



## VIII. Propiedades Magnéticas de la Materia

### ◆ Materiales Magnéticos:

Hasta ahora hemos estudiado los campos magnéticos creados por cargas móviles o por corrientes que circulan en los conductores, cuando las cargas o los conductores están en el aire o más exactamente en el vacío. Sin embargo, todos sabemos que las piezas de los equipos técnicos tales como transformadores, motores, generadores y electroimanes, que utilizan los campos magnéticos creados por una corriente, contienen siempre hierro o una aleación de hierro en su estructura, con el doble fin de aumentar el flujo magnético y de limitarlo a una región deseada. Además, mediante el uso de imanes permanentes, como sucede en los galvanómetros, micrófonos y parlantes, los campos magnéticos pueden también producirse sin circulación aparente de carga.

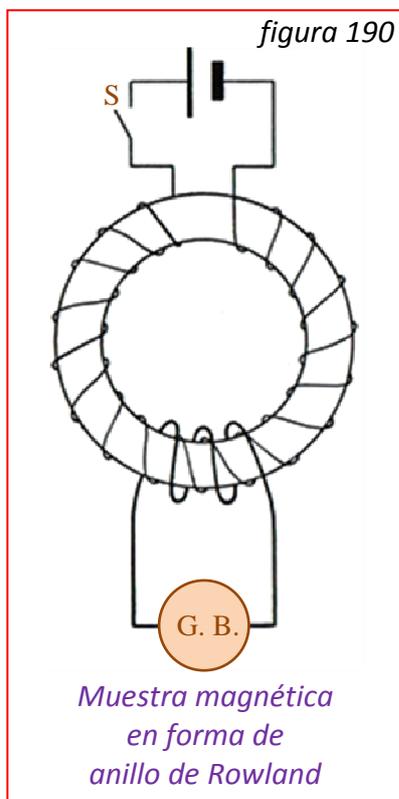
Por tales motivos, resulta importante estudiar las propiedades magnéticas que hacen tan útiles a las sustancias ferromagnéticas como el hierro. Veremos que las propiedades magnéticas no están reducidas a las sustancias ferromagnéticas, sino que las presentan también todas las demás sustancias, pero en escala mucho menor. Desde el punto de vista de la Electrotecnia, las sustancias ferromagnéticas son las de mayor interés, pero es también importante el estudio de las propiedades magnéticas de otras sustancias, porque ofrecen un medio más de penetrar en la naturaleza íntima de la materia en general.

Si colocamos una pequeña muestra esférica de hierro (u otra sustancia ferromagnética) suspendida mediante un hilo fino entre los polos de un potente electroimán, todos sabemos que será fuertemente atraída hacia la región en que el campo es más intenso. Pero no es tan conocido el hecho de que cualquier sustancia será siempre influida por el campo, aunque en un grado extremadamente pequeño si lo comparamos con el correspondiente a un material tal como el hierro.

Muy débilmente, algunas sustancias son forzadas a entrar en la región de máxima intensidad del campo (igual que el hierro) y otras son obligadas a dirigirse hacia la región en que el campo es menos denso. Las primeras se denominan paramagnéticas y las segundas, diamagnéticas. Todas las sustancias (salvo las ferromagnéticas), incluso los líquidos y los gases, quedan comprendidas dentro de uno de estos dos grupos.

## ◆ Paramagnetismo y Diamagnetismo:

El *campo magnético* dentro de un *arrollamiento toroidal* de espiras muy próximas, está limitado completamente al *espacio encerrado por el arrollamiento*. Podemos entonces tomar este campo para estudiar las propiedades magnéticas de un material, si le damos forma de *anillo* a una *muestra* del mismo y sobre su superficie arrollamos el hilo conductor. Tal dispositivo (*figura 190*) se conoce como anillo de Rowland (científico que lo ideó para sus experimentos). La corriente que circula por este arrollamiento se llama corriente magnetizante.



Según vimos, la densidad de flujo magnético dentro del espacio encerrado por un *arrollamiento toroidal* en el *vacío*, es:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} \quad (219)$$

Supongamos ahora que la *misma bobina* está devanada sobre un *anillo de Rowland* y que un *segundo arrollamiento* está colocado sobre el anillo (*figura 190*), con sus terminales conectados a un galvanómetro balístico (instrumento capaz de medir cantidades de electricidad ligadas a impulsos de breve duración, en función de la desviación máxima de su sistema móvil). La densidad de flujo dentro del anillo puede medirse abriendo rápidamente el interruptor *S*, con lo que se anula la corriente magnetizante. Al hacer esto, comprobaremos que la densidad de flujo determinada por la desviación

del galvanómetro balístico no coincide con la calculada mediante la ecuación (219).

Si el núcleo (muestra) de la bobina es una sustancia ferromagnética, el valor de la densidad de flujo será enormemente mayor, si es una sustancia paramagnética será ligeramente mayor y si es una sustancia diamagnética será ligeramente menor. Las diferencias en los dos últimos casos son tan pequeñas, que este método no es práctico para investigar sobre estas sustancias, pero su fundamento es tan sencillo que simplifica el análisis teórico con respecto a otros métodos.

El aumento o disminución de flujo en el núcleo, por encima o por debajo del debido a la corriente magnetizante, procede de los efectos magnéticos de los electrones que



constituyen los átomos. Estos *electrones* se mueven alrededor de los *núcleos atómicos* creando *campos magnéticos*. Además, el *electrón* tiene un *giro*, llamado *espin*, alrededor de un eje que pasa por él.

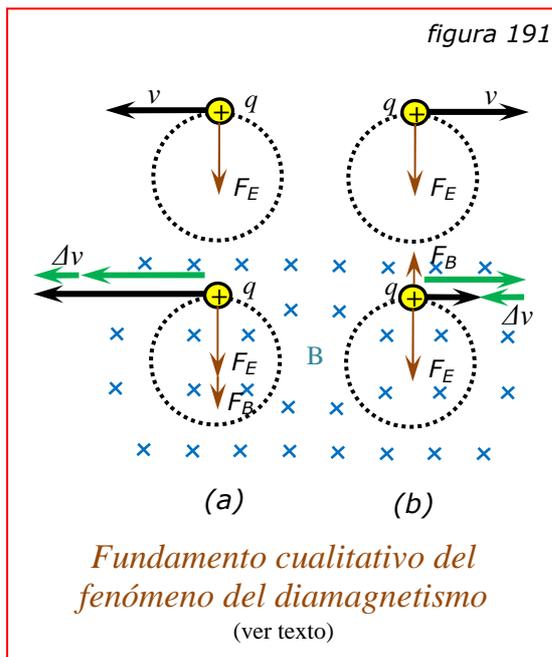
Las *propiedades magnéticas* del *átomo de hierro* son debidas casi enteramente al hecho de que tiene un *exceso* de *cuatro electrones* cuyo *espin* no está *compensado*, es decir, hay *cuatro electrones* más girando en un *sentido* que en el *opuesto*. A causa del *espin* de estos *electrones*, *cada átomo* está *asociado* a un *campo magnético*.

Con *excepción* de los *materiales ferromagnéticos*, que pueden formar *imanes permanentes*, ninguna sustancia presenta *propiedades magnéticas* si no se encuentra en un *campo magnético exterior*. De esto se deduce que, en *estado normal*, las *corrientes electrónicas* en un trozo de sustancia *compensan sus efectos magnéticos*. En algunas sustancias la compensación es completa dentro de cada átomo, mientras que en otras puede haber un efecto magnético asociado a cada átomo, pero en un grupo grande de átomos las corrientes orbitales y los *espin* están orientados de modo que sus efectos magnéticos se compensan entre sí.

Cualquier átomo en el cual hay una circulación neta de carga es un *dipolo magnético*. Si una *sustancia* compuesta de *esta clase de átomos* se encuentra en un *campo magnético*, cada uno de estos átomos quedará influido por el campo del mismo modo que una *espira* que transporta una corriente. Es decir, se ejercerá un *momento* sobre los *dipolos magnéticos* por la acción del campo, de tal modo que se colocarán *con sus planos perpendiculares al campo* y con *la inducción* de cada uno en el mismo sentido que la *del campo exterior*. El *aumento* observado en la *densidad de flujo* en un *anillo* de sustancia *paramagnética* o *ferromagnética*, por encima del valor correspondiente al vacío, es debido al *flujo aportado* por las *corrientes electrónicas* que existen *dentro de las sustancias*.

La tendencia hacia la alineación uniforme de los dipolos magnéticos, con sus campos propios paralelos al campo magnético exterior, está perturbada por la agitación térmica de los átomos, que tiende a establecer una distribución al azar. *Cuanto mayor es la temperatura, tanto mayor es la tendencia hacia la distribución al azar y menor el efecto de alineación*.

