UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA

INTEGRAL DE LÍNEA EN EL CAMPO COMPLEJO

CARRERA: Ingeniería Electromecánica

ASIGNATURA: Matemática para Ingeniería Electromecánica

DOCENTES:

- Ing. Norberto Claudio MAGGI
- Ing. Horacio Raúl DUARTE

INTEGRAL DE LÍNEA EN EL CAMPO COMPLEJO

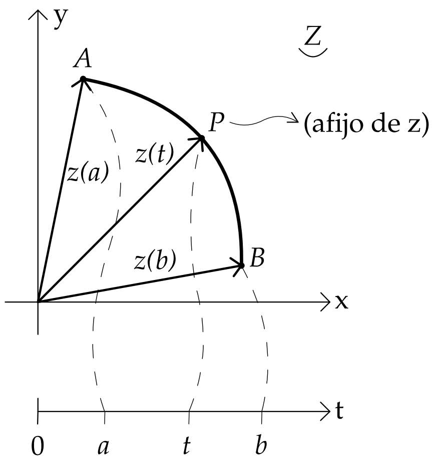
CONCEPTOS PREVIOS.

CURVA EN EL CAMPO COMPLEJO

Definición: se denomina *curva en el campo complejo* al conjunto de puntos del mismo tales que verifican la siguiente expresión:

$\boxed{z = z(t) = x(t) + iy(t)}$ $\quad \forall t / a \leq t \leq b;\ t \in R$ Ecuación vectorial de la curva.

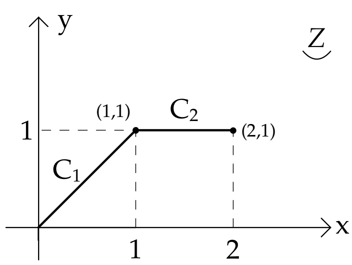
Representación gráfica:



si $t = a;\ z = z(a) \rightarrow$ el afijo es A
si $t = b;\ z = z(b) \rightarrow$ el afijo es B

Ejemplos:

$$z = z(t) = \begin{cases} t + it \text{ para } 0 \leq t \leq 1 \rightarrow \text{Curva 1} \\ t + i \text{ para } 1 \leq t \leq 2 \rightarrow \text{Curva 2} \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} z(0) = 0 \\ z(1) = 1 + i \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Recta que va} \\ \text{desde } (0,0) \text{ a } (1,1) \end{array}\right\} \text{Curva 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} z(1) = 1 + i \\ z(2) = 2 + i \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{Recta que va} \\ \text{desde } (1,1) \text{ a } (2,1) \end{array}\right\} \text{Curva 2}$$

Continuidad.

$$z(t) \text{ es continua en el } [a,b] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \text{ son continuas } \forall t \in [a,b]$$

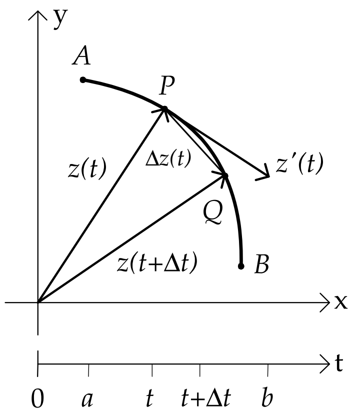
Esta relación establece la condición de continuidad para las funciones $\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$ de modo que la curva definida por $z = x(t) + iy(t)$ sea continua.

Derivación:

La derivada de $z'(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$ se define como:

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

Interpretación geométrica.



Pasos para obtener la derivada.

- El incremento de la función $z(t)$ es

$\Delta z(t) = z(t+\Delta t) - z(t) = \overrightarrow{PQ}$

- Cociente incremental $\dfrac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} =$ vector de igual sentido que $\Delta z(t)$ si $\Delta t > 0$.

- Paso al límite: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = z'(t)$

Si $\Delta t \to 0 \Rightarrow t + \Delta t \to t \Rightarrow Q \to P$ por lo que las sucesivas rectas secantes a la curva en P se transforma en la recta tangente a la curva P.

Curva orientada: dada una C; la misma puede ser orientada de dos maneras: desde A hacia B ó desde B hacia A. Se conviene orientar a las curvas del plano complejo según los valores de t crecientes en el intervalo de definición.

Curva opuesta: dada una curva C orientada en un sentido, se denomina *curva opuesta* C a la misma curva pero orientada en sentido opuesto.

