VII. Corriente Alterna

Introducción:

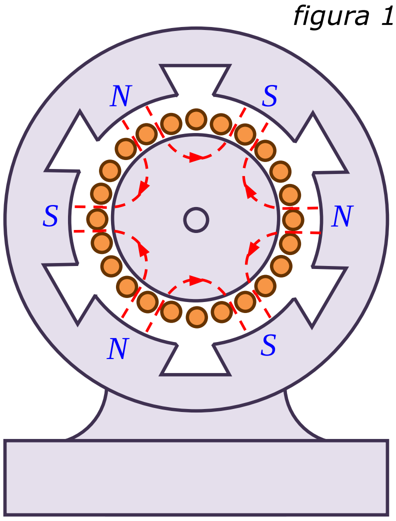
Casi la totalidad de la energía eléctrica utilizada actualmente se produce mediante generadores eléctricos de corriente alterna, la cual tiene la gran ventaja sobre la corriente continua de que la energía puede transportarse a largas distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas, lo cual permite reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Además, luego puede transformarse en tensiones más bajas y seguras con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario. El funcionamiento de los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente se basa en la inducción magnética. La potencia eléctrica se suministra mediante una corriente sinusoidal de 50 Hz. Hay otros aparatos, como las radios, los equipos de televisión y los hornos de microondas, que detectan o generan corrientes alternas de frecuencias mucho más altas.

Generación de Corriente Alterna:

En el capítulo correspondiente a Inducción Magnética, vimos que *un cuadro de hilo conductor, que gira con velocidad angular constante en un campo magnético uniforme, produce una fem alterna sinusoidal* *(pág. 192)*. Este sencillo dispositivo es el prototipo de los generadores industriales de corriente alterna, llamados *alternadores*.

En la *figura 164* se representa la estructura del *inductor* y del *inducido* de un alternador industrial. Alrededor de la circunferencia interna del *inductor* *(estator)* están distribuidos cierto número de *pares de polos*. Como cada *conductor* situado sobre la superficie del *inducido* *(rotor)* corta el campo magnético, se produce en él una *fem inducida* en determinado sentido cuando el conductor pasa por un *polo norte* y en sentido

figura 164



Esquema de un generador industrial de corriente alterna opuesto cuando pasa por un polo sur. En consecuencia, la fem inducida es alterna y el *número de* ciclos completos en cada vuelta es igual al *número de* pares de polos. Esta disposición multipolar permite alcanzar una frecuencia suficientemente grande sin que sea necesario obtener una velocidad angular peligrosamente elevada.

Un alternador mantiene entre sus bornes una *diferencia de potencial sinusoidal* dada por:

$$\boxed{v = V_m \, sen \; \omega t} \qquad (196)$$

donde:

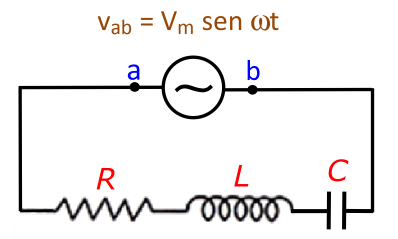
$v \quad \Rightarrow$ valor instantáneo de la fem *[V]*

$V_m \quad \Rightarrow$ valor máximo o amplitud de la fem *[V]*

$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow$ frecuencia angular *[rad/s]*

$f \quad \Rightarrow$ frecuencia de la fem *[Hz]*

Circuito RLC en Serie, Régimen Permanente, Reactancia e Impedancia:



Circuito que contiene en serie una resistencia, una inductancia y una capacidad.

figura 165

Sea un circuito constituido por una *resistencia*, una *inductancia* y un *capacitor*, conectados en serie entre los bornes de un alternador, como se representa en la *figura 165*. La *diferencia de potencial instantánea* entre *a* y *b* es la *suma* de las *diferencias de potencial instantáneas* entre los bornes de *R*, *L* y *C*. Es decir:

$$V_m \, sen \; \omega t = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

siendo i, di/dt y q la *intensidad instantánea de la corriente*, *su derivada respecto al tiempo* y la *carga del capacitor*, respectivamente.

Derivando esta ecuación respecto a t y sustituyendo dq/dt por i, se obtiene:

$$\omega \, V_m \cos \omega t = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución es:

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \; sen \; (\omega t - \varphi) + Ae^{-bt}$$

donde

$$\varphi = \ arc\ tg \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

Aunque parece complicada, la interpretación de esta ecuación no es difícil. Consideremos en primer lugar el término Ae^{-bt}.Las magnitudes A y b dependen de las constantes del circuito y de las condiciones iniciales *(valores* V, i, di/dt *y* q *en el instante de cerrar el circuito)*. El factor e^{-bt} decrece exponencialmente con el tiempo y se hace despreciable al cabo de un tiempo normalmente muy pequeño. *Este factor es transitorio* y aunque en la práctica las tensiones y corrientes transitorias pueden adquirir valores peligrosamente grandes, en nuestro caso no las tendremos en cuenta y sólo consideraremos el *primer término*, que se denomina *solución del estado estacionario* o *régimen permanente*.

Se observa que la *corriente* correspondiente al *régimen permanente* varía *sinusoidalmente* con el tiempo, igual que la tensión entre los bornes. Su *valor máximo* es:

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}} \qquad (197)$$

En consecuencia, la *intensidad de la corriente* en el estado estacionario puede escribirse:

$$\boxed{i = I_m\ sen\ (\omega t - \varphi)} \qquad (198)$$

Por lo tanto, la *frecuencia* de la *intensidad* de corriente es la *misma* que la *frecuencia* de la *tensión* entre los bornes, pero ambas *difieren en la fase*, es decir, están desfasadas un *ángulo* φ.