Para comprender cualitativamente el fenómeno del *diamagnetismo*, consideremos la *figura 191* donde se muestran dos *cargas positivas* que se mueven en *órbitas circulares* con la *misma velocidad*, pero en *sentidos opuestos*. Sus *momentos magnéticos* tienen sentidos opuestos y *se contrarrestan entre sí* (aunque son los electrones con carga negativa los que proporcionan los momentos magnéticos de la materia,



resulta más sencillo considerar cargas positivas). Cada carga se mueve bajo la acción de una fuerza centrípeta  $F_E = m v^2/R$  de origen electrostático. En presencia de un campo magnético externo  $B$  dirigido hacia el papel, las cargas experimentan una fuerza extra  $F_B = q v B$  de dirección radial. Para la carga de la izquierda, esta fuerza está dirigida hacia el centro, incrementando la fuerza centrípeta. Si la carga ha de permanecer en la misma órbita circular, debe acelerar de modo que  $m v^2/R$  iguale a la fuerza centrípeta total. Su momento magnético, dirigido hacia el lector,

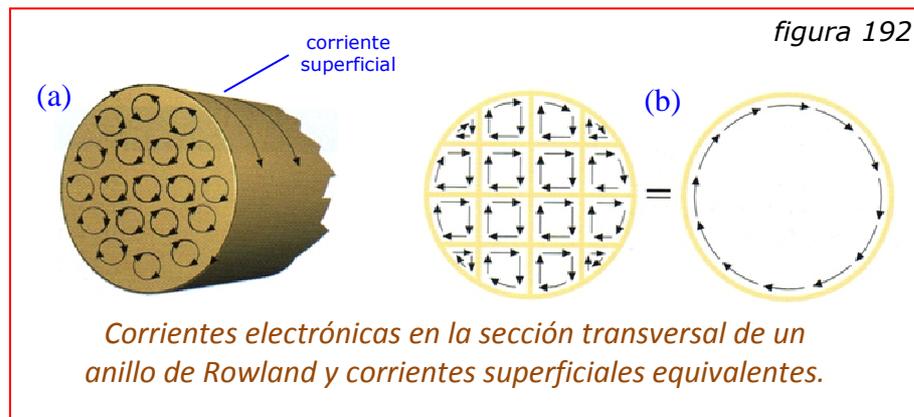
se incrementa. Para la carga de la derecha, la fuerza extra es radial pero alejándose del centro, de modo que la partícula debe disminuir la velocidad para mantener su órbita circular. Su momento magnético, dirigido hacia el papel, disminuye. En ambos casos, la variación del momento magnético de las cargas, en dirección hacia el lector, es opuesta al campo magnético externo. Como los momentos magnéticos permanentes de las dos cargas son iguales y de sentidos opuestos, su suma es nula, quedando solamente los momentos magnéticos inducidos, que son ambos opuestos a la dirección del campo magnético aplicado (esto explica la repulsión que experimentan los materiales diamagnéticos frente a los campos magnéticos externos). Un material será diamagnético si sus átomos no poseen momento magnético permanente.

El diamagnetismo fue descubierto por Michael Faraday en 1845 cuando detectó que un trozo de bismuto era repelido por un polo cualquiera de un imán. Esto indica que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto, de sentido opuesto a dicho campo.

### ◆ Corrientes Superficiales Permanentes:

La figura 192(a) muestra las corrientes atómicas circulares en una sección transversal del núcleo de un anillo de Rowland, con sus momentos magnéticos alineados a lo largo del eje del núcleo. Debido a la cancelación entre las corrientes circulares vecinas [fig. 192(b)], la corriente neta en cualquier punto del interior del material es cero. Sin

embargo, las porciones externas de los circuitos más exteriores no quedan canceladas, por lo que el conjunto de estos circuitos equivale a una corriente que ro-



dea la periferia de la sección. Esta corriente superficial, llamada corriente de iman-  
tación, es semejante a la corriente real de los arrollamientos. Los amperios-vuelta de  
las corrientes superficiales pueden sumarse (o restarse) a los del arrollamiento  
magnetizante, o también, cabe imaginar que estas corrientes crean por si mismas un  
flujo que se suma (o se resta) al flujo creado por la corriente magnetizante.

### ◆ Susceptibilidad, Permeabilidad y Excitación Magnéticas:

La densidad de flujo magnético  $B$  en un punto cualquiera, es la resultante de las  
densidades debidas a las corrientes en los conductores y a las corrientes superficiales  
equivalentes en la sustancia magnética. Podemos imaginar que la superficie de un  
cuerpo imantado está recubierta de hilo que transporta en cada punto una corriente  
igual a la corriente superficial equivalente. Entonces, si  $dl_s$  es la longitud de un  
elemento de este arrollamiento ficticio, e  $i_s$  es la corriente superficial que  
transporta, la densidad de flujo en cualquier punto será:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i \, dl \, \sin \theta}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i_s \, dl_s \, \sin \theta}{r^2} \quad (220)$$

En esta expresión el primer término incluye la corriente en cualesquiera conductores  
reales, mientras que el segundo las corrientes equivalentes en las superficies de los  
cuerpos imantados.

En el caso especial de un anillo de Rowland de espiras apretadas, en el que la  
corriente magnetizante y las corrientes superficiales tienen la misma forma y

dimensiones, la integración de la ecuación anterior nos conduce a:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} + \mu_0 \left( \frac{Ni}{l} \right)_s \quad (221)$$

Siendo  $Ni/l$  los *amperios-vuelta por unidad de longitud* de los *arrollamientos* y  $(Ni/l)_s$  el de las *corrientes superficiales*. El *último término* de las ecuaciones (220) y (221) será *negativo* si el material del anillo es *diamagnético*.

Definamos ahora un segundo *vector campo magnético*  $H$ , llamado *excitación magnética* (también  $\Rightarrow$  *intensidad de campo magnético*), mediante la ecuación:

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i \, dl \, \text{sen } \theta}{r^2} \quad (222)$$

Esto es, se calcula  $H$  del mismo modo que la *densidad de flujo*  $B$ , pero con la diferencia de que la *constante de proporcionalidad*  $\mu_0$  no aparece en su definición como así tampoco las *corrientes superficiales equivalentes* (En la Física Moderna, existe un conflicto con el uso de  $H$  y  $B$  tal como lo estamos considerando. Esta cuestión se analiza brevemente en el tema "Consideraciones Generales" de página 260).

Lo mismo que la densidad de flujo, la *magnitud* y *dirección* de  $H$  pueden representarse por *líneas de campo*. La *dirección* del vector  $H$  en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por el punto. La *excitación magnética* se expresa en *amperios por metro (A/m)*, según puede deducirse de su definición.

El cálculo de la ecuación (222) para los arrollamientos de un *anillo de Rowland*, en cualquier punto dentro del anillo, nos da el siguiente valor:

$$H = \frac{Ni}{l} \quad (223)$$

En este *caso especial*, la *excitación magnética* es igual al número de los *amperios-vueltas por metro (A.v/m)* en los arrollamientos magnetizantes.

Volvamos a la ecuación (221). El primer término del segundo miembro es la *densidad de flujo creada por la corriente que circula en los arrollamientos magnetizantes* y el segundo término es la *densidad de flujo debida a las corrientes superficiales equivalentes*. Puesto que estas últimas son provocadas por la corriente de los arrollamientos magnetizantes, la *densidad de flujo* creada por las *corrientes superficiales*, dependerá del número de *amperios-vueltas por unidad de longitud* en los arrollamientos magnetizantes, es decir, *del valor de H*.



Definimos una propiedad de la sustancia, llamada susceptibilidad magnética, que representaremos por  $\chi_m$ , como la razón de la densidad de flujo debida a las corrientes superficiales a la excitación magnética  $H$ :

$$\chi_m = \frac{\mu_0 (Ni/l)_s}{H} \quad \rightarrow \quad \mu_0 (Ni/l)_s = \chi_m H \quad (224)$$

Pero  $H = Ni/l$ , así que:  $\chi_m = \mu_0 \frac{(Ni/l)_s}{Ni/l}$

Las unidades de la susceptibilidad magnética son las mismas que las de  $\mu_0$ , es decir  $Wb/A.m$  o  $H/m$ .

SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA A TEMPERATURA AMBIENTE (20 °C)			
PARAMAGNÉTICOS		DIAMAGNÉTICOS	
MATERIAL	$\chi_m$ (H/m)	MATERIAL	$\chi_m$ (H/m)
Plomo	$0,19 \times 10^{-11}$	Bismuto	$- 2,12 \times 10^{-11}$
Oxígeno	$167 \times 10^{-11}$	Anhídrido carbónico	$- 0,68 \times 10^{-11}$
Cloruro férrico	$135 \times 10^{-11}$	Carbono (diamante)	$- 0,78 \times 10^{-11}$
Cloruro Cúprico	$15 \times 10^{-11}$	Carbono (grafito)	$- 5,6 \times 10^{-11}$
Cerio	$24 \times 10^{-11}$	Mercurio	$- 0,30 \times 10^{-11}$
Aluminio	$1,03 \times 10^{-11}$	Cobre	$- 0,14 \times 10^{-11}$
Alumbre férr. amónico	$48,7 \times 10^{-11}$	Plata	$- 0,32 \times 10^{-11}$

En la tabla precedente se presentan algunos valores típicos de susceptibilidad. La susceptibilidad magnética del vacío es cero (sólo pueden existir corrientes superficiales sobre sustancias magnéticas). Las susceptibilidades de las sustancias diamagnéticas son negativas. A temperatura constante y para valores relativamente pequeños de  $H$ , las susceptibilidades son constantes.

Sustituyendo  $Ni/l$  por  $H$  y  $\mu_0 (Ni/l)_s$  por  $\chi_m H$ , la ecuación (221) puede escribirse:

$$B = \mu_0 H + \chi_m H = (\mu_0 + \chi_m) H \quad (225)$$

Si hacemos:

$$\mu = \mu_0 + \chi_m \quad (226)$$

La ecuación (225) toma la forma sencilla:

$$B = \mu H \quad (227)$$

La magnitud  $\mu$  recibe la denominación de permeabilidad magnética de la



sustancia. Sus dimensiones son, evidentemente, las mismas que las de  $\mu_0$  y  $\chi_m$ , es decir, *henrios/metro (H/m)*.