Curva regular: una curva definida por $z(t) = z(t) + iy(t)$, con t perteneciente al intervalo $[a,b]$, se dice *regular* en $[a,b]$ si y sólo si se cumple que:

- La derivada de $z(t)$ es continua para todo $t \in [a,b]$.
- La derivada $z'(t) \neq 0; \quad \forall \in [a,b]$.

La primera condición implica que cuando $\frac{dz(t)}{dt} = x'(t) + iy'(t)$ es continua, debe verificarse que $\begin{Bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{Bmatrix}$ son continuas en $[a,b]$. Esto es a su vez que $\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$ son continuas en $[a,b]$.

La segunda condición implica que el vector tangente a la curva en cada uno de sus puntos debe existir (no ser nulo). El módulo de dicho vector es: $|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \neq 0$

Curva simple: una curva definida por $z(t) = z(t) + iy(t)$ con $t \in [a,b]$, se dice *simple* si y sólo si siendo t_1 y t_2 puntos pertenecientes al intervalo $[a,b]$ (es decir $a < t_1 < t_2 < b$), se verifique $z(t_1) \neq z(t_2)$. Esto significa que la curva ó arco no se corta a sí mismo. Una *curva simple* se denomina *arco simple* o *arco de Jordan.*

Curva cerrada: una curva definida por $z(t) = z(t) + iy(t)$ con $t \in [a,b]$, se dice *cerrada* si se verifica que: $z(a) = z(b)$. Una *curva simple cerrada* se denomina *curva de Jordan.*

<u>Ejemplo 1:</u>

Sea la curva C definida: $z(t) = a.\cos t + i.a.\operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\left.\begin{matrix} z(0) = a \\ z(2\pi) = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \text{ es cerrada}$$

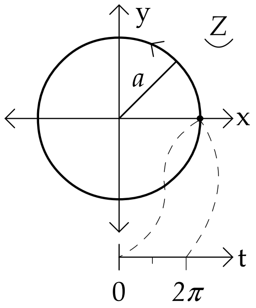
Puede probarse que es *simple*: para cualquier valor de t, interior al intervalo $[0,2\pi]$, la curva no tiene los mismos valores.

$z(t_1) \neq z(t_2) \quad \forall t_1, t_2 / 0 < t_1 < t_2 < 2\pi$

Es *regular*: $z'(t) = -a.\operatorname{sen} t + i.a.\cos t \begin{cases} x'(t) = -a.\operatorname{sen} t \\ y'(t) = a.\cos t \end{cases}$ son continuas, lo que cumple con la <u>primera condición</u>.

Luego: $|z'(t)| = \sqrt{(-a.\operatorname{sen} t)^2 + (a.\cos t)^2} = \sqrt{a^2\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right)} = a > 0$; por lo tanto $|z'(t)|$ es no nulo para todo $t \in [a,b]$, lo que cumple con la <u>segunda condición</u>.

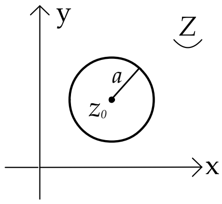
La curva es regular, cerrada y simple: es una curva de Jordan.



Circunferencia de centro $(0,0)$ y radio a, orientada según los valores de t crecientes.

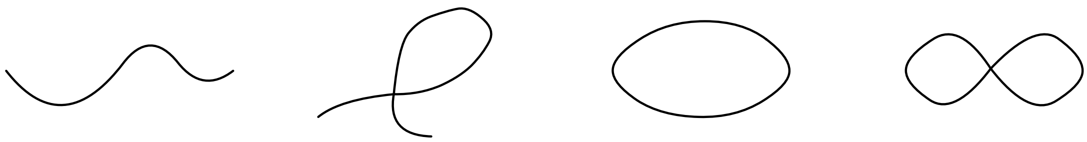
Ejemplo 2:

$z(t) = z_0 + a.\cos t + i.a.\operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$



Circunferencia de centro z_0 y radio a

Ejemplo 3:



Curva simple no cerrada | Curva no simple no cerrada | Curva simple cerrada | Curva no simple cerrada

También suelen denominarse *contorno*, o *arco regular a trozos*, a los arcos formados por un número finito de arcos regulares con extremos comunes.

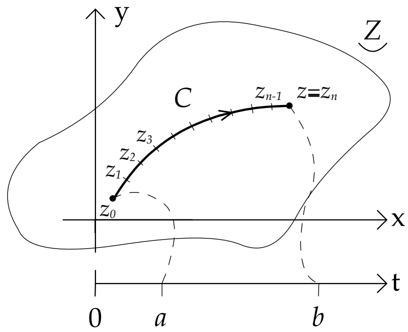
INTEGRAL DE LÍNEA EN EL CAMPO COMPLEJO

Sea $f(z) = w$ una función analítica en un dominio D incluido en el plano complejo. Sea $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ continua en el dominio D, por lo que:

$\begin{Bmatrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{Bmatrix}$ son continuas $\forall (x,y) \in D$.