Ahora vamos a establecer las simplificaciones y definiciones siguientes:

Reactancia Inductiva $\Rightarrow$ $\boxed{X_L = \omega L}$ $[\Omega]$

Reactancia Capacitiva $\Rightarrow$ $\boxed{X_C = \dfrac{1}{\omega C}}$ $[\Omega]$

Reactancia $\Rightarrow$ $\boxed{X = X_L - X_C}$ $[\Omega]$

Impedancia $\Rightarrow$ $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X^2}}$ $[\Omega]$

Entonces, nos queda:

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{V_m}{Z}} \qquad (199)$$

$$\boxed{\varphi = arc\ tg\ \frac{X}{R}} \qquad (200)$$

La *intensidad máxima de la corriente* está relacionada con la *máxima diferencia de potencial* por una ecuación que tiene la misma forma que la *ley de Ohm* para las corrientes continuas, correspondiendo la impedancia *Z* a la resistencia *R*.

• Consideremos ahora los factores que determinan la resistencia, reactancia e impedancia de un circuito. En primer lugar, la *RESISTENCIA* de un conductor que transporta una corriente alterna *puede no ser la misma* que la resistencia del mismo conductor cuando transporta una corriente constante. Esto se debe a que la densidad de corriente en el caso del conductor de corriente alterna no es uniforme en toda su sección, sino mayor en la zona adyacente a la superficie. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto pelicular*. La sección efectiva del conductor se reduce y *su resistencia aumenta*. El efecto pelicular se origina por la fem autoinducida creada por las variaciones del flujo interno en el conductor, siendo *mayor* cuanto *más elevada* es la *frecuencia*. Este efecto es un factor importante para las altas frecuencias utilizadas, por ejemplo, en radio y televisión, pero puede normalmente despreciarse para las frecuencias industriales y domiciliarias de 50 *Hz*. Por tal motivo y salvo que explícitamente se diga otra cosa, nosotros *supondremos* que *la resistencia de un conductor es independiente de la frecuencia*.

La *REACTANCIA DE UNA INDUCTANCIA*, $X_L = \omega L = 2\pi f L$, es *proporcional* al *coeficiente de autoinducción* y a la *frecuencia*. Si hay un *núcleo de hierro* asociado al inductor, entonces el *coeficiente de autoinducción no es constante*, pero nuevamente para mayor sencillez *no tendremos en cuenta esta variación*.

La *REACTANCIA CAPACITIVA*, $X_C = 1/\omega C = 1/2\pi f C$, es *inversamente proporcional* a la *capacidad* y a la *frecuencia*.

• La relación entre la *IMPEDANCIA* Z de un circuito en serie y los valores de R, X_L y X_C, puede representarse gráficamente considerando todas estas magnitudes como vectores. La resistencia R se representa por un *vector situado sobre el eje* *X*, siendo su *sentido positivo*. Las reactancias X_L y X_C se representan por *vectores situados*

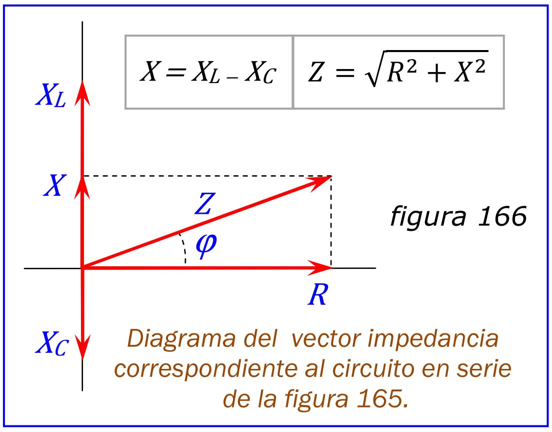


figura 166

Diagrama del vector impedancia correspondiente al circuito en serie de la figura 165.

sobre el eje Y, siendo sus *sentidos positivo y negativo*, respectivamente. La *impedancia* es el *vector suma geométrica* o *resultante* de estos *tres vectores*, según se representa en la *figura 166*, denominada *diagrama del vector impedancia del circuito*. Esta figura se ha dibujado para el caso $X_L > X_C$ y por ello X es positiva.

Ejercicio Nº 114: Una resistencia de 600 Ω está conectada en serie con una inductancia de 0,5 *H* y un capacitor de 0,2 μF. Calcular la impedancia del circuito y dibujar el diagrama del vector impedancia para: a) una frecuencia de 400 *Hz*; b) una frecuencia de 600 *Hz*.

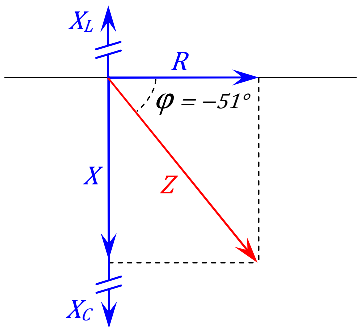
a)

$$X_L = 2\pi \times 400 \times 0{,}5 = 1.257\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 400 \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = 1.989\ \Omega$$

$$X = X_L - X_c = 1.257 - 1.989 = -732\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{600^2 + (-732)^2} = 946\ \Omega$$



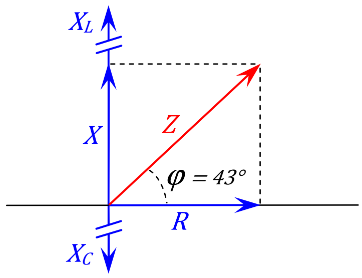
b)

$$X_L = 2\pi \times 600 \times 0{,}5 = 1.885\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 600 \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = 1.326\ \Omega$$

$$X = X_L - X_c = 1.885 - 1.326 = 559\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{600^2 + 559^2} = 820\ \Omega$$



Valores Eficaces de la Corriente y la Tensión:

Los valores instantáneos de la corriente y tensión alternas, varían continuamente desde un máximo en un sentido hasta un máximo en sentido opuesto, pasando por cero. Resulta más práctico estudiar las corrientes alternas considerando sus valores cuadráticos medios en lugar de sus valores máximos.

El *valor cuadrático medio de la intensidad de una corriente variable* se define como el *valor de la intensidad de una corriente constante que desarrolle la misma cantidad de calor en el mismo tiempo y en la misma resistencia*. Dicha magnitud se denomina *valor eficaz de la corriente* variable.