En el vacío, para el cual  $\chi_m = 0$ , es  $\mu = \mu_0$ . Por lo tanto,  $\mu_0$  puede considerarse como la *permeabilidad del vacío*.

Resulta cómodo definir todavía otra magnitud, representada por  $\mu_r$  y denominada *permeabilidad relativa* de una sustancia:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (228)$$

Naturalmente, la permeabilidad relativa es un *número abstracto*. Puede expresarse en función de la susceptibilidad magnética combinando las ecuaciones (226) y (228):

$$\mu_r = 1 + \frac{\chi_m}{\mu_0} \quad (229)$$

Evidentemente, la *permeabilidad relativa del vacío* es la *unidad*, puesto que para el vacío es  $\chi_m = 0$ , o sea  $\mu = \mu_0$ . Las *permeabilidades relativas* de las sustancias *para y ferromagnéticas* son *mayores que la unidad* y las de las sustancias *diamagnéticas* *menores que la unidad*.

Las *propiedades magnéticas* de una *sustancia* quedan *completamente determinadas*, si se conoce *una cualquiera de las tres magnitudes*  $\chi_m$ ,  $\mu_r$  o  $\mu$ .

Las mismas están relacionadas por las ecuaciones de definición:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\chi_m}{\mu_0} \quad \text{y} \quad \mu = \mu_0 + \chi_m$$

(la única razón de introducir las tres es simplificar la forma de ciertas ecuaciones usuales)

Se demuestra que la *permeabilidad relativa de una sustancia* puede definirse como la *razón de la autoinducción de un toroide cuyo núcleo está formado por la sustancia a la autoinducción del mismo toroide en el vacío*:

$$\mu_r = \frac{L}{L_0} \quad (230)$$



**Ejercicio Nº 130:** La susceptibilidad magnética del cloruro férrico es  $135 \times 10^{-11} \text{ H/m}$ . Calcular sus permeabilidades absoluta y relativa.

$$\chi_m = 135 \times 10^{-11} \text{ H/m}$$

$$\mu_r = 1 + \frac{\chi_m}{\mu_0} = 1 + \frac{135 \times 10^{-11} \text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m}} = 1 + 0,00107 = \mathbf{1,00107} \text{ (adimensional)}$$

$$\mu = \mu_0 + \chi_m = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m} + 135 \times 10^{-11} \text{ H/m} = \mathbf{12,58 \times 10^{-7} \text{ H/m}}$$

también:

$$\mu = \mu_r \mu_0 = 1,00107 \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = \mathbf{12,58 \times 10^{-7} \text{ H/m}}$$

**Ejercicio Nº 131:** Un anillo de Rowland con núcleo de hierro, cuya circunferencia media es de 30 cm y su sección de  $1 \text{ cm}^2$ , está arrollado uniformemente con 300 espiras de hilo conductor. Las medidas efectuadas con un galvanómetro balístico y una bobina exploradora que rodea al anillo (*s/figura 190*), demuestran que cuando la intensidad de la corriente en el arrollamiento es de 0,032 A, el flujo en el anillo es de  $2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ . Calcular: *a)* la densidad de flujo en el anillo; *b)* la excitación magnética; *c)* el número de amperios-vueltas por metro de las corrientes superficiales equivalentes, comparando con las del arrollamiento magnetizante; *d)* la permeabilidad, la permeabilidad relativa y la susceptibilidad magnética del material que constituye el núcleo del anillo.

$$B = \frac{\Phi}{s} = \frac{2 \times 10^{-6}}{10^{-4}} = \mathbf{0,02 \text{ Wb/m}^2}$$

$$H = \frac{Ni}{l} = \frac{300 \times 0,032}{0,30} = \mathbf{32 \text{ Av/m}}$$

En virtud de las ecuaciones (224) y (225):

$$\left(\frac{Ni}{l}\right)_s = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0,02}{4\pi \times 10^{-7}} - 32 = \mathbf{15.883 \text{ Av/m (equivalentes)}}$$

Número muy superior a sólo 32 Av/m en el arrollamiento magnetizante.

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0,02}{32} = \mathbf{6.250 \times 10^{-7} \text{ Wb/Am}}$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{6.250 \times 10^{-7}}{4\pi \times 10^{-7}} = \mathbf{497}$$

$$\chi_m = \mu - \mu_0 = 6250 \times 10^{-7} - 4\pi \times 10^{-7} = 6.237 \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

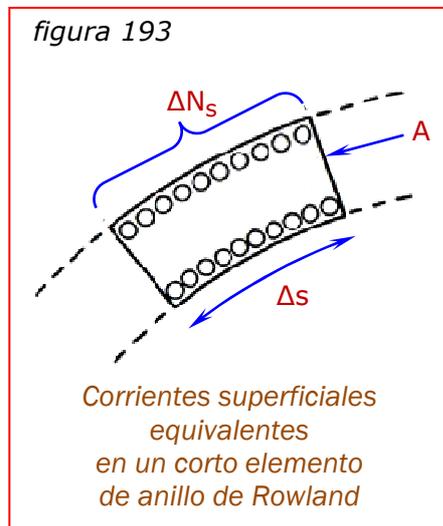
también:

$$\chi_m = \mu_0 (\mu_r - 1) = 4\pi \times 10^{-7} (497 - 1) \cong 6.237 \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

### ◆ Imantación:

Hemos definido el momento magnético de una espira cerrada como el producto  $\mu_0 i a$ , siendo  $i$  la intensidad de corriente en la espira y  $a$  su área. Supongamos, para simplificar, que todas las corrientes electrónicas de un materias imantado tienen el mismo momento magnético  $\mu_0 i a$  y que hay  $n$  de tales espiras por unidad de volumen, todas alineadas con sus planos paralelos.

El momento magnético por unidad de volumen dentro de la sustancia es, entonces, igual al producto del momento magnético de cada espira por el número de espiras por unidad de volumen. Este producto se denomina intensidad de imantación o simplemente imantación y se representa por  $\mathcal{J}$ . La imantación es una magnitud vectorial, cuya dirección es la misma que la de la densidad de flujo magnético debido a las corrientes electrónicas.



El momento magnético por unidad de volumen puede expresarse también en función de las corrientes superficiales equivalentes. Consideremos un corto elemento de un anillo de Rowland correspondiente a una longitud  $\Delta s$  sobre la circunferencia (figura 193). Representemos por  $\Delta N_s$  el número de las espiras superficiales sobre esta longitud. Estableciendo la proporcionalidad correspondiente, se tiene:

$$\frac{\Delta N_s}{\Delta s} = \frac{N_s}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta N_s = \frac{N_s \Delta s}{l}$$

El momento magnético de cada espira es  $\mu_0 i_s A$ , de modo que el momento magnético total del elemento es:

$$\Delta N_s \times \mu_0 i_s A = \mu_0 \frac{N_s i_s A \Delta s}{l}$$

El volumen del elemento es  $A \Delta s$  y el momento magnético por unidad de volu-

men  $\mathcal{J}$  será:

$$\mathcal{J} = \frac{\mu_0 \frac{N_s i_s A \Delta_s}{l}}{A \Delta_s} = \mu_0 \left( \frac{Ni}{l} \right)_s \quad (231)$$

La imantación puede expresarse en función de la susceptibilidad. De la definición de esta última (fórmula 224), obteníamos:  $\mu_0 (Ni/l)_s = \chi_m H$

Luego:

$$\boxed{\mathcal{J} = \chi_m H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\chi_m = \frac{\mathcal{J}}{H}} \quad (232)$$

La ecuación (232) es realmente la definición general correcta de susceptibilidad magnética, en lugar de la ecuación (224). En el caso especial de un anillo de Rowland, la imantación es constante en todo el material que forma el anillo. En casos más generales, las corrientes equivalentes pueden no estar totalmente confinadas en la superficie de un cuerpo y variar la imantación de un punto al otro. Se define la susceptibilidad magnética en un punto cualquiera, como la razón de la imantación en dicho punto a la excitación magnética en el mismo.

Una de las muchas ecuaciones que relacionan  $B$  y  $H$  es  $B = \mu_0 H + \chi_m H$

y puesto que  $\mathcal{J} = \chi_m H \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 H + \mathcal{J}} \quad (233)$

El primer término del segundo miembro es la contribución a  $B$  de la corriente magnetizante, el segundo es la contribución de las corrientes electrónicas internas.

Ejercicio Nº 132: Hallar la imantación en el núcleo de hierro del anillo de Rowland del ejercicio anterior, donde habíamos calculado que  $B = 0,02 \text{ Wb/m}^2$  y  $H = 32 \text{ Av/m}$ .

$$\mu_0 H = 4\pi \times 10^{-7} \times 32 = 0,00402 \times 10^{-2} \text{ Wb/m}^2$$

Ésta es la densidad de flujo debida a la corriente magnetizante, o sea la densidad de flujo que existiría en el vacío.

$$\mathcal{J} = B - \mu_0 H = 0,02 - 0,00402 \times 10^{-2} = 0,02 \text{ Wb/m}^2$$

Vemos que prácticamente todo el flujo se debe a la imantación, o sea a las corrientes electrónicas.