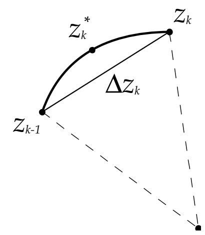
Consideremos una curva C (también llamada contorno) definida por:

$C: \ z(t) = x(t) + iy(t); \quad a \le t \le b$



Seguimos el siguiente procedimiento:

a) Dividimos la curva C en n arcos mediante la consideración de puntos sobre la misma: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$ $\qquad z(a) = z_0; \quad z(b) = z_n$



b) Designamos a cada arco así formado con Δz_k.

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; con $1 \le k \le n$.

c) En cada uno de los arcos elegimos arbitrariamente un punto que denominamos z_k^* y en él calculamos la imagen dada por $w = f(z)$,

$f(z_k^*)$, el cual existirá por ser $f(z)$ analítica $\forall z \in D$.

d) Efectuamos el producto $f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$ en cada arco.

e) Calculamos la suma de los productos anteriores para los n arcos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$$

f) Si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$; a dicho límite se lo denomina *integral de línea* de la función $f(z) = w$ sobre la curva C desde z_0 a z. La curva C es la trayectoria de integración.

En símbolos:

$$\boxed{{}_C\int_{z_0}^{z} f(z).dz = \lim_{\substack{x\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} S_n = \lim_{\substack{x\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k}$$

Integral curvilínea ó *integral de contorno* de f sobre C.

Así como en el caso de integrales de una sola variable pueden interpretarse como el valor de un área, o de un volumen en el caso de funciones de dos variables, no es posible dar una interpretación análoga geométrica o física para las integrales en el campo complejo.

Así como las integrales reales se definían sobre intervalos de la recta real, se definen integrales de funciones complejas de variable compleja sobre curvas en el plano complejo.

Si la trayectoria C es una curva cerrada, se simboliza: ${}_C\oint f(z).dz$

Cálculo mediante integrales reales.

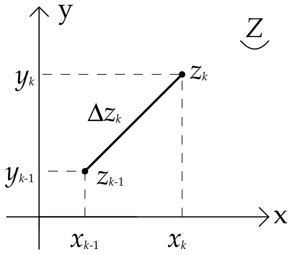
Consideremos la función $f(z)$ como una función de dos variables reales:

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Si $z = x + iy$, entonces $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$, y $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

$f(z_k^*) = u\left(x_k^*, y_k^*\right) + iv\left(x_k^*, y_k^*\right)$; y la sumatoria S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left[u\left(x_k^*, y_k^*\right) + iv\left(x_k^*, y_k^*\right)\right] \cdot \left[\Delta x_k + i\Delta y_k\right]$$



$$\begin{cases} \Delta z_k = z_k - z_{k-1} \\ \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k \end{cases}$$

Podemos expresar:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[u\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta x_k - v\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta y_k \right] + i \sum_{k=1}^{n} \left[u\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta y_k + v\left(x_k^*, y_k^*\right)\Delta x_k \right]$$

Tomando límite para $n \to \infty$; $_{máx}\left|\Delta z_k\right| \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \end{cases}$ resulta:

$$_C\int_{z_0}^{z} f(z).dz = _C\int_{z_0}^{z} (u + iv)(dx + idy)$$

Cálculo mediante integrales ordinarias de variable real.

Debe considerarse que C puede expresarse paramétricamente:

$$C:\ z(t) = x(t) + iy(t) \Rightarrow C: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \text{ con } a \le t \le b \qquad \text{(pág. 1)}$$

La integral se expresa como:

$$_C\int f(z).dz = _C\int_a^b \left\{ u\left[x(t), y(t)\right] + iv\left[x(t), y(t)\right] \right\} \cdot \left[dx(t) + idy(t)\right]$$

En forma abreviada puede expresarse:

$$_C\int_{z_0}^{z} f(z).dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] \cdot \frac{d}{dt}\left[z(t)\right] \cdot dt$$

Esquemáticamente:

$$w = f(z) \Rightarrow w \to z \begin{cases} x \to t \\ y \to t \end{cases}$$

$$dz \Rightarrow dz \to z \begin{cases} x \to t \\ y \to t \end{cases}$$

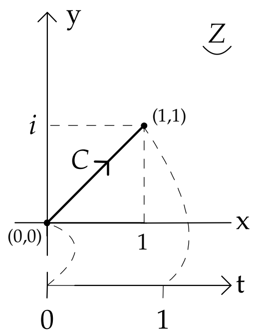
El cálculo de una integral curvilínea de una función compleja de variable compleja puede reducirse al cálculo de una integral definida de una función de una sola variable t.