La *derivada* respecto al tiempo de la *cantidad de calor* desarrollada en una *resistencia* R, que transporta una *corriente alterna sinusoidal* $i = I_m \, sen \, \omega t$, es:

$$\frac{d}{dt}(i^2 R\, t) = i^2 R = I_m^2 \, R \, sen^2 \, \omega t$$

La *cantidad total de calor* desarrollada en un *tiempo* igual a un *período* T, es:

$$H = \int_0^T i^2 R \, dt = I_m^2 \, R \int_0^T sen^2 \, \omega t \; dt = \frac{1}{2} \, I_m^2 \, R \, T$$

La *cantidad de calor* desarrollada por una *corriente de intensidad constante* I_e en el *mismo tiempo* es:

$$H = I_e^2 \, R \, T$$

Puesto que por definición de I_e *las cantidades de calor son iguales*, tenemos:

$$I_e^2 \, R \, T = \frac{1}{2} \, I_m^2 \, R \, T \qquad \Rightarrow \qquad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, si la *intensidad de una corriente* varía sinusoidalmente, su *valor eficaz* es $1/\sqrt{2} = 0{,}707$ veces su *valor máximo*. Igualmente, el *valor eficaz* de una *diferencia de potencial* que varíe sinusoidalmente es $1/\sqrt{2}$ su *valor máximo*. Por ejemplo, cuando se dice que la tensión alterna entre los dos cables de una línea de suministro doméstico es $220 \, V$, ello significa que la *tensión eficaz* es $220 \, V$ y, por consiguiente, la *tensión máxima* será $220 \times \sqrt{2} = 311 \, V$.

Dividiendo por $\sqrt{2}$ el primero y el último miembro de la ecuación *(199)*, obtenemos:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_m/\sqrt{2}}{Z} \qquad o \; sea: \qquad I_e = \frac{V_e}{Z}$$

De aquí en más, interpretaremos que las letras I o V *sin subíndices*, se refieren a los *valores eficaces* de las magnitudes correspondientes. Por lo tanto, la ecuación anterior se escribirá:

$$\boxed{I = \frac{V}{Z}} \qquad (201)$$

Relación entre las Fases de la Corriente y la Tensión:

Para su mejor análisis, escribimos juntas las ecuaciones *(196)*, *(198)* y *(200)*:

$$v = V_m \, sen \, \omega t$$

$$i = I_m \, sen \, (\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = arc \, tg \, \frac{X}{R}$$

El producto $\omega t = 2\pi f t$ representa un *ángulo* *(en radianes)* y su valor en cualquier instante t se denomina *fase de la tensión*. Análogamente, la magnitud $(\omega t - \varphi)$ se denomina *fase de la corriente*. Se dice que la *corriente* presenta una *diferencia de fase* con la *tensión* o que está *desfasada* un *ángulo* φ respecto a la *tensión*.

Puesto que la *reactancia* X puede ser *positiva* o *negativa*, lo mismo le sucede al *ángulo* φ. Si $X_L > X_C$, X es *positiva*, φ es *positivo* y los máximos, mínimos, etc., de la *corriente* aparecen en *instantes posteriores* que los que corresponden a la *tensión*. Se dice que la *corriente* está *atrasada* respecto a la *tensión*. Por el contrario, si $X_L < X_C$, X es *negativa*, φ es *negativo* y la *corriente* está *adelantada* respecto a la *tensión*.

El *ángulo* φ puede determinarse inmediatamente a través del diagrama del *vector impedancia*, puesto que $tg \, \varphi = X/R$.

Como caso especial, es evidente que si un circuito está formado por una *resistencia pura* conectada a una fuente de corriente alterna, $X = 0$, $Z = R$, $\varphi = 0$ y la *corriente* y la *tensión* están *en fase*, como se muestra en la *figura 167*.

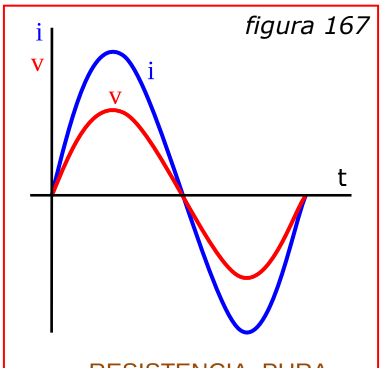


figura 167

RESISTENCIA PURA

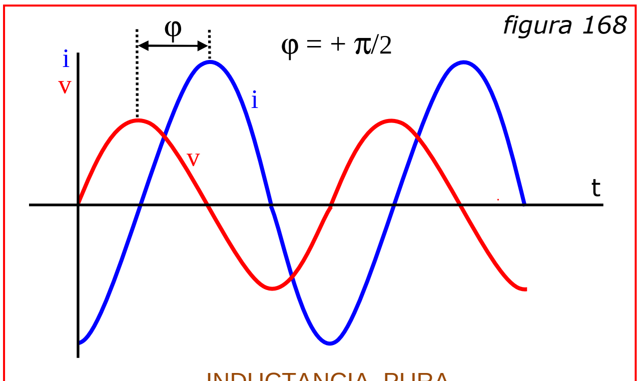
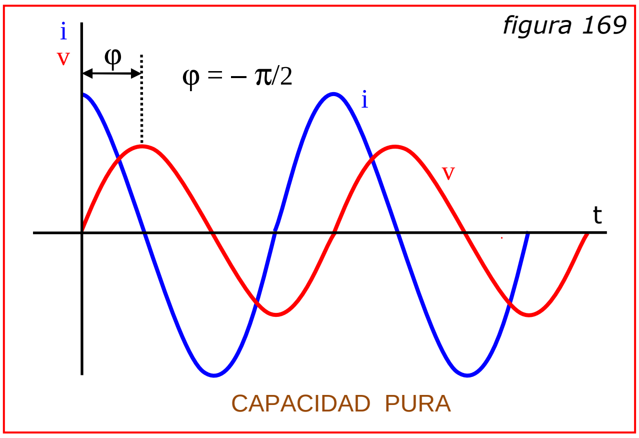


figura 168

INDUCTANCIA PURA

Si el circuito se compone de una *inductancia pura*, $R = 0$, $Z = X_L$, $\varphi = +\pi/2$ y la *corriente* está *atrasada* respecto a la *tensión* un ángulo de $\pi/2$ radianes o de 90º, como se indica en la *figura 168*.