## ◆ Consideraciones Generales:

En lo que antecede del presente capítulo, hemos deducido fórmulas generales mediante razonamientos basados en el caso especial del anillo de Rowland. Las fórmulas de aplicación general se han encerrado en un recuadro. Las fórmulas no recuadradas son correctas para el caso especial del anillo de Rowland.

Para la excitación magnética  $H$ , existe una definición más general que la representada por la ecuación (222) de pág. 254, pero nosotros no la consideraremos.

Con respecto al conflicto entre  $B$  y  $H$  citado en pág. 254, trataremos de aclararlo sin entrar en demasiados detalles:

Desde un punto de vista físico,  $H$  y  $B$  son equivalentes en el vacío, salvo en la constante de proporcionalidad  $\mu_0$ . Sólo se diferencian en medios materiales con el fenómeno de la magnetización. El campo  $H$  se ha considerado tradicionalmente el campo principal, debido a que se pueden establecer ciertas relaciones con paralelismos útiles entre campos eléctricos y campos magnéticos.

Con la llegada de las teorías cuántica y de la relatividad, quedó en claro que los citados paralelismos no se correspondían con la realidad física de los fenómenos, por lo que hoy es frecuente, sobre todo en física, que el nombre de campo magnético se aplique exclusivamente a  $B$ , excluyéndose definitivamente a  $H$ . Por ejemplo, la fórmula  $B = \mu_0 H + \mathcal{J}$  se transforma en  $B = B_0 + \mu_0 M$ , donde  $B$  es el campo magnético total,  $B_0 = \mu_0 n I$  es el campo aplicado o campo generado por la corriente del conductor y  $\mu_0 M$  es el campo magnético adicional debido a la magnetización del material.  $M = \mathcal{J} / \mu_0$  es el momento magnético por unidad de volumen (llamado Magnetización) y  $n = N/l$  es el número de espiras por unidad de longitud.

En electrotecnia y en la ingeniería en general, se conserva la utilización de  $H$  porque resulta sumamente práctico.

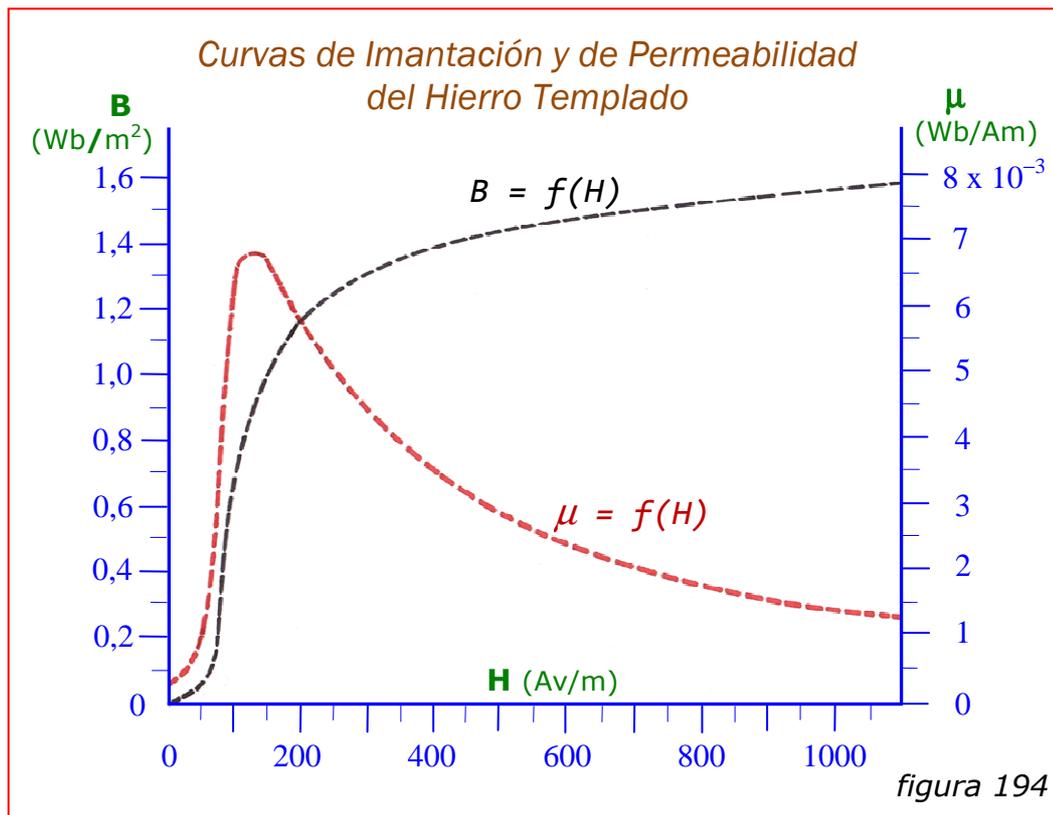
## ◆ Ferromagnetismo:

En las sustancias ferromagnéticas, la densidad de flujo puede ser miles de veces mayor que la debida únicamente a la corriente magnetizante, la permeabilidad no es constante sino que depende de la historia magnética del material (fenómeno de histéresis) y puede existir un flujo magnético aún en ausencia de campo exterior (como en el caso de los imanes permanentes). El ferromagnetismo, igual que el paramagnetismo, se observa en materiales cuyos átomos tienen momentos dipolares permanentes. Lo que lo distingue fundamentalmente de los materiales paramagnéticos, es que los ferromagnéticos muestran una fuerte interacción entre los átomos cercanos, que conservan alineados sus momentos dipolares aún cuando se elimine el

campo magnético externo.

Entre los **materiales ferromagnéticos** comunes a temperatura ambiente, se cuentan el **hierro**, el **cobalto** y el **níquel**. Los elementos ferromagnéticos menos comunes, algunos de los cuales muestran su ferromagnetismo sólo en temperaturas muy por debajo de la temperatura ambiente, son las tierras raras como el **gadolinio** y el **disproseo** (serie de los lantánidos). Los **compuestos** y las **aleaciones** pueden ser ferromagnéticas, como por ejemplo el **CrO<sub>2</sub>** (ingrediente básico de la cinta magnetofónica), a pesar de que el cromo y el oxígeno no son ferromagnéticos a temperatura ambiente.

En una **sustancia ferromagnética**, a causa de la relación complicada entre la **densidad de flujo B** y la **excitación magnética H**, no es posible expresar **B** mediante una función analítica de **H**. En lugar de esto, se da la relación entre ambas magnitudes mediante una **tabla**, o bien se representa **B** por una **gráfica** en función de **H**. La curva se denomina **curva de imantación** de la sustancia.



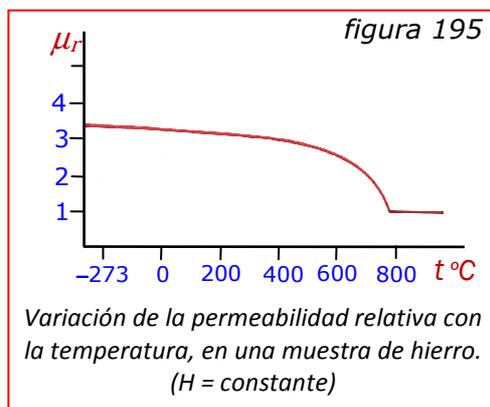
En la **figura 194** se ha representado la **curva de imantación** de una muestra de **hierro templado**. La **permeabilidad  $\mu$**  puede obtenerse en cualquier punto de la curva, dividiendo la **densidad de flujo B** en dicho punto por la correspondiente **excitación magnética H**. Es evidente que la **permeabilidad** no es **constante**. La curva roja de la **figura 194**, es la **gráfica** que representa a  **$\mu$**  como **función** de **H**.



La tabla siguiente abarca un amplio intervalo de valores para la *misma muestra* e incluye también valores de la *permeabilidad relativa*  $\mu_r$ , de la *imantación*  $\mathcal{J}$  y de la *susceptibilidad*  $\chi_m$ .

PROPIEDADES MAGNÉTICAS DEL HIERRO TEMPLADO					
Excitación Magnética	Densidad de Flujo	Permeabilidad	Imantación	Permeabilidad Relativa	Susceptibilidad Magnética
$H$ (Av/m)	$B$ (Wb/m <sup>2</sup> )	$\mu = B/H$ (Wb/Am)	$\mathcal{J} = B - \mu_0 H$ (Wb/m <sup>2</sup> )	$\mu_r = \mu/\mu_0$	$\chi_m = \mu - \mu_0$ (Wb/Am)
0	0	$3.100 \times 10^{-7}$	0	250	$3.100 \times 10^{-7}$
10	0,0042	$4.200 \times 10^{-7}$	0,0042	330	$4.200 \times 10^{-7}$
20	0,010	$5.000 \times 10^{-7}$	0,010	400	$5.000 \times 10^{-7}$
40	0,028	$7.000 \times 10^{-7}$	0,028	560	$7.000 \times 10^{-7}$
50	0,043	$8.600 \times 10^{-7}$	0,043	680	$8.600 \times 10^{-7}$
60	0,095	$16.000 \times 10^{-7}$	0,095	1.270	$16.000 \times 10^{-7}$
80	0,45	$56.000 \times 10^{-7}$	0,45	4.500	$56.000 \times 10^{-7}$
100	0,67	$67.000 \times 10^{-7}$	0,67	5.300	$67.000 \times 10^{-7}$
150	1,01	$67.500 \times 10^{-7}$	1,01	5.350	$67.500 \times 10^{-7}$
200	1,18	$59.000 \times 10^{-7}$	1,18	4.700	$59.000 \times 10^{-7}$
500	1,44	$28.800 \times 10^{-7}$	1,44	2.300	$28.800 \times 10^{-7}$
1.000	1,58	$15.800 \times 10^{-7}$	1,58	1.250	$15.800 \times 10^{-7}$
10.000	1,72	$1.720 \times 10^{-7}$	1,71	137	$1.710 \times 10^{-7}$
100.000	2,26	$226 \times 10^{-7}$	2,13	18	$213 \times 10^{-7}$
800.000	3,15	$39 \times 10^{-7}$	2,15	3,1	$26 \times 10^{-7}$