<u>Ejemplo 1:</u> calcule la integral ${}_C\int f(z).dz = {}_C\int_0^{1+i} z.dz$; a lo largo de las trayectorias:

a) C: segmento de recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

b) C: definida $z(t) = t + it^2;\ \ 0 \le t \le 1$

a)



La curva C puede expresarse como: $\begin{cases} x(y) = t;\ dx = dt \\ y(t) = t;\ dy = dt \end{cases}$

$0 \le t \le 1$

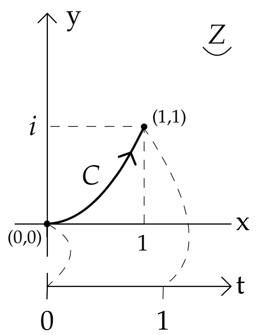
$z(t) = t + it$

$dz = dx + idy = dt + idt$

$${}_C\int_0^{1+i} z.dz = \int_0^{(1,1)} (x+iy)(dx+idy) = \int_0^1 (t+it)(dt+idt) = (1+i)\int_0^1 (t+it).dt =$$

$$= (1+i)\left[\frac{t^2}{2} + i\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = (1+i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{i}$$

b)



La curva C puede expresarse como: $\begin{cases} x(y) = t;\ dx = dt \\ y(t) = t^2;\ dy = 2t.dt \end{cases}$

$0 \le t \le 1$

$z(t) = t + it^2$

$dz = dx + idy = dt + i2t.dt$

$${}_C\int_0^{1+i} z.dz = \int_0^{(1,1)} (x+iy)(dx+idy) = \int_0^1 \left(t+it^2\right)(dt + i2t.dt) = \int_0^1 \left(t+it^2\right)(1+i2t).dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t + i2t^2 + it^2 - 2t^3\right).dt = \int_0^1 \left(t + i3t^2 - 2t^3\right).dt = \left[\frac{t^2}{2} + it^3 - \frac{2}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = \boxed{i}$$

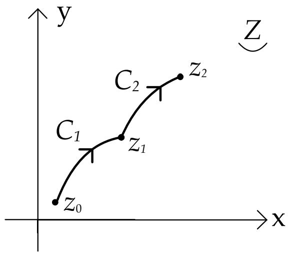
Propiedades de la integral de línea.

Propiedad de linealidad: la integral de línea de una combinación lineal de funciones es igual a la combinación lineal de las integrales en el mismo orden.

$${}_C\int_{z_0}^{z} \left[a.f_1(z) + b.f_2(z)\right].dz = a.{}_C\int_{z_0}^{z} f_1(z).dz + b.{}_C\int_{z_0}^{z} f_2(z).dz$$

Esta propiedad se demuestra sobre la misma base que se verifica para la integración en el campo real.

Propiedad aditiva respecto de la trayectoria de integración.

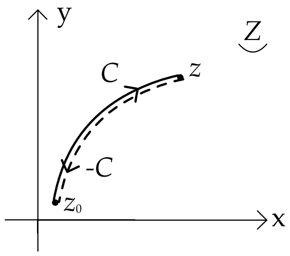


$$_C\int_{z_0}^{z_2} f(z).dz = {}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz + {}_{C_2}\int_{z_1}^{z_2} f(z).dz$$

si se verfica que: $C = C_1 + C_2$

Cambio de orientación de la trayectoria de integración.

Al cambiar el sentido de orientación de la curva o trayectoria de integración, la integral compleja cambia de signo, manteniendo el mismo valor del módulo.



$$_C\int_{z_0}^{z} f(z).dz = -{}_{-C}\int_{z}^{z_0} f(z).dz$$

Acotación del módulo de la integral.

Observación: si una función $f(z)$ es analítica a lo largo de una curva C, entonces está acotada sobre la misma.

En efecto, si $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en $C \Rightarrow \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$ son continuas para todo $z \in C$.