Si el circuito contiene sólo una *capacidad pura*, $R = 0$, $Z = X_C$, $\varphi = -\pi/2$ y la *corriente* está *adelantada* respecto a la *tensión* un ángulo de $\pi/2$ radianes o de 90º, según se indica en la *figura 169*.



La *corriente* tiene la *misma fase* en *todas las partes* de un *circuito en serie*, es decir, es máxima *(en ambos sentidos)* o nula en la resistencia, la inductancia y el condensador al mismo tiempo.

Diferencia de Potencial entre los Puntos de un Circuito de Corriente Alterna:

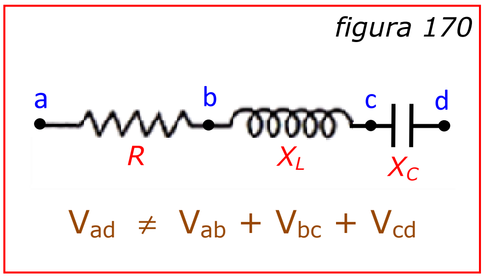
La *diferencia de potencial eficaz* entre dos puntos cualesquiera de un *circuito en serie*, es igual al producto de la *intensidad eficaz* por la *impedancia* del circuito ente los dos puntos considerados, siempre que no exista una fem entre ellos:

$$V_{ab} = I\,Z_{ab}$$

La diferencia de fase φ entre V_{ab} e I es:

$$\varphi = arc\ tg\ (X_{ab}/R_{ab})$$

En la *figura 170*, la impedancia Z_{ab} entre *a* y *b* es igual a *R*. Por consiguiente, $V_{ab} = I\,R$ y $\varphi = arc\ tg\ 0 = 0$; es decir, *la tensión* entre los terminales de una *resistencia pura* está en *fase* con la *corriente*. Entre los puntos *b* y *c*, $Z_{bc} = X_L$, $V_{bc} = I\,X_L$ y $\varphi = arc\ tg\ \infty = +\pi/2$; por lo tanto, *la tensión* entre los extremos de una *inductancia pura* está *adelantada 90º* respecto a la *corriente*. Entre los puntos *c* y *d*, $Z_{cd} = X_C$, $V_{cd} = I\,X_C$ y $\varphi = arc\ tg\ -\infty = -\pi/2$; luego, la *tensión* entre los bornes de un *capacitor puro* está *atrasada 90º* respecto a la *corriente*.



Veamos un *ejemplo numérico*. Supongamos los siguientes valores para la figura *170*:
$I = 5\ A$, $R = 8\ \Omega$, $X_L = 6\ \Omega$ y $X_C = 12\ \Omega$. Tendremos:

$V_{ab} = I\,R\ =\ 40\ V$ *(la tensión y la corriente están en fase)*

$V_{bc} = I\,X_L =\ 30\ V$ *(la tensión está adelantada 90º respecto a la corriente)*

$V_{cd} = I\,X_C =\ 60\ V$ *(la tensión está atrasada 90º respecto a la corriente)*

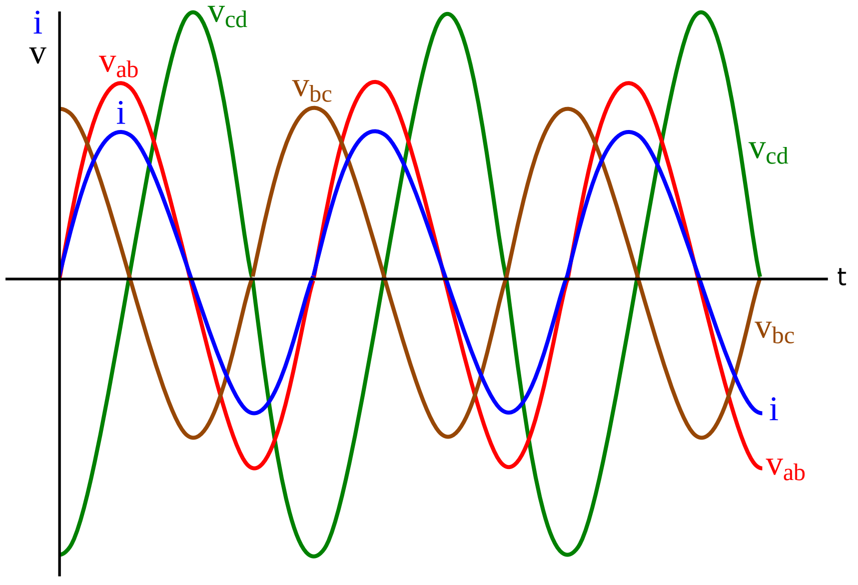
La impedancia total es: $Z_{ad} = \sqrt{8^2 + (6-12)^2} = 10\ \Omega$

La tensión entre los extremos del circuito será: $V_{ad} = I\,Z_{ad} = 5 \times 10 = 50\ V$

Pero: $V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} =\ 130\ V \neq 50\ \mathrm{V}$

• Este ejemplo explica uno de los resultados inesperados que se producen en los circuitos de corriente alterna. La *suma* de las *diferencias de potencial eficaces* entre los extremos de *cierto número de elementos* de un *circuito en serie*, *no es igual* a la *diferencia de potencial eficaz* entre los extremos del *circuito en conjunto*. No obstante, esto se explica sencillamente si se tienen en cuenta las relaciones de fase entre las diferencias de potencial de las distintas partes.

figura 171

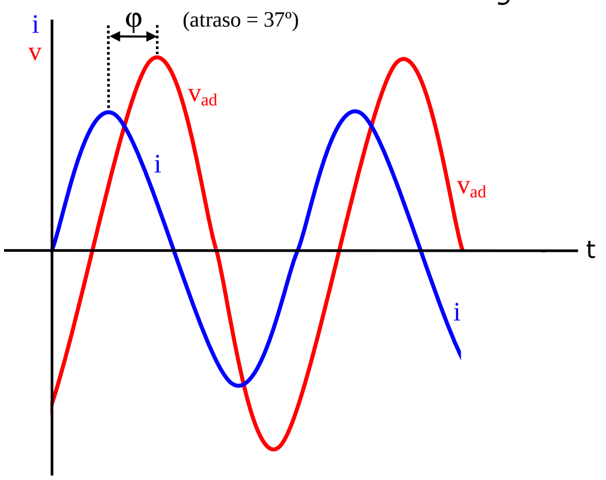


RELACIONES ENTRE LAS FASES DE v_{ab}, v_{bc}, v_{cd} e i
PARA EL CIRCUITO DE LA *figura 170*