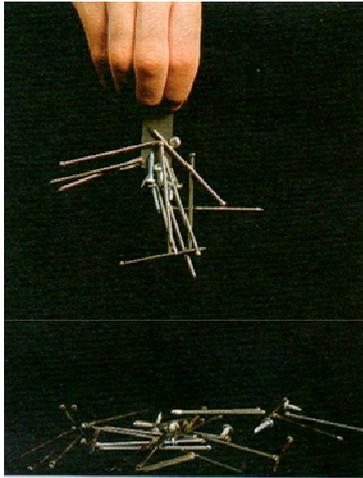
De la tabla se deduce que cuando  $H$  es *pequeña*, todo el flujo es debido prácticamente a la *imantación* (o sea, a las corrientes superficiales equivalentes). Para valores de  $H$  *superiores a 1.000 Av/m* hay un aumento muy pequeño de la



*imantación* y la *susceptibilidad* disminuye de forma pronunciada. En esta región se dice que *el hierro se ha saturado*. El aumento posterior de  $B$  es debido casi exclusivamente al aumento de la *corriente magnetizante*.

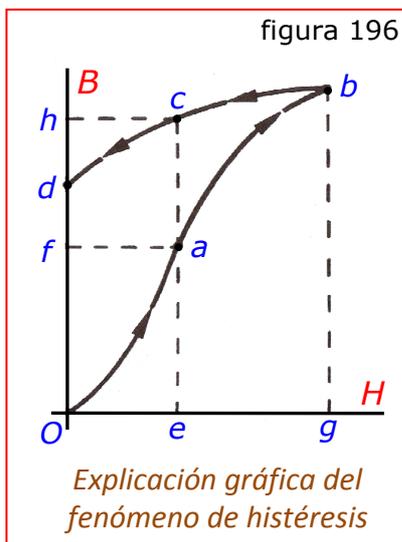
La *permeabilidad* de las sustancias *ferromagnéticas* *disminuye al aumentar la temperatura*. La *permeabilidad relativa* *desciende prácticamente a la unidad* a una temperatura propia de cada sus-

tancia, llamada temperatura de CURIE. Por encima de la temperatura de Curie, el hierro es paramagnético pero no ferromagnético. En la figura 195 se ha representado la variación de la permeabilidad magnética con la temperatura de una muestra de hierro.  $H$  se mantiene constante e igual a  $800.000 \text{ Av/m}$ . La temperatura de Curie para esta muestra es de  $760^\circ$  aproximadamente.



Este imán permanente puede levantar tornillos y clavos de acero (material ferromagnético). Los clavos de aluminio (material paramagnético) también serían atraídos hacia el imán, pero con tan poca fuerza que el imán no podría levantarlos.

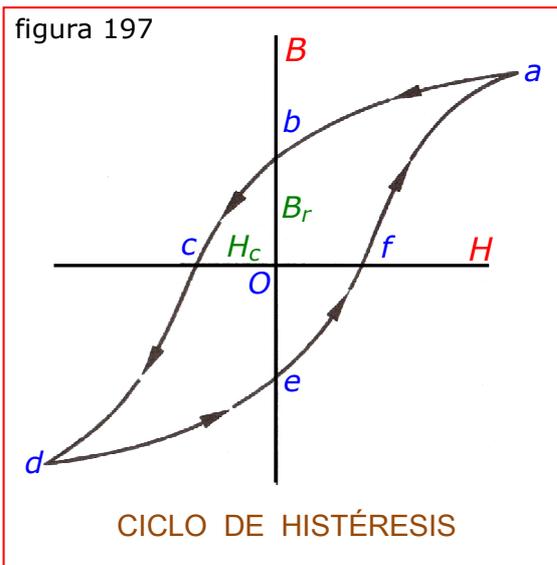
### ◆ Histéresis:



Una curva de imantación tal como la representada en la figura 196, expresa la relación entre la densidad de flujo  $B$  en una sustancia ferromagnética y la excitación correspondiente  $H$ , siempre que la muestra se encuentre inicialmente desimantada y la excitación magnética augmente de un modo continuo desde cero. En tal situación, si la corriente magnetizante en el arrollamiento de un anillo augmenta de un modo continuo desde cero hasta que la excitación corresponda a la abscisa  $Oe$ , la densidad de flujo  $B$  está dada por la ordenada  $Of$ . Si la excitación se aumenta primero desde cero hasta  $Og$  y

después se hace disminuir hasta  $Oe$ , el estado magnético de la muestra viene representado por la trayectoria  $Oabc$ . Al reducirse la excitación magnética hasta  $Oe$ , la densidad de flujo está representada por la ordenada  $Oh$  en lugar de la  $Of$ . Si se anula ahora la corriente magnetizante, la curva continúa hasta el punto  $d$ , en el cual la densidad de flujo es  $Od$ .

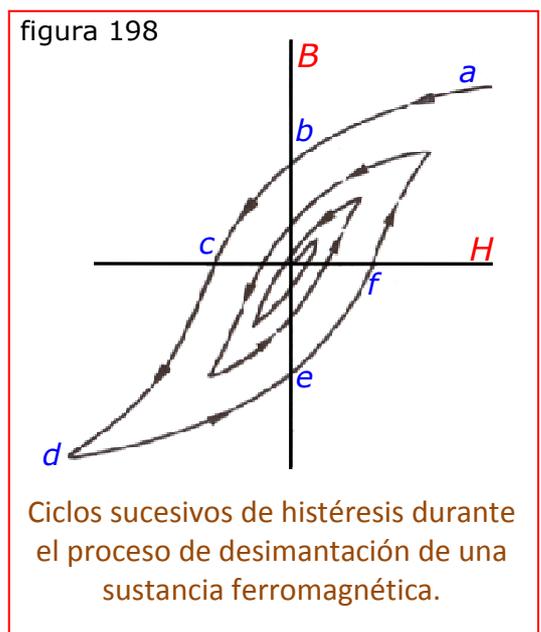
Se ve que la **densidad de flujo** en la muestra no depende únicamente de la **excitación magnética**, sino también de la **historia magnética** de la misma. La muestra tiene "**memoria magnética**" y **recuerda** que había sido **imantada** hasta el punto **b**, aunque se haya suprimido después la **corriente magnetizante**. En el punto **d** se ha convertido en un **imán permanente**. Este comportamiento de la sustancia, evidenciado por el hecho de que la curva **B-H** no coincide, al disminuir **H**, con la obtenida cuando **H** aumenta, se denomina **histéresis** (término que significa "quedarse atrás").



En muchas piezas de aparatos eléctricos, tales como transformadores y motores, hay masas de hierro situadas en campos magnéticos cuyo sentido cambia continuamente. Es decir, la **excitación magnética H** aumenta desde cero hasta cierto valor máximo en un sentido, después se anula, aumenta hasta el mismo valor máximo pero en sentido opuesto, disminuye hasta anularse y continúa **repetiendo** este **ciclo** indefinidamente. La **densidad de flujo B** dentro del hierro se invierte también, pero en la forma

indicada en la **figura 197**, describiendo una **curva cerrada** en el **plano B-H** llamada **ciclo de histéresis**.

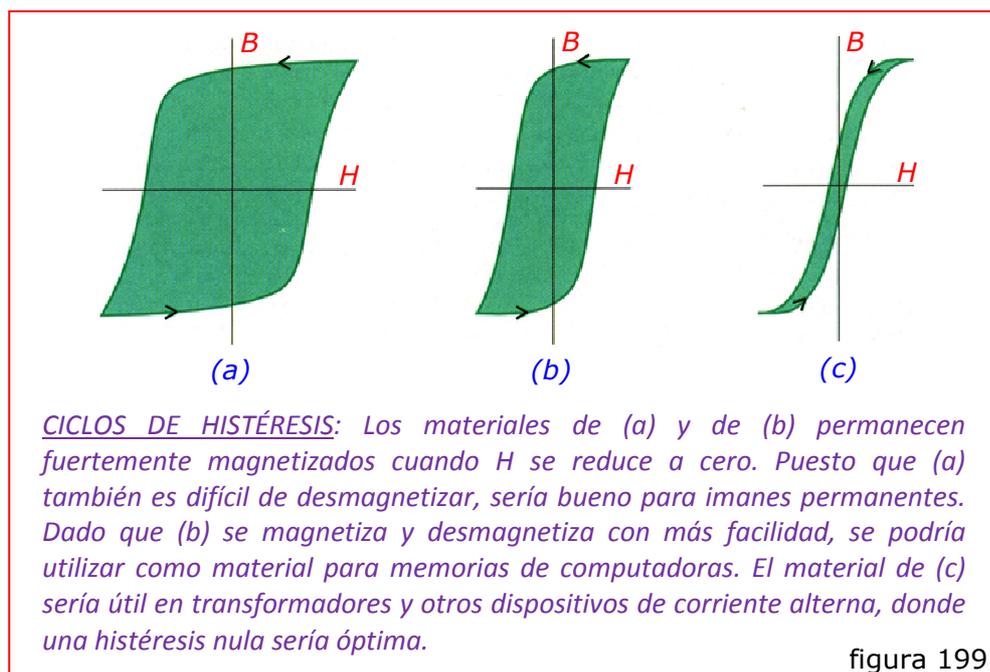
El valor y sentido de **H** quedan determinados solamente por la **corriente** en el arrollamiento, mientras que los de **B** dependen de las **propiedades magnéticas** de la muestra y de su **historia**. Las ordenadas **Ob** y **Oe** representan la **densidad de flujo** que **queda** en la muestra cuando se ha **anulado** la **excitación magnética** y miden el **magnetismo remanente  $B_r$**  de la muestra. Las abscisas **Oc** y **Of** representan la **excitación magnética** necesaria para **anular** la **densidad de flujo**, después que la muestra ha sido **imantada a saturación** en sentido **opuesto**, midiendo lo que se conoce como **fuerza coercitiva  $H_c$** .