El módulo de $f(z)$ es: $|f(z)| = \underbrace{\sqrt{\left[u(x,y)\right]^2 + \left[v(x,y)\right]^2}}_{\text{son números reales}} \leq M;\ \begin{cases} M \in \mathbb{R} \\ M > 0 \end{cases}$

Si una función $f(z)$ es analítica sobre una curva C, y si la longitud de la curva es L, la integral curvilínea de $f(z)$ está acotada por el producto $M.L$, siendo M la cota de $f(z)$ y L la longitud de la curva C.

$$\left|{}_C\int f(z).dz\right| \leq M.L \text{ ; con} \begin{cases} |f(z)| \leq M \rightarrow \text{cota de la función} \\ L = \text{longitud de } C \end{cases}$$

Demostración:

La integral fue obtenida de una sumatoria: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k$; por lo tanto:

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*) \cdot \Delta z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|f(z_k^*) \cdot \Delta z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|f(z_k^*)\right| \cdot \left|\Delta z_k\right|$$

Si $f(z)$ es analítica $\Rightarrow \left|f(z)\right| \leq M$. $f(z)$ está acotada sobre la curva C.

En consecuencia:

Luego: $\left|S_n\right| \leq \sum_{k=1}^{n} M.\left|\Delta z_k\right| = M\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$; donde $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right| =$ longitud de la poligonal sobre la curva C.

Cuando pasamos al límite $n \to \infty$: $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right| = L$, la longitud de la curva C.

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \left|S_n\right| = \lim_{\substack{x\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left|f(z_k^*)\Delta z_k\right| = \left|\int_C f(z).dz\right| \leq M.L$$

<u>Teorema de la integral de Cauchy (Teorema de Cauchy-Goursat)</u>

Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio D del plano complejo, simplemente conexo, y C es una curva simple regular cerrada contenida en D; entonces:

$$\boxed{\oint_C f(z).dz = 0}$$

C: curva orientada en sentido positivo
R: recinto simplemente conexo encerrado por C

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en D, la integral curvilínea es:

$$\oint_C f(z).dz = \int_C u.dx - v.dy + i\int_C v.dx + u.dy$$

Por ser $f(z)$ continua en D, las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en D.

Las derivadas parciales de primer orden: $\frac{\delta u}{\delta x};\frac{\delta u}{\delta y};\frac{\delta v}{\delta x};\frac{\delta v}{\delta y}$ son continuas en D.

El Teorema de Green en el plano nos permite reescribir la integral de la siguiente manera:

$$\oint_C f(z).dz = \iint_R\left(-\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}\right).dx.dy + i\iint_R\left(\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta v}{\delta y}\right).dx.dy$$

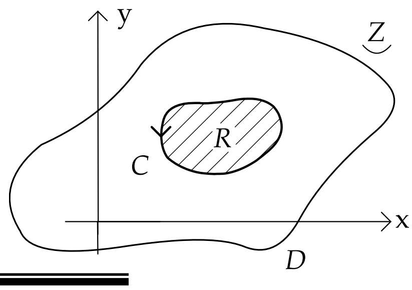
Pero, de acuerdo a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}; \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

los integrandos de estas dos integrales dobles son cero en todo R .

Si $f(z)$ es analítica y $f'(z)$ es continua en D:

$$\oint_C f(z).dz = 0$$



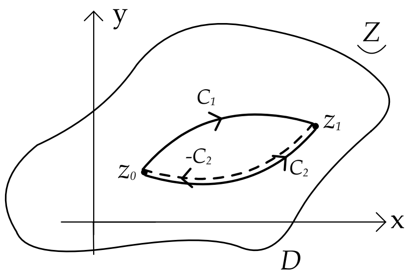
La orientación de la curva C no tiene importancia para el valor de la integral.

$${}_{C}\int f(z).dz = -{}_{-C}\int f(z).dz = 0$$

Nota: Goursat fue el primero en demostrar que la condición de continuidad de $f'(z)$ se puede omitir.

Consecuencias del teorema de la integral de Cauchy.

La integral curvilínea de $f(z)$ (analítica en el dominio D) entre dos puntos cualesquiera de un dominio simplemente conexo, es independiente de la trayectoria que une aquellos puntos.



$$\boxed{{}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz = {}_{C_2}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz}$$

Las curvas C_1 y C_2 no se intersectan, salvo en los puntos extremos z_0 y z_1. Tomemos una trayectoria cerrada y simple C, formada por C_1 y por C_2 orientadas en sentido opuesto.