En la *figura 171*, la *línea azul* representa la *corriente instantánea*, que es la misma en todas las partes del circuito y que tiene un valor máximo de $5\sqrt{2}\,A$. Las otras tres curvas representan las *tensiones instantáneas* entre *a* y *b* *(línea roja)*, *b* y *c* *(línea* *marrón)* y *c* y *d* *(línea verde)*, cuyos valores máximos son $40\sqrt{2}\ V$, $30\sqrt{2}\ V$ y $60\sqrt{2}\ V$, respectivamente. Las *diferencias de fase* entre las tensiones y la corriente son las representadas.

La *tensión instantánea* v_{ad} es igual a la *suma* de las *tensiones instantáneas* v_{ab}, v_{bc} y v_{cd}. Si se *suman* las *3 curvas de tensiones*, la curva obtenida representa la *tensión instantánea* entre *a* y *d*. Esta curva está representada en la *figura 172*. Su valor máximo es $50\sqrt{2}$ *V* y su valor eficaz 50 *V*, como debía ser. Está atrasada $37°$ respecto a la intensidad de corriente, lo cual coincide con el valor de φ calculado por la fórmula: $tg\ \varphi = (X_L - X_C)/R = (6-12)/8 = -0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -37°$

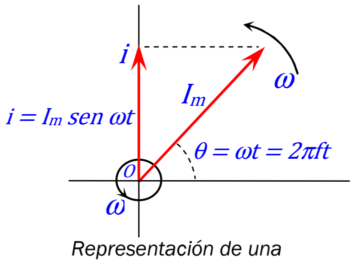
figura 172



Diferencia de potencial instantáneo v_{ad}
e intensidad de la corriente i
en el circuito de la *figura 170*

Representación Fasorial:

figura 173



Representación de una corriente alterna por medio de un vector rotatorio

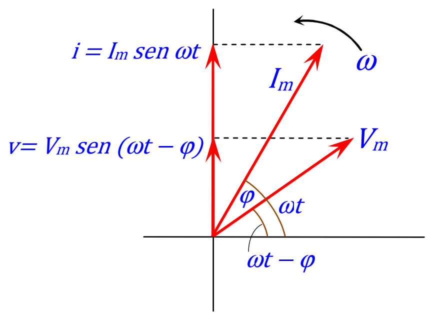
Ante la evidente dificultad que representa dibujar e interpretar diagramas como los de las *figuras 171 y 172*, resulta necesario introducir algún método gráfico más sencillo para representar las *relaciones de fase* entre *corrientes* y *tensiones* en los circuitos de corriente alterna.

Supongamos que se desea representar una *corriente* que varíe *sinusoidalmente*, de *frecuencia* f y *valor máximo* I_m. Construyamos un *vector* I_m como el de la *figura 173* *(a una escala conveniente)* e imaginemos que el mismo está *girando* alrededor del punto *O* en sentido *contrario* al de las *agujas del reloj*, con una *velocidad angular* $\omega = 2\pi f$. Si este *vector rotatorio*, que llamaremos *FASOR*, ocupa la posición *horizontal* en el instante $t = 0$, su *proyección* sobre un *eje vertical* en cualquier *instante* t será igual al valor de la *corriente* en *dicho instante*, ya que según la *figura 173* la componente vertical es:

$$I_m \, sen \, \theta = I_m \, sen \, 2\pi f t = I_m \, sen \, \omega t = i$$

Si bien el diagrama sólo representa el valor de i en un instante determinado, el lector puede visualizar la rotación mentalmente y seguir las fluctuaciones de i cuando I_m gira. *Este método es equivalente al que se utiliza para representar un movimiento armónico simple, proyectando un punto que se mueve en una circunferencia con velocidad angular constante, sobre un diámetro de la misma circunferencia*.

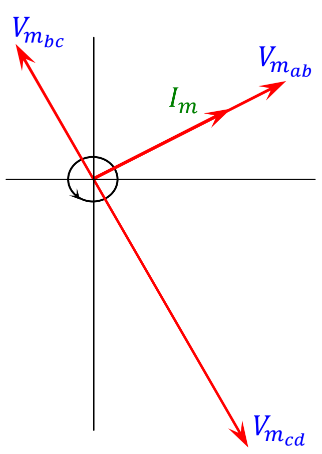
figura 174



Representación vectorial de una diferencia de potencial y una corriente alternas.

Si se desea representar en el mismo diagrama los *valores instantáneos* de una *diferencia de potencial* $v = V_m \, sen \, (\omega t - \varphi)$, que tenga la misma *frecuencia* que la *corriente* pero *retrasada* respecto a ésta un *ángulo* φ, se construye un segundo *fasor* de longitud V_m *(a una escala conveniente)* pero desplazado respecto a I_m un ángulo φ en *sentido horario (fig. 174)*. Cuando ambos *fasores* giren en *sentido antihorario*, los valores instantáneos de v presentarán *siempre* un *retardo de fase* φ respecto a los valores instantáneos de i.