La **curva de imantación**  $Oab$  de la **figura 196** corresponde a la muestra inicialmente desimantada. Nos podemos preguntar cómo ha podido obtenerse, dado que al suprimir la corriente magnetizante la densidad de flujo en la sustancia no se anula. Sucede que una muestra puede ser desimantada invirtiendo la corriente magnetizante un cierto número de veces y disminuyendo su intensidad en cada inversión, como se observa en la **figura 198**.

Es de desear, evidentemente, que un material destinado a construir **imanes permanentes** tenga un **magnetismo remanente elevado** para que el imán sea **fuerte** y una **gran fuerza coercitiva** para que la imantación no sea **destruida** por campos magnéticos accidentales. Po ejemplo, el **Alnico 5** (51 % Fe, 8 % Al, 14 % Ni, 24 % Co, 3 % Cu), una importante aleación empleada para la fabricación de imanes permanentes, tiene  $B_r=1,25$  T y  $H_c= 44 \times 10^3$  Av/m (muy superior al acero al carbono, sustancia utilizada para el mismo fin durante muchos años, que tiene  $B_r=0,95$  T y  $H_c= 3,6 \times 10^3$  Av/m).

Una consecuencia de los fenómenos de histéresis, es la producción de calor en el interior de una **sustancia ferromagnética** siempre que es obligada a describir su ciclo de histéresis. Este calor se origina por una especie de **rozamiento interno** cuando los **dominios magnéticos** (ver tema siguiente) cambian de sentido. Puede demostrarse que el calor producido por unidad de volumen en cada ciclo, es igual al área contenida por el ciclo de histéresis:  $(W/V) = \oint H dB$  (El volumen es el del material del circuito magnético). En consecuencia, si una sustancia ferromagnética ha de estar sometida a un campo que cambia continuamente de sentido (como el núcleo de un transformador), es de desear que el ciclo de histéresis de la sustancia sea estrecho para reducir al mínimo las pérdidas por desprendimiento de calor. Afortunadamente, pueden obtenerse aceros o aleaciones de acero que tienen elevada permeabilidad y pequeñas pérdidas por histéresis (Ver **figura 199c**).



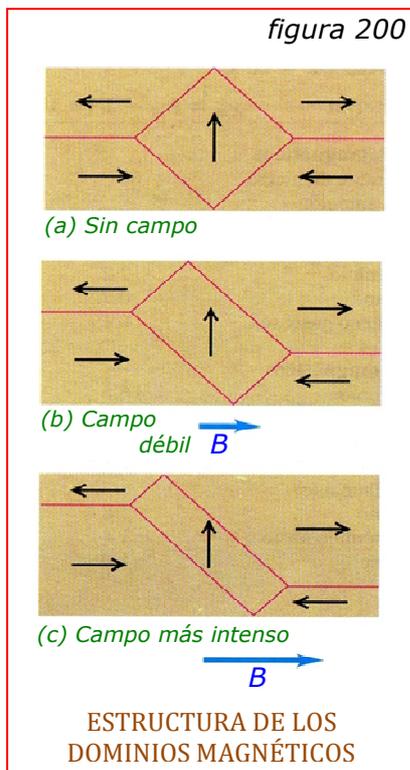
**Ejercicio Nº 133:** Una barra imantada tiene una fuerza coercitiva de  $4 \times 10^3$  A/m. Se desea desmagnetizarla introduciéndola dentro de un solenoide de 12 cm de longitud que tiene 60 espiras. ¿Qué corriente ha de hacerse circular por el solenoide?

Debe ser:  $H = H_c = 4 \times 10^3$  A/m

$$H = \frac{N i}{l} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{H l}{N} = \frac{4000 \text{ Av/m} \times 0,12 \text{ m}}{60 \text{ v}} = 8 \text{ A}$$

### ◆ Dominios Magnéticos:

En una *sustancia ferromagnética* existen pequeñas regiones llamadas *dominios magnéticos*. Estos dominios son de *tamaño microscópico* ( $\sim 0,01$  mm), pero suficientemente grandes para contener de  $10^{12}$  a  $10^{15}$  átomos. Dentro de cada dominio, todos los *momentos magnéticos atómicos* son *paralelos entre sí*, o sea que *cada dominio* está *imantado* espontáneamente *a saturación* aún en *ausencia* de *campo exterior*. Pero la *dirección de alineación* *varía de un dominio a otro*, de modo que el *momento magnético neto* de un *trozo macroscópico* de material es *cero* en su *estado normal*. La *figura 200* muestra un ejemplo de *estructura de dominios magnéticos* (Dibujo adaptado de una fotografía con aumento. Las flechas muestran las direcciones de magnetización de los dominios de un cristal individual de níquel. Los dominios que están magnetizados en la dirección de un campo magnético aplicado, crecen a expensas de los dominios contiguos).



En la [figura 201](#), se muestran dominios magnéticos sobre la superficie de un cristal de hierro silicio observado mediante un microscopio electrónico de barrido con análisis de polarización. Cada color indica una orientación determinada de los dominios.

Cuando la muestra se encuentra en un campo exterior, en los dominios pueden ocurrir variaciones de distinto tipo.

En campos débiles, los cambios consisten en rotaciones de los sentidos de imantación de los dominios (tendiendo a aproximarse al paralelismo con el campo exterior) y en movimientos de los límites de los dominios. Aquellos dominios cuya imantación es aproximadamente paralela al campo exterior, umentan de tamaño a expensas de los dominios contiguos, en los cuales la imantación forma ángulos mayores con el campo exterior ([figura 200b](#)).

En campos más intensos, todos los dominios giran rápidamente  $90^\circ$  o  $180^\circ$  hasta hacerse paralelos al eje del cristal que está más próximo al sentido del campo magnético exterior ([figura 200c](#)).

En campos muy intensos, la imantación de todos los dominios gira hasta hacerse paralela al campo exterior y toda la muestra queda saturada.

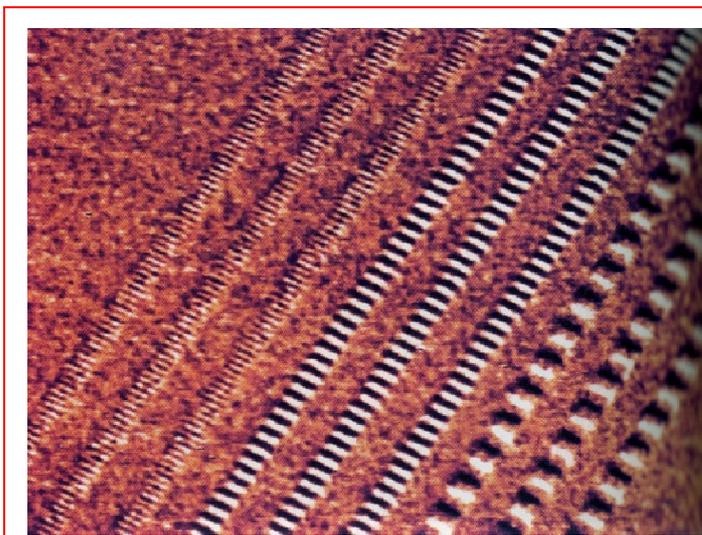
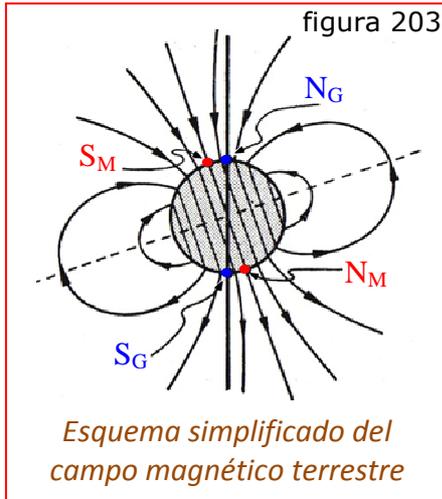


figura 202

La figura muestra un diagrama de ensayo magnético de un disco duro, aumentado 2.400 veces. Las regiones claras y oscuras corresponden a campos magnéticos de sentidos opuestos. La región uniforme fuera del diagrama es una región del disco que ha sido borrada justo antes de la impresión.

### ◆ Campo Magnético Terrestre:

Como primera aproximación, se puede considerar que el campo magnético terrestre es el mismo que el exterior a una esfera imantada uniformemente. La [figura 203](#) representa una sección de la tierra, donde la línea gruesa vertical es su eje de rotación y los polos Norte y Sur geográficos se han designado por  $N_G$  y  $S_G$ . La línea de puntos indica el plano del ecuador magnético y las letras  $N_M$  y  $S_M$  designan los llama-



dos polos Norte y Sur magnéticos.