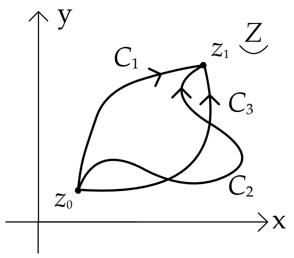
$C = C_1 + (-C_2)$, la integral a lo largo de C es:

${}_{C}\oint f(z).dz = {}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz + {}_{-C_2}\int_{z_1}^{z_0} f(z).dz = 0$, por el Teorema de Cauchy-Goursat.

$$0 = {}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz + {}_{-C_2}\int_{z_1}^{z_0} f(z).dz \Rightarrow {}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz = -{}_{-C_2}\int_{z_1}^{z_0} f(z).dz$$

pero: $-{}_{-C_2}\int_{z_1}^{z_0} f(z).dz = {}_{C_2}\int_{z_1}^{z_0} f(z).dz$; por lo que: ${}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz = {}_{C_2}\int_{z_1}^{z_0} f(z).dz$

Caso de contornos cerrados simples.



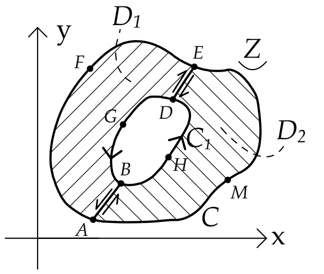
$$\left.\begin{aligned} {}_{C_3}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz &= {}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz \\ {}_{C_3}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz &= {}_{C_2}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz \end{aligned}\right\} {}_{C_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz = {}_{C_2}\int_{z_0}^{z_1} f(z).dz$$

Esto constituye el *Principio de Deformación de la Trayectoria*. La integral de línea entre dos puntos fijos de un dominio D, simplemente conexo, efectuada sobre una curva que los une no altera su valor si la curva sufre una deformación continua, manteniendo sus extremos fijos y siempre que al producirse tal deformación, la curva no contenga puntos del plano donde $f(z)$ deje de ser analítica.

<u>Generalización del Teorema de la Integral de Cauchy a dominios múltiplemente conexos</u>

Sea C una curva simple cerrada y sean C_j $(j=1,2,...,n)$ un número finito de contornos simples cerrados dentro de C, tales que las regiones interiores a cada C_j no contengan puntos en común. Sea R la región cerrada formada por todos los puntos dentro de C, salvo los puntos interiores a cada C_j. Denotaremos por Q a toda la frontera orientada de R formada por C y todos los contornos C_j, recorridos de modo que los puntos interiores queden a la izquierda de Q. Si $f(z)$ es analítica en todo R:

$$\boxed{\oint_Q f(z).dz = 0}$$



Dominio doblemente conexo D

Fronteras $\begin{cases} C \\ C_1 \end{cases}$

Al unir las fronteras con dos trayectorias $\widehat{AB}$ y $\widehat{DE}$, el dominio queda dividido en dos dominios simplemente conexos, de modo que en cada uno de ellos podemos aplicar el Teorema de la Integral de Cauchy.

D_1 y D_2 dominios simplemente conexos:

$f(z)$ analítica en D_1

$$\int_{\widehat{AME}} + \int_{\widehat{ED}} + \int_{\widehat{DHB}} + \int_{\widehat{BA}} = 0$$

$f(z)$ analítica en D_2

$$\int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BGD}} + \int_{\widehat{DE}} + \int_{\widehat{EFA}} = 0$$

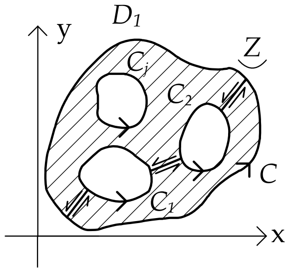
Sumando las ecuaciones anteriores miembro a miembro, observamos que las integrales de las trayectorias que unen los puntos E con D y A con B se anulan por tener sentido opuesto, con lo que nos que nos queda:

$$\underbrace{\int_{\widehat{AME}} + \int_{\widehat{EFA}}}_{\oint_C f(z).dz} + \underbrace{\int_{\widehat{DHB}} + \int_{\widehat{BGD}}}_{\oint_{-C_1} f(z).dz} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C f(z).dz - \oint_{C_1} f(z).dz = 0}$$

Teorema de la Integral de Cauchy en dominios múltiplemente conexos

Dominios n-conexos.



$$\oint_C f(z).dz - \oint_{C_1} f(z).dz - \oint_{C_2} f(z).dz = 0$$

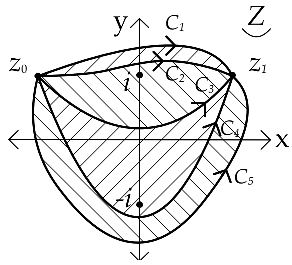
de donde se obtiene:

$$\boxed{\oint_C f(z).dz = \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{C_j} f(z).dz}$$

Generalización del Teorema de Cauchy para dominios n-conexos.