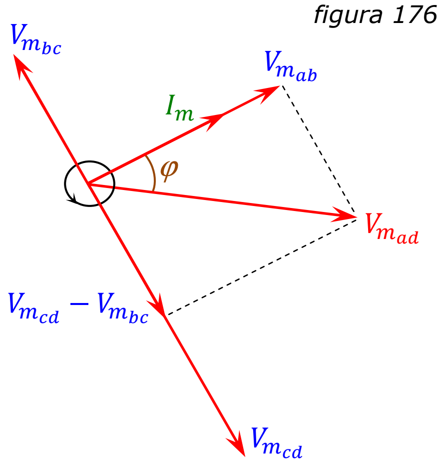
figura 175



Representación vectorial de la corriente y las tensiones para el circuito de la *figura 170*

Consideremos nuevamente el circuito de la *figura 170* y representemos, por este *método de los fasores*, la *corriente* y la *tensión* entre los extremos de las distintas partes del circuito. Para representar la *corriente* bastará un solo *fasor* I_m *(fig. 175)*, ya que éste tiene el *mismo valor* y la *misma fase* en todas las partes del circuito. La *tensión* entre los bornes de la *resistencia* está representada por el *fasor* $V_{m_{ab}}$ de longitud $40\sqrt{2}\ V$, que tiene la *misma dirección* que I_m puesto que v_{ab} e i están *en fase*. Análogamente, los *fasores* $V_{m_{bc}}$ de longitud $30\sqrt{2}\ V$ y $V_{m_{cd}}$ de longitud $60\sqrt{2}\ V$ representan la *tensión adelantada* entre los bornes de la *inductancia* y la *tensión atrasada* entre los bornes del *condensador*, *respectivamente*. Las *proyecciones* de cada uno de estos *fasores* y la *rotación* de todo el *diagrama* pueden ser visualizadas mentalmente por el lector. Cuando los *fasores* giran, sus *proyecciones verticales* experimentan las mismas *variaciones* que las *ordenadas* de las *cuatro curvas* de la *figura 171*.

figura 176



Representación vectorial de la resultante $V_{m_{ad}}$ para el circuito de la *figura 170*

Veamos ahora lo que sucede con la *tensión* entre los puntos *a* y *d* de la *figura 170*. El *valor instantáneo* de esta *diferencia de potencial* se encontró en la *figura 172* sumando las *ordenadas* de las *tres curvas* de *tensión* de la *figura 171*. Utilizando la representación fasorial, este valor se obtiene sumando las *componentes verticales* de $V_{m_{ab}}$, $V_{m_{bc}}$ y $V_{m_{cd}}$. Pero la *suma* de las *componentes verticales* de estos *fasores* es igual a la *componente vertical* de su *suma geométrica* o *resultante*, es decir, $V_{m_{ad}}$. Si obtenemos esta *resultante* por cualquier método adecuado, como el de la *figura 176*, su *componente vertical* representará la *diferencia de potencial instantánea* entre los extremos *a* y *d* del circuito. Además, el *ángulo* φ entre el *fasor resultante* $V_{m_{ad}}$ y el *fasor* I_m de la *corriente*, indicará la *diferencia de fase* del circuito en conjunto.

figura 177

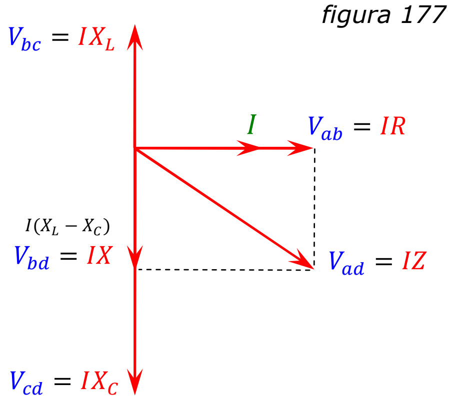


Diagrama vectorial para el circuito de la *figura 170*, donde los vectores representan *valores eficaces*

Aunque el diagrama fasorial es en esencia un método para representar valores instantáneos, *en la práctica se utiliza casi exclusivamente* con los *valores eficaces* y las *diferencias de fase*. Si *modificamos las escalas* de las figuras anteriores con el *factor* $\sqrt{2}$, los mismos *fasores* que representan *valores máximos* corresponderán en la *nueva escala* a *valores eficaces*, permaneciendo invariables los *ángulos* que representan *diferencias de fase*. Si se desean los valores instantáneos, sólo es necesario multiplicar por $\sqrt{2}$ la longitud de todos los fasores y suponer el diagrama en rotación.

La orientación del diagrama de fasores es totalmente arbitraria. En un circuito serie se comienza normalmente por dibujar el fasor intensidad formando un ángulo cualquiera, luego se construyen los otros fasores con la orientación relativa adecuada. Normalmente, se omiten los ejes X e Y.

La *figura 177* es la misma *figura 176*, salvo que el *fasor corriente* es horizontal y que la escala se ha modificado para que los fasores representen *valores eficaces*. Puesto que $V_{ab} = I\,R$, $V_{bc} = I\,X_L$, $V_{cd} = I\,X_C$ y $V_{ad} = I\,Z$, los *fasores* de *tensión* están relacionados exactamente del mismo modo que los *vectores* en un diagrama de *vector impedancia* tal como el de la *figura 166*. En efecto, el diagrama del *fasor* de *tensión* de un *circuito serie* puede obtenerse a partir de su diagrama de *vector impedancia*, multiplicando cada vector *resistencia*, *reactancia* o impedancia por el *módulo* de la *corriente*.

Representación Compleja:

Cuando la proyección en el *eje horizontal* se identifica con el *eje real* en el plano complejo, los *fasores* pueden ser representados por *números complejos*. Para un *circuito serie* como el de la *figura 170*, al cual se le aplica entre sus bornes una *fem* E, le corresponde el *diagrama fasorial complejo* de la *figura 178*, donde se ha tomado la *dirección* de la *corriente* I como *eje real*. Como el *fasor* IR está *en fase* con I, su expresión será $I\,R + j\,0$. El *fasor* $I\,X_L$ forma un *ángulo recto* con I y en *avance*, siendo su expresión $+\,j\,I\,X_L$. El *fasor* $I\,X_C$ forma un *ángulo recto* con I y en *atraso*, siendo su expresión $-\,j\,I\,X_C$. La expresión compleja de la *tensión en bornes* resulta:

figura 178

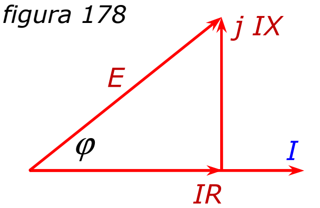


Diagrama fasorial complejo de un circuito serie ($X_L > X_C$)

$$\boxed{E = I\,R + j\,I\,(X_L - X_C) = I\,(R + j\,X) = I\,Z} \qquad (202)$$

Se observa que la *impedancia* se expresa en forma de *cantidad compleja*, siendo que no constituye una magnitud fasorial *(o vector giratorio)*. Sin embargo, la *impedancia* transforma las *caídas de tensión* debidas a la *resistencia* y a la *reactancia* en dos *fasores tensión* dispuestos en *ángulo recto* entre sí, por lo que actúa como un *operador complejo* efectivo. Por ello la *impedancia* se define como *complejo de impedancia* u *operador de impedancia del circuito* y se la suele identificar con un punto arriba de su símbolo *(nosotros la identificaremos sólo con su símbolo Z)*.