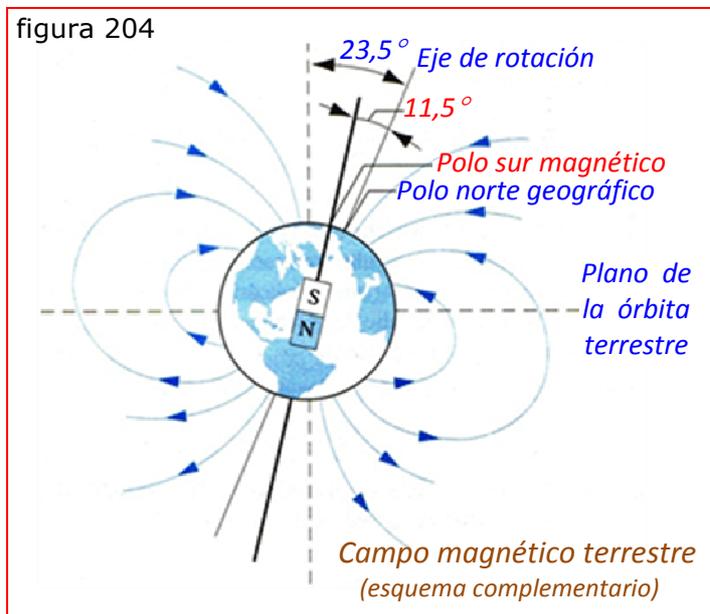
En la *figura 96* de la página 137 (*Capítulo de Magnetostática*), las líneas de campo magnético de la tierra están representadas por limaduras de hierro alrededor de una esfera imantada uniformemente. Las líneas de campo salen del polo magnético Norte y entran por el polo magnético Sur.

Dado que el polo Norte de un imán (o de la aguja de una brújula) es atraído hacia el polo Norte geográfico de la tierra, se concluye que el polo Sur magnético de la Tierra está localizado cerca del polo Norte geográfico y que el polo Norte magnético de la Tierra está localizado cerca del polo Sur geográfico. Los

polos Norte y Sur magnéticos, considerados como puntos de la superficie terrestre, son simplemente aquellos puntos en los cuales el campo es vertical.

El eje magnético forma un ángulo aproximado de  $11,5^\circ$  con el eje de rotación terrestre, el cual a su vez forma un ángulo de  $23,5^\circ$  con la normal al plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, como se observa en la *figura 204*.

Excepto en el ecuador magnético, el campo magnético terrestre no es horizontal. El ángulo que forma el campo con la horizontal se denomina inclinación magnética. El ángulo formado por la componente horizontal y la verdadera dirección norte-sur se denomina declinación.



El campo magnético terrestre no es simétrico, como pudiera suponerse de los dibujos idealizados de las *figuras 203 y 204*. En realidad es muy complicado, variando irregularmente la inclinación y la declinación sobre la superficie terrestre, como así también con el tiempo. El campo magnético en la superficie tiene una magnitud que fluctúa entre  $30 \mu T$  cerca del ecuador y unos  $60 \mu T$  cerca de los polos.

En virtud de que se encuentran rocas magnetizadas en el suelo, es tentador pensar que un núcleo de rocas magnetizadas permanente-

mente es la fuente del campo magnético de la Tierra. Pero la hipótesis no puede ser correcta, porque el núcleo tiene una temperatura de miles de grados, muy superior a la temperatura de Curie del hierro. En consecuencia, el hierro del núcleo terrestre no puede ser ferromagnético.

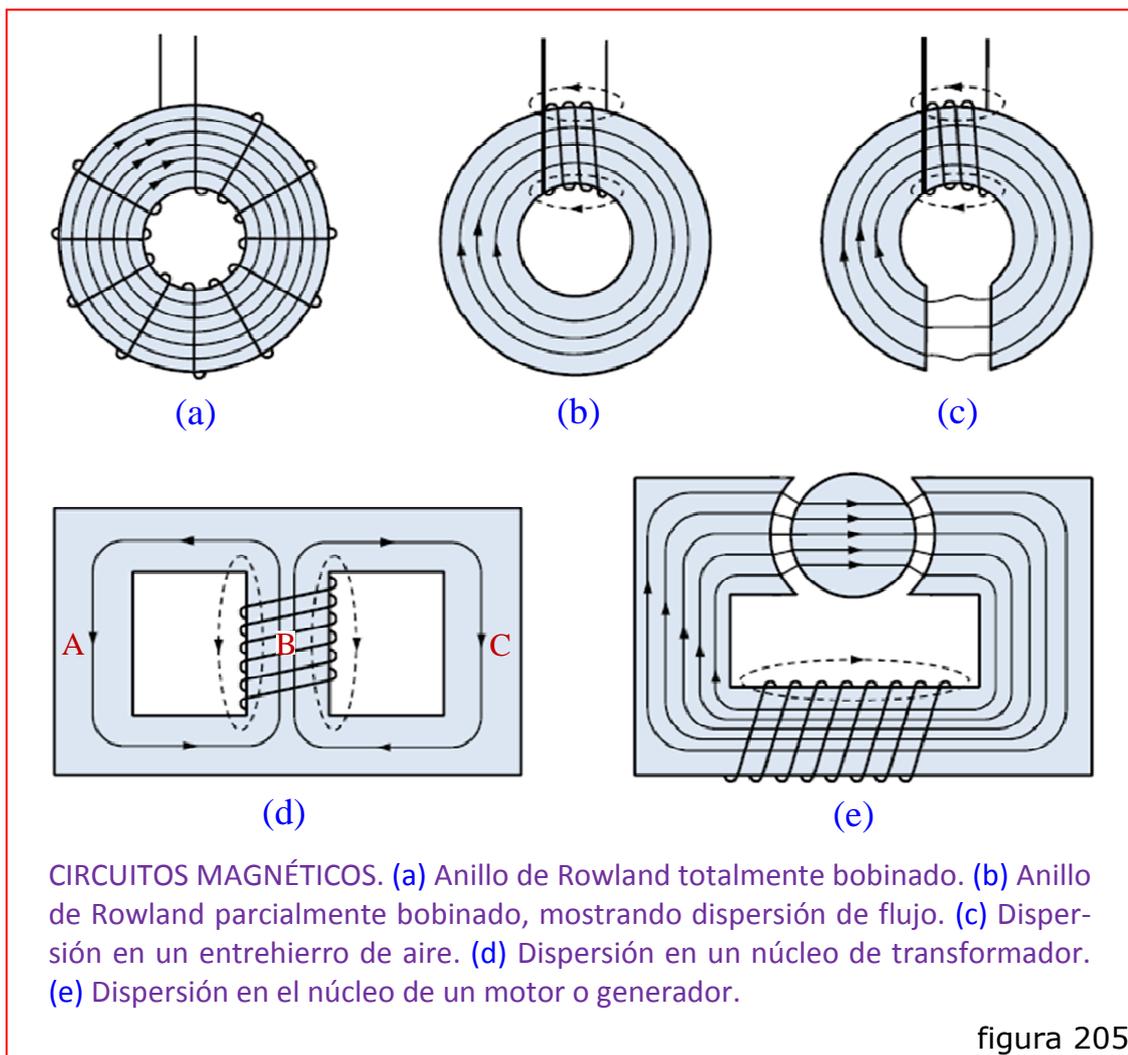
Actualmente, la hipótesis más aceptada es que existe una especie de efecto dínamo. El núcleo externo es líquido y está formado por metales fundidos, los cuales condu-

cen la electricidad fácilmente. De acuerdo con la ley de la inducción de Faraday, las corrientes eléctricas que fluyen por este conductor en constante movimiento, crean el campo magnético terrestre.

### ◆ Circuitos Magnéticos:

Resulta útil establecer una analogía entre las trayectorias cerradas de las líneas de flujo y un circuito cerrado conductor por el cual circula una corriente. La región ocupada por el flujo magnético se denomina circuito magnético y el ejemplo más sencillo es el anillo de Rowland.

Cuando el arrollamiento sobre la superficie del anillo es muy apretado, todas las líneas de flujo están prácticamente confinadas en el mismo (*fig. 205a*). Aún cuando el arrollamiento estuviera limitado a una pequeña porción del anillo (*fig. 205b*), la permeabilidad de éste es tan grande respecto a la del aire que lo rodea, que la mayor parte del flujo queda todavía confinado en la sustancia que forma el anillo. La pequeña parte que vuelve después de efectuar un recorrido en el aire se denomina flujo disperso y se ha representado por líneas de trazos.



Si el anillo contiene un espacio de aire como sucede en la *figura 205c*, se producirá cierta dispersión de líneas de flujo en el espacio (*entrehierro*), pero la mayor parte del flujo se confina de nuevo en una trayectoria bien definida. Este circuito magnético puede imaginarse constituido por un *anillo de hierro en serie* con un *entrehierro de aire*.

La *figura 205d* representa la sección de un *núcleo de transformador* de tipo corriente. Aquí el circuito magnético se ha dividido y puede considerarse que las *partes A y C* están *en paralelo* entre sí y *en serie* con la *parte B*.

La *figura 205e* es el circuito magnético de un *motor* o de un *generador*. Los *dos entrehierros* están *en serie* con la *parte de hierro* del circuito.