Ejemplo 1:

Calcule la integral $\int_{C\,z_0}^{z_1} \frac{dz}{z^2+1}$ a través de las trayectorias C_1; C_2; C_3; C_4 y C_5.



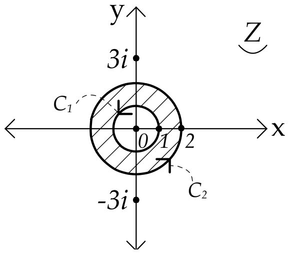
Puede afirmarse que:

$\int_{C_1} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{C_2} \frac{dz}{z^2+1}$; puesto que en el recinto R_1, $f(z)$ es analítica.

$\int_{C_4} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{C_5} \frac{dz}{z^2+1}$ por lo mismo; pero las trayectorias cerradas que encierran puntos como $z = i$ y $z = -i$, donde $f(z)$ no es analítica (por no ser continua) no permiten aplicar el Teorema de la integral de Cauchy.

Ejemplo 2:

Calcule la integral $\oint_C \frac{dz}{z^2\left(z^2+9\right)}$ en C: $1 \le |z| \le 2$



Ceros del denominador $\begin{cases} z = 0 \\ z = 3i \\ z = -3i \end{cases}$

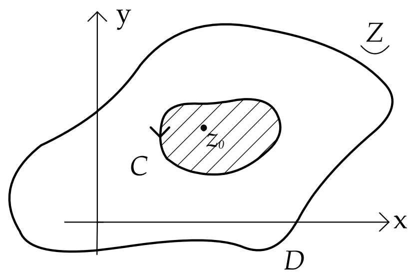
$\int_C \frac{dz}{z^2\left(z^2+9\right)} = \int_{C_2} \frac{dz}{z^2\left(z^2+9\right)} - \int_{C_1} \frac{dz}{z^2\left(z^2+9\right)} = 0$; pues el interior es analítico en todos los puntos de la corona con frontera.

$B = C_2 + C_1$

Fórmula de la Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D, y C una curva enteramente contenida en D, con orientación positiva. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces se verifica:

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz}$$



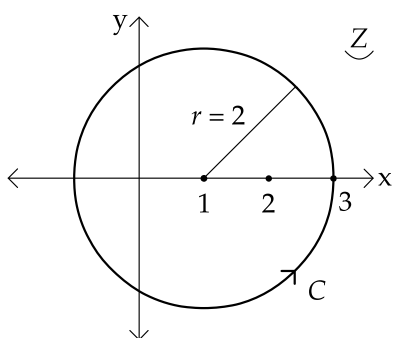
Esta fórmula nos dice que si se cumplen las condiciones anteriores, los valores de la función $f(z)$ en puntos interiores a C quedan completamente determinados por los valores $f(z)$ en la curva C. Al escribir la fórmula anterior de la forma:

$$\boxed{\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz=2\pi i\cdot f(z_0)}$$

puede usarse para calcular el valor de ciertas integrales sobre contornos (curvas simples cerradas).

Ejemplo 1:

Calcule $\oint_C\frac{e^z}{z-1}\cdot dz$ siendo $C:\ |z-1|=2$



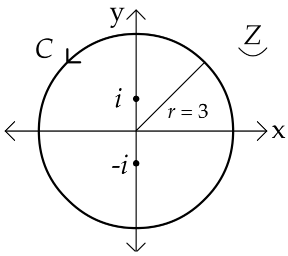
Si hacemos $f(z)=e^z\to$ analítica $\forall z\to$ analítica en C y su interior, la integral resulta:

$$\oint_C\frac{e^z}{z-1}\cdot dz=2\pi i\left[e^z\right]_{z=1}=\boxed{2\pi ei}$$

Ejemplo 2:

Calcule $\oint_C\frac{e^z}{z+1}\cdot dz$ siendo $C:\ |z|=3$

$z^2+1=(z+i)(z-i)$



(1) Se hace $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+i)} \rightarrow_C \oint \dfrac{e^z/(z+i)}{(z-i)}\cdot dz$;

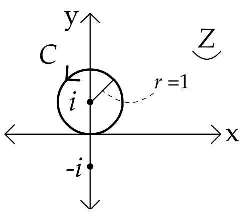
la función no es analítica en el interior de C, no puede usarse la fórmula de Cauchy.