Hay tres *notaciones* equivalentes para los fasores:

- *RECTANGULAR*: $V = V_R + j\,V_X = V cos\,\varphi + j\,V sen\,\varphi$
- *POLAR*: $V = V\ \lfloor\varphi\rfloor$
- *EXPONENCIAL*: $V = V\ e^{j\varphi}$

$e^{j\varphi} = cos\,\varphi + j\,sen\,\varphi$ *(identidad de Euler)*

Los símbolos en negro corresponden a los módulos de los fasores.

- La notación *rectangular* es la más apta para la *suma* y la *resta* de fasores. Para sumar dos fasores se suman por separado las partes reales y las partes imaginarias. Para restar dos fasores se sustraen por separado las partes reales y las partes imaginarias.
- Las notaciones *polar* y *exponencial* son las más aptas para la *multiplicación*, la *división*, la *potenciación* y la *radicación*:

$$I_1\,I_2 = I_1\,I_2\,\lfloor\varphi_1+\varphi_2\rfloor = I_1\,I_2\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{I_2}\,\lfloor\varphi_1-\varphi_2\rfloor = \frac{I_1}{I_2}\,e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\sqrt[n]{I} = \sqrt[n]{I}\,\left\lfloor\frac{\varphi}{n}\right\rfloor = \sqrt[n]{I}\,e^{j\frac{\varphi}{n}}$$

$$I^n = I^n\,\lfloor n\,\varphi\rfloor = I^n\,e^{j\,n\,\varphi}$$

Recordemos que el *operador* $j = \sqrt{-1}$ hace girar *90º* a la magnitud que afecta, en *sentido antihorario*. La rotación es de *180º*, *270º* y *360º* en los casos de j^2, j^3 y j^4, respectivamente.

Ejercicio Nº 115: Se tiene un resistor de 200 Ω y un inductor de 0,4 H con los que se forma un circuito en serie con una fuente cuya amplitud de voltaje es de 30 V y su frecuencia angular de 250 *rad/s*. a) ¿Cuál es la impedancia del circuito?; b) ¿Cuál es la amplitud de corriente?; c) ¿Cuáles son las amplitudes de voltaje entre los bornes del resistor y del inductor?; d) ¿Cuál es el ángulo de fase φ del voltaje de fuente respecto de la corriente? ¿Se atrasa o adelanta este voltaje respecto de la corriente?; e) Construir el diagrama de fasores.

a) $$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{(200\ \Omega)^2 + [(250\ rad/s)\ 0{,}4\ H]^2} = 224\ \Omega$$

b) $$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{30\ V}{224\ \Omega} = 0{,}134\ A$$

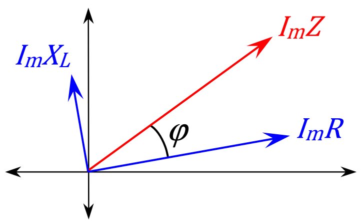
c) $$V_{R_m} = I_m\ R = 0{,}134\ A \times 200\ \Omega = 26{,}8\ V$$

$$V_{L_m} = I_m\ \omega L = 0{,}134\ A\ (250\ rad/s)\ 0{,}4\ \mathrm{H} = 13{,}4\ V$$

d) $$\varphi = arc\ tg\ \frac{V_{L_m}}{V_{R_m}} = arc\ tg\ \frac{13{,}4\ V}{26{,}8\ V} = 26{,}6°$$

$$(la\ tensión\ de\ la\ fuente\ adelanta\ a\ la\ corriente)$$

e)



Ejercicio Nº 116: Una autoinducción de reactancia 10 Ω y un condensador de reactancia 25 Ω *(medidas a 60 c/s)* se encuentran conectados en serie con una resistencia de 10 Ω a una línea de corriente alterna de 60 Hz y diferencia de potencial eficaz 100 V. Calcular: a) el voltaje entre los bornes de cada parte del circuito; b) las expresiones del voltaje y de la intensidad instantánea en la línea.

a) $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{10^2 + (10 - 25)^2} = 18{,}03\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100\ V}{18{,}03\ \Omega} = 5{,}55\ A$$

$$V_L = I\ X_L = 5{,}55\ A \times 10\ \Omega = 55{,}5\ V$$

$$V_C = I\ X_C = 5{,}55\ A \times 25\ \Omega = 139\ V$$

$$V_R = I\ R = 5{,}55\ A \times 10\ \Omega = 55{,}5\ V$$

b) $$I_m = I\,\sqrt{2} = 5{,}55\ A \times \sqrt{2} = 7{,}85\ A$$

$$V_m = V\,\sqrt{2} = 100\ V \times \sqrt{2} = 141\ V$$

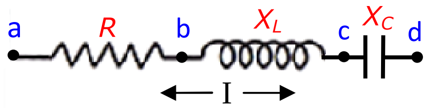
$$\varphi = arc\ tg\,\frac{X_L - X_c}{R} = arc\ tg\ \frac{10 - 25}{10} = arc\ tg\ (-1{,}5) = -\,0{,}983\ rad$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 60 = 377\ rad/s$$

$$v = V_m\ sen\ \omega t = 141\ sen\ 377\ t$$

$$i = I_m\ sen\ (\omega t - \varphi) = 7{,}85\ sen\ (377\ t + 0{,}983)$$

Ejercicio Nº 117: En la figura, I = 5 *A*, R = 8 *Ω*, X_L = 6 *Ω y* X_C = 12 *Ω*. Calcular: a) V_{ab}, V_{bc}, V_{cd} y V_{ad}; b) la diferencia de fase entre la intensidad de la corriente y el voltaje en la línea.



