint_V divFdv$=3$\iiint_V dv =$3 veces el volumen del cubo=3(vol. cubo lado 2 – vol. cubo lado 1) = 3(8-1) = 21 unidades de flujo

TEOREMA DE STOKES

El teorema de Stokes relaciona la circulación de un campo vectorial alrededor de la frontera *C* de una superficie orientada *S* en el espacio con una integral de superficie sobre la superficie *S*. Es necesario que la superficie sea **suave por partes**, lo cual significa que se trata de una unión finita de superficies suaves unidas a lo largo de curvas suaves.

Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada suave por partes que tiene como frontera una curva suave por partes C. Sea **F** $= Mi + Nj + Pk\ M$**i** un campo vectorial cuyos componentes tienen primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a S. Así, la circulación de **F** alrededor de C en la dirección contraria a las agujas del reloj con respecto al vector unitario **n** normal a la superficie es igual a la integral

$$\oint_C Fdr = \iint_S (rotF)ndS$$

El teorema de Stokes relaciona la integral de superficie que proporciona el flujo del rotacional de un campo vectorial con la integral de línea de ese mismo campo

Ejemplo 1

Utilizar el teorema de Stokes para calcular $\oint_c 2ydx + 3xdy - z^2\,dz$, siendo C la circunferencia de ecuaciones paramétricas

$x = 3cost, \quad y = 3sen, t \quad z = 0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

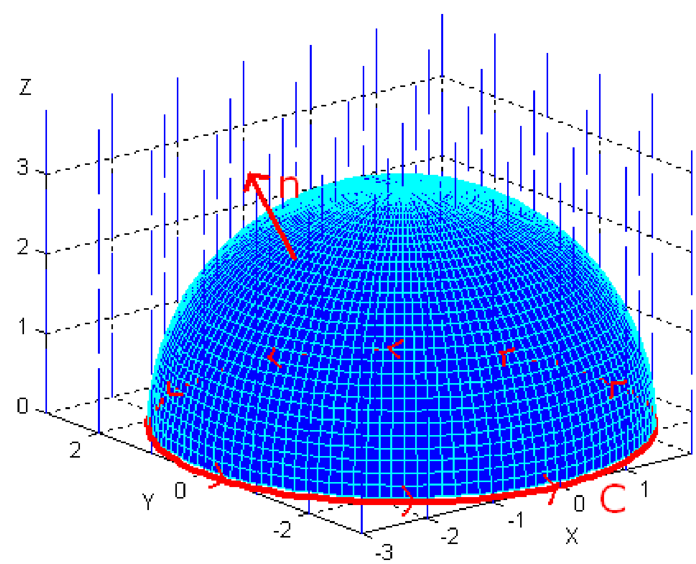
El teorema de Stokes puede aplicarse sobre cualquier superficie S que tenga por borde la curva C anterior, siendo S suave o suave a trozos, estando S orientada según la orientación de C.

El campo vectorial que interviene en este caso, $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 2yi + 3xj - z^2k$ va a verificar que

$\oint_c 2ydx + 3xdy - z^2\,dz = \int_s \int (rotF)nds$

Hallamos el rotor de F

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & z^2 \end{vmatrix} = K$$



Tomamos como S la semiesfera que tiene por ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2$=9con $z \geq 0$ es decir, $z = f(x; y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^{2)}}$. Esta superficie tiene como curva frontera C.
El vector **n** a S será

$$n = \frac{fi - f_y j + k}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}}$$

$$\int_s \int (rotF)nds = \iint_D (k) \frac{fi - f_y j + k}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dA = \iint_D dA$$

Siendo D la proyección del círculo de radio 3 sobre el plano xy, trabajando en coordenadas polares resulta:

$$\int_s \int (rotF)nds = \iint_D dA = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^3 r[\theta]_0^{2\pi} dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi$$