(2) Se hace $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-i)} \rightarrow_C \oint \dfrac{e^z/(z-i)}{(z+i)}\cdot dz$;

la función tampoco es analítica en el interior de C.

No puede utilizarse la fórmula de Cauchy en ninguno de los dos casos.

<u>Ejemplo 3:</u>



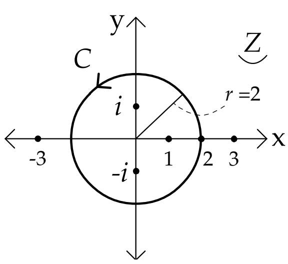
Si cambio el contorno de integración a C: $|z-i|=1$,

puede hacerse $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+i)}$ y

$z_0=i \rightarrow f(z)$ es ahora analítica en el interior de C

$$_C\oint \frac{e^z/(z+i)}{(z-i)}\cdot dz = 2\pi i\left[\frac{e^z}{z+i}\right]_{z=i} = 2\pi i\frac{e^i}{2i} = \boxed{\pi e^i}$$

<u>Ejemplo 4:</u>



Calcule $_C\oint \dfrac{z.dz}{(z^2-9)(z+i)}$ en C: $|z|=2$

La función integrando no es analítica en

$z=3;\ z=-3;\ z=-i$

Haciendo $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-9)}$ y $z_0=-i \rightarrow$ esta $f(z)$ es

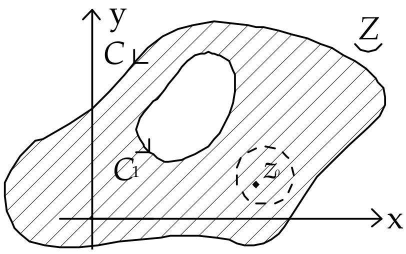
analítica en el interior de C.

$$_C\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)}\cdot dz = _C\oint \frac{z/(z^2-9)}{(z+i)}\cdot dz = 2\pi i\left[\frac{z}{z^2-9}\right]_{z=-i} = 2\pi i\cdot\frac{i}{10} = \boxed{-\frac{\pi}{5}}$$

<u>Fórmula de la integral de Cauchy extendida a dominios múltiplemente conexos</u>.

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D doblemente conexo y z_0 un punto interior del mismo. Sean, además, C y C_1 las fronteras de dicho dominio. Se verifica entonces:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot_C\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \frac{1}{2\pi i}\ _{C_1}\oint \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz$$



Consideremos una curva simple cerrada C_0 que encierra a z_0 y que no intercepte a las curvas C y C_1. De esta manera, la función $\frac{f(z)}{z-z_0}$ es analítica en el nuevo dominio triconexo de fronteras C, C_1 y C_0; por lo que podemos aplicar la generalización del Teorema de Cauchy a dominios n-conexos.

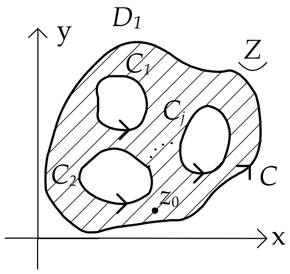
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz = 0$$

Pero este último término: $\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz = 2\pi i.f(z_0)$; de modo que:

$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz = 2\pi i.f(z_0)$; ordenando concluimos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \right]$$

Para dominios n-conexos:



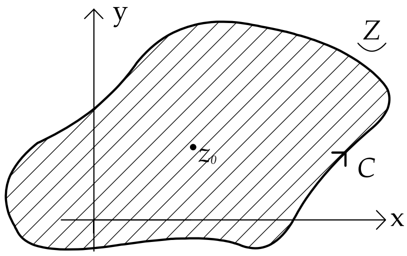
$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz - \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} \frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz\right]}$$

Derivadas de funciones analíticas.

Puede demostrarse que si una función es analítica en un punto z_0, sus derivadas de todos los órdenes existen, y son analíticas en dicho punto.

Propiedad fundamental.

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D. Admite por lo tanto derivadas de todos los órdenes en D, que son a su vez funciones analíticas en dicho dominio. El valor de dichas derivadas puede calcularse con la siguiente expresión:



$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \cdot dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} \cdot dz$$

………………………………….. generalizando

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot dz\,; \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Bibliografía

1. CHURCHILL, R., BROWN, J. **Variable compleja y aplicaciones**. 7º Edic. Mc Graw-Hill. 2004.
2. KREYZSIG, E. **Matemáticas avanzadas para ingeniería**. Limusa-Wesley. 1967.
3. SPIEGEL, M. **Variable compleja**. Mc Graw-Hill. 1991.