a) $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{8^2 + (6-12)^2} = 10\ \Omega$$

$$V_{ab} = I\ R = 5\ A\ \times\ 8\ \Omega = 40\ V$$

$$V_{bc} = I\ X_L = 5\ A\ \times\ 6\ \Omega = 30\ V$$

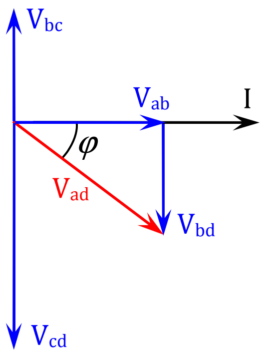
$$V_{cd} = I\ X_C = 5\ A\ \times\ 12\ \Omega = 60\ V$$

$$V_{ad} = I\ Z = 5\ A\ \times\ 10\ \Omega = 50\ V$$

también:

$$V_{ad} = \sqrt{{V_{ab}}^2 + (V_{bc} - V_{cd})^2} = \sqrt{40^2 + (30-60)^2} = 50\ V$$

b) $$\varphi = arc\ tg\,\frac{X_L - X_c}{R} = arc\ tg\ \frac{6 - 12}{8} = arc\ tg\ (-\,0{,}75) = -\,36{,}87°$$



(la corriente adelanta a la tensión)

Ejercicio Nº 118: Una resistencia de 400 Ω está en serie con una autoinducción de 0,1 H y un condensador de 0,5 μF. Calcular la impedancia del circuito y dibujar el diagrama del vector impedancia: a) a la frecuencia de 500 Hz; b) a la frecuencia de 1.000 Hz. Hallar, en cada caso, la diferencia de fase entre la intensidad de la corriente y el voltaje en la línea, especificando si la intensidad de la corriente está atrasada o adelantada.

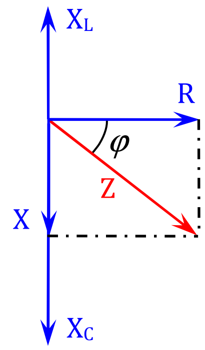
a) A la frecuencia de 500 Hz:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = (2\pi \times 500)\ 0{,}1\ - \frac{1}{(2\pi \times 500)(0{,}5 \times 10^{-6})} = -\ 322{,}46\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{400^2 + (-322{,}46)^2} = 514\ \Omega$$

$$\varphi = arc\ tg\frac{X}{R} = arc\ tg\ \frac{-322{,}46}{400} = arc\ tg\ (-0{,}806) = -39°$$

$$(la\ corriente\ adelanta\ a\ la\ tensión)$$



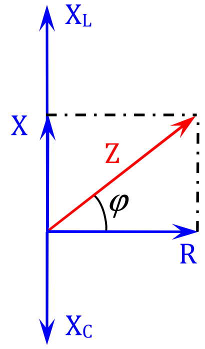
b) A la frecuencia de 1.000 Hz:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = (2\pi \times 1000)\ 0{,}1\ - \frac{1}{(2\pi \times 1000)(0{,}5 \times 10^{-6})} = 310\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{400^2 + (310)^2} = 506\ \Omega$$

$$\varphi = arc\ tg\frac{X}{R} = arc\ tg\ \frac{310}{400} = arc\ tg\ 0{,}775 = 38°$$

$$(la\ corriente\ atrasa\ a\ la\ tensión)$$



Comentario: Al duplicarse la frecuencia, se duplica la reactancia inductiva y se reduce a la mitad la reactancia capacitiva, cambiando de signo la reactancia resultante. Consecuentemente, la impedancia pasa de una preponderancia capacitiva a una preponderancia inductiva.

Ejercicio Nº 119: Los puntos a y b de la figura son los terminales de una línea de corriente alterna de 60 Hz. La tensión eficaz entre a y b es 130 V.
Si R_1 = 6 Ω, $R_2 = R_3$ = 3 Ω, X_C = 3 Ω y X_L = 8 Ω, calcular la intensidad de la corriente en el circuito, la tensión entre a y c y la tensión entre c y d.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_c)^2}$$

$$Z_{ab} = \sqrt{(6+3+3)^2 + (8-3)^2} = 13\ \Omega$$

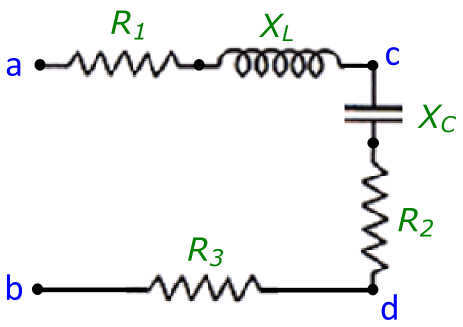
$$Z_{ac} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ \Omega$$

$$Z_{cd} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4{,}24\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z_{ab}} = \frac{130\ V}{13\ \Omega} = 10\ A$$

$$V_{ac} = I\ Z_{ac} = 10\ A\ \times\ 10\ \Omega = 100\ V$$

$$V_{cd} = I\ Z_{cd} = 10\ A\ \times\ 4{,}24\ \Omega = 42{,}4\ V$$



Admitancia, Conductancia y Susceptancia:

Según la *ley de Ohm*, la corriente puede calcularse con la expresión $I = (1/Z)\ V$. La inversa de la impedancia Z se llama *ADMITANCIA* $Y = (1/Z)$. Con la introducción de este nuevo elemento, la *ley de Ohm* nos queda entonces expresada así:

$$\boxed{I = Y\ V} \qquad (203)$$

Vemos que la *admitancia*, tal como la impedancia, es un *operador complejo*. Si desarrollamos ahora el *complejo admitancia* a fin de obtener sus *componentes*, mediante la "racionalización" de su expresión *(multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador)*, tendremos:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\ X} = \frac{R - j\ X}{(R + j\ X)(R - j\ X)} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\,\frac{-\ X}{R^2 + X^2}$$

La parte real se llama *CONDUCTANCIA*:

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2 + X^2}} \qquad (204)$$

La parte imaginaria se llama *SUSCEPTANCIA*:

$$\boxed{B = \frac{-\ X}{R^2 + X^2}} \qquad (205)$$