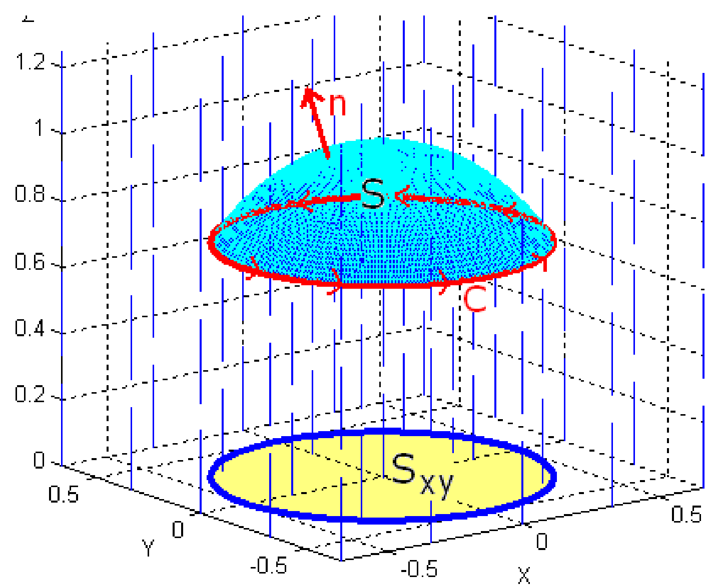
También se podría haber utilizado como superficie para aplicar el teorema de Stokes, el círculo de radio 3, contenido en el plano *z* = 0 , pues también tiene por borde la curva *C*. En este caso, el vector unitario perpendicular a *S*, orientado según la orientación de la curva *C* es **k** , resultando

$$\int_s \int (rotF)nds = \iint_D (k)\, kdS = \iint_D dydx = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^3 r[\theta]_0^{2\pi} dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3$$

Ejemplo 2

Comprobar que se verifica el Teorema de Stokes para el campo vectorial,
$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -3yi + 3xj + z^4 k$ sobre la superficie S definida como el trozo del elipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2$=1que está por encima del plano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Para comprobar el teorema es necesario calcular las integrales que aparecen en ambos miembros de la ecuación y obtener el mismo resultado por ambos métodos de cálculo

El elipsoide *S* es una superficie suave, limitada por la curva *C*, orientada en el mismo sentido que la superficie *S*,
El elipsoide, tiene semiejes $\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\ y\ 1$



a) Cálculo de la integral de línea.

Se obtiene la ecuación de la curva *C* como la intersección del elipsoide $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y el plano, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$; y posteriormente, se parametriza. $2x^2 + 2y^2 + z^2$

$2x^2 + 2y^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1 \to x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

C es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$en el plano $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Su parametrización es:

$x = \frac{1}{2}cost, \quad y = \frac{1}{2}sent \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$dx = -\frac{1}{2}sent, \quad dy = \frac{1}{2}cost, \quad dz = 0$

$$\int_C (-3ydx + 3xdy + z^4dz) = \int_0^{2\pi} [(-\frac{3}{2}sent)\left(-\frac{1}{2}sent\right)dt + \left(\frac{3}{2}cost\right)\left(\frac{1}{2}cost\right)]dt =$$

$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} dt = \frac{3}{2}\pi$

b) Cálculo de la integral de superficie.

Hallamos previamente $rotF$ y el vector ***n,*** sabiendo que la ecuación explicita de *S* es

$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \to z = \sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}$

Hallamos el rotor de F

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = 6K$$

$z = f(x; y)$

El vector normal, **n** a la superficie S será :

$n = \frac{fi - f_y j + k}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}} \qquad dS = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}dxdy$

$\int_S \int (rotF)nds = \int_S \int (6k)\frac{fi - f_y j + k}{\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}}\sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1}dxdy = \iint_D dxdy$

D es la proyección sobre el plano xy del elipsoide por lo tanto será la curva de ecuaciones paramétricas:

$x = rcost, \quad y = rsent\ , \quad 0 \leq r \leq 1/2 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_s \int (rotF)nds = \iint_D 6dxdy = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} rdrdt = 6\int_0^{2\pi} dt \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{6}{8}[t]_0^{2\pi} = \frac{6}{8}(2\pi) = \frac{3}{2}\pi$$

Prof. María Graciela Ribas