Uno de los problemas importantes al proyectar un aparato en el cual hay un circuito magnético, es *calcular la densidad de flujo que ocasionaría una corriente conocida en un arrollamiento determinado y sobre un núcleo dado* o, inversamente, *proyectar un núcleo y un arrollamiento para producir una densidad de flujo deseada*. Al considerar este problema no tendremos en cuenta, para simplificar, muchos factores que se presentan en la práctica.

Consideremos un anillo cerrado (*sin entrehierro*) de sección uniforme. Hemos demostrado que, dentro del anillo:

$$B = \mu H = \mu \frac{N i}{l}$$

Dado que  $\Phi = B A \Rightarrow \Phi = \mu \frac{N i A}{l} = \frac{N i}{l/\mu A} \quad (234)$

La resistencia  $R$  de un conductor de sección uniforme  $A$ , longitud  $l$  y resistividad  $\rho$ , está dada por:

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A}$$

donde  $\sigma$  es la conductividad.

Si dicho conductor está conectado a los bornes de un generador de fem de resistencia interna despreciable, la ecuación del circuito se convierte en:

$$I = \frac{fem}{l/\sigma A}$$

La forma de esta ecuación es la misma que la de la ecuación (234), correspondiendo la intensidad de la corriente  $I$  al flujo magnético  $\Phi$ , la magnitud  $N i$  a la fuerza electromotriz ( $fem$ ) y  $l/\mu A$  a la resistencia  $R$ . Teniendo en cuenta esta analogía, se establecen las siguientes denominaciones:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{fuerza magnetomotriz (fmm)} = N i \quad [\text{Av}] \\ \text{Reluctancia } (\mathfrak{R}) = l/\mu A \quad [\text{Av/Wb}] \end{array} \right.$$

Luego la ecuación (234) puede escribirse:

$$\Phi = \frac{fmm}{\mathcal{R}} \quad \text{ó} \quad fmm = \Phi \mathcal{R} \quad (235)$$

La ventaja de escribir la expresión del flujo en un circuito magnético en la forma que indica la ecuación (235), aparece más clara cuando se considera un circuito que contiene un entrehierro o se compone de partes de diferentes permeabilidades, longitudes y secciones. Resulta que la *reluctancia equivalente* de tal circuito puede calcularse del mismo modo que la resistencia equivalente de una red de conductores. Por ejemplo, un anillo que contiene un entrehierro corresponde a dos resistencias en *serie* y la reluctancia equivalente del circuito es la suma de las reluctancias del anillo y el entrehierro. Las ramas A y C de la *figura 205d* están en *paralelo* y la inversa de su reluctancia equivalente es la suma de las inversas de las reluctancias de dichas ramas. Para un *circuito magnético serie*, se tiene:

$$\Phi = \frac{fmm}{\sum \mathcal{R}} = \frac{fmm}{\sum (l/\mu A)} = \frac{fmm}{l_1/\mu_1 A_1 + l_2/\mu_2 A_2 + \dots} \quad (236)$$

Los resultados anteriores son correctos, con gran aproximación, si la dispersión del flujo es pequeña. Una deducción más generalizada de la ecuación del circuito magnético (235/6), puede realizarse a partir de la *Ley de Ampere*:  $\oint B \cos \theta dl = \mu_0 i$  (ecuación 161 de pág. 179), pero es muy laboriosa y nosotros no la realizaremos.

**Ejercicio Nº 134:** La longitud de la circunferencia media de un anillo de Rowland es de 50 cm y su sección de 4 cm<sup>2</sup>. Utilizar la curva de permeabilidad de la figura 194 y calcular la fuerza magnetomotriz necesaria para establecer un flujo de 4x10<sup>-4</sup> Wb en el anillo. ¿Cuál es la corriente necesaria si el anillo tiene un arrollamiento de 200 vueltas?

La densidad de flujo deseada es :  $B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{4 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 1 \text{ T}$

De las curvas de la figura 194, obtenemos primero *H* en función de *B* y luego  $\mu$  en función de *H*  $\Rightarrow \mu \cong 66 \times 10^{-4} \text{ Wb/Am}$

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} = \frac{0,5 \text{ m}}{66 \times 10^{-4} \text{ Wb/Am} \times 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 1,89 \times 10^5 \text{ Av/Wb}$$

$$fmm = \Phi \mathcal{R} = 4 \times 10^{-4} \text{ Wb} \times 1,89 \times 10^5 \text{ Av/Wb} = 75,6 \text{ Av}$$

$$i = \frac{fmm}{N} = \frac{75,6 \text{ Av}}{200 \text{ v}} = 0,38 \text{ A}$$



**Ejercicio N° 135:** Si en el anillo del ejercicio anterior cortamos un entrehierro de 1 mm de longitud, ¿qué corriente es necesaria para mantener el mismo flujo?

La reluctancia del entrehierro de aire es:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 A} = \frac{10^{-3} \text{ m}}{4 \pi \times 10^{-7} \text{ Wb/Am} \times 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 20 \times 10^5 \text{ Av/Wb}$$

Despreciando la pequeña variación de longitud del hierro, su reluctancia es la misma que anteriormente:  $1,89 \times 10^5 \text{ Av/Wb}$ . Así vemos que la reluctancia del entrehierro, con sólo 1 mm de longitud, es diez veces mayor que la del circuito de hierro.

Reluctancia total:  $20 \times 10^5 + 1,89 \times 10^5 \cong 22 \times 10^5 \text{ Av/Wb}$

fmm necesaria:  $4 \times 10^{-4} \times 22 \times 10^5 = 880 \text{ Av}$

$$i = \frac{fmm}{N} = \frac{880 \text{ Av}}{200 \text{ v}} = 4,4 \text{ A}$$

*NOTA:* Si se desea calcular el flujo o la densidad de flujo creado por una fmm dada en un circuito magnético que tiene un entrehierro, el problema no puede resolverse tan fácilmente. Para calcular la reluctancia debe conocerse la permeabilidad, y el valor de ésta depende de la densidad de flujo, que es precisamente la magnitud que se trata de calcular. No obstante, a través de un proceso de aproximación puede obtenerse una solución. Se supone un valor de la densidad de flujo y se busca la permeabilidad correspondiente sobre la gráfica o en la tabla. Con este valor de la permeabilidad se calcula la reluctancia y luego la fmm. Si la densidad de flujo supuesta era correcta, esta fmm sería igual a Ni. Si no lo fuera, se supone un nuevo valor del flujo y se repite el proceso las veces que sea necesario, hasta lograr una aproximación tan grande como se desee.

### ◆ Densidad de Energía en un Campo magnético:

La expresión que da la densidad de energía se deduce fácilmente con ayuda de un anillo de Rowland, dentro del cual el campo magnético tiene un valor constante. En consecuencia, por simetría, la **energía por unidad de volumen** es constante en todo el volumen del anillo.

Cuando la corriente en los arrollamientos es  $i$ , la energía asociada con el campo es:

$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

Hemos visto que la inductancia puede definirse como  $L = \frac{N \Phi}{i}$

y que el flujo dentro de un arrollamiento toroidal es  $\Phi = \frac{N i}{l/\mu A} = B A = \mu H A$

Combinando estas ecuaciones y recordando que el volumen del anillo es  $Al$ , obtenemos:

$$\text{Densidad de energía} = \frac{W}{Al} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \quad [J/m^3] \quad (237)$$

**Ejercicio Nº 136:** Para el caso del anillo del ejercicio anterior, calcular: a) la densidad de energía en el entrehierro y en el hierro; b) la cantidad de energía en el entrehierro y en el hierro.

$$V_H = 4 \times 10^{-4} m^2 \times 0,5 m = 2 \times 10^{-4} m^3$$

$$V_E = 4 \times 10^{-4} m^2 \times 10^{-3} m = 4 \times 10^{-7} m^3$$

$$\left(\frac{W}{V}\right)_H = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{(1 T)^2}{2 (66 \times 10^{-4} Wb/Am)} = 75,76 J/m^3$$

$$\left(\frac{W}{V}\right)_E = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{(1 T)^2}{2 (4 \pi \times 10^{-7} Wb/Am)} = 397,89 kJ/m^3$$

$$W_H = 75,76 J/m^3 \times (2 \times 10^{-4} m^3) = 15,15 \times 10^{-3} J$$

$$W_E = 397,89 \times 10^3 J/m^3 \times (4 \times 10^{-7} m^3) = 159,16 \times 10^{-3} J$$

*Se observa que el entrehierro consume el 90 % de la energía.*





## BIBLIOGRAFÍA

**Física para Ciencias e Ingeniería - Tomo 2**

*Raymond Serway y John Jewett - Editorial Cengage*

**Física Universitaria - Volumen 2**

*Sears, Zemansky, Young y Freedman - Editorial Pearson*

**Fundamentos de Física - Volumen 2**

*Francis Sears - Editorial Aguilar*

**Física - Volumen 2**

*David Halliday y Robert Resnick - Editorial CECSA*

**Física General**

*Francis Sears y Mark Zemansky - Editorial Aguilar*

**Física General - Tomo 2**

*B. de Ercilla, B. García y G. Muñoz - Editorial Alfaomega*

**Introducción a la Física Moderna**

*Juan Kervor - Editorial Universitaria de Buenos Aires*

**Física para la Ciencia y la Tecnología**

*Paul Tipler y Gene Mosca - Editorial Reverté S.A.*

**Fuentes Varias**

*Internet*

